

¿Qué son los monomios?

Recordemos qué es una expresión algebraica.

Definición

Una **expresión algebraica** es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones.

Si se observan las siguientes expresiones algebraicas, se verá que en ellas aparecen distintas operaciones:

Ejemplo:

a) $3ax$ b) $-2xy^2$ c) $8ab^3x$ d) $3ax - 2y$ e) $x^2 + 2x - 4$

En las tres primeras expresiones no aparecen sumas entre términos, mientras que en la dos últimas sí. En los tres primeros decimos que estas expresiones algebraicas son monomios. Podemos decir por tanto que:

Definición

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Se llama parte literal de un monomio a las letras con sus exponentes.

Se llama coeficiente de un monomio al número que aparece multiplicando a la parte literal. Normalmente se coloca al principio. Si es un 1 no se escribe y nunca es 0 ya que la expresión completa sería 0.

Los coeficientes de un monomio pueden no ser enteros (por ejemplo 0,6 ;0,6; 1/2 ; -5/6;, etc.) aunque normalmente serán enteros y así lo vamos a suponer en este tema.

Se denomina grado de un monomio a la suma de los exponentes de las letras.

Ejemplo:

En el ejemplo anterior: $3ax$; $-2xy^2$; $8ab^3x$, observamos:

Los coeficientes son 3 ; -2 ; y 8 respectivamente

Tienen grado 2, grado 3 y grado 5, respectivamente (como ya sabemos, cuando el exponente es 1 no se escribe).

En la mayor parte de los casos los monomios que se utilizarán serán más simples ya que sólo estarán formados por una letra, normalmente la x ,. Ppor tanto, su exponente será el grado del monomio.

Ejemplo:

$-2x^2$ tiene coeficiente -2 y grado 2.

$3x$ tiene coeficiente 3 y grado 1.

$-5x^3$ tiene coeficiente -5 y grado 3.

x^5 tiene coeficiente 1 y grado 5.

Monomios semejantes

Definición

Dos **monomios son semejantes** si tienen la misma parte literal. Por tanto, dos monomios semejantes sólo se diferencian en el coeficiente.

Ejemplos:

Son monomios semejantes: $2ax^4y^4$; $-3ax^4y^4$; ax^4y^4 ; $5ax^4y^4$

No son semejantes a los anteriores: axy^3 ; $3a^2x^4y^3$; $2bx^4$

Ejemplo:

Di el grado, coeficiente y parte literal del monomio $5x^2yz$
 El grado se calcula sumando los exponentes de las letras: $2 + 1 + 1 = 4$. Por tanto, el grado es 4.

La parte literal es x^2yz

El coeficiente es 5.

Suma y resta de monomios

Observa las siguientes operaciones:

$$1. \quad 5ax^4y^3 + 2ax^4y^3 = (5 + 2) \cdot ax^4y^3 = 7ax^4y^3$$

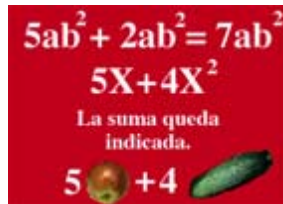
$$2. \quad 4ax^4y^3 + x^2y$$

En el primer caso se trata de monomios semejantes y en el segundo no. Para sumar o restar dos monomios tienen que ser semejantes.

Definición

La **suma** o la **resta de monomios semejantes** es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o resta de los coeficientes.

Cuando los **monomios no son semejantes**, la suma queda indicada y el resultado se llama **polinomio**, como veremos más adelante.



Ejemplos:

Calcula las sumas de los monomios que se indican:

$$2ax^4 - 3ax^4 + 5ax^4$$

$$2x^3 - x + x^3 + 3x^3 + 2x$$

Solución:

Son monomios semejantes, por lo que se pueden sumar y restar sus coeficientes $2 - 3 + 5 = 4$, y se añade la misma parte literal ax^4 . Por tanto, el resultado será $4ax^4$.

Obsérvese que no todos los monomios son semejantes entre ellos. Se deben sumar los que sí lo sean.

Por un lado, sumamos $2x^3 + x^3 + 3x^3 = 6x^3$

Por otro lado, sumamos $-x + 2x = x$

Por tanto, la solución será: $6x^3 + x$

► Para saber más

Ejemplos para sumar términos semejantes del mismo signo

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id32.htm>

Reducción de términos de distinto signo

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id33.htm>

Reducción de más de dos términos con distinto signo

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id34.htm>

Reducción de términos semejantes

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id35.htm>

Suma de monomios

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id40.htm>

Ejercicios de autoevaluación de sumas de monomios

<http://www.ematematicas.net/monomios.php?ejercicio=suma&a=1>

Ejercicios de autoevaluación de restas de monomios

<http://www.ematematicas.net/monomios.php?ejercicio=resta&a=1>

Consulta en esta página los ejemplos de Suma suma y Resta resta de Monomiosmonomios, y completa el ejercicio 2

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Polinomios/monomios.htm

Multiplicación de monomios

Para multiplicar monomios se debe recordar el producto de potencias que, como sabemos, se puede realizar si tienen la misma base.

Para **multiplicar potencias** de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$5X \cdot 2X = 5 \cdot 2 X \cdot X \\ = 10X^2$$

Por ejemplo

$$5x^2 \cdot 3x^4 = 15x^6$$

Por tanto, para **multiplicar monomios**, se multiplican los coeficientes de cada uno entre sí y las potencias que tengan la misma base, dejando las de distinta base como están.

Ejemplo:

Calcula el producto de los siguientes monomios: $4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3$

Veamos todo lo que hay que tener en cuenta:

Se multiplican los coeficientes: 4, 1 y 3 respectivamente. Resultado: 12

Se multiplican todas las potencias de base aa. Resultado: a^2

Se multiplican todas las potencias de base bb. Resultado: b^2

Se multiplican todas las potencias de base xx. Resultado: x^6

Se multiplican todas las potencias de base yy. Resultado: y^7

Solución: $12a^2b^2x^6y^7$

► Para saber más

Ejemplos de multiplicaciones de monomios

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id61.htm>

Ejercicios de autoevaluación para multiplicar monomios

<http://www.ematematicas.net/monomios.php?ejercicio=producto&a=1>

Área de Matemáticas - Módulo III

Polinomios

División de monomios

Dos monomios no siempre se pueden dividir. Observa los siguientes ejemplos:

1. $(4ax^4y^3) : (2x^2y)$

En el primer ejemplo, se pueden dividir los coeficientes entre sí y las letras del dividendo entre las del divisor, restando los exponentes, aunque en el divisor no esté la a. Se obtendría como resultado $2ax^2y^2$.

2. $(6x^4y) : (ax^3)$

En el segundo ejemplo, al no existir la a en el dividendo, no es posible la división

Expresemos las operaciones anteriores en forma de fracción:

$$\text{a) } \frac{4ax^4y^3}{2x^2y} = \frac{4}{2}ax^{4-2}y^{3-1} = 2ax^2y^2$$

$$\text{b) } \frac{6x^4y^3}{ax^3} = \frac{6xy^3}{a}$$

La expresión resultante del ejemplo a) es un monomio, mientras que la expresión resultante del ejemplo b) no es un monomio, ; en este caso decimos que sólo hemos **simplificado la expresión**.

$$\frac{2X^2}{5X^2} = \frac{2}{5}$$

Tampoco pueden dividirse los monomios cuando en el divisor aparece una letra con una potencia mayor que en el dividendo. El resultado no sería un monomio, pues quedaría, al restar los exponentes, un exponente negativo (recuérdese que los exponentes de las letras deben ser positivos).

Ejemplos:

Calcula la división $\frac{2ax^2}{-3a^3x}$, el resultado sería $\frac{-2x}{3a^2} = \frac{-2}{3}a^{-2}x$. El coeficiente $\frac{-2}{3}$ es perfectamente válido, pero no así el exponente de a , que no es positivo.

Calcula la siguiente división de monomios:

$$\frac{6a^5x^2y}{2a^3x} = 3a^2xy$$

. En este caso la división sí es un nuevo monomio.

► Para saber más

Ejemplos de divisiones entre monomios

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id75.htm>

Ejercicios de autoevaluación para dividir polinomios

<http://www.ematematicas.net/monomios.php?ejercicio=cociente&a=1>

Consulta en esta página la división de polinomios y completa el ejercicio 5

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Polinomios/monomios.htm

Un **polinomio** es una expresión algebraica que se obtiene al expresar cualquier **suma de monomios no semejantes**.

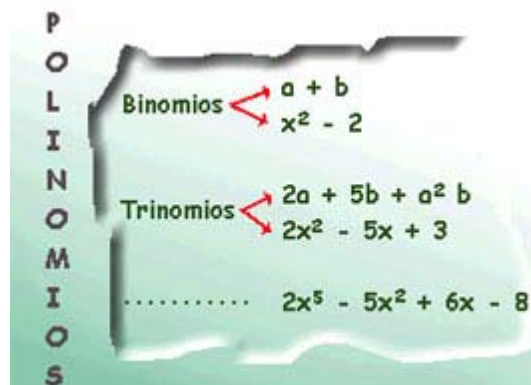
Si recordamos la suma de monomios, cuando estos no eran semejantes, no se podían sumar. En este caso lo que se obtiene es, por tanto, un polinomio.

Son polinomios las expresiones siguientes:

1. $4ax^4y^3 + x^2y + 3ab^2y^3$
2. $4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

A continuación vamos a recoger la terminología más usual:

- ▶ Cada sumando se llama **término** del polinomio. En el primer caso, el polinomio consta de tres términos, que son monomios, cada uno con varias letras. En el segundo caso, el polinomio tiene 5 términos.
- ▶ El término que sólo consta de un número, se le llama **término independiente**: 0 en el caso del apartado a) y 5 en el caso del apartado b).
- ▶ Cuando un polinomio consta de **dos monomios**, se denomina **binomio**. Veamos dos ejemplos de binomios:
 - ▶ $x^2y + 3ab^2y^3$
 - ▶ $2x + 3$



- ▶ Cuando consta de **tres monomios**, se denomina **trinomio**. Veamos dos ejemplos de trinomios:
 - ▶ $4ax^4y^3 + x^2y + 3ab^2y^3$
 - ▶ $-2x^3 + 3x^2 + 5$
- ▶ Con **más de tres términos** (monomios), ya se denomina en general **polinomio**.
- ▶ Se llama **grado de un polinomio**, al mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplos:

Así, en el caso $4ax^4y^3 + x^2y + 3ab^2y^3$, los grados de los monomios (suma de los exponentes de las letras) son 8, 3 y 6 respectivamente, luego el grado del polinomio es 8.

En el caso $4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$, el grado es 4.

- ▶ Los números que acompañan como factores a las letras (coeficientes de los monomios), se llaman también **coeficientes del polinomio**: 4, -2, 3, -2, y 5, respectivamente, en el caso b).

Ejemplos:

¿De que grado es el polinomio $2x^3 + 3x^4 - 5x^2 + x - 7$?
El grado es 4, que es el grado mayor de cada uno de los monomios que lo forman.

¿Cuál es el término de segundo grado en el polinomio $3x^4 - 5x^2 + x - 7$?
El término es $-5x^2$.

¿Cuál es el término independiente del polinomio $3x^4 - 5x^2 + x - 7$?
El término independiente es -7.

Área de Matemáticas - Módulo III

Polinomios

Suma y resta de polinomios

La suma de polinomios se basa en la de monomios, ya vista en este tema. Se podrán **sumar los términos** (monomios) que sean **semejantes** de los polinomios objeto de la suma.

- ▶ Para **sumar** dos o más polinomios, se colocan uno debajo del otro, haciendo coincidir en la misma columna los monomios semejantes: $A = x^3 + 5x^2 - 7$

$$B = x^2 - 3x - 2$$

$$A = \quad x^3 + 5x^2 \quad - 7$$

$$B = \quad \quad x^2 \quad - 3x - 2$$

$$A + B = x^3 + 6x^2 - 3x - 9$$

- ▶ Para **restar** dos polinomios se suman el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se realiza la suma.

$$A = \quad x^3 + 5x^2 \quad - 7$$

$$-B = \quad \quad -x^2 \quad + 3x + 2$$

$$A - B = x^3 + 4x^2 + 3x - 5$$

A partir de este momento, trabajaremos ya sólo con polinomios con una sola letra, por considerar que son los más utilizados.

Ejemplos:

Calcula $(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x)$

Basta sumar los términos de grados 3, 2 y 1 de ambos polinomios, y dejar el resto de los términos del primero como está.

Podemos indicar la suma de la siguiente forma, para verla mejor:

A	$4x^4$	$-2x^3$	$+3x^2$	$-2x$	$+5$
B		$+5x^3$	$-x^2$	$+2x$	
A+B=	$4x^4$	$+3x^3$	$+2x^2$	0	$+5$

Luego el resultado será: $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5$

Ejemplos:

Si en lugar de sumar dos polinomios se tratara de restarlos, bastaría cambiar el signo a todos los términos del segundo y sumar los resultados.

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x) = 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 - 5x^3 + x^2 - 2x =$$

$$4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5$$

También puedes entenderlo así:

A	$4x^4$	$-2x^3$	$+3x^2$	$-2x$	$+5$
- B		$-5x^3$	$+x^2$	$-2x$	
A - B=	$4x^4$	$-7x^3$	$+4x^2$	$-4x$	$+5$

► Para saber más

Ejemplos de sumas de polinomios

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id41.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id42.htm>

Ejemplos de restas de polinomios:

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id48.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id49.htm>

Suma de polinomios: ejercicios de autoevaluación

<http://www.ematematicas.net/polinomios.php?ejercicio=suma&a=3>

Resta de polinomios: ejercicios de autoevaluación

<http://www.ematematicas.net/polinomios.php?ejercicio=resta&a=3>

Multiplicación

Para calcular el producto de dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos los monomios del otro factor, y se suman los monomios semejantes obtenidos.

$$\begin{array}{r}
 5x^2 - 2x + 1 \\
 \times \quad -4x + 3 \\
 \hline
 15x^2 - 6x + 3 \\
 20x^3 - 8x^2 + 4x \quad + \\
 \hline
 20x^3 + 7x^2 - 2x + 3
 \end{array}$$

Si uno de los dos polinomios es un monomio, la operación es muy simple, como se puede ver en el ejemplo siguiente:

Ejemplos:

$$(3x^3 - 2x^2 + x - 5) \cdot (2x) = 6x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 10x$$

Ejemplos:

$(2x^3 - 3x^2 + 1) \cdot (2x - 3) =$ lo puedes calcular disponiéndolos disponiendo los polinomios así:

		$2x^3$	$-3x^2$		1
	$\times x$			$2x$	-3
		$-6x^3$	$+9x^2$		-3
	$+ 4x^4$	$-6x^3$		$2x$	
	$4x^4$	$-12x^3$	$+9x^2$	$2x$	-3

Muchas veces no se hace el producto como en el ejemplo anterior, sino que suelen colocarse todos los términos seguidos, y sumar después los que sean semejantes.

Ejemplos:

$$(-2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) \cdot (x + 1) = -2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = -2x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 5$$

► Para saber más

Ejemplos de productos de monomios por polinomios

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id65.htm>

Ejemplos de productos de polinomios por polinomios

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id67.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id68.htm>

Multiplicaciones de polinomios: ejercicios de autoevaluación

<http://www.ematematicas.net/polinomios.php?ejercicio=producto&a=3>

Igualdades notables

Se denominan así a algunas operaciones con polinomios de especial interés, ya que aparecerán frecuentemente en los cálculos.

Las más usuales son:

El cuadrado de una suma $(a + b)^2$: Se lee "El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo".

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia $(a - b)^2$: Se lee "El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo".

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Suma por diferencia: Se lee "Una suma por una diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados".

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(2x^2 - y)^2 = (2x^2)^2 - 2 \cdot (2x^2) \cdot y + y^2 = 4x^4 - 4x^2y + y^2$$

$$(-x + 3)^2 = (x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 = x^2 - 6x + 9$$

$$(2a + 3b) \cdot (2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$

$$(-3a + b^2) \cdot (-3a - b^2) = (-3a)^2 - (b^2)^2 = 9a^2 - b^4$$

En las siguientes escenas vas a trabajar con las siguientes identidades notables:

▶ Para saber más

Ejemplos de igualdades notables

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id134.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id135.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id136.htm>

Ejercicios de autoevaluación de igualdades notables

<http://www.ematematicas.net/idnotables.php?a=1>

División

La división de polinomios, en general se realiza de forma semejante a la de números de varias cifras, aunque las operaciones que realizamos directamente con los términos, las vamos indicando. El proceso es el siguiente:

$4x^3$	$-3x^2$		3	x^2	$-x$	$+1$
$-4x^3$	$4x^2$	$-4x$		$4x$	$+1$	
	x^2	$-4x$	3			
	$-x^2$	$+x$	-1			
		$-3x$	$+2$			

Como se ve, se ha obtenido de cociente $4x + 1$, y de resto $-3x + 2$.

Realiza la división del polinomio $3x^3 - 2x^2 - 4x - 4$ entre el binomio $x - 2$:

$3x^3$	$-2x^2$	$-4x$	-8	x	-2	
$-3x^3$	$+6x^2$			$3x^2$	$4x$	4
\	$4x^2$	$-4x$	-8			
	$-4x^2$	$8x$				
	\	$+4x$	-8			
		$-4x$	$+8$			
		\	0			

Se ha obtenido de cociente $3x^2 + 4x + 4$, y de resto 0. La división es exacta.

▶ Para saber más

Ejemplos de divisiones entre polinomios

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id80.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id81.htm>

División de polinomios: ejercicios de autoevaluación

<http://www.ematematicas.net/polinomios.php?ejercicio=div&a=3>

Si en un polinomio se sustituyen las letras por números y se realiza la operación indicada, se obtiene un número, que es el **valor numérico** del polinomio para los valores de las letras dados.

Ejemplo:

El valor del polinomio $x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ para $x = 2$, se obtiene sustituyendo la x por 2 en el polinomio. Por tanto tendremos:

$$(2)^3 - 5 \cdot (2)^2 + 3 \cdot (2) - 4 = 8 - 5 \cdot 4 + 6 - 4 = 8 - 20 + 6 - 4 = -10$$

Naturalmente, debe observarse que el valor numérico de una expresión algebraica no es único, pues depende del valor que demos a las letras que intervienen en ella.

Ejemplo:

Vamos a ver los valores numéricos del polinomio $x^3 - 2x^2 - x + 5$

para $x = -1$ toma el valor:

$$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 5 = -1 - 2 \cdot 1 + 1 + 5 = 3$$

para $x = -3$ toma el valor:

$$(-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 - (-3) + 5 = -27 - 18 + 3 + 5 = -37$$

▶ Para saber más

Ejemplos de sumas de polinomios y sus valores numéricos

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id44.htm>

Ejemplos de restas de polinomios y sus valores numéricos

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id52.htm>