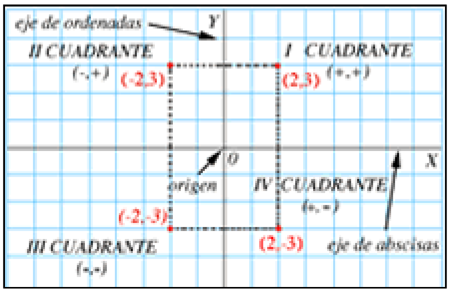
Ejes cartesianos. Coordenadas de un punto

Los elementos de una función son:

- la **variable independiente** x , que se representa sobre el eje horizontal o eje de abscisas,
- la **variable dependiente** y , que se representa sobre el eje vertical o eje de ordenadas.

Estos ejes dividen el plano en 4 partes llamadas **cuadrantes**:



- En el primer cuadrante se colocan los valores positivos para las dos variables.

  Vemos un ejemplo: cada punto de la gráfica tiene dos coordenadas (primera y segunda) y un punto en general se designa por (x, y). Vamos a representar el punto (2,3). Por lo tanto nos desplazamos dos unidades a partir del origen a su derecha y nos desplazamos tres unidades a partir del origen hacia arriba. Donde se corten ambos puntos será el punto (2,3).

- En el segundo cuadrante se colocarán los valores negativos para la variable independiente y positivos para la variable dependiente.
- En el tercero se colocarán los valores negativos para las dos variables.
- Y el en cuarto cuadrante, los positivos para la x y los negativos para la y .

Recuerda que siempre se colocará primero y entre paréntesis el valor de la x .

Para saber más

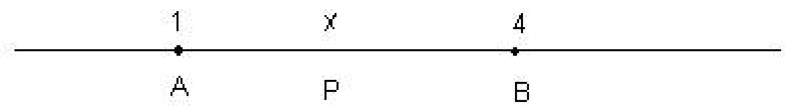
1. Coordenadas de un punto
http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/desarrolloconcepto/Coordenadas/Coordenadas_desarrollo.htm [versión en caché]
http://www.escolar.com/avanzado/matema025.htm [versión en caché]
2. Practica con las coordenadas de un punto
http://centros5.pntic.mec.es/~barriope/matematicas/geocabri/coordenadas.htm
http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/concomputador/coordenadas_computador.htm

Intervalos

> ***Definición:*** *Un intervalo es un subconjunto de números reales que se representa en la recta mediante un segmento o una semirrecta*

Observa los puntos A y B en la recta que aparece en la imagen. A es el punto que representa al número real 1, y B es el punto que representa al número real 4. Cualquier punto P situado entre ellos representa a un número real x, tal que 1 < x < 4.

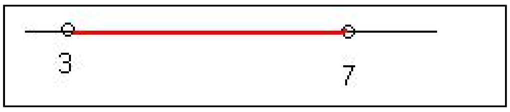
> ***Definición:***
> *Al conjunto de todos los números comprendidos entre 1 y 4 se le llama intervalo de extremos 1 y 4.*



Tipos de intervalos

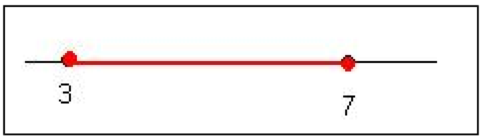
- Se denomina **Intervalo abierto** de extremos a y b, y se escribe (a,b) o]a,b[, a los números reales que cumplen Se denomina **Intervalo abierto** de extremos a y b, y se escribe (a,b) o]a,b [, a los números reales que cumplen $a < x < b$

  Ejemplo: (3,7) o bien]3,7[, se define como los números reales x, tales que $3 < x < 7$, y se representa como indica la figura:



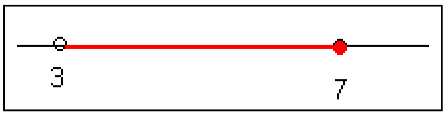
- Se denomina **Intervalo cerrado** de extremos a y b, y se escribe [a,b] a los números reales que cumplen $a \leq x \leq b$

  Ejemplo: [3,7], se define como los números x tales que $3 \leq x \leq 7$, y se representa como indica la figura:



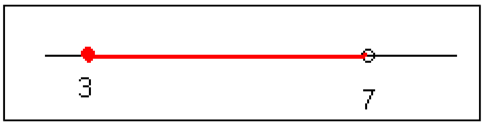
- Se denomina **Intervalo semiabierto por la izquierda** de extremos a y b, y se escribe (a,b] o]a,b] a los números reales que cumplen $a \leq x \leq b$

Ejemplo: (3,7] o bien]3,7], y se define como los números x tales que $3 \leq x \leq 7$, y se representa como indica la figura:



- Se denomina **Intervalo semiabierto por la derecha** de extremos a y b, y se escribe [a,b) o [a,b[a los números reales que cumplen $a \leq x \leq b$

Ejemplo: [3,7) o bien [3,7[, se define como los números x tales que $3 \leq x < 7$, y se representa como indica la figura:



Ejemplos:

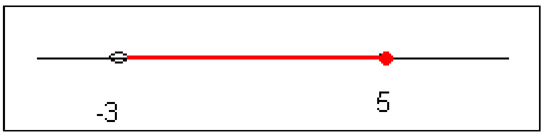
1. **Escribe dos números uno racional y otro irracional del intervalo [-1,4[:**

    - Racional 2,23
    - Irracional 1,15115111511115.....

2. **Di qué números de los siguientes 0; 0,5 ; 2; 2,1 pertenecen al intervalo [0,2]:**

    - Pertenecen 0; 2; 0,5

3. **¿Qué intervalo representa el siguiente subconjunto de la recta real?**



4. **Escribe un intervalo cerrado cuyos extremos sean dos números con dos cifras decimales que contengan a $\sqrt{5}$**

    Por ejemplo, y entre otros podrías decir el intervalo [2,23 ; 2,24]

Para saber más

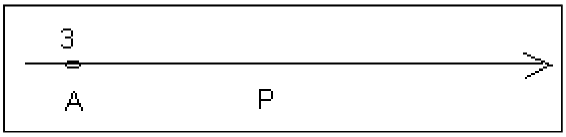
1. Practica representando intervalos en la recta real
http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Numeros_Reales_Aproximaciones/numeros6.htm

Funciones

Semirrectas

Observa el punto A en la recta que aparece en la imagen. Si A representa al número real 3, cualquier punto P situado a la derecha de A se corresponde con un número real x, tal que x > 3.

Al conjunto de todos los números que son mayores que tres se llama **semirrecta** de origen 3, y se representa como $(3, +\infty)$.



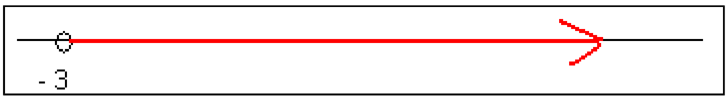
Área de Matemáticas - Módulo IV

Tipos de semirrectas

Tipos de semirrectas

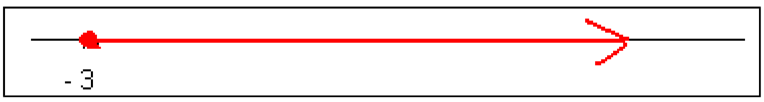
- Se denomina **Semirrecta abierta positiva de origen a** y se escribe $(a , +\infty)$ a los números reales x, que cumplen $x > a$.

  Ejemplo: $(-3 , +\infty)$ se define como los números x tales que x > - 3 y se representa como indica la figura:



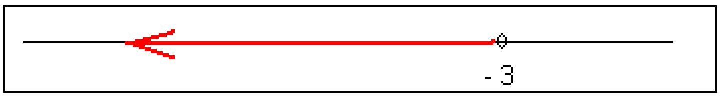
- Se denomina **Semirrecta cerrada positivade origen a** y se escribe $[a , +\infty)$ a los números reales x, que cumplen $x \geq a$.

  Ejemplo: $[-3, +\infty)$ se define como los números x tales que $x \geq -3$, y se representa como indica la figura.



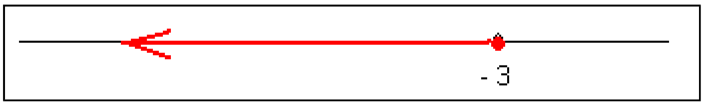
- Se denomina **Semirrecta abierta negativa de origen a** y se escribe $(-\infty , a)$ a los números reales x, que cumplen $x < a$.

Ejemplo: $(-\infty, -3]$, se define como los números x tales que $x < -3$ y se representa como indica la figura:



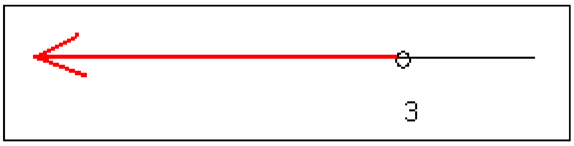
- Se denomina **Semirrecta cerrada negativa de origen a** y se escribe $(-\infty, a]$ a los números reales x, que cumplen $x \leq a$.

Ejemplo: $(-\infty, -3]$ se define como los números x tales que $x \leq 3$ y se representa como indica la figura.



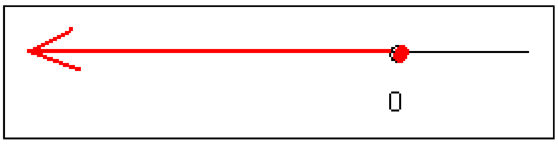
Ejemplo 1:

Dibuja la siguiente semirrecta (-∞, 3)



Ejemplo 2:

¿Qué semirrecta representa el siguiente subconjunto de la recta real?



La semirrecta (-∞, 0]

Ejemplo 3:

Escribe la semirrecta que corresponde a: “Números reales x, tales que x ≥ -1"

La semirrecta: [-1 , +∞)

Para saber más

1. Práctica representando semirrectas en la recta real en esta página
http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Numeros_Reales_Aproximaciones/numeros6.htm

Funciones

Concepto de función

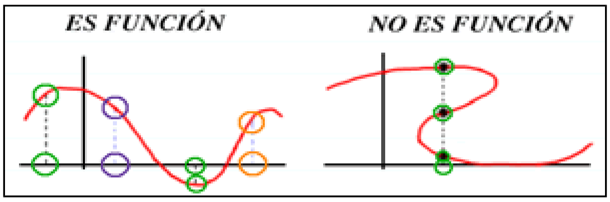
Estamos acostumbrados a **relacionar** distintos conjuntos de cosas, por ejemplo decimos:

- El precio que pagamos al comprar naranjas depende del número de kilos que compremos.
- Los kilómetros que recorre un coche dependen del tiempo que esté circulando.
- El precio de la gasolina depende del precio del barril de petróleo.

Estas expresiones usuales relacionan dos cantidades, que en matemáticas llamaremos **variables** y representaremos por x e y.

- Si nos fijamos en los ejemplos una no depende de la otra. Por tanto una es independiente y la llamaremos **variable independiente (x)**.
- La otra es dependiente de la primera, es decir su valor depende del valor que le demos a la **x** y la llamaremos **variable dependiente (y)**.

*Una **función** es una relación entre dos conjuntos de números, de forma que a cada valor de la variable independiente le corresponda un solo valor de la variable dependiente.*



Por ejemplo, si relacionamos los números naturales de la siguiente forma:

Ejemplo 1: a cada número natural le asociamos un múltiplo

Esto sería una relación. Al número 4 le correspondería el 12 que es múltiplo de 4, pero también le correspondería el 8 que también es múltiplo, por lo tanto esta relación no es una función.

Ejemplo 2: a cada número le asociamos su cuadrado.

Esto sí es una función ya que al multiplicar un número por si mismo solamente se obtiene una solución.

Para saber más

1. Comprueba si es o no una función
http://descartes.cnice.mecd.es/4a_eso/El_lenguaje_de_las_funciones/funcion.htm

Formas de expresar una función

Las funciones se suelen escribir en general de la forma donde $\boxed{y = f(x)}$

x es la variable independiente,
y la variable dependiente,
f representa la relación entre ellas.

Hay varias formas de expresar la relación entre ambas variables, como veremos en los apartados siguientes:

- **Con una expresión algebraica**
- **Con el proceso**
- **Mediante una tabla de valores**
- **Mediante una gráfica**

Con una expresión algebraica

Por ejemplo, escribimos $y = 2x + 3$ o bien con la expresión $f(x) = 2x + 3$. Esta expresión me dice cómo tengo que calcular el valor de y cuando le dé un valor a x.

Si $x = 2$, para conocer lo que vale y sustituimos en la expresión algebraica x por 2 y calculamos lo que vale y obteniendo:

$y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$, que resumiremos así:
para $x = 2 \rightarrow y = 7$ o bien con la expresión $f(2) = 7$

También podemos resolver el problema al revés. Si conocemos el valor de y, y queremos averiguar el valor de x. Por ejemplo, si la función es $y = x^2 + x$ y queremos averiguar qué valor de x hace que y sea igual a 6, procederemos de la siguiente forma.

Sustituimos la y por 6 y calculamos x:

$$6 = x^2 + x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x = \frac{-4-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Por tanto hay dos valores x que hace que y valga 6:

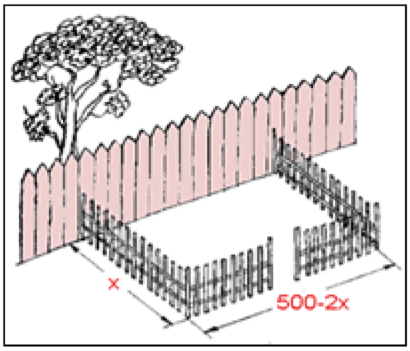
$$\boxed{\begin{array}{l} f(2) = 6 \\ f(-3) = 6 \end{array}}$$

Este cálculo no es siempre posible hacerlo, depende del tipo de ecuación que resulte.

Con el proceso

Por ejemplo:

Una persona quiere hacer una cerca de forma rectangular con 500 metros de valla y aprovechando una pared.



Si quisiéramos conocer el área que es capaz de acotar según sea la profundidad de la cerca (en el dibujo la variable x) podríamos hacer los siguientes cálculos:

Para el caso de x = 200 m, la base valdrá 500 - 200 - 200 = 100 m y por tanto el área encerrada será A = 200 (100 = 20.000 m^2.

En este caso podemos calcular la expresión algebraica llamando x a la profundidad y calculando el área:

si x es la profundidad, la anchura será 500 - 2 x .

Por tanto el área será: $A(x) = x \cdot (500 - 2x)$, operando obtenemos $\boxed{A(x) = 500x - 2x^2}$

En este caso a la función la hemos representado por la letra A, por ser la inicial de área pero también podíamos poner $y = 500x - 2x^2$ o bien $f(x) = 500x - 2x^2$.

Mediante una tabla de valores

Se suele utilizar cuando los datos son experimentales y no es posible encontrar una expresión algebraica.
Por ejemplo, si queremos dar las temperaturas mínimas en un año por meses:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatura	-4	0	2	15	18	19	25	27	29	22	12	4

Si conocemos la expresión algebraica siempre es posible construir una tabla de valores. Por ejemplo en el caso de la función $y = 2x - 5$ podemos construir una tabla de valores, calculando los valores de y para los valores que le asignamos a x.

x	2	-4	3	0	1	-1
y	-1	-13	1	-5	-3	-7

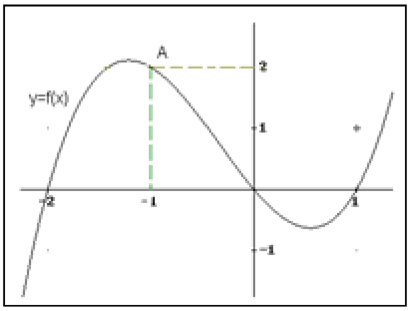
En este caso a la función la hemos representado por la letra A, por ser la inicial de área pero también podíamos poner $y = 500x - 2x^2$ o bien $f(x) = 500x - 2x^2$.

Para saber más

1. Tabla de valores de una función. Trabaja con el ejemplo 3 de esta página
http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Funciones_formas_de_expresar/introduc.htm

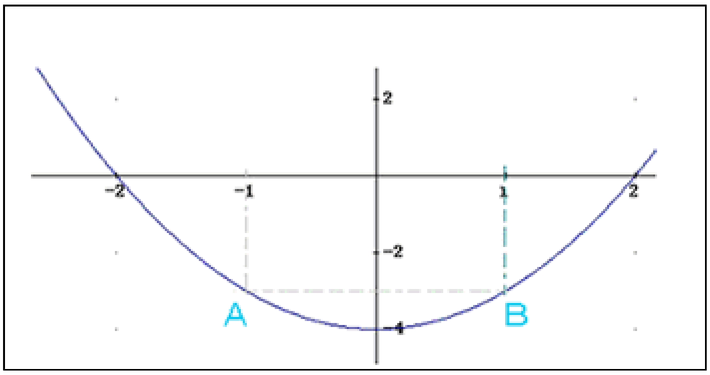
Mediante una gráfica

Si fuéramos capaces de representar en los ejes cartesianos todos los puntos de una función obtendríamos lo que se llama **gráfica de la función**.



El dibujo representa el ejemplo de una función.

Si queremos calcular el valor de Y para $x = -1$ trazamos una recta perpendicular al eje X que pase por –1 y vemos que corta a la gráfica de la función en el punto A. Ahora trazamos por él una recta horizontal y corta al eje Y en el 2, por tanto para $x = -1 \to y = 2 \text{ o bien } f(-1) = 2$



Para hacer el cálculo inverso, es decir, conociendo el valor de Y, queremos calcular el valor de x: primero se traza la recta horizontal por y = –3 que corta en este caso a la gráfica en dos puntos A y B y por cada uno de ellos se traza la recta perpendicular al eje X, que cortan a éste en 1 y –1 por tanto f(1) = -3 y f(-1) = -3

La gráfica también nos permite ver si se corresponde con una función o no. Si una recta vertical corta a la gráfica en más de un punto el dibujo se corresponde con una relación pero no es una función.

Para saber más

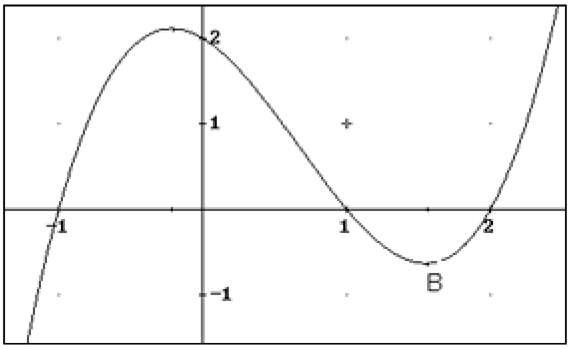
1. Expresión gráfica de una función. Trabaja con el ejemplo 2 de esta página.
http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Funciones_formas_de_expresar/introduc.htm

Características de una función

Vamos a ver algunos elementos de las funciones que nos permitirán entender sus características y propiedades más importantes.

- **Dominio**: se llama dominio de una función al conjunto de valores que puede tomar la x.
- **Recorrido**: Se llama recorrido de una función al conjunto formado por todos los valores de y resultantes de los valores de x.
- **Puntos de corte con los ejes:**

Observa la gráfica del dibujo.



Esta gráfica toca al eje X en los puntos (-1 , 0) ; (1 , 0) y (2 , 0) y al eje Y en el punto (0 , 2)
Los puntos (-1 , 0) ; (1 , 0) y (2 , 0) se denominan los **puntos de corte con el eje X** y el punto (0 , 2) es el **punto de corte con el eje Y.**

Es decir los puntos de corte con el eje X son aquellos en los cuales la gráfica corta al eje X y el punto de corte con el eje Y es aquel en el que la gráfica corta al eje Y.

Cálculo de los puntos de corte con los ejes:

- Los puntos de corte con el eje X se obtienen dando a y el valor 0.

  Por tanto son de la forma $(x_0, 0)$, donde x_0 es un valor de x que al sustituirlo en la función haga que ésta valga 0.

- El punto de corte con el eje Y se obtiene dando a x el valor 0.

  Por tanto es de la forma $(0, f(0))$

Ejemplos: ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones?

- $y = 2x + 3$

Solución

Para calcular el corte con el eje X, igualamos la función a 0 y obtenemos:

$2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \dfrac{-3}{2}$, el punto de corte es $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right)$

Para calcular el corte con el eje Y, damos a x el valor 0 y obtenemos x =0 e y = 2· 0 + 3 = 3. El punto de corte es (0,3).

- $y = x^2 + 9$

Solución

Para calcular el corte con el eje X, igualamos la función a 0 y obtenemos:

$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$, como no existe la raíz cuadrada de un número negativo la función no corta al eje X

Para calcular el corte con el eje Y, damos a x el valor 0 y obtenemos x = 0 y = 0^2 +9 = 9. Luego el punto de corte con el eje Y es (0, 9)

- $y = x^2 - 4x + 4$

Solución

Para calcular el corte con el eje X, igualamos la función a 0 y obtenemos:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Sólo tiene un punto de corte: (2,0)
Para calcular el corte con el eje Y, damos a x el valor 0 y obtenemos

$y = 0^2 - 4{\cdot}0 + 4 = 4$ Luego el punto de corte con el eje Y es (0,4)

- $y = \frac{5}{x}$

Solución

Para calcular el corte con el eje X, igualamos la función a 0 y obtenemos:

$\frac{5}{x} = 0 \Rightarrow 5 = 0 \cdot x \Rightarrow 5 = 0$. Como el 5 no es igual a 0, no tiene puntos de corte con el eje X.
Para calcular el corte con el eje Y, damos a x el valor 0 y obtenemos $y = \frac{5}{0}$, que no se puede calcular ya que no es posible dividir por 0, por tanto, no corta al eje Y.

- $y = x^2 + x - 2$

Solución:

Para calcular el corte con el eje X, igualamos la función a 0 y obtenemos:

$$\boxed{x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}}$$

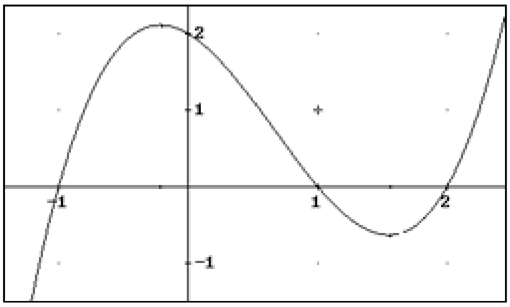
sumando obtenemos $\frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ y restando obtenemos $\frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$
Esta función tiene dos puntos de corte con el eje X, que son (1,0) y (-2,0).

Para saber más

1. Puntos de corte con los ejes: ejemplo
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0295-01/punto2/punto2.html
2. Dominio y recorrido de una función
http://descartes.cnice.mecd.es/4a_eso/El_lenguaje_de_las_funciones/dominio.htm

Signo de una función

Fijémonos en la gráfica de la siguiente función que aparece en el dibujo:



Los puntos de corte con el eje X son (-1 , 0) ; (1 , 0) y (2 , 0) , y el dibujo de la gráfica cumple:

- Que está por debajo del eje X hasta llegar a x=-1, y desde x=1 hasta x=2. En este caso diremos que la **función es negativa** en los intervalos (- ∞, -1) y (1, 2).
  Es decir los valores de y resultan negativos cuando sustituimos en la función valores de x que pertenecen a: x € (- ∞, 1) y de x € (1, 2).

- La gráfica está por encima del eje X desde x=-1 hasta x=1 y a partir de x=2. En este caso diremos que la **función es positiva** en los intervalos $(-1,1)$ y $(2,+\infty)$.
  Es decir los valores de y resultan positivos cuando sustituimos en la función valores de x que pertenecen a: $x \in (-1,1)$ y de $x \in (2,+\infty)$.

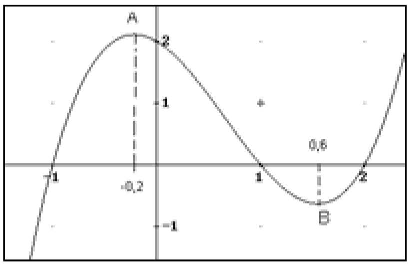
En general definiremos:

Una **función es positiva** en un intervalo (a, b), si $f(x)$ es mayor que 0 para todo valor de x comprendido entre a y b.
Una **función es negativa** en un intervalo (a , b), si $f(x)$ es menor que 0 para todo valor de x comprendido entre a y b.

Funciones

Crecimiento y decrecimiento

Analicemos detenidamente la siguiente gráfica:



Si seguimos con el dedo la gráfica de la función del dibujo de izquierda a derecha, vemos que vamos subiendo hasta llegar al punto A luego bajamos hasta llegar al punto B y a continuación volvemos a subir. Diremos que la función crece hasta el punto A y del B en adelante. Del punto A al B la función disminuye y por tanto decrece.

> *Definiremos:*
> *Una **función es creciente** en un intervalo si a medida que la variable independiente x va tomando valores mayores la variable dependiente y va aumentando su valor.*

En el dibujo la función es creciente hasta x = -0´2 y desde x = 0´6 en adelante. Es decir es creciente en los intervalos (- ∞, -0´2) y en (0´6, + ∞).

> *Definiremos:*
> *Una **función es decreciente** en un intervalo si a medida que la variable independiente x va tomando valores mayores la variable dependiente y va disminuyendo su valor.*

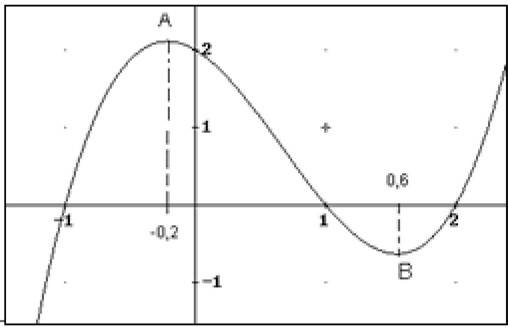
Del punto A al B la función disminuye y diremos que es decreciente desde x = -0,2 a x = 0,6. Es decir, es decreciente en el intervalo (-0´2,0´6).

El análisis de una gráfica también permite comparar dos de ellas para extraer conclusiones sobre su comportamiento y sus valores.

Para saber más

1. Crecimiento y decrecimiento de una función
http://www.escolar.com/avanzado/matema026.htm [versión en caché]
http://descartes.cnice.mecd.es/4a_eso/El_lenguaje_de_las_funciones/variacion1.htm
http://descartes.cnice.mecd.es/4a_eso/El_lenguaje_de_las_funciones/variacion2.htm
http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Interpretacion_graficas/funciones_lineales.htm

Máximos y mínimos relativos



Algunas funciones en sus representaciones gráficas presentan altos y bajos como el gráfico del dibujo. Los puntos A y B son los que presentan estos altos y bajos.

El punto A de x = -0,2 es el punto más alto de su entorno y se le da el nombre de **máximo relativo.** Diremos que la función presenta un máximo relativo en x = - 0,2 y vemos que la función es creciente a la izquierda de -0,2 y decreciente a la derecha de -0,2 .

En general definiremos:
Una función presenta un máximo relativo en x = a si es creciente a la izquierda de a y decreciente a la derecha de a.

El punto B de x = 0,6 es el punto más bajo de su entorno y se le da el nombre de **mínimo relativo.**

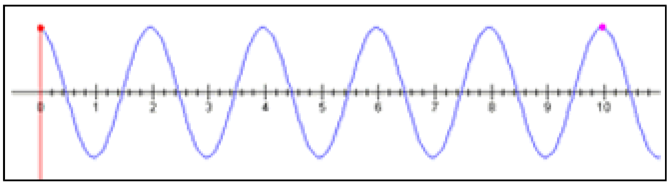
Diremos que la función presenta un mínimo relativo en x = 0,6 si la función es decreciente a la izquierda de 0,6 y creciente a la derecha de 0,6.

En general definiremos:
Una función presenta un mínimo relativo en x = a si es decreciente a la izquierda de a y creciente a la derecha de a.

Periodicidad

Existen muchos fenómenos sobre todo en la naturaleza que se pueden expresar como una función, como por ejemplo los latidos del corazón, las ondas electromagnéticas, los movimientos de la tierra.

Que muestra el electrocardigrama de un paciente.



Que muestra las ondas transversales del movimiento de una cuerda.