

Proporcionalidad

En la introducción del tema planteábamos la siguiente situación de proporcionalidad:

La **proporción** de agua requerida para la preparación de un zumo a partir de un concentrado está especificada en las instrucciones de preparación del producto.

Por ejemplo: "Para preparar este zumo tendrás que verter 2 vasos de agua por cada vaso de zumo concentrado"



	Situación 1	Situación 2	Situación 3
Agua	2 vasos	4 vasos	6 vasos
Zumo concentrado	1 vaso	2 vasos	3 vasos

Si calculamos el cociente entre ambas cantidades, obtenemos fracciones equivalentes:

$$\frac{\text{n}^\circ \text{ vasos de Concentrado}}{\text{n}^\circ \text{ vasos de Agua}} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

De estas fracciones, su expresión irreducible $\frac{1}{2}$, representa la **proporción** entre ambos elementos.

Hay magnitudes que son proporcionales y otras que no. Por **ejemplo**:

- La cantidad de metros de cable que compramos y el coste del mismo. Si compramos el doble de metros nos cuesta el doble. Los metros y el coste son magnitudes proporcionales.
- El lado de un cuadrado y su área, si el lado vale 2 el área es 4 pero si triplicamos el lado a 6 el área no se triplica, ya que es 36 y no 12. El lado y el área no son magnitudes proporcionales.

► **Para saber más:**

1. Concepto de proporcionalidad

En esta página se parte de un antecedente histórico que justifica la importancia que ha tenido siempre el concepto de proporcionalidad. Desde las civilizaciones antiguas hasta la actualidad, este concepto es utilizado en la vida diaria de todos nosotros. Lee y practica.

<http://www.rena.edu.ve/TerderaEtapa/Matematica/TEMA16/Proporciones.html>

2. La proporción en Egipto

Adéntrate en Egipto para conocer la utilización que hacían de las proporciones y cómo establecían los repartos.

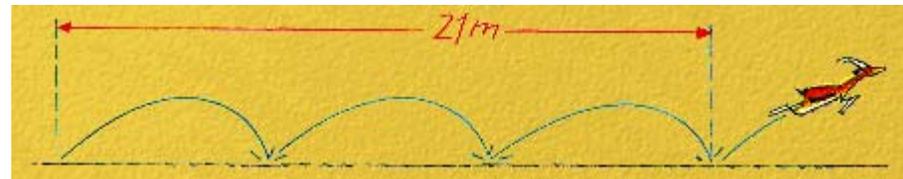
<http://www.personal.us.es/cmaza/egipto/proporcion.htm>

Área de Matemáticas - Módulo III

Proporción y porcentajes

Magnitudes proporcionales

Observa el dibujo:



Si en tres saltos avanza 21 metros, en cinco saltos avanzará más; luego el movimiento con la distancia son magnitudes directamente proporcionales.

Si la velocidad de mi moto es 20 kilómetros por hora y tardo 30 minutos en llegar al pueblo, si voy en coche a 60 kilómetros hora, tardo mucho menos. Por lo tanto, las magnitudes de tiempo y velocidad son magnitudes inversamente proporcionales.

Como has podido observar en el ejemplo anterior, dos magnitudes pueden ser **directamente proporcionales** o **inversamente proporcionales**.

Directamente Proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una, la otra también aumenta y al disminuir una, la otra también disminuye.

Inversamente Proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una, disminuye la otra; y si al disminuir una, aumenta la otra.

► **Para saber más:**

1. Una de dinosaurios

En 1976, R. McNeill Alexander, de la Universidad de Leeds, en Inglaterra, hizo pública una proporción matemática entre la longitud de una zancada y la longitud de su extremidad correspondiente, válida para todos los vertebrados. Conoce algo más sobre los dinosaurios.

http://www.librosvivos.net/detalle_not.asp?idud=1392&id_noticia=1291&id_libro=1048&id_marca=2&est=2,0,2

2. Magnitudes proporcionales

Esta unidad didáctica está pensada para introducir los conceptos de magnitudes proporcionales tanto directa como inversamente. Partiendo de problemas y ejercicios se llega a la obtención de los conceptos mencionados, así como de procedimientos para utilizar en situaciones similares. La unidad abarca ampliamente todo el contenido de este tema.

http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Funciones_funcion_de_proporcionalidad/index.htm

Proporción y porcentajes

Magnitudes directamente proporcionales

Hay magnitudes que están relacionadas de tal forma que al **aumentar una de ellas, la otra aumenta**. Por ejemplo, si compramos naranjas, cuanto mayor sea la cantidad que compremos, mayor es el dinero que pagamos.

Pero esta relación entre ambas magnitudes también es muy especial, si compramos el doble, pagamos el doble, si compramos el triple, pagamos el triple. Cuando se cumple esta relación, diremos que las dos magnitudes son **directamente proporcionales**.



El otro día compre 2 kilos de naranjas en la frutería de la esquina. Me costaron 5€. ¿Cuánto me constarán según los kilos que compre? Escribimos

los resultados en la tabla siguiente:

Kilos	1	2	3	4	5	6	7	8
Precio	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20

Si te fijas los cocientes entre los kilos y el precio a pagar se mantiene constante y es $\frac{2}{5}$.

Definición:

Dos magnitudes son directamente proporcionales si se conservan los cocientes. Al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción.

1. Un coche tarda 4 horas en recorrer 360 Km. **Si mantiene esa velocidad**, ¿cuánto recorrerá en 5 horas?



Como nos dicen que mantiene esa velocidad, sabemos que será una proporción. Al aumentar el tiempo aumenta el recorrido, por tanto son magnitudes directamente proporcionales:

Vamos a resolver esta proporción: $\frac{4}{360} = \frac{5}{x}$

Como son equivalentes, se tiene que cumplir: $4 \cdot x = 360 \cdot 5$

O lo que es lo mismo: $4 \cdot x = 1800$

$$x = \frac{1800}{4} = 450$$

Por tanto, habrá de ser: 450 km.

Lo anterior es equivalente a usar una REGLA DE TRES DIRECTA:

Tiempo Espacio (km)

4 360

$$5 \times \text{Luego } x = \frac{5 \times 360}{4} = 450 \text{ km}$$

2. Si una botella de gaseosa cuesta 0,45€, ¿cuánto cuesta una caja que contiene 12 botellas?

Como el precio se mantiene siempre constante, existirá una proporción como la siguiente:

$$\frac{1}{0,45} = \frac{12}{x}$$

Por tanto,  €

Aplicando la REGLA DE TRES DIRECTA:

Botellas Precio

1 0.45€

$$12 \times \text{€ Luego } x = \frac{12 \times 0,45}{1} = 5,40\text{€}$$

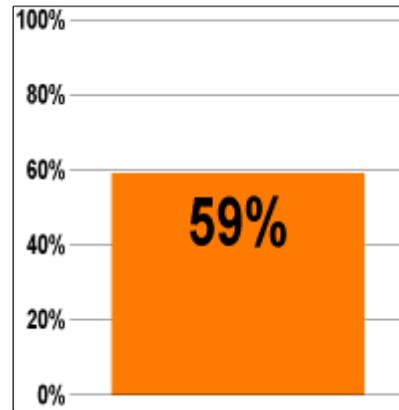
Área de Matemáticas - Módulo III

Proporción y porcentajes

Porcentajes

Un caso particular de **proporción directa** es el porcentaje. Es una proporción en la que el **denominador** es **100**, y se escribe seguido del símbolo **%**.

Así decimos: Un porcentaje de 59%, que quiere decir una proporción de $\frac{59}{100}$



Ejemplos: "El 80% de los españoles no llega a final de mes". ¿De cuántas personas estamos hablando? Si suponemos que en España hay 40 millones de personas.

Por tanto, $\frac{80}{100} = \frac{x}{40000000} \Rightarrow x = \frac{80 \cdot 40000000}{100} = 32000000$ personas

Mediante una regla de 3 directa:

<u>Nº de personas</u>	<u>porcentaje(%)</u>	
40.000.000	100%	
x	80%	Luego $x = \frac{40000000 \times 80}{100} = 32.000.000$

Forma rápida de hacerlo: Conocido el tanto por ciento "p" y el total "y" el tanto por ciento será $y \cdot \frac{p}{100}$

El precio de la gasolina ha subido un 3%. Si el precio era de 0,91 € el litro ¿Cuánto ha subido? ¿Cuál será el precio después de la subida?

Vamos a contestar a cada una de estas preguntas:

$$0,91 \cdot \frac{3}{100} = 0,0273 \quad \text{€}$$

¿Cuánto ha subido? Un 3%, lo calculamos;

¿Cuál es su precio después de la subida?

.

$$\text{Precio después de la subida} = \text{Precio antes de la subida} + \text{el incremento del 3\%} = 0,91 + 0,0273 = 0,9373 \quad \text{€}$$

He comprado una nevera y me han rebajado el 15%. Si la nevera costaba 324€, ¿cuánto me han rebajado?, ¿cuánto me ha costado?

Vamos a contestar a cada una de estas preguntas:

$$324 \cdot \frac{15}{100} = 48,6 \quad \text{€}$$

¿Cuánto me han rebajado?

¿Cuánto me ha costado después de la rebaja?

.

$$\text{Precio después de la rebaja} = \text{Precio antes de la rebaja} - \text{el descuento del 15\%} = 324 - 48,6 = 275,4 \quad \text{€}$$

El precio de un artículo con 16% de IVA es de 238,96, ¿cuánto vale sin IVA?

Un aumento del 16 % quiere decir que todo lo que vale 100 pasa a valer 116.

$$\frac{100}{116} = \frac{x}{238,96} \Rightarrow x = \frac{238,96 \cdot 100}{116} = 206 \quad \text{€}$$

Por tanto

Si en un instituto hay 90 profesores, de los cuales 63 son mujeres ¿qué tanto por ciento de mujeres hay?

La proporción entre mujeres y profesores es .

$$\frac{63}{90} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{63 \cdot 100}{90} = 70$$

Por tanto, 70 %

Mediante una regla de 3 directa:

Profesores Porcentaje (%)

90 100

$$\frac{63 \cdot 100}{90} = 70\%$$

63 x Luego x=

$$\frac{x}{y} \cdot 100$$

Forma rápida de hacerlo: Conociendo la parte "x" y el total "y" el tanto por ciento será: $\frac{x}{y} \cdot 100$ %

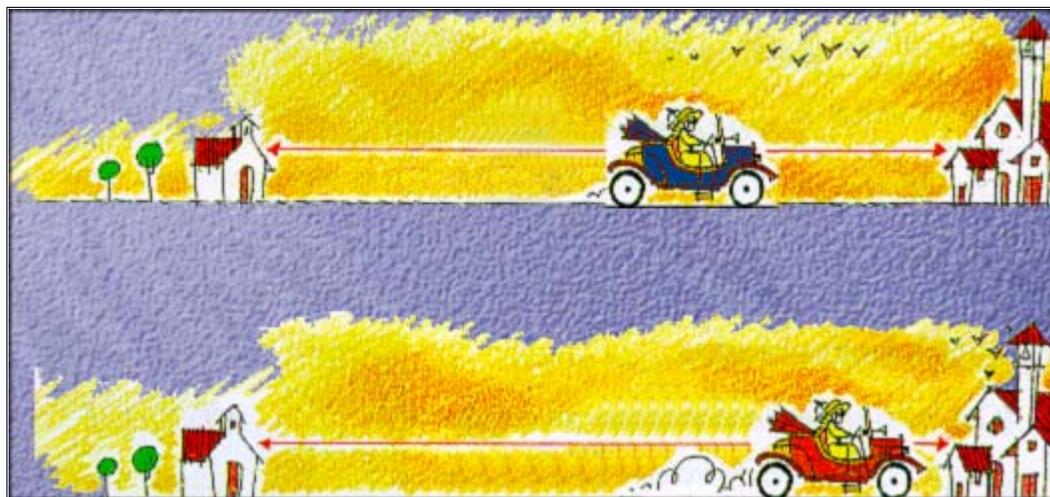
► Para saber más:

Origen del símbolo %: ¿De dónde surgió el símbolo que actualmente utilizamos para escribir un porcentaje?

http://www.librosvivos.net/detalle_not.asp?idud=1392&id_noticia=1292&id_libro=1048&id_marca=2&est=2,0,2

Magnitudes inversamente proporcionales

Hay magnitudes que están relacionadas de tal forma que al **aumentar una de ellas, la otra disminuye**. Por ejemplo, si viajamos en coche, cuanto mayor sea su velocidad (coche rojo), menor es el tiempo que tardamos en hacer un recorrido determinado.

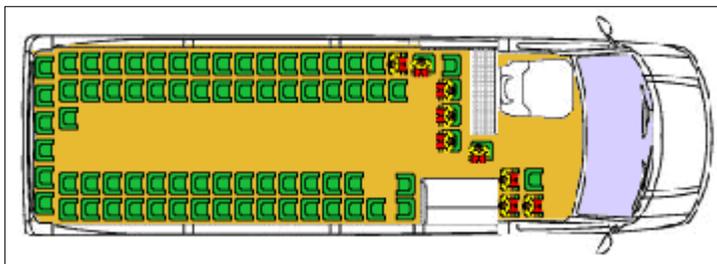


Pero esta relación entre ambas magnitudes también es muy especial, si la velocidad del vehículo aumenta el doble, el tiempo que tarda disminuye a la mitad, si aumenta el triple, el tiempo disminuye a la tercera parte. Cuando se cumple esta relación, diremos que las dos magnitudes son **inversamente proporcionales**.

Ejemplo:

Se quiere organizar una excursión en primavera. Se contrata un autobús con conductor que dispone de 80 plazas y cuesta 360 €. ¿Cuánto hay que pagar?

El precio a pagar dependerá del número de plazas que se cubran.



Escribimos los resultados en la tabla siguiente:



Si te fijas los productos del número de plazas cubiertas por el precio a pagar por cada alumno se mantiene constante y es 360

Definición:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si se conservan los productos. Al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción.

Ejemplos:

Cuando se llevaba la mitad del escrutinio de las quinielas del domingo, la radio informó que habían aparecido 6 acertantes de 14 resultados que cobrarían 108.000 € cada uno. Al terminar el escrutinio, los acertantes fueron 9. ¿Cuánto cobrará entonces cada uno de ellos?

Como a más acertantes, menos cobraría cada uno, las magnitudes son inversamente proporcionales, por tanto, su producto tendrá que conservarse:

$$6 \times 10800 = 9 \cdot x$$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{6 \times 108000}{9} = 72.000 \text{ €}$$

Si 4 albañiles hacen una obra en 10 días, ¿cuánto tardarán en hacer esa obra 5 albañiles, trabajando al mismo ritmo?

Como a más albañiles trabajando, menos tiempo tardan en acabar la obra, estas magnitudes son inversamente proporcionales, por tanto, su producto se conserva:

$$4 \times 10 = 5 \cdot x$$

$$\text{Por tanto: } x = \frac{4 \times 10}{5} = 8 \text{ días}$$

▶ **Para saber más:**

<http://www.uco.es/~ma1marea/alumnos/primaria/propor/usuario.html>

Entra como invitado en esta página y haz clic en el vínculo denominado Magnitudes proporcionales, allí podrás ver sencillos ejemplos de estas magnitudes.

Área de Matemáticas - Módulo III

Proporción y porcentajes

Interés Simple

Imagina que depositas en un banco 600€ al 2,5% de interés durante 5 años, ¿cuánto dinero tendrás de al final de ese período?

IMAGEN:

La fórmula de lo que te pagará el banco como ganancia en un período de tiempo t a un interés anual i , llamado también rédito (r) o tanto por ciento (%), para un capital depositado c , es:

$$ganancia = \frac{c \times i \times t}{100} \quad \text{puede usarse también} \quad ganancia = \frac{c \times r \times t}{100}$$

En nuestro ejemplo quedará:

$$Ganancia = \frac{600 \cdot 2,5 \cdot 5}{100} = 75€.$$

Por tanto, al final de dicho período tendrías $600€ + 75€ = 675 €$

Ejemplos:

¿Durante cuanto tiempo hay que depositar un capital de 500 € al 3% para ganar 90€?

$$ganancia = \frac{c \times i \times t}{100}$$

sustituimos los valores y obtenemos

$$90 = \frac{500 \cdot 3 \cdot t}{100} \Rightarrow 90 \cdot 100 = 500 \cdot 3 \cdot t \Rightarrow 9000 = 1500 \cdot t \Rightarrow t = \frac{9000}{1500} = 6 \text{ años}$$

¿A que interés se duplicará un capital durante 10 años?

Si ponemos 1000 € de capital, y se duplica en 10 años, entonces tendrías 2000€. Por tanto, tu ganancia habría sido de: 1000€. Calculamos ahora el interés:



sustituimos los valores y obtenemos

$$1000 = \frac{1000 \cdot i \cdot 10}{100} \Rightarrow 1000 \cdot 100 = 1000 \cdot i \cdot 10 \Rightarrow 100000 = 10000 \cdot i \Rightarrow$$

$$i = \frac{100000}{10000} = 10\%$$

Un capital de 5000 € se pone al 4,5 % durante tres meses. ¿Qué ganancia obtendrás?

En este caso el tiempo te lo dan medido en meses. Pero ya sabemos que de año a meses, habrá que dividir por 12 meses que tiene 1 año.

4,5% significa que 100 € en un año te dan 4,5 €.

Entonces, en un mes te darán $\frac{4,5}{12}$ €

$$\text{ganancia} = \frac{5000 \cdot \frac{4,5}{12} \cdot 3}{100} = \frac{5000 \cdot 4,5 \cdot 3}{12 \cdot 100} = 56,25 \text{ €}$$

Un capital de 100.000 € se pone al 4 % durante 18 días. ¿Qué ganancia se obtiene?

En este caso el tiempo te lo dan medido en días. Los días comerciales se consideran 360 al año. Luego, en este caso, habrá que dividir por 360.

Un interés de un 4% significa que por cada 100 €, te dan 4 € en un año.

Por tanto, en un día te darán un interés del $\frac{4}{360}$

$$\text{ganancia} = \frac{100000 \cdot \frac{4}{360} \cdot 18}{100} = \frac{100000 \cdot 4 \cdot 18}{360 \cdot 100} = 200 \text{ €}$$

Área de Matemáticas - Módulo III

Proporción y porcentajes

Repartos directamente proporcionales

Supongamos que en la elaboración de cierto trabajo han colaborado tres personas, que han invertido, respectivamente, 6, 4 y 12 horas. El beneficio obtenido por el trabajo fue de 1000 € y el problema consiste en repartir de forma justa la ganancia. Lógico parece pagar el doble al que ha trabajado el doble, el triple al que ha trabajado el triple.

El **beneficio** de cada colaborador debe ser proporcional a **tiempo** trabajado, es decir el cociente $\frac{\text{beneficio}}{\text{tiempo}}$ tiene que ser igual para todos. A este tipo de reparto se le denomina **Reparto Proporcional**.

Si llamamos "a", "b" y "c" a los beneficios correspondientes a los tiempos invertidos por cada uno: 6, 4 y 12 horas, tendremos:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12}$$

¿Y qué hubiera ocurrido si una sola persona hubiera realizado todo el trabajo y obtenido todo el beneficio?: $\frac{1000}{6+4+12} = \frac{1000}{22}$

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12} = \frac{1000}{22}$$

Su parte proporcional también sería la misma, por tanto:

De aquí obtenemos:

$$\frac{a}{6} = \frac{1000}{22} \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 1000}{22} = 272,73 \text{ €}$$

$$\frac{b}{4} = \frac{1000}{22} \Rightarrow b = \frac{4 \cdot 1000}{22} = 181,81 \text{ €}$$

$$\frac{c}{12} = \frac{1000}{22} \Rightarrow c = \frac{12 \cdot 1000}{22} = 545,46 \text{ €}$$

Veamos otros ejemplos:

Tres personas deben repartirse una herencia de 18000 € en partes proporcionales al número de hijos de cada uno 2, 3 y 5 respectivamente, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno?

Sean "a," "b" y "c" las cantidades que les corresponden a cada uno, por tanto:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{18000}{10} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{18000}{10} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 18000}{10} = 3600 \text{ €} \\ \frac{b}{3} = \frac{18000}{10} \Rightarrow b = \frac{3 \cdot 18000}{10} = 5400 \text{ €} \\ \frac{c}{5} = \frac{18000}{10} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot 18000}{10} = 9000 \text{ €} \end{cases}$$

En una carrera intervienen tres corredores, entre los que hay que repartir 11850 € en proporción directa a las velocidades que han sido el primero 6 km/h, y el segundo 5 km/h. Sabemos que al primero le corresponden 4740€. ¿Qué velocidad llevó el tercero?. ¿Cuánto le corresponde al segundo y al tercero?

Primero	La cantidad recibida es de 4740€	Proporción = $\frac{4740}{6}$
	La velocidad alcanzada es de 6 km/h	
Segundo	La cantidad recibida la llamamos "b"	Proporción = $\frac{b}{5}$
	La velocidad alcanzada es de 5 km/h	
Tercero	La cantidad recibida la llamamos "c"	Proporción = $\frac{c}{x}$
	La velocidad alcanzada la llamamos "x"	

$$\frac{4740}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{x}$$

Por tanto, para que sea un reparto proporcional los cocientes deben ser iguales:

iguales a un cociente total $\frac{11850}{6+5+x}$

$$\frac{4740}{6} = \frac{11850}{11+x} \Rightarrow 11+x = \frac{6 \cdot 11850}{4740} \Rightarrow 11+x = 15 \Rightarrow x = 15 - 11 = 4$$

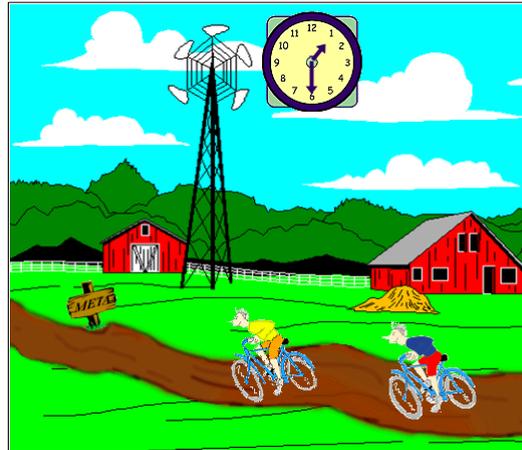
Luego: $\frac{4740}{6} = \frac{b}{5} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot 4740}{6} = 3950$ €

$$\frac{4740}{6} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = \frac{4 \cdot 4740}{6} = 3160$$

$$\frac{4740}{6} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = \frac{4 \cdot 4740}{6} = 3160$$

Repartos inversamente proporcionales

Supongamos que en una prueba ciclista compiten tres personas y se quiere repartir el premio 100 euros entre los participantes. Sabemos que el primero tardó 2 horas, el segundo 4 horas y el tercero 6 horas. Evidentemente, el que menos tiempo empleó fue el ganador y le corresponde el mayor premio, al segundo le debe corresponder la mitad que al primero ya que tardó el doble y el que más tiempo contabilizó que fue el último en llegar le debe corresponder menos.



Si nos fijamos debemos repartir el premio de forma inversamente proporcional al tiempo invertido.

También se puede pensar que el primero en 1 hora ha recorrido $\frac{1}{2}$ del recorrido el segundo $\frac{1}{4}$ y el tercero $\frac{1}{6}$ y repartir el premio proporcionalmente a lo que ha recorrido cada uno en una hora.

Por tanto:

IMAGEN:

Para hacer un **reparto inversamente proporcional** a las cantidades a, b y c basta con hacer un reparto directamente proporcional a las cantidades $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$.

Ejemplo

Descompón el número 4371 en tres sumandos inversamente proporcional a 3, 4 y 5.

Repartir inversamente a 3, 4 y 5 es lo mismo que repartir directamente a sus inversos es decir a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.
Vamos a llamar "x", "y", "z", las cantidades que corresponden a cada uno por tanto:

$$\frac{x}{1} = 3x \quad \frac{y}{1} = 4y \quad \frac{z}{1} = 5z$$

El primero será $\frac{x}{3}$, el segundo $\frac{y}{4}$ y el tercero $\frac{z}{5}$

$$3x = 4y = 5z = \frac{4371}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{3471}{\frac{47}{60}} = \frac{3471 \cdot 60}{47} = \frac{208260}{47} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{208260}{47} \Rightarrow x = 1860 \\ 4y = \frac{208260}{47} \Rightarrow y = 1395 \\ 5z = \frac{208260}{47} \Rightarrow z = 1116 \end{cases}$$