LÓGICA FORMAL II

Una argumentación es una relación entre enunciados, de tal modo que puede demostrarse la verdad de un enunciado llamado *conclusión* a partir de la verdad de otros enunciados llamados *premisas*. Se llama argumentación o razonamiento *válido* cuando la conclusión se deduce necesariamente de las premisas; la validez se establece desde el punto de vista sintáctico, así que un razonamiento válido no tiene por qué ser verdadero, pues la verdad se establece desde el punto de vista semántico. Un razonamiento válido tiene la forma de una tautología del sistema axiomático.
Se puede transformar una tautología en una argumentación correcta teniendo en cuenta las siguientes normas: la conjunción se puede transformar en dos fórmulas independientes; la implicación se puede escribir como una raya horizontal o vertical; se deben respetar los paréntesis.
La reglas de la deducción natural son argumentos sencillos y evidentes que sirven de base a los razonamientos más complejos. Demostrar un argumento complejo es reducirlo a los argumentos más sencillos con ayuda de esas reglas. Esa demostración debe hacerse paso a paso mediante un procedimiento establecido.

Las reglas principales son las siguientes:

1. Regla de Introducción de la conjunción RI$\wedge$:

$$A, B \Rightarrow A \wedge B$$

Dos enunciados pueden unirse por la conjunción.

2. Regla de Eliminación de la conjunción RE$\wedge$:

$$A \wedge B \Rightarrow A$$
$$A \wedge B \Rightarrow B$$

De una conjunción puedo deducir la verdad de los dos enunciados por separado:
$(p \wedge q) \rightarrow p$,, $(p \wedge q) \rightarrow q$

3. Regla de Introducción de la disyunción RI$\vee$:

$$A \Rightarrow A \vee B$$
$$B \Rightarrow A \vee B$$

Un enunciado puede siempre unirse a otro por una disyunción: $p \rightarrow (p \vee q)$,, $q \rightarrow (p \vee q)$

4. Regla de Eliminación de la disyunción RE$\vee$:

$$A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow C$$

Si a partir de los dos miembros de una disyunción se puede deducir la misma fórmula, entonces se puede afirmar esa fórmula: $((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$

5. Silogismo Disyuntivo SD:

$$A \vee B, \neg B \Rightarrow A$$
$$A \vee B, \neg A \Rightarrow B$$

Si negamos uno de los miembros de una disyunción, entonces podemos afirmar el otro:
$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$,, $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

6. Regla de Introducción del condicional RI→:

$$A \to B \Rightarrow A \to B$$

Si la hipótesis A conduce a la fórmula B, entonces puedo poner A como antecedente y B como consecuente de una implicación: $(p \to q) \to (p \to q)$

7. Regla de Eliminación de la implicación RE→ (*modus ponens*):

$$A \to B,\ A \Rightarrow B$$

A partir de la afirmación del antecedente de una implicación, puede deducirse el consecuente: $((p \to q) \wedge p) \to q$

8. *modus tollens* o negación del consecuente:

$$A \to B,\ \neg B \Rightarrow \neg A$$

A partir de la negación del consecuente de una implicación, puede negarse el antecedente: $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$

9. Regla de Introducción del bicondicional RI↔:

$$A \to B,\ B \to A \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$$

La conjunción de dos implicaciones en las cuales el antecedente de la una es el consecuente de la otra y viceversa, equivale a la bicondicional entre ambos enunciados: $((p \to q) \wedge (q \to p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

10. Regla de Eliminación del bicondicional RE↔:

$$A \leftrightarrow B \Rightarrow A \to B$$

$$A \leftrightarrow B \Rightarrow B \to A$$

A partir de una bicondicional puedo establecer la implicación en los dos sentidos posibles: $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$,, $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$

11. Regla de Introducción de la negación o reducción al absurdo RI¬:

$$A \to (B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$$

Si a partir de una hipótesis se deduce una contradicción entonces la hipótesis es falsa: $(p \to (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$

12. Regla de Eliminación de la negación o doble negación, RE¬:

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

La doble negación equivale a una afirmación: $\neg\neg p \leftrightarrow p$

13. Leyes de Morgan:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B,$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

a) la negación de una disyunción equivale a la conjunción de las negaciones:
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
b)la negación de una conjunción equivale a la disyunción de las negaciones:
$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Un razonamiento complejo está compuesto de razonamientos simples que son las Reglas de la Deducción Natural. Demostrar un razonamiento consiste en obtener la conclusión a partir de las premisas, utilizando las Reglas de la Deducción Natural. Para ello se ponen tres columnas, la primera con los números naturales consecutivos, la segunda con las fórmulas que se van demostrando y la tercera con la justificación de las fórmulas por las reglas aplicadas. Se parte de las premisas y a partir de ellas se aplican las Reglas hasta obtener la conclusión; las reglas que se van aplicando para obtener nuevas fórmulas son escritas en la columna de justificación. Si el razonamiento es una tautología cuando se hace la tabla de verdad, entonces tiene que poderse demostrar mediante las reglas.
Por ejemplo: Si llueve, el suelo se moja. Ha llovido. Luego el suelo se ha mojado. Es un *modus ponens*: $((p \to q) \wedge p) \to q$. Si llueve, el suelo se moja. El suelo no se ha mojado. Luego no ha llovido. Es un *modus tollens*: $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$

1. $p \to q$ Premisa
2. p Premisa
3. q RE$\to$1,2.

1. $p \to q$ Premisa
2. $\neg q$ Premisa
3. $\neg p$ MT, 1,2.

Una demostración se acaba cuando se obtiene la conclusión. A veces al final del razonamiento se utilizan las iniciales c.q.d. (‘como queríamos demostrar’) para indicar que se ha conseguido hacer la demostración.
En ciertas demostraciones se hace necesario utilizar hipótesis (supuestos provisionales que sirven para demostrar ciertos razonamientos):

-cuando la conclusión es una implicación, se utiliza la RI$\to$ y se pone como hipótesis el antecedente de la conclusión.

-cuando se utiliza la demostración llamada reducción al absurdo, RI$\neg$, se pone como hipótesis lo contrario de lo que queremos demostrar, la negación de la conclusión.

-cuando se tiene que eliminar una disyunción, RE$\vee$, se pone como hipótesis cada uno de los miembros de la disyunción.

Se llama demostración directa cuando no se utiliza la reducción al absurdo, aunque se hayan utilizado hipótesis.