

Introducción

Escuchemos a estas dos mujeres:



"La cuarta parte de mi vida la pasé en una casa de campo. La mitad en un pueblo, y los últimos 10 años, viviendo en esta ciudad. ¿Cuántos años crees que tengo?"

La otra mujer, tras pensar, responde:

"Cuarenta años"

Veamos qué ha pasado aquí:

- ▶ La primera mujer daba usaba un lenguaje ordinario
- ▶ la La segunda, se estructuraba en su cabeza un lenguaje matemático:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 10 = x$$

Como hemos visto, todo problema matemático puede expresarse en lenguaje ordinario o en lenguaje matemático.

▶ Para saber más

Practica traduciendo expresiones del lenguaje ordinario al lenguaje matemático

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departam>

¿Qué son las ecuaciones?

Las **ecuaciones** son igualdades en las que aparecen números y *letras* (denominadas **incógnitas**) relacionados mediante operaciones matemáticas.

Una ecuación cumple todas estas características:

- * ***Es una igualdad.***
- * ***Que figuran una o varias incógnitas.***
- * ***Que únicamente se cumple para algunos valores de dichas incógnitas.***

Veámoslo por partes.

► Igualdad

Consideremos la siguiente expresión:

$$3 \cdot x + 4 = 16$$

La igualdad es una expresión algebraica que relaciona dos miembros a través de un signo igual. La igualdad se tiene que cumplir. Esto quiere decir que tiene el mismo valor en ambos lados del igual si sustituimos las letras por un valor determinado. En nuestro caso, para que nos dé de 16, la x deberá valer 4. Así :

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 4 &= 16 \\ 12 + 4 &= 16 \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

Por lo que se cumple la igualdad sólo para el valor

$$x = 4$$

► Incógnita

Es la variable que se despeja en una ecuación para encontrar su o sus valores.

Cuando un número multiplica a una incógnita $3 \cdot t$, no es necesario indicar el símbolo de la multiplicación, puedes expresarlo así: $3t$.

Cuando la ecuación sólo contiene una letra hablamos de **ecuaciones con una incógnita**. (Habitualmente, la x , pero no necesariamente).

Ejemplos:

Por ejemplo: $x^2 + 1 = x + 4$, es una ecuación de una incógnita
 $3 \cdot x + 1 = -2 \cdot y + 4$, es una ecuación de dos incógnitas.

El **grado de una ecuación** es el mayor de todos los exponentes a los que está elevada la incógnita.

Se dicen que son de **primer grado** cuando el exponente de la incógnita es como mucho 1.

Ejemplos:

Por ejemplo: $x^2 + 1 = x + 4$, es una ecuación de segundo grado.

$-4 \cdot z - 7 = 5 \cdot z + 9$, es una ecuación de primer grado.

En este tema vamos a estudiar, precisamente, las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

► Valores

Las igualdades que se cumplen para algunos valores de las incógnitas, se llaman ecuaciones. Y las que se cumplen para todos los valores de las incógnitas reciben el nombre de identidades.

Igualdad	{ Ecuación : $2 \cdot y = 6 + 3 \cdot y$, se cumple sólo para $y = -6$
	{ Identidad : $4 \cdot y - 2 = y + y + y + y - 2$, se cumple para cualquier valor que tome la y

► Para saber más

Los primeros en tratar las ecuaciones de primer grado fueron los árabes, en un libro llamado *Tratado de la cosa*, y a la ciencia de hacerlo, Álgebra (del ár. *aljabru walmuqābalaḥ*, reducción y cotejo). La *cosa* era la incógnita. La primera traducción fue hecha al latín en España, y como la palabra árabe *la cosa* suena algo parecido a la X española medieval (que a veces ha dado J y otra X porque su sonido era intermedio, como en México/Méjico, Ximénez/Jiménez), los matemáticos españoles llamaron a *la cosa* X y así sigue.

Para resolver ecuaciones de primer y segundo grado, el hombre no encontró gran dificultad, la situación fue completamente diferente para ecuaciones de grado mayor de 2.

Profundiza aún más en la historia:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/nombres/mate3a/mate3a.htm

Solución de una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar los valores de la incógnita (normalmente la llamamos x) tales que, al ser sustituidos en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, hagan que la igualdad sea cierta.

Por ejemplo, dada la ecuación $3x - 1 = 6x - 7$, si sustituyes x por el valor 2 en dicha ecuación, tienes:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 1 &= 6 \cdot 2 - 7 \\ 6 - 1 &= 12 - 7 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

y la ecuación se ha transformado en una identidad. Por tanto, 2 sí es solución de la ecuación.

En cambio si sustituyes x por el valor 3 en la misma ecuación:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 - 1 &= 6 \cdot 3 - 7 \\ 9 - 1 &= 18 - 7 \\ 8 &= 11 \end{aligned}$$

llegas a una igualdad que no es cierta. Por tanto, 3 no es solución de la ecuación.

Para saber más

Repasa el concepto de ecuación y su solución

<http://ciencias.bc.inter.edu/ntoro/mate0010/bases/ecua/index.htm>

Área de Matemáticas - Módulo III

Las Ecuaciones

Partes de una ecuación

Ya sabemos que una ecuación es una igualdad que se cumple solamente para ciertos valores de las incógnitas. Veamos ahora cuáles son sus partes.

- ▶ Llamaremos **primer miembro** a la parte situada a la izquierda del signo igual y
- ▶ **segundo miembro** a la que se encuentra a la derecha del signo igual.

El diagrama muestra la ecuación $3X - 4 = X + 8$ con las siguientes etiquetas:

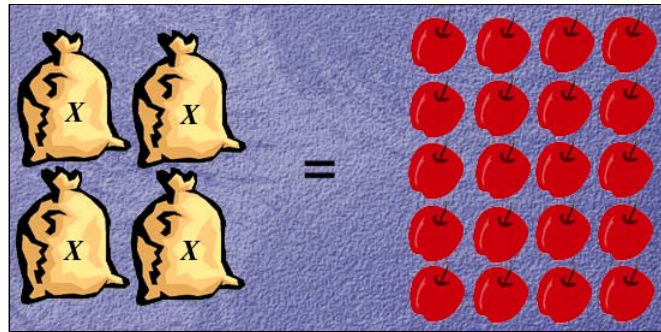
- Primer Miembro**: Una línea verde horizontal con una línea vertical que apunta hacia abajo a $3X - 4$.
- Segundo Miembro**: Una línea azul horizontal con una línea vertical que apunta hacia abajo a $X + 8$.
- Términos**: Una línea roja horizontal con líneas verticales que apuntan hacia abajo a cada uno de los cuatro términos ($3X$, -4 , X y 8).

Estos miembros están formados por **términos**. En nuestro ejemplo, los términos del primer miembro serían $3x$ y 4 .

Las Ecuaciones

Ecuaciones equivalentes

Si tenemos cuatro sacos de manzanas con la misma cantidad de manzanas cada uno, pero esta cantidad es desconocida, en la ecuación deberemos poner:



Número de sacos: 4

Cantidad desconocida de manzanas: x

Número total de manzanas: 20

Por lo tanto, debe cumplirse: $4 \cdot x = 20$

Para averiguar el valor de la x , tienes que buscar un número que multiplicado por 4 dé de 20. Este número es el 5.

Si multiplicamos los dos miembros, por un número cualquiera, como por ejemplo 2, tendremos la siguiente ecuación.

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 4 \cdot x = 2 \cdot 20 \\ 8 \cdot x = 40 \end{array}$$

Y la solución sigue siendo 5.

Lo mismo ocurre si los dos miembros, los dividimos, sumamos o restamos por un mismo número. Con esta demostración, podemos deducir que si los dos miembros en que se divide la igualdad se suman, restan, multiplican o dividen por un mismo número, se obtiene una ecuación que es equivalente a la primera. Esto quiere decir que el valor de la solución de la incógnita, no varía.

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.
Para conseguir una ecuación equivalente a otra se utilizan los criterios de equivalencia que son dos: el de la suma y el del producto.

Criterio de la suma: si a los dos miembros de una ecuación se le suma o se le resta el mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo:

$x - 7 = 3$ tiene por solución $x = 10$.

Si sumamos 4 a cada término resulta: $x - 7 + 4 = 3 + 4$

es decir, $x - 3 = 7$, que tiene la misma solución $x = 10$.

Criterio del producto: si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo:

$x - 5 = 1$ tiene por solución $x = 6$.

Si multiplicamos por 2 cada término resulta: $2 \cdot (x - 5) = 2 \cdot 1$

es decir, $2x - 10 = 2$, que tiene por solución $x = 6$.

Resolución de ecuaciones

En este apartado aprenderás a resolver una ecuación de primer grado con una sólo incógnita, y a comprobar si la solución obtenida es correcta o no. Para ello, vamos a distinguir los siguientes pasos:

- *Quitar los denominadores.*
- *Quitar los paréntesis.*
- *Transponer los términos.*
- *Reducir los términos.*
- *Despejar la incógnita y hallar la solución.*
- *Comprobación.*

Quitar denominadores

Vamos a explicarlo sobre este ejemplo:

$$\frac{2x}{12} + \frac{2}{4} = \frac{(2x+2)}{20}$$

1. Para quitar denominadores, lo primero es **descomponerlos en factores** primos. Como ya sabemos, colocamos los denominadores en posición de descomponer. Al terminar la operación obtenemos:

$$12 = 2^2 \cdot 3; 4 = 2^2; 20 = 2^2 \cdot 5$$

2. A continuación, se hallará el **mínimo común múltiplo de los denominadores**. Para ello se cogen los factores primos comunes elevados al mayor exponente y los no comunes. Después de esto obtenemos que:

$$m.c.m(12, 4, 20) = 60$$

3. El mínimo común múltiplo se divide por el denominador de cada fracción y lo que nos dé se multiplica por el numerador, dejando el mínimo común múltiplo como denominador.

$$\frac{5 \cdot (2x)}{60} + \frac{15 \cdot 2}{60} = \frac{3 \cdot (2x+2)}{20}$$
$$\frac{10x+30}{60} = \frac{6x+6}{60}$$

4. A continuación, multiplicamos los dos miembros de la igualdad por el m.c.m y según el criterio del producto simplificando queda una ecuación equivalente:

$$\frac{(10x+30) \cdot 60}{60} = \frac{(6x+6) \cdot 60}{60}$$
$$10x+30 = 6x+6$$

Quitar los paréntesis

Todo paréntesis nos indica que debemos hacer unas operaciones, según se indica, multiplicando, dividiendo, restando o sumando, por el número y el signo que va delante del mismo.

$$2 \cdot (3x + 1) = 6x + 2$$

Debemos tener en cuenta que:

- ▶ cuando delante del paréntesis tenemos un signo positivo, al quitarlo se respetan los signos del interior del paréntesis. $+(3x + 4) = 3x + 4$
- ▶ Si tenemos un signo negativo se cambiarían todos los signos del interior del paréntesis. $-(3x + 4) = -3x - 4$

Recordemos la regla de los signos para multiplicar:

$+ \text{ por } + = +$; $+ \text{ por } - = -$; $- \text{ por } + = -$; $- \text{ por } - = +$

- ▶ Cuando delante del paréntesis no existe número ni signo, se sobreentiende el positivo.

$$(3x + 4 - 2) = +(3x + 4 - 2) = 3x + 4 - 2$$

Para resolverlo debemos realizar las operaciones posibles del interior del paréntesis.

$$(3x + 4 - 2) = 3x + 2$$

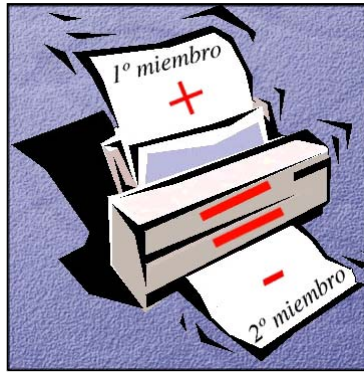
▶ Para saber más

Página de ejemplos resueltos sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita:
<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id104.htm>

Transponer los términos

En una ecuación, para conocer el valor de una incógnita debemos dejarla sola en un miembro. Para ello hay que transponer el resto de los términos. Un término puede pasar de un miembro a otro cambiándole de signo, es decir:

- ▶ lo que está sumando pasa restando,
- ▶ lo que está restando pasa sumando,
- ▶ lo que está multiplicando pasa dividiendo
- ▶ lo que está dividiendo pasa multiplicando.



La transposición de términos tiene por finalidad dejar todas las x en el primer miembro y todos los números en el segundo miembro.

$$\begin{aligned} 10x + 20 &= 5x + 25 \\ 10x - 5x + 20 &= 25 \\ 10x - 5x &= 25 - 20 \end{aligned}$$

► **Para saber más**

Página de ejemplos resueltos transponiendo términos de la ecuación:
<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id104.htm>

Área de Matemáticas - Módulo III

Las Ecuaciones

Reducir los términos

Una vez realizados los pasos anteriores se quedan los términos con x en el primer miembro y los números solos en el segundo.

Definición
Reducir términos es simplificar las operaciones marcadas.

Veamos el siguiente ejemplo:

$$10x + 20 = 5x + 25$$

Ya tenemos traspasados los términos, ahora reduciremos, restando 5 a 10, y nos da:

$$-5X + 10X = 25 - 20$$

$$5X = 5$$

Recuerda que para reducir debes sumar o restar, las incógnitas iguales, por una parte, y los términos sin incógnita, por otro.

Área de Matemáticas - Módulo III

Las Ecuaciones

Despejar la incógnita y hallar la solución

Dada esta ecuación:

$$\frac{(X - 2)}{4} - \frac{1}{4} = \frac{(3X - 1)}{2} - \frac{3}{2}$$

- ▶ El primer paso para resolverla es **quitar denominadores**. Ya sabemos que para quitar denominadores tenemos que buscar el mínimo común múltiplo (m.c.m), que en este caso es 4. El siguiente paso es dividir el m.c.m por el denominador de cada término y lo que salga, multiplicarlos por cada numerador.

$$(X - 2) - 1 = 2(3X - 1) - 2 \cdot 3$$

- ▶ A continuación **quitaremos paréntesis** del segundo miembro multiplicando el 2 por todos los términos, respetando el signo.

$$X - 2 - 1 = 6X - 2 - 6$$

- ▶ Nos queda **realizar las operaciones indicadas**.

$$X - 2 - 1 = 6X - 2 - 6$$

$$X - 3 = 6X - 8$$

- ▶ Despejar la incógnita es dejarla sola en uno de los miembros de la ecuación.

Veamos cómo se realiza este paso.

Se pasa el número al segundo miembro despejando la x sola en el primer miembro.

$$X = 6X - 8$$

$$X = -6X - 8$$

$$X = -5$$

Cuando el número está multiplicando a la x, pasa dividiendo al otro miembro. El signo se conserva. Recuerda, si un número está multiplicando a la incógnita, lo pasamos al otro miembro dividiendo; si un número divide a la incógnita, lo pasamos multiplicando

$$-5X = -5$$

$$X = \frac{-5}{-5}$$

Por fin, queda:

$$X = \frac{-5}{-5}$$

$$X = +1$$

Cuando dividimos los signos ocurre lo mismo que cuando los multiplicamos. Tenemos que tener en cuenta las siguientes reglas.

$$\frac{+}{+} = + \quad \frac{+}{-} = - \quad \frac{-}{+} = - \quad \frac{-}{-} = +$$

▶ Para saber más

Páginas de ejemplos resueltos con la solución completa de la ecuación:

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id105.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id106.htm>

Comprobación

$$\frac{3(X+1)}{7} = \frac{X}{2}$$

Dada esta ecuación, para resolverla seguiremos los siguientes pasos:

- ▶ Multiplicaremos el 3 del primer miembro por los términos del paréntesis.

$$\frac{3(X+1)}{7} = \frac{X}{2}$$

- ▶ Buscaremos el mínimo común múltiplo de 2 y 7, que como son números primos es $m.c.m.(2, 7) = 14$. Dividimos el m.c.m. de los denominadores y el resultado se multiplica por

$$m.c.m. \text{ de } 7 \text{ y } 2 = 14 \quad \frac{14}{7} = 2 \quad \frac{14}{2} = 7$$

$$2(3X+3) = 7X$$

los numeradores.

▶

$$2(3X+3) = 7X$$

$$6X+6 = 7X$$

Se realizarán las operaciones indicadas.

- ▶ Se pasan los números términos con x al primer miembro, y los números solos al segundo

$$6X - 7X = -6$$

$$-1X = -6$$

miembro. Siempre respetando el cambio de signos al pasar por el igual.

▶

$$X = \frac{-6}{-1} = +6$$

Se despeja la incógnita, obteniendo el valor de la x.

Comprobar es colocar el valor de la x que has obtenido en el lugar de dicha letra. Si el valor del primer miembro es igual al valor del segundo miembro, la solución es correcta.

Comprobación:

$$\frac{3(X+1)}{7} = \frac{X}{2}$$

$$\frac{3(6+1)}{7} = \frac{6}{2}$$

$$\frac{(18+3)}{7} = \frac{6}{2}$$

$$\frac{21}{7} = \frac{6}{2}$$

$$3 = 3$$

► **Para saber más**

Sigue practicando con las siguientes ecuaciones

<http://www.ematematicas.net/ecuacion.php?a=3>

<http://www.ematematicas.net/ecuacion2.php?a=3>

Cómo resolver una ecuación lineal: síntesis del método de resolución

http://personal5.iddeo.es/ztt/pr/T2_Ecuaciones.htm

Área de Matemáticas - Módulo III

Las Ecuaciones

Clases de ecuaciones

Distinguiremos distintas clases de ecuaciones en función de las soluciones que se encuentren para ella:

► Ecuaciones sin solución:

Resuelve en el cuaderno de trabajo la siguiente ecuación:

$$x - 3 = 2 + x$$

Al intentar encontrar la solución a la ecuación, queda $0 = 5$ ¿Qué significa? Desde luego esta expresión no puede ser cierta independientemente del valor que tome x .

Decimos que en este caso la ecuación no tiene solución.

Si al resolver una ecuación obtenemos que en un miembro sea 0 y el otro no, decimos que la **ecuación no tiene solución**.

Comprueba este otro ejemplo de una ecuación sin solución: $\frac{x}{2} = 1 - x + \frac{3x}{2}$

- ▶ Ecuaciones con infinitas soluciones:

Resuelve en el cuaderno de trabajo la siguiente ecuación:

$$2x - 1 = 3x + 3 - x - 4$$

Cuando intentas resolverla llegas a la expresión $0 = 0$ ¿Qué significa ahora?. La igualdad que has obtenido es cierta pero, ¿dónde se encuentra la incógnita? ¿Cuál es la solución?.

Fíjate, si la igualdad es cierta seguro que: **¡lo será para cualquier valor de x!**. Sustituye en cualquiera de las dos x por el valor que desees y comprueba que la igualdad es siempre cierta.

Si al resolver una ecuación obtenemos que los dos miembros sean 0 decimos que la **ecuación tiene infinitas soluciones**.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 2 = \frac{5x - 12}{6}$$

Comprueba este otro ejemplo de una ecuación sin solución:

Resolución de problemas

Para resolver cualquier problema debemos seguir las siguientes pautas. Veamos un ejemplo con este problema. Léelo atentamente. Es importante que sigas el orden.

*La edad de una madre es el triple que la de su hija, y dentro de 14 años sólo tendrá el doble de la que tendrá ésta.
¿Qué edad tiene ésta?*

- ▶ Elección de la incógnita

Se debe **elegir** como **incógnita** una de las cantidades desconocidas. El resto de las cantidades se relaciona con la incógnita según las condiciones que diga el problema.

- ▶ La edad actual de la hija, como la desconocemos la llamaremos: x .
- ▶ La edad actual de la madre es el triple: $3x$
- ▶ La edad de la hija dentro de 14 años: $x + 14$
- ▶ La edad de la madre dentro de 14 años: $3x + 14$.

► Planteamiento de la ecuación

Es la parte más importante. Consiste en **traducir el enunciado** en lenguaje matemático convirtiéndolo en una ecuación.

Como dentro de 14 años la edad de la madre será el doble que la de la hija, para igualar las edades tenemos que multiplicar la edad de la hija por 2.

$$\underbrace{3x + 14}_{\text{edad de la madre dentro de 14 años}} = \underbrace{2}_{\text{doble}} \cdot \underbrace{(x + 14)}_{\text{edad hija dentro de 14 años}}$$

► Resolución de la ecuación obtenida en el planteamiento

Aplicamos ahora lo aprendido: quitamos paréntesis, transponemos términos, reducimos términos, despejamos la incógnita y hallamos la solución. Usamos criterios de la suma y producto, y otras propiedades como la propiedad distributiva. Tenemos:

$$\begin{aligned} 3x + 14 &= 2 \cdot (x + 14) \\ 3x + 14 &= 2x + 28 \\ 3x + 14 - 2x &= 2x + 28 - 2x \\ x + 14 &= 28 \\ x + 14 - 14 &= 28 - 14 \\ x &= 14 \text{ años, edad de la hija y, por tanto,} \\ 3x &= 42 \text{ años, edad de la madre} \end{aligned}$$

► Comprobación

Colocaremos el valor de la solución en el lugar de la x .

Dentro de 14 años: la hija tendrá $14 + 14 = 28$ años.

Dentro de 14 años la madre tendrá $42 + 14 = 56$ años.

Se comprueba que el doble de la hija, $28 \cdot 2 = 56$, es igual al de la madre.

► Para saber más

Diofanto de Alejandría (siglo III a.C.), último geómetra importante en la matemática griega, que según la tradición dejó escrito el siguiente acertijo:

Caminante, aquí fueron enterrados los restos de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió:

*Su juventud ocupó la **sexta** parte, después durante la **doceava** parte su mejilla se cubrió de vello.*

*Pasó aún una **séptima** parte de su vida antes de tomar esposa y su primogénito nació **cinco** años después. Al alcanzar éste la **mitad** de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirlo llorándolo, durante **cuatro** años más.*

Con esta información deduce su edad.

Si llamamos x a la edad a la que murió Diofanto, entonces traduciendo el acertijo al lenguaje algebraico tenemos:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 7 \\ 2 \end{array} \right\} \text{m.c.m}(6, 12, 7, 2, 1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

$$\frac{14 \cdot x}{84} + \frac{7 \cdot x}{84} + \frac{12 \cdot x}{84} + 84 \cdot 5 + \frac{42 \cdot x}{84} + 84 \cdot 4 = \frac{84 \cdot x}{84}$$

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$$

$$14x + 7x + 12x - 84x = -420 - 336$$

$$-9x = -756$$

$$x = \frac{-756}{-9}$$

$$x = 84$$

Por tanto, si es históricamente cierto, Diófanto vivió **84 años**.

Practica más soluciones de problemas en la siguiente página:

<http://www.ematematicas.net/problemaecuacion.php?a=1>

Páginas de ejemplos resueltos sobre problemas:

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id108.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id109.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id110.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id111.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id112.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id113.htm>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id114.htm>