1. La función constante

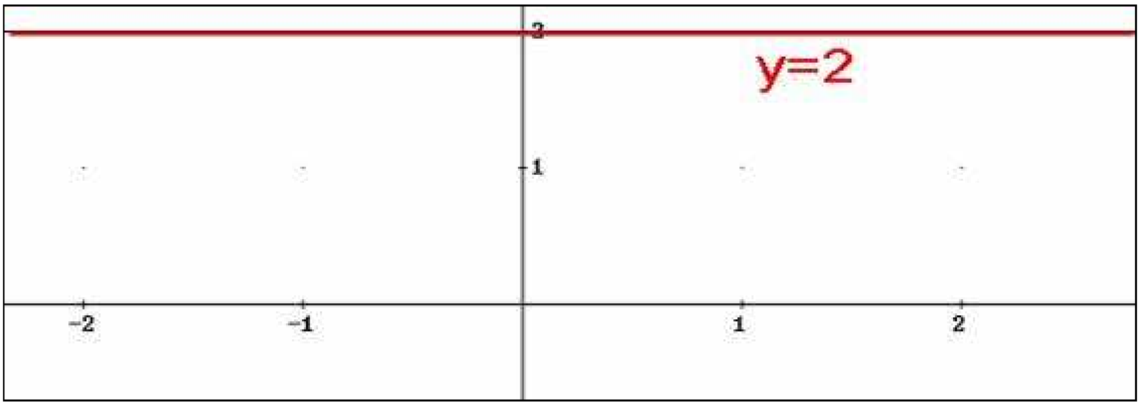
Funciones más usuales

La función constante

Consideremos la función más sencilla, por ejemplo $y = 2$. La imagen de cualquier número es siempre 2. Si hacemos una tabla de valores tendríamos:

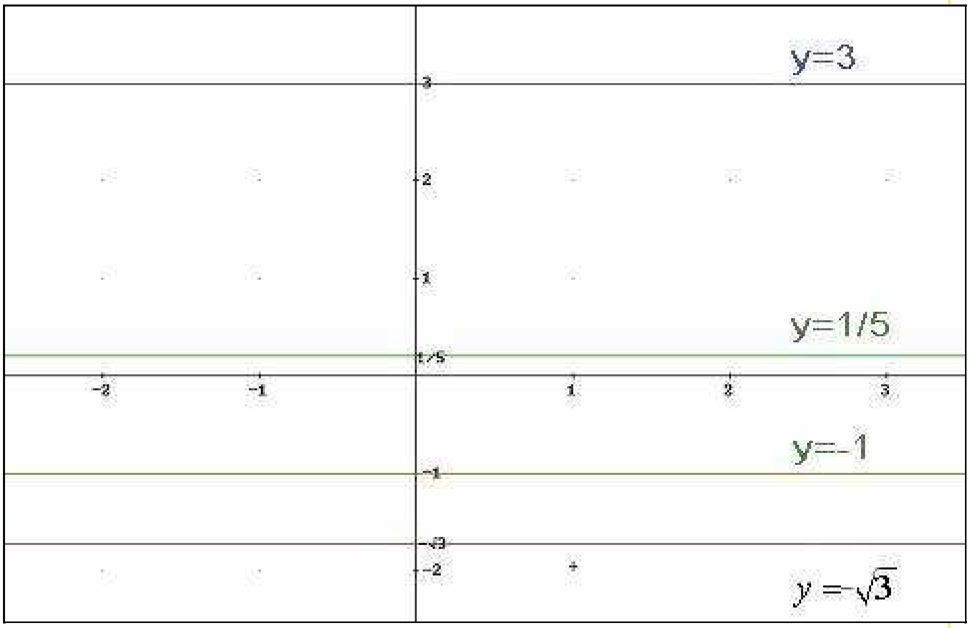
x	-2	-1	0	1	2
y	2	2	2	2	2

Por tanto si representamos todos esos valores, y más que podríamos calcular, todos están en el 2 y la gráfica resulta una línea recta que corta al eje de ordenadas en el punto 2



En general una **función constante** es una función cuya fórmula es $y = k$, donde k es un número real. Su representación gráfica es una línea recta que corta al eje de ordenadas en el punto k.

Ejemplos:
Vamos a representar las funciones:
$y = 3$
$y = -1$
$y = \frac{1}{5}$
$y = -\sqrt{3}$
Solución



Autoevaluación

2. La función lineal o proporcionalidad directa

Funciones más usuales

La función lineal o proporcionalidad directa

Supongamos que 5 kg. de naranjas valen 2 €. Podemos hacernos una tabla para saber lo que cuestan las distintas cantidades. Recuerda que es una proporcionalidad directa para obtener los correspondientes valores.

Por ejemplo, para saber lo que cuesta 1 kg. de naranjas: $\frac{5}{2} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{2}{5} = 0{,}40$.

Y con este valor podemos calcular todos los demás.

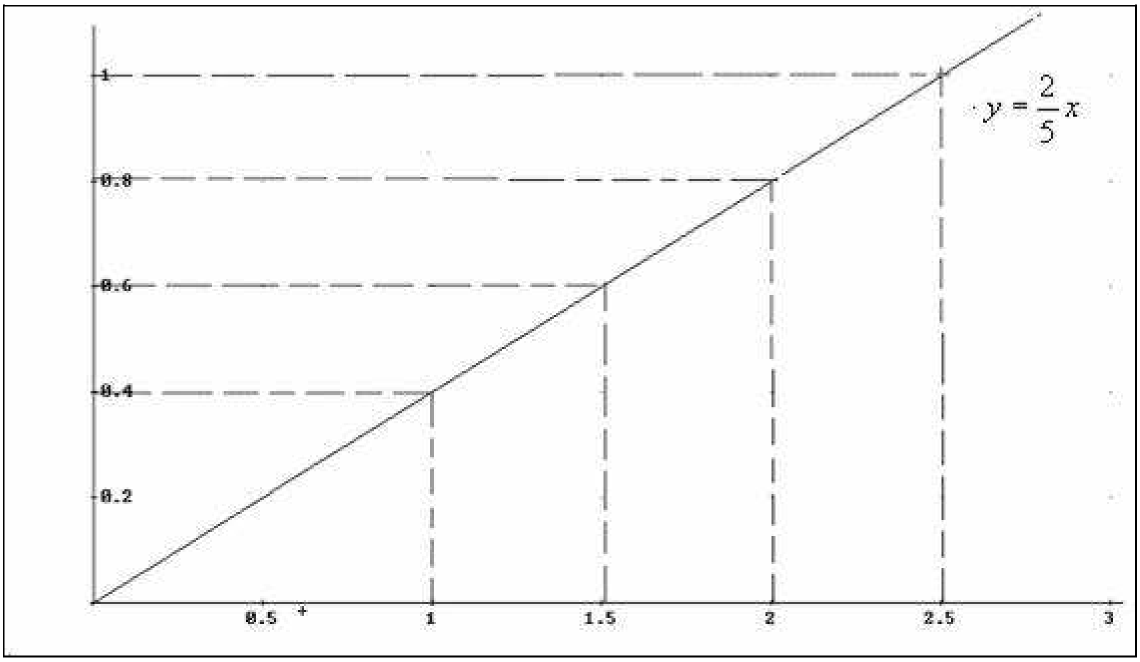
Kg de naranjas	1	1,5	2	2,5	3	3,5	5
Coste en €	0,40	0,60	0,80	1	21,20	1,40	2

Si queremos hallar la fórmula matemática de esta función, llamaremos:

- *x* a los kg. que compramos
- *y* a lo que cuestan

por tanto, tendremos: $\frac{5}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow 5y = 2x \Rightarrow y = \frac{2x}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$

Si representamos dicha función obtenemos:



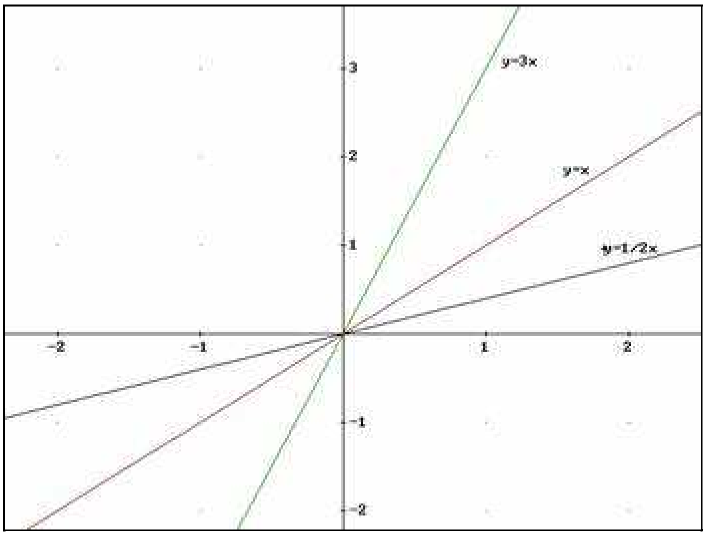
Por tanto, la fórmula de una función lineal es de la forma: $y = a \cdot x$

Al valor de a ; $a \neq 0$ se le llama **pendiente de la recta** y es el que determina la inclinación de la misma. La gráfica de las funciones lineales pasa siempre por el origen de coordenadas.

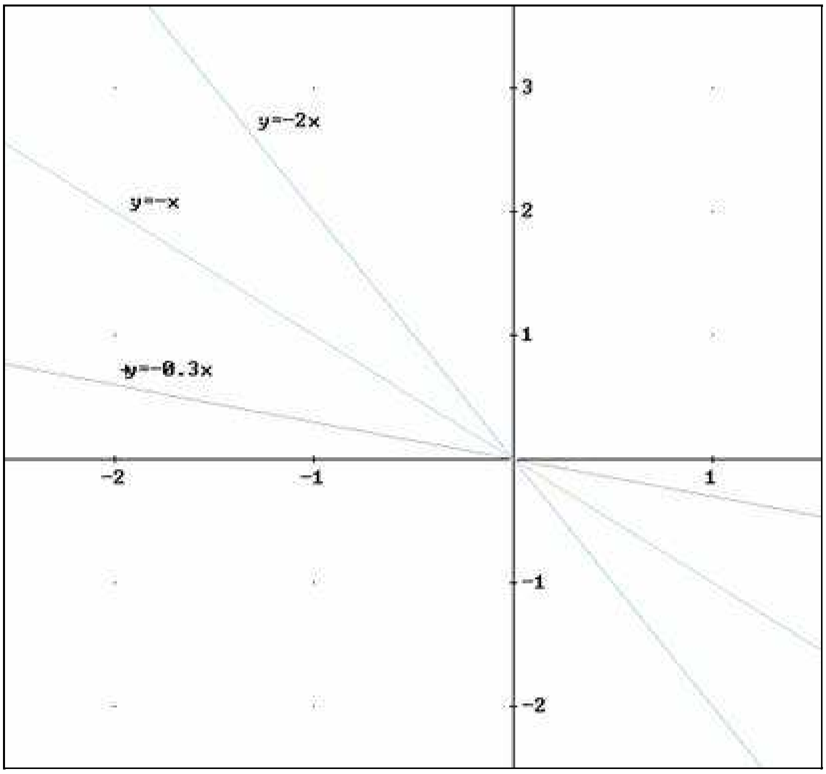
Observa las siguientes gráficas que se muestran y observarás que:

1. Cuanto más grande es el valor absoluto del número *a* mayor es la pendiente.

2. Cuando la pendiente es positiva las rectas ocupan el primer y tercer cuadrante.



3. Cuando son negativas el segundo y cuarto cuadrante.



Para representar las funciones lineales, como son líneas rectas, necesitamos dos puntos: uno es el origen de coordenadas (0,0) y el otro se calcula dando un valor a *x*, y encontrado el correspondiente de *y*. Se dibujan los dos puntos y se unen con una recta.

Ejemplos

Halla la función lineal definida por el siguiente enunciado: *Dos metros de cable cuestan 3 €, ¿cuánto cuestan x metros de cable?*

Solución

Llamemos:

x a los metros de cable

y a lo que cuestan

Es una proporción directa, por tanto: $\frac{2}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow 2y = 3x \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

Representa la siguientes funciones lineales:

a) $y = 3x$ b) $y = -1{,}5x$

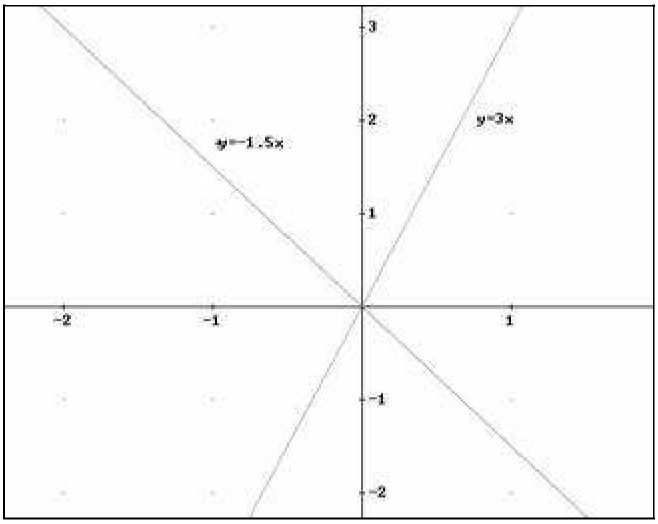
Solución:

Construimos una tabla de valores para cada una de las funciones:

$y = 3x$	
x	**y**
0	0
1	3

$y = -1{,}5x$	
x	**y**
0	0
2	-3

Representamos los puntos en los ejes cartesianos y los unimos formando las rectas.



Autoevaluación

3. La función afín

Funciones más usuales

La función afín

Un técnico en reparación de televisores tiene la siguiente tarifa:

- 30 € por la visita
- 25 € por cada hora de trabajo

Vamos a calcular:

1. Cuánto costaría un trabajo que durara 3 horas.
   Coste = 30 + 25 · 3 = 30 + 75 =105 €
2. Uno que durara media hora:
   Coste = 30+ 25 · 0,5 = 42,5 €
3. En general si tarda x horas:
   Coste = 30 + 25x €

Si denominamos:

- y al coste
- x las horas trabajadas

Entonces la función que relaciona estas dos variables será:

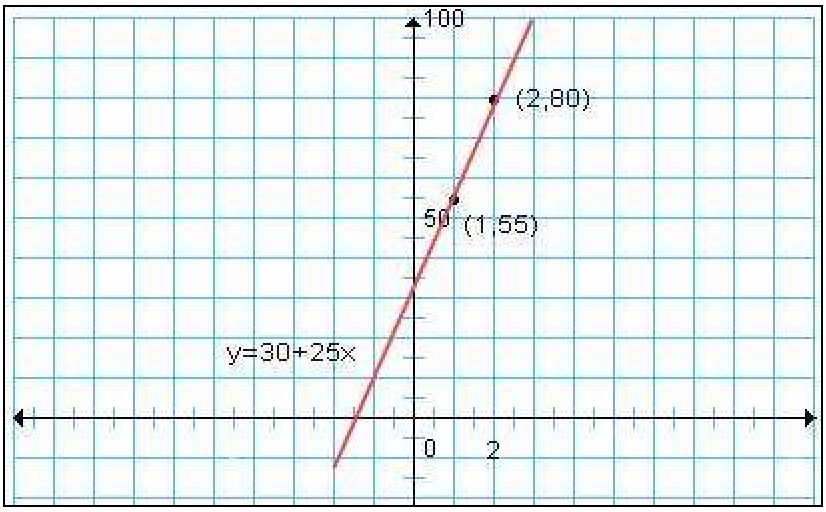
$$\boxed{y = 30 + 25 \cdot x}$$

es la función que relaciona las horas trabajadas con el coste

Podemos obtener una tabla de valores:

x	0,5	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	42,5	67,5	80	92,5	105	117,5	130	142,5	155

Y si los representamos obtendremos la siguiente gráfica:

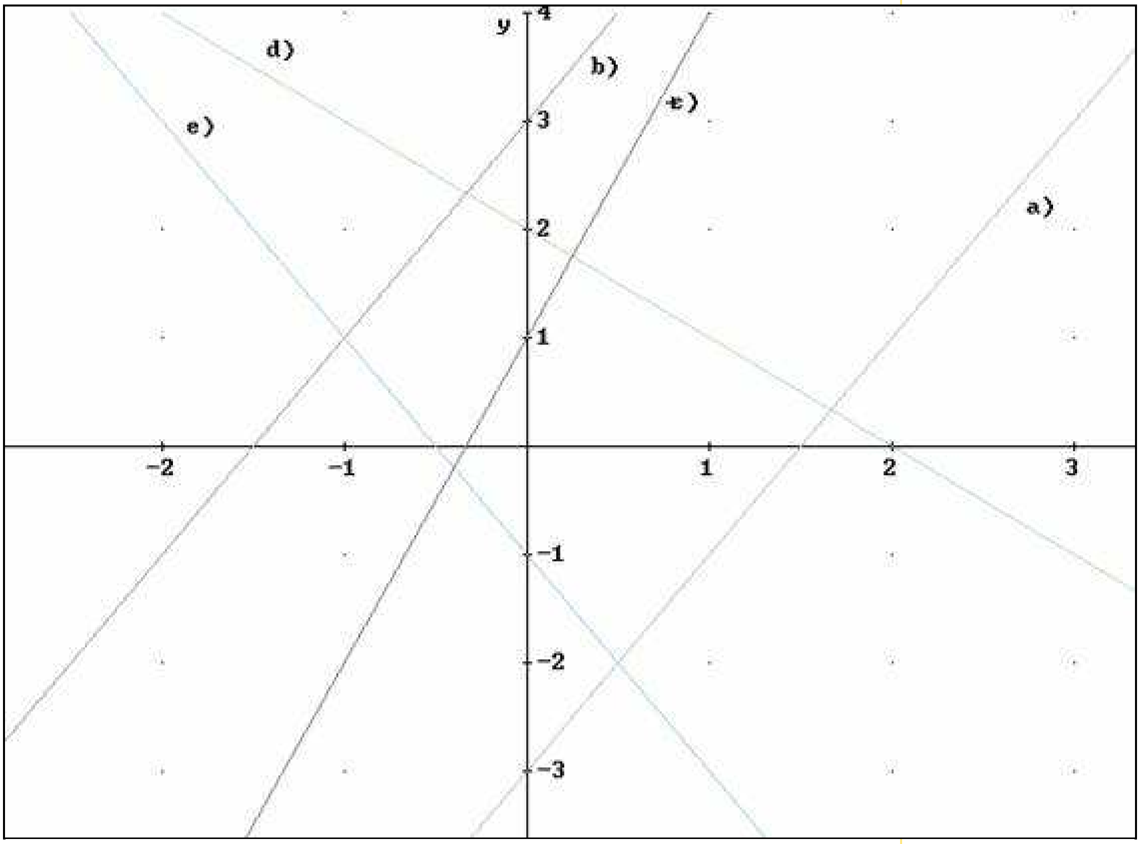


En general se llama **función afín** a una función de la forma $y = ax + b$ y su gráfica es una línea recta. Por tanto, para representarla solamente necesitamos conocer dos puntos y trazar la línea recta que pasa por ellos.

Ejemplos:
Vamos a representar las funciones:
a) $y = 2x - 3$
b) $y = 2x + 3$
c) $y = 3x + 1$ d) $y = -x + 2$ e) $y = -2x - 1$
Haremos la tabla de valores para cada una de ellas

a)		**b)**		**c)**		**d)**		**e)**	
y	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**
1	-1	-1	1	1	4	1	1	1	-3
2	1	0	3	-1	-2	2	0	-1	1

Si las representamos en los mismos ejes cartesianos obtenemos



Como vemos la inclinación de la recta depende del coeficiente de la x

- Con un valor absoluto mayor del coeficiente se produce una mayor inclinación de la recta.
- Si tienen el mismo coeficiente como las rectas la a) y b) resultan paralelas.
- Si el coeficiente es positivo el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje x es agudo y si el coeficiente es negativo el ángulo que forma es obtuso.

A dicho coeficiente se la llama **pendiente de la recta** tal y como pasa con las funciones lineales.

Además,

- La función afín $y = 2x - 3$ corta al eje *Y* para y=-3
- La función $y = 2x + 3$ corta al eje *Y* para y=3
- La función $y = 3x - 1$ lo corta para y=-1,
- La función $y = -x + 2$ lo corta para y=2
- Y por último, la función $y = -2x - 1$ lo hace en y=-1

A la ordenada del punto donde la función afín corta al eje *Y* se le llama **ordenada en el origen**.
Dicho valor coincide con el término independiente.
Es decir la ordenada en el origen es el valor que toma la y cuando x=0.

Por ejemplo para la función y=2x+5 la ordenada en el origen vale 5 ya que si sustituimos x por 0 obtenemos y=5.

Resumiendo:
Dada la función afín $y = ax + b$

Su gráfica es una línea recta.
Al valor a se le llama pendiente de la recta.
Al valor b se la llama ordenada en el origen.

Ejemplos:
¿Pertenecen los puntos (4,5) y (7,1) a la gráfica de la función $y = 3x - 20$?
Solución
Damos el valor x=4 y calculamos la *y*: $y = 3 \cdot 4 - 20 = 12 - 20 = -8$ que no coincide con $y = 5$ por tanto, no es de la función
Hacemos lo mismo para el segundo punto y obtenemos y = 3 · 7 - 20 = 1 luego si es de la función.
Escribe la función afín que tiene por pendiente 3 y por ordenada en el origen 5
Solución:
Por ser una función afín su expresión será $y = ax + b$
Como su pendiente es 3 tendremos que a = 3
Como su ordenada en el origen es 5 tendremos que b = 5
Por tanto, la expresión de la función será $y = 3x + 5 \cdot$
De una función afín se sabe su pendiente que es 4 y que pasa por el punto (1, 5) ¿Cuál es su expresión?.
Solución
Su expresión será $y = ax + b$
Como la pendiente es 4: a = 4
Por tanto $y = 4x + b$ pasa por el punto (1, 5), esto quiere decir que para $x = 1 \rightarrow y = 5$
Si sustituimos, tenemos: $5 = 4 \cdot 1 + b \rightarrow 5 = 4 + b \rightarrow b = 1$ y
La expresión será $y = 4x + 1$
Halla la función afín que pasa por los puntos (1, 4) y (-2, 5)
Solución
Su expresión será $y = ax + b$
Pasa por el punto (1,4) significa que para x = 1 la y = 4 sustituyendo tendremos $4 = a + b$
Pasa por el punto (-2 5) significa que para x = -2 la y = 5 sustituyendo tendremos $5 = -2a + b$
Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 4 \\ -2a + b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 4 - a$$

Sustituimos en la segunda ecuación y tenemos:

$$-2a + 4 - a = 5 \Rightarrow -3a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

Sustituimos y calculamos $b = 4 - \frac{-1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$

La expresión será $y = \frac{-1}{3}x + \frac{13}{3}$

Autoevaluación

Para saber más

Sigue practicando con las ecuaciones de las rectas

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Identificacion_funciones_d3/fun1.htm

Pendiente de una recta

http://www.ematematicas.net/pendienterecta.php?a=3

Cálculo de la pendiente de una recta

http://www.ematematicas.net/calculopendiente.php?a=3

Pendiente de una recta en el mundo real

http://es.geocities.com/mundo_matematicas/DEPORTES/deportes_Tourmalet.htm

Ecuación de una recta

http://www.ematematicas.net/ecrecta.php?a=3

Cálculo de la ecuación de una recta

http://www.ematematicas.net/calculoecuacion.php?a=3

4. La función cuadrática

Funciones más usuales

La función cuadrática

El vídeo que acabamos de ver nos ha mostrado cómo es la expresión algebraica de una **función cuadrática**, su gráfica, sus puntos notables y propiedades. Vamos a profundizar en ella para aprender a dibujar bien su gráfica.

Vértice de una función cuadrática

En primer lugar debemos conocer cuál es el **vértice**. El vídeo nos ha dicho que la parábola es **simétrica** respecto de la recta vertical que pasa por el vértice, por lo tanto está en medio de dos valores de x que den el mismo resultado de y.

Por ejemplo, en la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ toma el mismo valor para:

$$x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 5 = 5$$
$$x = 4 \rightarrow y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 5 = 5$$

Entonces, el valor de x del vértice está en la mitad entre 0 y 4, es decir en :

Vértice $x = 2 \rightarrow y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$. Las coordenadas del vértice son (2,1)

En general si la parábola es de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ vamos a encontrar dos valores de x que den como valor de $y = c$, para ello igualamos la función a c y obtenemos:

$$c = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$ por tanto el vértice está en la mitad de 0 y $\frac{-b}{a}$ que es $x = \frac{-b}{2a}$

Entonces, **el vértice de una parábola tiene como abscisa** $x = \frac{-b}{2a}$ **y el valor de la ordenada que resulte de sustituir en la expresión algebraica. Es decir** $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

Tabla de valores para una función cuadrática

A continuación damos valores a la x a la derecha y a la izquierda del vértice, representamos los puntos y los unimos mediante una curva en forma de parábola.

Ejemplo:
Representa gráficamente la función $y = x^2 - 4x + 5$

Primer paso:
Calculamos las **coordenadas del vértice**.

Sabemos que la **abscisa del vértice** viene dada por $x = \frac{-b}{2a}$ y obtenemos

$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

Y la **ordenada el vértice** se calcula sustituyendo el valor de x en la expresión algebraica de la función $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$ y el vértice es V (2,1)

Segundo paso:

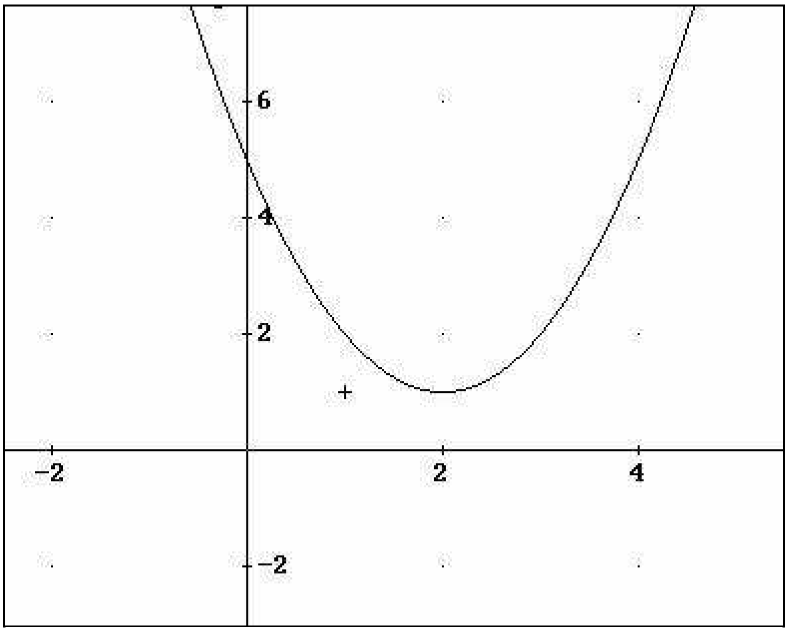
Hacemos una **tabla de valores** dando a x valores a la derecha e izquierda del vértice, por ejemplo a la derecha 3, 4, y 5 y a la izquierda 1, 0, -1.

Obtenemos la siguiente tabla

x	3	4	5	1	0	-1
y	2	5	10	2	5	10

Tercer paso:

Representamos los puntos y los unimos mediante una curva. Obtenemos la siguiente gráfica:



Ejemplos:

El punto (2,5) pertenece a la gráfica de la función $y = x^2 + x + 3$

Solución:

Calculamos el valor de y para x = 2. Resulta, $y = 2^2 + 2 - 3 = 3$. Por tanto, no pertenece a la gráfica de la función.

Calcula la expresión de la función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es 1 y su vértice es V(3, -6).

Solución:

La expresión de la función cuadrática es: $y = ax^2 + bx + c$, por tanto debe ser a=1 y la expresión queda de la forma: $y = x^2 + bx + c$.

La abscisa del vértice es $x = \frac{-b}{2a}$ sustituyendo obtenemos:

$3 = \frac{-b}{2 \cdot 1} \Rightarrow 6 = -b \Rightarrow b = -6$ y la expresión queda ya de la forma $y = x^2 - 6x + c$

Como el vértice es (3, -6) para x = 3 tiene que ser y = - 6. Sustituimos en la expresión algebraica ambos valores y obtenemos: $-6 = 3^2 - 6\cdot 3 + c \Rightarrow -6 = 9 - 18 + c \Rightarrow c = 3$

Luego finalmente la expresión es $y = x^2 - 6x + 3$

Calcula la expresión de la función cuadrática que pasa por los puntos A(1, -2); B(0,1) y C(-1,8)

Solución:

La expresión de la función es $y = ax^2 + bx + c$, sustituimos x e y por los valores de los tres puntos y obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -2 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ 1 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 8 = a(-1)^2 + b(-1) + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a + b + c = -2 \\ c = 1 \\ a - b + c = 8 \end{array}\right\}$$

sustituimos c por 1 y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + 1 = -2 \\ a - b + 1 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a + b = -3 \\ a - b = 7 \end{array}\right\}$$

sumando las dos ecuaciones obtenemos $2a = 4 \Rightarrow a = 2$ y sustituyendo en la primera $2 + b = -3 \Rightarrow b = -5$

Luego la expresión será $\boxed{y = 2x^2 - 5x + 1}$

¿En qué puntos corta al eje de abscisas la función $y = x^2 + 2x - 15$?

Solución:

Tenemos que encontrar valores de x que hagan que y = 0. Para ello igualamos la función a cero y obtenemos:

$x^2 + 2x - 15 = 0$, ecuación de segundo grado que resolvemos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2 + 8}{2} = 3 \\ x = \dfrac{-2 - 8}{2} = -5 \end{cases}$$

Por tanto los puntos de corte se dan para los valores x=3; x=-5, es decir, (3,0); (-5,0)

Autoevaluación

Para saber más

Sigue practicando con las parábolas

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Identificacion_funciones_d3/fun2.htm

http://www.ematematicas.net/parabola.php?a=4

5. La función de proporcionalidad inversa

Funciones más usuales

La función de proporcionalidad inversa

Supongamos que queremos recorrer 50 km. en bicicleta de tal forma que calculamos que :

- si vamos a una velocidad de 10km/h tardaremos 5 horas
- si vamos a una velocidad de 20 km/h tardaremos 2,5 horas

Las variables velocidad y tiempo se dice que son inversamente proporcionales ya que al aumentar una la otra disminuye. Pero si nos fijamos, el producto de ambas se mantiene constante, en este caso igual a 50.

Por tanto, si representamos por v la velocidad y por t el tiempo tendremos que:

$$\boxed{v \cdot t = 50 \Rightarrow v = \frac{50}{t}}$$

A las funciones que tienen esta expresión algebraica se les llama **funciónes de proporcionalidad inversa**.
En general, podemos decir que una función de proporcionalidad inversa tiene por expresión $y = \frac{a}{x}$, donde ***a***es una constante

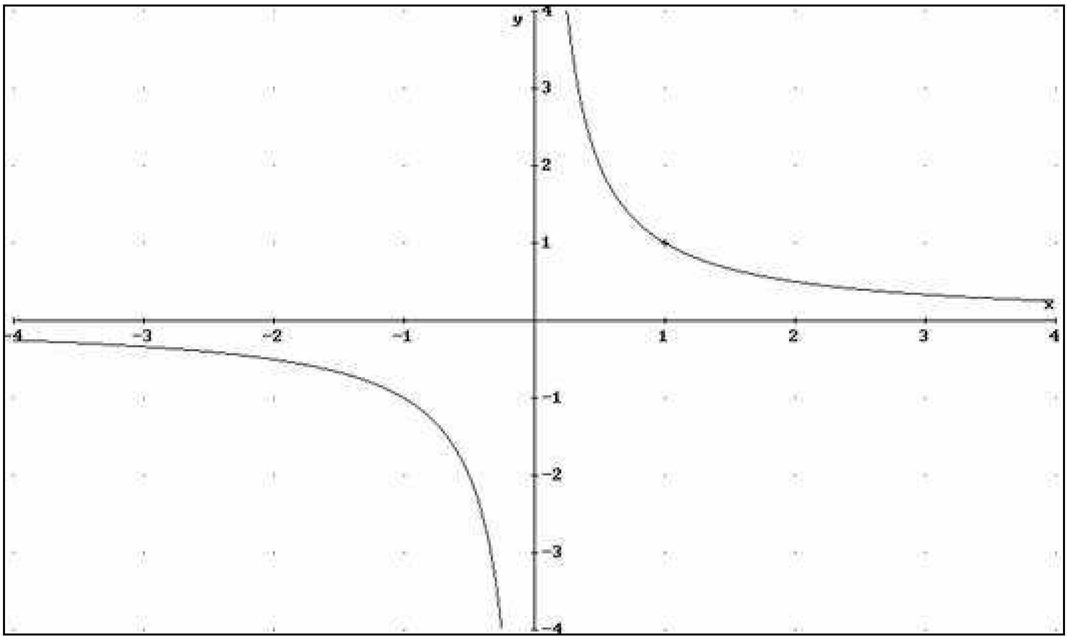
Representemos algunas funciones de proporcionalidad inversa.

1. Representamos la función $y = \frac{1}{x}$:

Hacemos una tabla de valores y unimos los puntos mediante una curva.

x	**y**
4	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
0	No existe
$\frac{-1}{2}$	-2

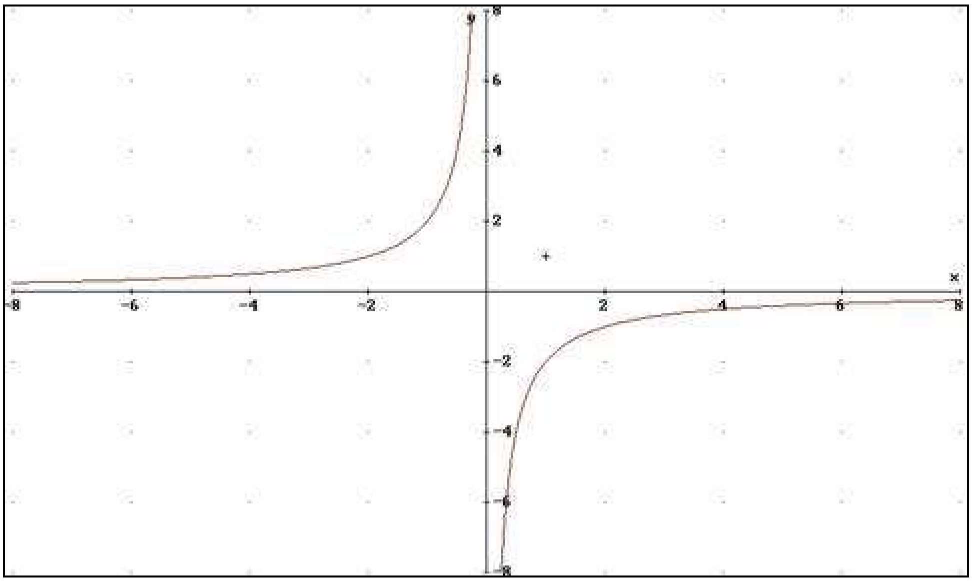
-1	-1
-2	$\frac{-1}{2}$
-4	$\frac{-1}{4}$



Representemos la función $y = \frac{-2}{x}$

Hacemos una tabla de valores y unimos los puntos mediante una curva.

x	**y**
4	$\frac{-1}{2}$
2	-1
1	-2
$\frac{1}{2}$	-4
0	No existe
$\frac{-1}{2}$	4
-1	2
-2	1
-4	$\frac{1}{2}$



Después de la representación de las funciones anteriores fijémonos en las siguientes propiedades:

1. El dominio de estas funciones son todos los números menos el cero.
2. Cuanto más grande es el valor de x (en valor absoluto) más pequeño resulta el valor de y pero este nunca llega a valer cero. Lo expresamos en matemáticas diciendo que la función tiende a cero al tender el valor de x a infinito.
3. Cuanto más cerca de cero está el valor de x más grande en valor absoluto es el valor de y. Lo expresamos en matemáticas diciendo que la función tiende a infinito cuando nos acercamos a cero.

Autoevaluación