Números racionales

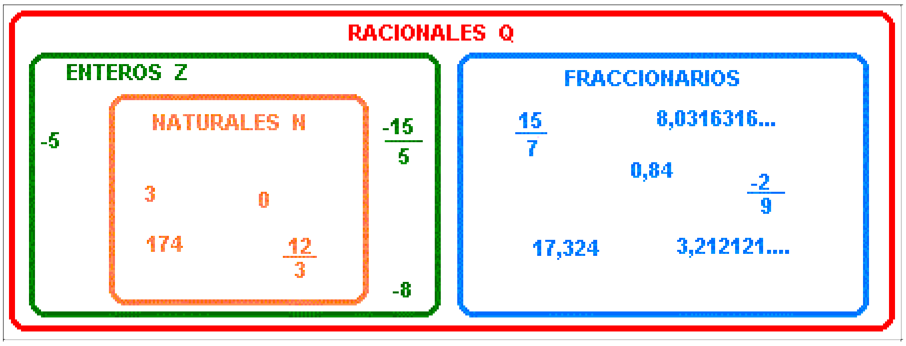
Definición

Número racional es todo valor que puede ser expresado mediante una fracción. Todas las fracciones equivalentes entre sí expresan el mismo número racional.
Es decir, todo número que se pueda poner en forma de fracción se dice que es un número racional.

Ejemplos

- -3 es un número entero y racional **porque se puede poner en forma de fracción así:** $\frac{-3}{1}$
- $\frac{2}{5}$ es un número racional **porque ya está expresado en forma de fracción.**
- $\frac{12}{4}$ es un número racional puesto que está expresado en forma de fracción, y además como la división es exacta y da 3, también es un número natural o entero positivo.
- 0,12121212.... es un número racional **porque se puede poner en forma de fracción así:** $\frac{12}{99}$

Podemos clasificar los **números racionales** de la siguiente forma:

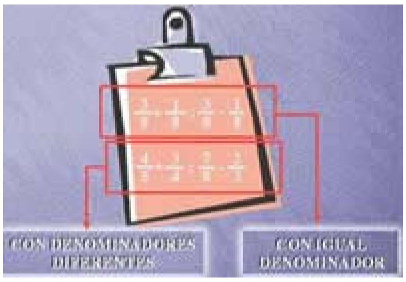


Para saber más:

Egipto y las fracciones.
¿Sabías que las fracciones ya eran utilizadas por los egipcios? Visita esta página para conocer la historia:
http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/fracciones.htm

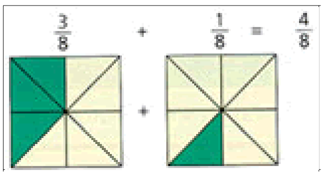
Suma y resta de fracciones

Al sumar y restar fracciones podemos encontrarnos con dos situaciones diferentes. Que las fracciones posean igual denominador o que tengan denominadores diferentes.



Denominador común

Para sumar fracciones con el mismo denominador mantenemos el denominador común y sumamos o restamos los numeradores.



Ejemplos

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{11}{9}-\frac{7}{9}=\frac{11-7}{9}=\frac{4}{9}$$

Denominadores distintos

En este caso primero tenemos que buscar fracciones equivalentes a las dadas con igual denominador, para ello calculamos el **mínimo común múltiplo (m.c.m).** de los denominadores y una vez obtenidas las fracciones equivalentes operamos como en el caso anterior.

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{4} = \frac{16}{20} + \frac{15}{20}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21}{24} - \frac{16}{24}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{9} + \frac{7}{6} = \frac{2 \cdot 2}{18} + \frac{7 \cdot 3}{18} = \frac{4}{18} + \frac{21}{18} = \frac{25}{18}$$

Observa que el m.c.m (9,6) = 18

$$\frac{5}{4} - \frac{25}{12} + \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 15}{60} - \frac{25 \cdot 5}{60} + \frac{7 \cdot 6}{60} = \frac{75}{60} - \frac{125}{60} + \frac{42}{60} = \frac{-8}{60} = -\frac{2}{15}$$

Observa que el m.c.m.(4,12,10) = 60

Para saber más:

1. Sumas y restas de fracciones.

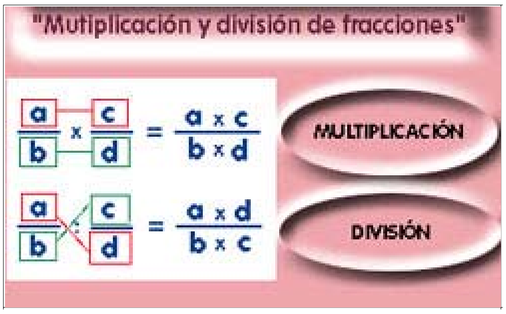
En esta página podrás encontrar más ejemplos y ejercicios de sumas y restas de fracciones
http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA12/SumaRestafracciones.htm
[versión en caché]

2. Sumas y restas de fracciones.

Visita esta página interactiva donde puedes comprobar las operaciones de sumas y restas entre fracciones:
http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_2.htm

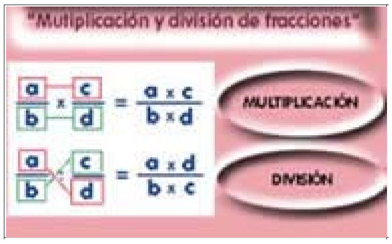
Multiplicación y división de fracciones

Dos de las operaciones más comunes con fracciones son la multiplicación y la división. A continuación te mostramos cómo realizarlas.



Números racionales

Multiplicación de fracciones



Seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Se multiplican todos los numeradores y el resultado se pone como numerador.

Paso 2: Posteriormente multiplicamos todos los denominadores y el resultado se pone como denominador.

$$\frac{3}{2} x \frac{2}{5} x \frac{4}{6} = \frac{3 x 2 x 4}{2 x 5 x 6} = \frac{24}{60}$$

¡Es muy simple, sólo tienes que multiplicar en línea recta!

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

Para saber más:

1. Multiplicaciones y divisiones de fracciones.
En esta página podrás encontrar más ejemplos y ejercicios de multiplicaciones y divisiones de

fracciones.
http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA13/MultiDivfracciones.html [versión en caché]
2. Egipto y las fracciones.
Conoce un poco más las operaciones con fracciones que realizaban en el antiguo Egipto:
http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/aritmetica_fracciones.htm

Elemento inverso

Definición:
Un número es inverso de otro si su multiplicación es 1.

Ejemplos:

- El inverso de 7 es $\frac{1}{7}$, en efecto $7 \cdot \frac{1}{7} = \frac{7 \cdot 1}{7} = \frac{7}{7} = 1$
- El inverso de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$, en efecto $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

División de fracciones

Para dividir dos fracciones, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Se multiplican el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y el resultado se pone como numerador.

Paso 2: A continuación se multiplica el denominador de la primera por el numerador de la segunda y el resultado se pone como denominador.

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{5} = \frac{4 \times 5}{3 \times 2} = \frac{20}{6}$$

¡Sólo tienes que multiplicar en cruz!

Ejemplos: $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{7} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

$\frac{4}{5} : \frac{7}{9} = \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 7} = \frac{36}{35}$

Números racionales

Potencias

Para elevar una fracción a una potencia de exponente natural elevamos el numerador y denominador a dicho exponente:

Ejemplo: $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$

En el caso de un exponente entero negativo, veremos que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Esta expresión se deduce de las siguientes propiedades:

- Por un lado sabemos que:

  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

  Por tanto en el caso siguiente:

$$\frac{2^3}{2^7} = 2^{3-7} = 2^{-4}$$

Por otro lado sabemos que: $\frac{2^3}{2^7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^4}$

Luego de las expresiones 1) y 2) se deduce que:

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

De esta expresión se deduce esta otra más general, para calcular la potencia entera de una fracción:

En general: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

*Recordamos las **propiedades de las potencias**:*

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Ejemplos:

$$\left(\frac{7}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^6$$

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}\right]^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} = 5^6$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 : \left(\frac{4}{5}\right)^7 = \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^0 = \frac{5^0}{4^0} = \frac{1}{1} = 1$$

Números racionales

Operaciones combinadas

Para realizar operaciones con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, debemos realizarlas en el siguiente orden:

1. Efectuar las operaciones que hay en el interior de los paréntesis.
2. Realizar las multiplicaciones, las divisiones y simplificar si es posible los resultados intermedios.
3. Realizar las sumas, restas y simplificar el resultado obtenido, si es posible.

Ejemplos:

$$\left(\frac{4}{3}+2\right):\frac{1}{6}+3=\left(\frac{4}{3}+\frac{6}{3}\right):\frac{1}{6}+3=\frac{10}{3}:\frac{1}{6}+3=\frac{10}{3}\cdot 6+3=\frac{60}{3}+3=20+3=23$$

$$\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{3}\right)=\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{6}\right)=\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{6}\right)\cdot\frac{9}{6}=\left(\frac{15}{6}-\frac{7}{6}\right)\cdot\frac{3}{2}=$$

Disponemos de tres grifos para llenar un depósito. El primero lo llena en 3 horas, el segundo en 4 horas y el tercero, en 6 horas. Si se abren los tres a la vez, ¿cuánto tardarán en llenar el depósito?

$$=\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{24}{12}=2$$

El primer grifo en 1 hora llena $\frac{1}{3}$ de depósito

El segundo grifo en una hora llena $\frac{1}{4}$ de depósito

El tercer grifo en 1 hora llena $\frac{1}{6}$ de depósito

Los tres juntos en una hora llenan $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$ de deposito.

Por tanto tardan en llenarlo $\frac{4}{3}$ horas =1 hora y 20 minutos

Se siembra un huerto con patatas, puerros y zanahorias. Las patatas ocupan la cuarta parte, los puerros los dos quintos y las zanahorias en resto. ¿Cuánto ocupan las zanahorias?

Parte sembrada de patatas: $\frac{1}{4}$ del huerto

Parte sembrada de puerros: $\frac{2}{5}$ del huerto

Total sembrado por patatas y puerros: $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{13}{20}$

Lo que queda por sembrar es $1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$, que se siembran de zanahorias.

Números racionales

Expresión decimal de una fracción

Para pasar de fracción a decimal sólo hay que efectuar la división del numerador entre el denominador. La puedes hacer con una calculadora pero, ¡ten cuidado!, pues las calculadoras aproximan los datos al no dar más de 10 cifras.

Nos podremos encontrar con los siguientes resultados al hacer la división:

- **Número entero**

Ejemplo: $\frac{27}{9} = 3$.

Ocurre cuando el numerador es múltiplo del denominador y la división nos da de resto 0.

- **Decimal exacto**

Ejemplo: $\frac{197}{40} = 4{,}925$.

Ocurre cuando multiplicando el numerador por alguna potencia de 10 el número resultante es múltiplo del denominador, o cuando después de obtener un número finito de cifras decimales el resto es 0.

- **Decimal periódico puro**

Ejemplo: $\frac{4}{11} = 0{,}3636363636\ldots$

Las cifras decimales forman un grupo llamado periodo que se repite indefinidamente. Se escribe $0{,}\overline{36}$

- **Decimal periódico mixto**

Ejemplo: $\frac{87}{66} = 1{,}318181818\ldots$

Existe un primer grupo de cifras decimales que no se repiten de forma periódica, pero a partir de una de ellas se forma un periodo como en el caso anterior que se repite indefinidamente. Se escribe $1{,}359\overline{18}$

Autoevaluación

Para saber más:

Números Racionales.
Conoce esta introducción a los números racionales. En la última página encontrarás ejercicios de autoevaluación.
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/AportesPe/Teoria/Racionales/Mod1/Intro.html

Ejercicio para el foro
Intenta escribir como fracción 1,9999... que ocurre. Discútelo en el foro con tus compañeros.

Para profundizar sobre este tema, haz clic en este enlace: para saber más.