Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Si decimos: "*las edades de mis padres suman 120 años*", podemos expresar esta frase algebraicamente de la siguiente forma:

- Denominamos *x a la edad del padre*
- *Denominamos y a la edad de la madre*

Entonces, $x + y = 120$

Esta expresión se llama una **ecuación de primer grado con dos incógnitas**. Y tendríamos muchos valores de x e y que cumplen dicha relación, por ejemplo:

- edad del padre 65 años y edad de la madre 55 años
- o bien edad del padre 60 años y edad de la madre 60 años, etc.

Para **obtener soluciones** sólo hay que dar un valor a *x* o *y*, calculando el otro mediante una ecuación de primer grado.
Por ejemplo, si x = 52 tendremos $52 + y = 120 \rightarrow y = 120 - 52 \rightarrow y = 68$

A cada par de valores x = 65, y = 55 ; x =60, y = 60; x = 52, y = 68, etc., se llama solución de la ecuación.

Por tanto, ya podemos dar una **definición:**

Una **ecuación de primer grado con dos incógnitas** es una relación entre dos números desconocidos (llamados incógnitas) de la forma $ax + by = c$, los números a y b se llaman coeficientes y cumplen : $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y c se llama término independiente.

Solución de la ecuación es cualquier par de números que sustituidos en lugar de *x* e *y* verifican la igualdad.

Para saber más

Página de ejemplos resueltos de soluciones enteras de ecuaciones con dos incógnitas:
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id212.htm [Versión en cache]

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Volvamos al problema de las edades de los padres, si además de que sus edades suman 120, sé que *"mi madre tiene 4 años menos que mi padre"*, tenemos una nueva condición que escrita algebraicamente será $y = x - 4$ o bien $x - y = 4$.

Para resolver el problema de las edades tenemos las condiciones: $\begin{cases} x+y=120 \\ x-y=4 \end{cases}$ a esto se le llama un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Si escribimos una tabla con algunas de las soluciones de la ecuación primera y otra con soluciones de la ecuación segunda, podemos encontrar la solución común de las dos, y esta solución se llama solución del sistema.

Soluciones de la primera ecuación

x	59	60	61	62	63	64	65	66	67
y	61	60	59	58	57	56	55	54	53

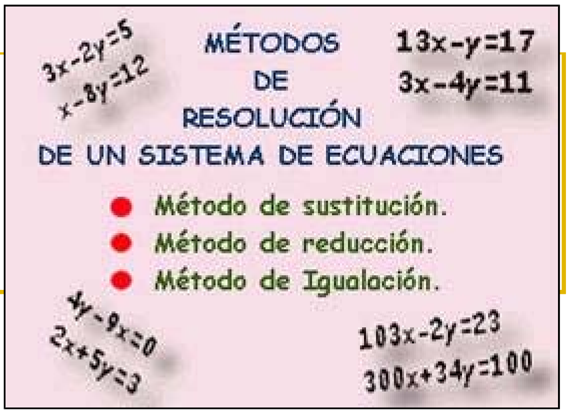
Soluciones de la segunda ecuación

x	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
y	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64

Solución del sistema $\boxed{x=62\,,\ y=58}$

Por tanto, ya podemos dar una **definición:**

Un **sistema de** dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es una expresión del tipo: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$
Solución del sistema es el par de valores que es solución de las dos ecuaciones a la vez



Tres son los **métodos para resolver** un sistema de ecuaciones. El método de **sustitución**, el de **reducción** y el de **igualación**. Cualquiera que sea el método de resolución del sistema de ecuaciones, la solución siempre será la misma.

Método de sustitución

Con este método conseguimos que el sistema de ecuaciones con dos incógnitas acabe convirtiéndose en una ecuación de primer grado con una incógnita. Para ello utilizaremos uno de los tres métodos de resolución. El siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$$

Lo vamos a resolver por el **método de sustitución**. Para ello,

- **Primer paso**: despejamos una de las incógnitas, en este caso, la *x*
  $x = 6 - y$
- **Segundo paso**: El siguiente paso sería sustituir el resultado de despejar la incógnita en la primera ecuación en el lugar de esa incógnita en la segunda ecuación. En nuestro caso, sustituiremos el $6 - y$ en el lugar de la x. Quedando así una sola incógnita: la y.
  $x - y = 4$
  $6 - y - y = 4$
- **Tercer paso**: A continuación se harán las operaciones que ya aprendimos para resolver ecuaciones con una sola incógnita:
  $-y - y = -4 - 6$
  $-2y = -2$
  $y = \frac{-2}{-2}$
  $\boxed{y = 1}$
- **Cuarto paso**: Cuando tengamos ya el resultado de una de las incógnitas, sustituiremos ese valor en la operación del primer paso para averiguar cuánto vale la otra incógnita.
  $x = 6 - y$
  $x = 6 - 1$
  $\boxed{x = 5}$
- Por tanto, la **solución al sistema** es: $\boxed{x = 5\,,\ y = 1}$

Para saber más

Aquí encontrarás más sistemas de ecuaciones resueltos por este método:
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id215.htm **[Versión en cache]**

Método de reducción

Veamos cómo se resuelve este sistema por el **método de reducción**:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

CASO A:

- **Primer paso:** Reducimos el término de la *x*. Como la *x* está en la misma cantidad en las dos ecuaciones, sólo tendremos que restarlas. Para ello debemos cambiar el signo a la segunda ecuación y sumarlas en vertical:

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ -x+3y=-1 \end{cases}$$
$$0+5y=5$$

- **Segundo paso:** Nos queda $5y=5$. Despejando obtenemos el valor de la y.

$$5y=5$$
$$y=\frac{5}{5}$$
$$\boxed{y=1}$$

- **Tercer paso:** Y, por último, sustituyendo este valor para calcular la x, queda:

$$x+2\cdot 1=6$$
$$x=6-2$$
$$\boxed{x=4}$$

- Por tanto, la **solución al sistema** es: $\boxed{x=4\,,\,y=1}$

CASO B:

Como vemos, no hay la misma cantidad de y en las dos ecuaciones. En la primera ecuación el coeficiente de la y es 2, y en la segunda ecuación es -3

- **Primer paso:** Para poder reducir debemos multiplicar el número que acompaña la incógnita *y* de la primera ecuación por todos los miembros de la segunda ecuación. Y el número que acompaña a la incógnita *y* en la segunda ecuación por toda la primera:

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ x-3y=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3\cdot(x+2y)=3\cdot 6 \\ 2\cdot(x-3y)=2\cdot 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x+6y=18 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$$

- **Segundo paso:** Así obtenemos dos ecuaciones que tienen valores opuestos, de forma que al sumarlos se nos va la y, por lo tanto, si las sumamos, la y desaparece. Sólo nos queda despejar la x para hallar su valor.

$$\begin{cases} 3x+6y=18 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$$
$$5x+0=20$$
$$x=\frac{20}{5}$$
$$\boxed{x=4}$$

- **Tercer paso:** Y, por último, sustituyendo este valor para calcular la *y*, queda:

$$4+2\cdot y=6$$
$$2\cdot y=6-4$$
$$2\cdot y=2$$
$$y=\frac{2}{2}$$
$$\boxed{y=1}$$

- Por tanto, la **solución al sistema** es: $\boxed{x=4\,,\,y=1}$

Para saber más

Aquí encontrarás más sistemas de ecuaciones resueltos por este método: **http://usuarios.lycos.es/calculo21/id216.htm** [Versión en cache]

Método de igualación

Para resolver este sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ por el método de igualación, hay que despejar las incógnitas e igualarlas. Podremos elegir entre despejar las x o despejar las y. En cada caso una elección u otra puede ser las más fácil. Ahora vamos a ver ambas posibilidades.

Primera forma: Igualación de la *x*

- **Primer paso:** Se despeja la *x* de las dos ecuaciones.
  $$\begin{cases} x=3-y \\ x=1+y \end{cases}$$
- **Segundo paso:** Igualamos:
  $$3-y=1+y$$
- **Tercer paso:** Y resolvemos:
  $$-y-y=1-3$$
  $$-2y=-2$$
  $$y=\frac{-2}{-2}$$
  $$\boxed{y=1}$$
- Por tanto, la **solución al sistema** es: $\boxed{x=2\,,\,y=1}$

Segunda forma: Igualación de la *y*

- **Primer paso:** Se despeja la *y* de las dos ecuaciones. Al hacerlo en la segunda ecuación, se nos quedaría la *y* negativa, por lo que habrá que cambiar todos los signos de esta ecuación.
- **Segundo paso:** Después de haber hecho estos pasos, se igualan las y. Con esto obtenemos el valor de la *x*
  $$\begin{cases} y=3-x \\ -y=1-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=3-x \\ y=-1+x \end{cases} \quad \textit{igualando el valor de las } y$$
  $$3-x=-1+x$$
  $$-x-x=-1-3$$
  $$-2x=-4$$
  $$x=\frac{-4}{-2}$$
  $$\boxed{x=2}$$

- Por tanto, la **solución al sistema** es: $\boxed{x = 2\,,\, y = 1}$

Para saber más

Aquí encontrarás más sistemas de ecuaciones resueltos por este método:
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id214.htm [Versión en cache]
Página con soluciones a sistemas de ecuaciones más complejas resueltas por cualquiera de los métodos anteriormente estudiados:
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id218.htm [Versión en cache]
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id232.htm [Versión en cache]

Tipos de sistemas

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones nos podemos encontrar con varias posibilidades:

- Que el sistema tenga una única solución
- Que el sistema no tenga solución
- Que el sistema tenga infinitas soluciones.

Veamos algunos ejemplos para entender estas tres posibilidades.

Ejemplo 1

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ por el método de igualación. Si seguimos los pasos vistos anteriormente, nos queda:

- Despejamos *x* en la primera ecuación $x = 5 - y$.
- Ahora despejamos la *x* en la segunda ecuación $x = 1 + y$
- Igualamos ambas expresiones:
  $5 - y = 1 + y$
  $-y - y = 1 - 5$
  $-2y = -4$
  $y = \dfrac{-4}{-2}$
  $y = 2$
- Por último, sustituimos el valor en *x* y obtenemos $x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3$.

Definición
Siempre que al resolver un sistema, por el método que sea, se llegue a una solución, se dice que es un sistema compatible determinado.

Ejemplo 2

Pero no todos los sistemas tienen solución. Por ejemplo, si resuelves el sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=7 \end{cases}$, utilizando el método de sustitución, nos queda:

- Despejamos *x* en la primera ecuación, obtenemos $x=5-y$;
- Sustituimos esta expresión en la otra ecuación.
  $2(5-y)+2y=7$
  $10-2y+2y=7$
  $-2y+2y=10-7$
  $0=3$
- Hemos llegado a una identidad falsa que no es cierta,0 = 3. Por tanto el sistema no tiene solución

Definición
Siempre que al resolver un sistema, por el método que sea, se llegue a una identidad falsa el sistema no tiene solución, y se dice incompatible.

Si analizamos el sistema sin resolverlo, puedes observar que $2x+2y$ es el doble de $x+y$, por tanto, si $x+y=5$ entonces, $2x+2y$ tendría que valer 10 y no 7.

Ejemplo 3

Se da también el caso de que sistemas que tienen más de una solución. Por ejemplo, si resuelves el sistema; $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$; por el método de reducción nos queda:

- Multiplicamos la primera ecuación por -2; $-2x-2y=-10$
- Sumamos ambas ecuaciones

$$\begin{array}{rcr} -2x-2y & = & -10 \\ 2x+2y & = & 10 \\ \hline 0y+0y & = & 0 \end{array}$$

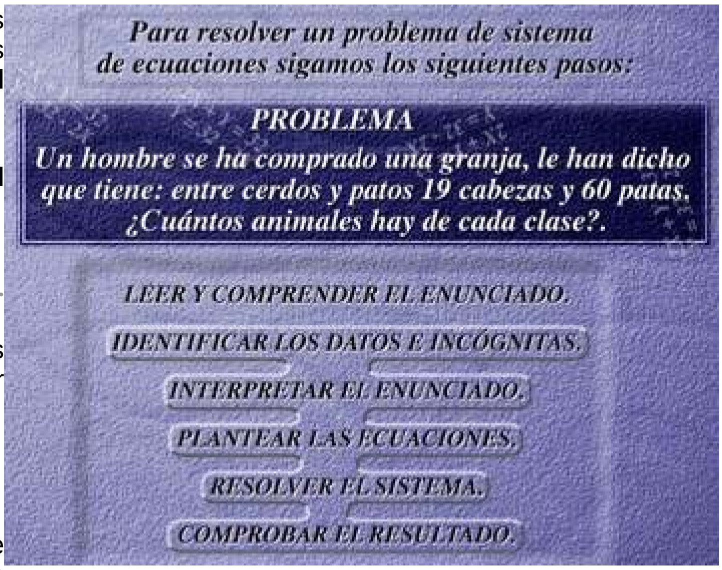
$$0=0$$

- Hemos llegado a una identidad cierta:0=0; que se cumple para cualquier valor de x e y. Por tanto el sistema tiene infinitas soluciones.

Siempre que al resolver un sistema por el método que sea se llegue a una identidad cierta 0=0 el sistema tiene infinitas soluciones el sistema, y se dice compatible indeterminado.

Si analizamos el sistema sin resolverlo vemos que $2x+2y$ es el doble de $x+y$ y, por tanto debería ser igual a 10, como así es sea cual sea el valor de *x* e *y*. Luego, las dos ecuaciones dicen lo mismo.

Resolución de problema



Vamos a ver algunas aplicaciones de los sistemas para resolver problemas. Es importante que aprendas cómo hacer el planteamiento de la solución.

En primer lugar, puedes consultar el siguiente ejemplo 1:

Ejemplo 2

Descomponer el número 48 en dos sumandos, tales que dividiendo uno por otro se obtenga de cociente 3 y 4 de resto.

Planteamiento:

- En primer lugar decidimos el nombre de las incógnitas (en este caso hablan de dos sumandos):
  Sea *x* un sumando
  Sea *y* el otro sumando
- Ahora volvemos a leer el problema traduciendo el lenguaje ordinario al lenguaje matemático o algebraico, y obtenemos las dos ecuaciones del sistema:
  - Si los denomina sumandos y son la descomposición de 48, entonces
    $\boxed{x+y=48}$
  - Ahora nos hablan de dividir uno entre otro, y del cociente y resto de dicha división. La regla de la división es D = d(C + R donde D = dividendo, d = divisor C = cociente y R = resto. Por tanto, en nuestro caso, si elegimos dividir *x* entre *y*:
    $\boxed{x=y\cdot 3+4}$
- Por último, resolvemos el sistema: $\begin{cases} x+y=48 \\ x=3y+4 \end{cases}$

  Como tenemos despejada la x en la segunda ecuación lo haremos por el **método de sustitución**:

  $$\begin{cases} x+y=48 \\ x=3y+4 \end{cases} \Rightarrow$$
  $$3y+4+y=48$$
  $$3y+y=48-4$$
  $$4y=44$$
  $$y=\frac{44}{4}$$
  $$y=11$$

  Por último, sustituimos el valor de la *y* en la primera ecuación y obtenemos el valor de la x:
  $x=3y+4 \Rightarrow x=3\cdot 11+4 \Rightarrow x=33+4 \Rightarrow x=37$
- **Solución del problema**: El primer sumando es 37 y el segundo es 11.
- **Comprobación de la solución**: Cumplen la primera ecuación 37 + 11 = 48, y para que cumplan la segunda, será $D=d\cdot c+r \rightarrow 37=11\cdot 3+4$

Ejemplo 3

La razón de dos números es $\frac{3}{4}$. Si se suman 10 unidades a cada uno de ellos, la razón de los nuevos números es $\frac{11}{14}$. ¿Cuáles son los números?

Planteamiento:

- En primer lugar decidimos el nombre de las incógnitas (en este caso hablan de dos sumandos):
  Sea *x* un número
  Sea *y* el otro número
- Ahora volvemos a leer el problema traduciendo el lenguaje ordinario al lenguaje matemático o algebraico y obtenemos las dos ecuaciones del sistema:
  - Si la razón de ambos números es $\frac{3}{4}$, quiere decir $\boxed{\frac{x}{y}=\frac{3}{4}}$
  - Si se suma 10 a cada uno, los números serán numerador x + 10, denominador y + 10, por tanto su razón será: $\boxed{\frac{x+10}{y+10}=\frac{11}{14}}$
- Por último, resolvemos el sistema $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \\ \frac{x+10}{y+10}=\frac{11}{14} \end{cases}$

  Primero escribimos el sistema de forma usual:
  $$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \\ \frac{x+10}{y+10}=\frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=3y \\ 14(x+10)=11(y+10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y=0 \\ 14x+140=11y+110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y=0 \\ 14x-11y=110-140 \end{cases}$$
  $$\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 14x-11y=-30 \end{cases}$$
  Ahora lo resolvemos por el **método de reducción**:
  - Multiplicamos la primera ecuación por 11 y a segunda por 3 y obtenemos:
    $$\begin{cases} 44x-33y=0 \\ 42x-33y=-90 \end{cases}$$
  - Si cambiamos de signo la segunda ecuación y sumamos, obtenemos:
    $$\begin{cases} 44x-33y=0 \\ -42x+33y=90 \end{cases}$$
  - Por tanto, $2x=90 \Rightarrow x=\frac{90}{2} \Rightarrow x=45$
  - Sustituimos el valor de *x* en la primera ecuación y calculamos el valor de *y*:
    $4\cdot 45-3y=0 \Rightarrow 180-3y=0 \Rightarrow -3y=-180 \Rightarrow y=\frac{-180}{-3} \Rightarrow y=60$
- **Solución del problema:** el numerador 45 y el denominador 60
- **Comprobación de la solución:** La primera ecuación se cumple puesto que $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$ una vez que hemos simplificado la fracción dividiendo por 15 ambos miembros de la fracción $\frac{45}{60}$. En cuanto a la segunda ecuación, debe ser que $\frac{45+10}{60+10}=\frac{11}{14}$ que también se cumple si

simplificamos la fracción $\frac{55}{70}$ dividiendo por 5 ambos miembros de dicha fracción.

Ejemplo 4

Un número capicúa de 4 cifras tiene la forma abba. Si intercambiamos las cifras obtenemos baab que es el capicúa asociado. Encontrar un capicúa de cuatro cifras de forma que las cifras sumen 26 y la diferencia entre el capicúa y su asociado sea 891.

Planteamiento:

- En primer lugar decidimos el nombre de las incógnitas (en este caso hablan de dos sumandos):
  Sea *a* un número
  Sea *b* el otro número
- Ahora volvemos a leer el problema traduciendo el lenguaje ordinario al lenguaje matemático o algebraico y obtenemos las dos ecuaciones del sistema:
  - La suma de las cifras es 26, por tanto:
    $a+b+b+a=26$
    $2a+2b=26$
    $\boxed{a+b=13}$
  - Vamos a recordar, en primer lugar, que un número se puede escribir como una combinación de sus cifras, por ejemplo el número 2456 representa:
    2456 = 2 millares, 4 centenas, 5 decenas y 6 unidades
    por tanto, se puede expresar también como:
    $2456=2\cdot 1000+4\cdot 100+5\cdot 1+6$
    Si ahora pensamos en el número abba, se escribirá como:
    $a\cdot 1000+b\cdot 100+b\cdot 10+a$
    Y el número baab se escribe como:
    $b\cdot 1000+a\cdot 100+a\cdot 10+b$
    Y como el problema nos dice que se diferencian en 891 tendremos:
    $(1000a+100b+10b+a)-(1000b+100a+10a+b)=891$
    Si ahora, escribimos la ecuación de la forma usual:
    $100a+100b+10b+a-1000b-100a-10a-b=891$
    $891a-891b=891$
    Si dividimos toda la ecuación entre 891, la hacemos más simple:
    $\boxed{a-b=1}$
- Por último, resolvemos el sistema $\begin{cases} a+b=13 \\ a-b=1 \end{cases}$

  Si utilizamos el método de igualación, obtenemos:
  $$\begin{cases} a+b=13 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=13-b \\ a=1+b \end{cases} \Rightarrow 13-b=1+b \Rightarrow 13-1=b+b \Rightarrow 12=2b \Rightarrow b=\frac{12}{2} \Rightarrow b=6$$
  Sustituimos el valor de **b** en la segunda ecuación: $a=1+6 \Rightarrow a=7$
- **Solución del problema:** el número es 7667
- **Comprobación de la solución:** Efectivamente 7667 es capicúa. La suma de sus cifras es 7+6+6+7=26 como pedía la primera ecuación. Y como su capicúa asociado es 6776. Entre ellos se cumple que: 7667-6776=891 como pedía la segunda ecuación.

Para saber más:

En esta interesante página encontrarás un resumen de lo que hemos explicado hasta ahora, con ejemplos y ejercicios para resolver.
http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/sistema.htm
Resumen teórico de lo que hemos visto hasta ahora:
http://www20.brinkster.com/fmartinez/algebra7.htm [Versión en cache]

Página con más problemas resueltos que requieren sistemas de ecuaciones durante su resolución:
http://usuarios.lycos.es/calculo21/id231.htm