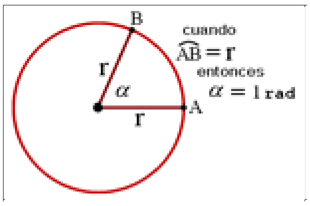
Radianes

Los grados sexagesimales, que son los más frecuentes, se utilizan para dividir a la circunferencia en 360 partes iguales. Si colocamos el eje de coordenadas en la circunferencia tendremos que éste coincide con el 90, 180, 270 y 360 grados.

Otra de las medidas de ángulos más utilizada en trigonometría es el **radián**.

> El **radián** se define como el ángulo que limita un arco cuya longitud es igual al radio del arco.

Por tanto, el ángulo, ***α***, completo en radianes de una circunferencia de radio, ***r***, sería:



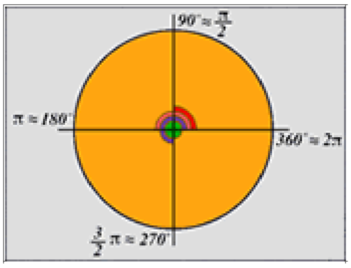
$$\alpha_{circunferencia} = \frac{L_{circunferencia}}{r} = \frac{2 \times \pi \times r}{r} = 2 \times \pi$$

Su símbolo es ***rad***.

$$1rad = \frac{360^0}{2 \times \pi} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45''$$

$$1^0 = \frac{2 \times \pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745rad$$

La equivalencia entre grados y radianes la podemos observar en la circunferencia, y calcular para cualquier ángulo:



$$\pi\ radian \longrightarrow 180°$$
$$X\ radian \longrightarrow 90°$$

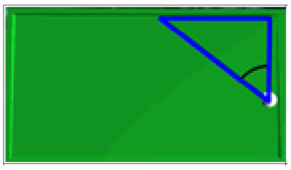
Despejamos y obtenemos que:

$$X = \frac{90 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{2}$$

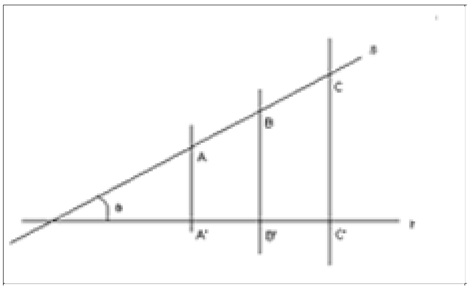
Ejemplos:

- ¿Cuántos radianes mide un ángulo de 45º?
  Calculamos la proporción:
  $$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{45^\circ}{x \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{45 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$
- ¿Cuántos grados son 2 rad?
  Calculamos la proporción:
  $$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{2 \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 180}{\pi} = \frac{360}{3{,}14} \cong 114{,}65^\circ = 114^\circ 39'$$
- ¿Cuántos radianes son 60º,30'?
  En primer lugar pasamos los minutos a grados utilizando la calculadora: escribimos 60,30 y el resultado es 60,5º. Ahora hacemos la proporción entre grados y radianes:
  $$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{60{,}5^\circ}{x \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{60{,}5 \cdot \pi}{180} = \frac{60{,}5 \cdot 3{,}14}{180} = 1{,}06 \text{ rad}$$
- ¿Cuántos grados son 0,73 radianes?
  Escribimos la proporción entre grados y radianes:
  $$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{0.73 \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{180 \cdot 0{,}73}{\pi} = \frac{180 \cdot 0{,}73}{3{,}14} = 41{,}85^\circ = 41^\circ 51'$$

¿Qué es la trigonometría?



Cuando los grandes genios del billar juegan tienen en su mente qué ángulo de abertura tiene que tener la bola para dar en el sitio deseado. Como vemos si trazamos una línea recta y otra en oblicuo desde la bola hasta la mesa tenemos un triángulo rectángulo. En este triángulo, si mido, conoceré la hipotenusa y los dos catetos, pero desconozco el ángulo que debe formar la mesa y la trayectoria de la bola. Para ello, tenemos la solución en la **trigonometría**.

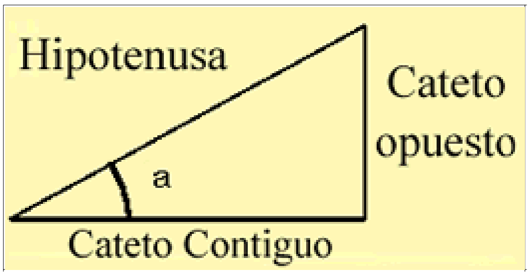


Consideremos un ángulo agudo $\hat{a}$ y las recta r y s que forman los lados del ángulo, tracemos distintas rectas perpendiculares a la recta r por distintos puntos de la recta s. La figura que nos aparece son distintos triángulos rectángulos que están en posición de Thales (recuerda el tema anterior). Por tanto, si aplicamos el teorema de Thales tenemos que:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{0A}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OC}}$$

.

Si nos fijamos, como son triángulos rectángulos, hemos calculado el cociente entre el cateto opuesto al ángulo dibujado y la hipotenusa.



Este cociente que depende de la amplitud de ángulo $\hat{a}$, y no depende del triángulo rectángulo donde lo midamos, lo denominamos **seno de** $\hat{a}$**.**

Por tanto, definiremos:

$$\text{sen a} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$$

Podríamos hacer el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa y obtendríamos otro cociente distinto a éste, que denominaremos **coseno de** $\hat{a}$**.**

$$\cos \text{a} = \frac{\textit{cateto contiguo}}{\textit{hipotenusa}}$$

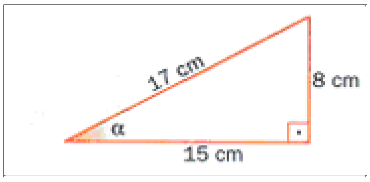
O bien podríamos hacer el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo, y obtendríamos otro número que llamaremos **tangente de** $\hat{a}$.

$$\textit{tag} \text{ a} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto contiguo}}$$

Importante:
Como la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre mayor que los catetos el seno y el coseno tienen que ser menores de 1.

Ejemplo

- Calcula el valor del seno, el coseno y la tangente del ángulo (en los siguientes triángulos).



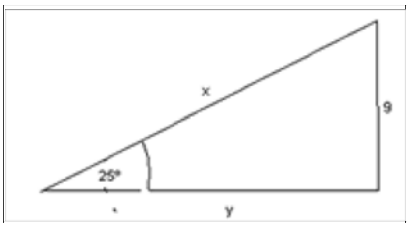
sen $\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{8}{17} = 0{,}47$

cos $\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{15}{17} = 0{,}88$

tag $\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{8}{15} = 0{,}53$

Ejemplo

- Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 25º y su cateto opuesto mide 9 cm. Calcula la hipotenusa y el otro cateto.



Como conocemos un ángulo y el cateto opuesto para calcular la hipotenusa aplicaremos el sen y para calcular el cateto contiguo aplicaremos la tangente.

sen 25 = $\dfrac{9}{x} \Rightarrow 0{,}42 = \dfrac{9}{x} \Rightarrow x = \dfrac{9}{0{,}42} = 21{,}42$ cm

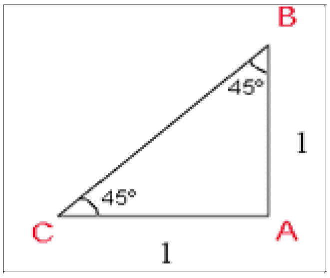
Para calcular el seno escribimos 25 y pulsamos la tecla **sin**.

tag 25 = $\dfrac{9}{y} \Rightarrow 0{,}47 = \dfrac{9}{y} \Rightarrow y = \dfrac{9}{0{,}47} = 19{,}15$ cm

Para calcular la tangente escribimos 25 y pulsamos en la tecla **tan**.

Razones trigonométricas de 45º

Consideremos un triángulo rectángulo isósceles como el que aparece en la figura. Al ser isósceles tiene también dos ángulos iguales, y por tanto, los ángulos agudos miden 45º .



Medimos los catetos y supongamos que miden 1 cm cada uno. La medida de la hipotenusa la calculamos mediante el teorema de Pitágoras:

$$\overline{CB} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Ahora que conocemos los tres lados del triángulo rectángulo podemos calcular las razones trigonométricas del ángulo de 45º:

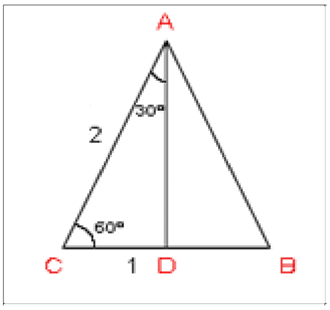
$$\text{sen } 45 = \frac{\text{cateto apuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45 = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tag\ 45 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{1}{1} = 1$$

Razones trigonométricas de 30º y 60º

Dibujamos un triángulo equilátero, por tanto sus ángulos miden 60º y los tres lados son iguales. Supongamos que los lados miden 2 cm.



Trazamos la altura AD, ésta divide al triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos son de 30º y 60º. La hipotenusa del triángulo

ACD mide 2 cm y un cateto 1 cm. Calculamos por el teorema de Pitágoras el otro cateto y obtenemos:

$$\overline{AD} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} 60 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60 = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

$$tag\ 60 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 30 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30 = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

tag 30 = $$tag\ 30 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Cálculo de las razones trigonométricas con calculadora

Puede ocurrir que queramos calcular la razón trigonométrica de un ángulo que no sea de 30º, 45º o 60º, para hacerlo utilizaremos la calculadora científica.

Todas las calculadoras científicas del mercado disponen de teclas para las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Sin embargo, es importante tener en cuenta dos factores de interés:

- En algunos modelos se introduce el valor del ángulo y luego se pulsa la tecla de la razón trigonométrica para obtener su valor, mientras que en otros se hace justamente al revés, primero se pulsa la tecla de la razón deseada, luego se introduce el valor del ángulo y por último la tecla de resultado (generalmente =) nos muestra el resultado en la pantalla.

Las calculadoras científicas utilizan tres sistemas de medida angular, los ***radianes*** (RAD), los ***grados sexagesimales*** (DEG) y los ***gradianes*** (GRAD). Es muy importante tener en cuenta este factor, ya que no es lo mismo:

$$sin(100^{o}) = 0{,}984807753 \text{ que}$$

$$sin(100\ rad) = -\ 0{,}506365641 \text{ que}$$

$$sin(100gra) = 1.$$

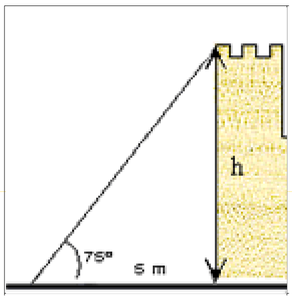
La conversión entre los sistemas es la siguiente: **180^{o} = π *rad* = 200 *gra***

Aplicaciones de la trigonometría

Muchas situaciones reales se pueden esbozar en un triángulo rectángulo, lo que nos permitirá resolver el problema con lo que hemos visto de las razones trigonométricas.

Ejemplo 1:

Cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 75º la sombra proyectada por una torre es de 5 m ¿cuál es la altura de la torre?



El dibujo esquematiza la torre, su sombra y los rayos solares que forman un triángulo rectángulo del que conocemos: un ángulo 75º, el cateto contiguo de 5 m.

Si queremos calcular la altura h de la torre, que es el cateto opuesto, aplicaremos la razón trigonométrica que relaciona los catetos, es decir la tangente.

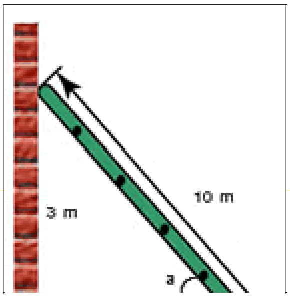
$$tag\ 75 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Calculamos la tangente de 75º con la calculadora y obtenemos que tag 75 = 3,73, por tanto:

$$3{,}73 = \frac{h}{5} \Rightarrow h = 3{,}73 \cdot 5 = 18{,}65\ m$$

Ejemplo 2

¿Qué ángulo formará con el suelo una escalera de 10 m de larga si apoyada en una pared alcanza una altura de 3 m?



El dibujo simplifica el problema, donde se ve que se forma un triángulo rectángulo del que conocemos la hipotenusa 10 m y el cateto opuesto 3 m. Queremos conocer el ángulo que forma el cateto opuesto con la hipotenusa.

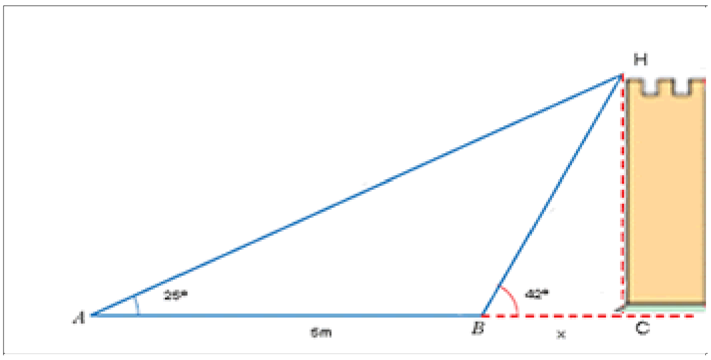
La razón trigonométrica que relaciona un ángulo, el cateto opuesto y la hipotenusa es el seno por tanto:

$$sen\ a = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Sustituyendo tenemos que $sen\ a = \frac{3}{10} \Rightarrow sen\ a = 0,3$. Utilizando la calculadora obtenemos que $a = 17,45^{o}$ es decir 17º 27 '.

Ejemplo 3

Vamos a calcular la altura de una torre. El método a seguir es:
Desde un punto B y con el teodolito dirigir una visual al punto mas alto H y medimos el ángulo de la visual 42º
Nos alejamos 5 m del punto B hasta el punto A y medimos el ángulo de la visual 25º
Esto nos permite medir la altura de la torre.



En el dibujo $\overline{HC}$ es la altura de la torre, $\overline{CB}$ es una longitud desconocida x y $\overline{BA}$ es la distancia medida 5m.

Tenemos pues dos triángulos rectángulos y en los dos relacionamos un ángulo con el cateto opuesto y con el cateto contiguo, usaremos por tanto la razón trigonométrica de la tangente y tenemos:

En el triángulo $H\hat{C}B$: $tag\ 42^{o} = \frac{h}{x}$

En el triángulo $\overset{\Delta}{HCA}$: $tag\ 25^{o} = \dfrac{h}{x+5}$

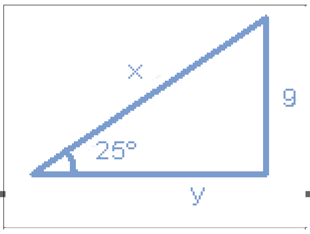
Calculamos las tangentes con la calculadora y obtenemos:

$$\begin{array}{l} 0{,}90 = \dfrac{h}{x} \quad \Rightarrow h = 0{,}90x \\ 0{,}46 = \dfrac{h}{x+5} \Rightarrow h = 0{,}46(x+5) \\ \text{igualando ambos valores de } h \\ \quad 0{,}90x = 0{,}46(x+5) \\ \quad 0{,}90x = 0{,}46x + 2{,}3 \\ \quad 0{,}54x = 2{,}3 \\ \quad x = \dfrac{2{,}3}{0{,}54} = 4{,}26 \end{array}$$

Deducimos: $h = 0{,}9 \cdot 4{,}26 = 4{,}69$ m

Más... Ejemplo 1

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 25º y su cateto opuesto mide 9 cm. Calcula la hipotenusa y el otro cateto.



Como conocemos un ángulo y el cateto opuesto para calcular la hipotenusa aplicaremos el seno y para calcular el cateto contiguo aplicaremos la tangente.

$$\text{sen } 25^{o} = \frac{9}{x} \Rightarrow 0{,}42 = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{0{,}42} = 21{,}42\ cm$$

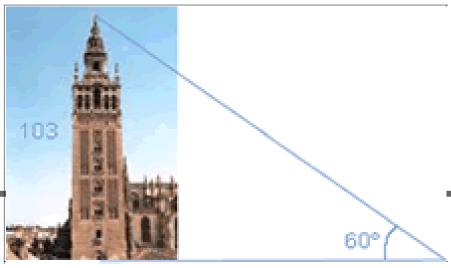
Para calcular el seno en la calculadora, escribimos 25 y pulsamos la tecla sin

$$tan\ 25^{o} = \frac{9}{y} \Rightarrow 0{,}47 = \frac{9}{y} \Rightarrow y = \frac{9}{0{,}47} = 19{,}15\ cm$$

Para calcular la tangente en la calculadora, escribimos 25 y pulsamos en la tecla tan.

Más... Ejemplo 2

La altura de la Giralda es de 103 m. Determina la longitud de la sombra que proyecta cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 60º

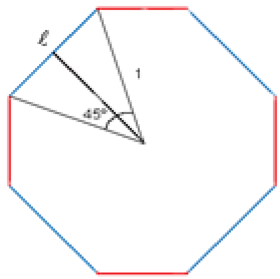


Si nos fijamos en el dibujo tenemos un triángulo rectángulo del cual conocemos el cateto opuesto y el ángulo y queremos conocer el cateto contiguo, aplicamos entonces la tangente.

$$tag\ 60° = \frac{103}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{103}{x} \Rightarrow x = \frac{103}{\sqrt{3}} = \frac{103}{1,73} = 59,47\ m$$

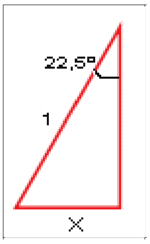
Más... Ejemplo 3

Calcula el perímetro de un octógono (polígono de 8 lados) regular inscrito en un círculo de radio 1 m



En primer lugar calcularemos el ángulo central que vale $\frac{360}{8} = 45°$.

Como el triángulo tiene por ángulo la mitad del central vale 22,5º. También conocemos la hipotenusa, que es el radio y para hallar la mitad del lado aplicamos el seno:

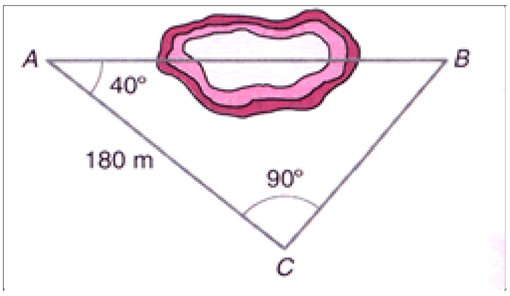


$$sen\ 22,5° = \frac{x}{1} \Rightarrow 0,38 = \frac{x}{1} \Rightarrow x = 0,38$$

Luego el lado vale el doble l = 0,76 y como tiene 8 lados iguales el perímetro será $8 \cdot 0,76 = 6,08$ m.

Más... Ejemplo 4

Dos casas A y B están separadas por una charca. Un topógrafo camina 180 m desde A formando un ángulo de 40º, hasta un punto C, desde el que ve la casa B con un ángulo de 90º. Calcula la distancia entre las casas.

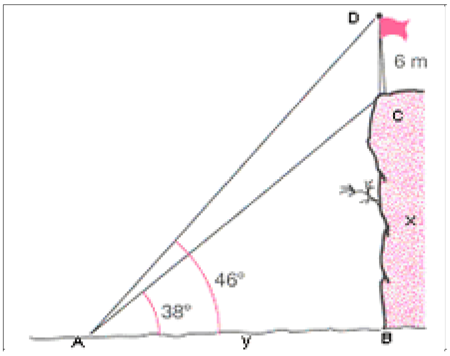


Si nos fijamos en el dibujo tenemos un triángulo rectángulo del que conocemos el cateto contiguo y queremos conocer la hipotenusa. Llamamos x a la hipotenusa AB, por lo tanto aplicamos el coseno tenemos:

$$\cos 40 = \frac{180}{x} \Rightarrow 0{,}77 = \frac{180}{x} \Rightarrow x = \frac{180}{0{,}77} = 233{,}77\ m$$

Más... Ejemplo 5

Desde un punto a ras de suelo, los ángulos de elevación que presentan la base y la punta de una bandera de 6 m de altura colocada sobre un acantilado, son 38º y 46º. Calcula la altura del acantilado.



Consideramos los triángulos rectángulo ABC y ABD de los cuales conocemos los dos catetos y el ángulo. Utilizando la tangente tenemos:

$$\begin{matrix} \text{tag } 38 = \dfrac{x}{y} \\ \text{tag } 46 = \dfrac{x+6}{y} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0{,}78 = \dfrac{x}{y} \\ 1{,}04 = \dfrac{x+6}{y} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0{,}78y \\ x + 6 = 1{,}04y \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 0{,}78y + 6 = 1{,}04y \Rightarrow 0{,}26y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{0{,}26} = 23{,}08$$

Por tanto, $x = 0{,}78 \cdot 23{,}08 = 18$ m

Para calcular en la calculadora las tangentes de 38º y 46º escribimos 38 o 46 y pulsamos la tecla tan y nos aparecen los resultados respectivamente.

Para saber más:

1. La trigonometría también sirve para calcular alturas inaccesibles, es decir, cuando no se puede llegar al pie del edificio, la cúpula de una iglesia, la altura de una montaña o de una torre que está rodeada de edificios, etc.
Para ello se utiliza un instrumento que mide los ángulos y que se llama teodolito.

Si quieres saber algo más sobre este instrumento entra en las páginas:

- http://www.cielosur.com/topografia.htm y en

- http://es.wikipedia.org/wiki/Teodolito [versión en caché]

2. Trigonometría y aplicaciones:
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/trigonometria/trigonometria.htm
3. Resumen trigonométrico y algunos ejemplos:
http://www.educarchile.cl/home/psu/eje_tematico_semanal_contenidos.asp?id_eje_tematico_semanal=38