JUNIO 96

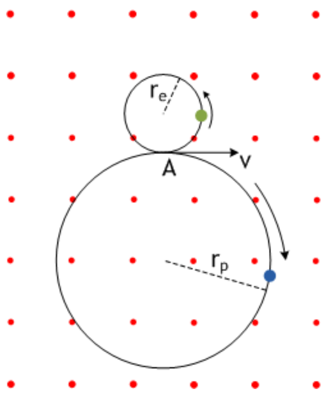
C4.— Un protón y un electrón se mueven perpendicularmente a un campo magnético uniforme, con igual velocidad. ¿Qué tipo de trayectoria realiza cada uno de ellos? ¿Cómo es la trayectoria que realiza el protón en relación con la que realiza el electrón? Razona la respuesta.

Datos: Se considera que la masa del protón es igual, aproximadamente, a 1836 veces la masa del electrón.

Por supuesto, las trayectorias de ambos son **circulares**, como siempre que una carga eléctrica es lanzada perpendicularmente a un campo magnético uniforme: queda atrapada en un giro uniforme, cuyo radio

$$r = \frac{mv}{qB}$$

depende de los parámetros de la partícula, en particular de su relación carga masa, q/m, y de su velocidad; además, depende de la intensidad del campo magnético.



Si el protón y el electrón tienen la misma velocidad, $v_e = v_p$, y ya que la carga de ambos es la misma (salvo signo), podemos encontrar la relación entre los radios de giro de uno y otro con facilidad:

$$\frac{r_e}{r_p} = \frac{\frac{m_e v_e}{eB}}{\frac{m_p v_p}{eB}} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1836} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r_p = 1836\, r_e}$$

y así saber que el radio de la trayectoria del protón será 1836 veces el de la trayectoria del electrón.

La otra diferencia entre las trayectorias es el sentido de giro, debido a la diferencia de signo de las cargas. En la imagen, a modo de ejemplo, se supone un campo magnético uniforme dirigido perpendicularmente al papel y hacia el lector; el protón y el electrón coinciden en el punto A, ambos con la misma velocidad v dirigida horizontalmente y hacia la derecha. Utilizando **F** = q **v**∧**B** cuidadosamente, y teniendo en cuenta que la carga e del protón es positiva, pero la carga —e del electrón es negativa, es fácil concluir que el protón gira en sentido horario, mientras que el electrón lo hace en sentido antihorario.

¿Qué pasa con los periodos de giro? En realidad, no hay que recordar ninguna fórmula: si la velocidad es la misma, y si la órbita del protón es 1836 veces mayor, el tiempo que tardará en girar será también mayor, exactamente 1836 veces. Por supuesto, las fórmulas confirman esto: recordemos que el periodo de giro está dado por

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

de modo que la relación entre los periodos resulta

$$\frac{T_e}{T_p} = \frac{\frac{2\pi m_e}{eB}}{\frac{2\pi m_p}{eB}} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1836} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T_p = 1836\, T_e}$$

como habíamos previsto. Ahora podemos imaginar mejor cómo son las cosas: digamos que los dos salen de A a la vez, girando cada uno en un sentido. El protón describe la órbita grande, con cierta majestuosidad, y el electrón, en la órbita pequeña y con la misma velocidad que el protón, gira de modo enloquecido. Cuando vuelvan a coincidir en A, después de que el protón acabe su primera vuelta, el electrón habrá girado 1836 veces.

SEPTIEMBRE 96

CUESTIÓN 4.— Un protón (carga eléctrica +e) y una partícula alfa (carga eléctrica +2e) se mueven en un campo magnético uniforme según circunferencias de igual radio. Compara los valores de:

a) Sus velocidades

b) Sus energías cinéticas

c) Sus momentos angulares

Se admite que la masa de la partícula alfa es igual a 4 veces la masa del protón.

a) Se trata de dos partículas con carga positiva, de modo que ambas girarían en el campo en el mismo sentido. Llamando m_p y m_α a las masas respectivas, v_p y v_α a las velocidades, y si el valor del campo magnético es B, tenemos la expresión del radio giromagnético

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad (1)$$

que aplicaríamos a cada partícula:

Para el protón, $r_p = \dfrac{m_p\, v_p}{eB}$ (2); y para la partícula α $r_\alpha = \dfrac{m_\alpha\, v_\alpha}{2eB}$ (3)

Ahora, si han de girar con el mismo radio, entonces $r_p = r_\alpha$ y, dividiendo miembro a miembro (2) y (3), además de recordar $m_\alpha = 4\, m_p$:

$$\frac{r_p}{r_\alpha} = 1 = \frac{\dfrac{m_p\, v_p}{eB}}{\dfrac{m_\alpha\, v_\alpha}{2eB}} = \frac{\dfrac{m_p\, v_p}{e}}{\dfrac{4m_p\, v_\alpha}{2e}} = \frac{v_p}{2v_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_p = 2\, v_\alpha}$$

b) La relación de energías cinéticas, conocidas las que existen entre masas y velocidades, es mero trámite:

$$\frac{E_c^p}{E_c^\alpha} = \frac{\dfrac{1}{2}m_p v_p^2}{\dfrac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{m_p\,(2\,v_\alpha)^2}{4m_p\, v_\alpha^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E_c^p = E_c^\alpha}$$

c) Y lo propio sucede con los momentos angulares. Recordemos que, para una partícula de masa m girando con velocidad v en una trayectoria circular de radio r, el momento angular (en módulo) es L = mvr. En consecuencia, la relación entre momentos angulares resulta

$$\frac{L_p}{L_\alpha} = \frac{m_p v_p r_p}{m_\alpha v_\alpha r_\alpha} = \frac{m_p\, 2v_\alpha r_p}{4m_p v_\alpha r_\alpha} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L_\alpha = 2L_p}$$

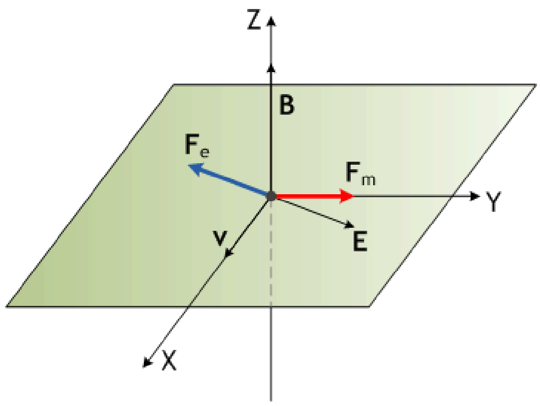
SEPTIEMBRE 96

A2.— Un electrón se mueve en una región en la que están superpuestos un campo eléctrico E = 2i + 4j V/m y un campo magnético B = 0,4k T. Determinar para el instante en que la velocidad del electrón es v = 20i m/s:

a) Las fuerzas que actúan sobre el electrón debidas al campo eléctrico y al campo magnético respectivamente.

b) La aceleración que adquiere el electrón.

Datos: masa del electrón, m_e = = $9{,}109.10^{-31}$ kg; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6.10^{-19}$ C



a) La figura recoge el momento al que alude el enunciado: el electrón se encuentra en el origen de coordenadas, sometido a un campo eléctrico **E** = 2**i** + 4**j** N/C (un vector del plano XY) y a un campo magnético **B** = 0,4**k** T (en la dirección del eje Z).

La fuerza sobre el electrón se escribiría

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -e\mathbf{E} - e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

de acuerdo a la conocida expresión de Lorentz: nótese que la carga del electrón es —e, donde e es el valor absoluto que aparece en los datos.

La fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$, debida al campo **E**, valdría

$$\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E} = -1{,}6.10^{-19}\,(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} - 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j} \text{ N}$$

y llevaría, como se ve en la figura, sentido contrario al campo **E**.

También podemos hallar la fuerza magnética, $\mathbf{F}_m$, según

$$\mathbf{F}_m = -e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -1{,}6.10^{-19} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{vmatrix} = -1{,}6.10^{-19}\,(-8\mathbf{j}) = 1{,}28.10^{-18}\,\mathbf{j} \text{ N}$$ y observar que tiene la dirección del eje Y, en sentido positivo: así debía ser, puesto que **v** y **B** determinan el plano XZ, y su producto vectorial llevará, entonces, la dirección perpendicular a ese plano; el eje Y.

b) La fuerza neta sobre el electrón, que no aparece dibujada en la imagen, es la suma de ambas fuerzas; nótese que se trataría de una fuerza en el plano XY:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = -3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} - 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j} + 1{,}28.10^{-18}\mathbf{j} = -3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} + 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j} \text{ N}$$

y la aceleración, de acuerdo con la ley de Newton

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_e} = \frac{-3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} + 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j}}{9{,}109.10^{-31}} = -3{,}51.10^{11}\mathbf{i} + 7{,}03.10^{11}\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

JUNIO 97

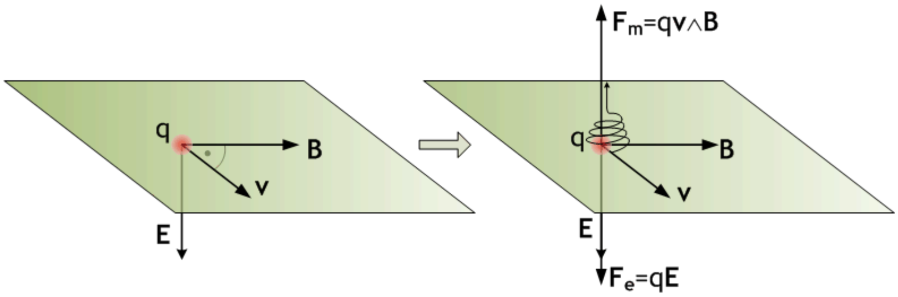
B1.- En una misma región del espacio existen un campo eléctrico uniforme de valor 0,5 . 10^4 V m^{-1} y un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo sus direcciones perpendiculares entre sí:

a) ¿Cuál deberá ser la velocidad de una partícula cargada que penetra en esa región en dirección perpendicular a ambos campos para que pase a través de la misma sin ser desviada?

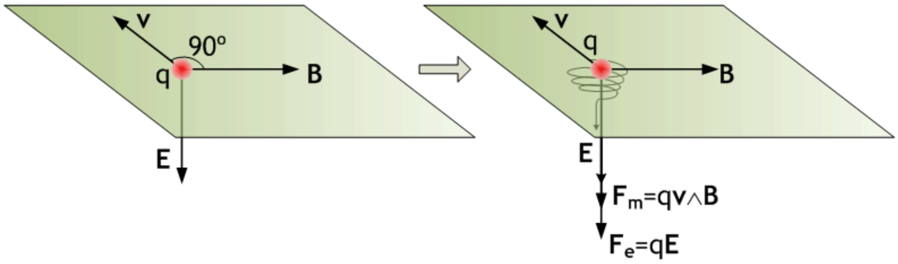
b) Si la partícula es un protón, ¿cuál deberá ser su energía cinética para no ser desviado?

Datos complementarios: Masa del protón m_p = 1,672 . 10^{-27} kg

a) La situación que nos plantean está recogida en la figura de la izquierda, que muestra los vectores **E** y **B** en el punto en que se encuentra la carga q, moviéndose con velocidad **v**. Por supuesto, sabemos que **E** y **B** son perpendiculares (eso sucede siempre); además, **v** es perpendicular a ambos (eso sucede en este problema). De este modo, todos los ángulos en la figura de la izquierda son de 90º.



Supongamos que la carga q es positiva; entonces las fuerzas $\mathbf{F_e}$ y $\mathbf{F_m}$, eléctrica y magnética, que actúan sobre ella están representadas en la figura de la derecha: nótese que $\mathbf{F_e}$ = q**E** lleva la misma dirección y sentido que **E**; y que $\mathbf{F_m}$ = q**v∧B** es perpendicular al plano formado por **v** y **B**, de modo que lleva la misma dirección que $\mathbf{F_e}$, pero sentido contrario.



Antes de seguir adelante, una observación: la figura anterior está pensada para que las cosas salgan como quiere el enunciado, de modo que la carga no se desvíe; naturalmente, eso implica que las fuerzas se anulen entre sí, y por tanto es preciso que lleven sentido contrario. Pero podría ser de otra manera, como se recoge en la figura abajo: véase que se ha invertido el sentido de la velocidad, manteniéndola perpendicular a **E** y **B**. Ahora las fuerzas $\mathbf{F_e}$ y $\mathbf{F_m}$ llevan la misma dirección y sentido, y no podrían anularse. La partícula sería acelerada y desviada.

La conclusión es clara: para que se pueda plantear que la carga pase sin que nada suceda, es necesario que su velocidad **v** sea perpendicular a **E** y **B**, pero además tiene que **llevar el sentido adecuado**.

Así que volvemos a la figura superior: las fuerzas se oponen. Todavía necesitamos algo, y es que **tengan el mismo módulo**; de esta manera, $\mathbf{F_e} + \mathbf{F_m} = \mathbf{0}$ y no existe efecto alguno sobre la carga, que **no es acelerada ni tampoco desviada**.

Esto requiere que

$$qE = qvB \quad \Rightarrow \quad E = vB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B} = \frac{0,5.10^4}{0,3} = \mathbf{1,67.10^4\ m/s}$$

Existe un modo de sintetizar cuanto se lleva dicho en una expresión única. Para que una carga q, moviéndose con velocidad **v** en un punto en el que existe campo eléctrico **E** y campo magnético **B** no sea desviada, las fuerzas eléctrica y magnética deben ser iguales y de sentido contrario,

$$\mathbf{F_e} = -\mathbf{F_m} \quad \Rightarrow \quad q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

y, por tanto, los tres vectores **E**, **v** y **B** deben cumplir la condición anterior. Nótese que esta condición es independiente del signo que pueda tener la carga q, que se simplifica en todo caso al exigir la igualdad de fuerzas. Volviendo a las figuras anteriores, puede verse que esa condición se cumple en la primera de ellas, pero no en la segunda, donde **E** = **v∧B.**

b) Como ya sabemos lo que debe medir su velocidad, parece inmediato conocer la energía cinética que debería llevar el protón:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}1,672.10^{-27}(1,67.10^4)^2 = \mathbf{2,32.10^{-19}\ J} = \frac{2,32.10^{-19}}{1,6.10^{-19}} = \mathbf{1,45\ eV}$$

Junio 98

C4.— a) ¿Puede ser cero la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo magnético?

b) ¿Puede ser cero la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo eléctrico?

a) Sí, puede serlo. La fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento es $\mathbf{F_m} = q\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, de modo que el producto vectorial se anulará, y por tanto la fuerza $\mathbf{F_m}$ sobre la partícula, con la condición de que **v** y **B tengan la misma dirección**, sean o no del mismo sentido. Cuando una carga es lanzada en la dirección del campo magnético, éste no le afecta.

b) La fuerza eléctrica sobre una carga es $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, donde **E** es la intensidad de campo en el punto en que se encuentre la carga. Obviamente, la única posibilidad de que $\mathbf{F_e}$ sea nula es que lo sea **E**; de otra forma, la fuerza siempre tendrá valor no nulo.

Naturalmente, pueden existir puntos en un campo eléctrico en los que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$; en ellos, una carga en **reposo** quedaría en equilibrio. Conviene saber, en todo caso, que se trata de puntos de equilibrio **inestable**: si la carga colocada allí se desplaza infinitesimalmente en cualquier dirección, y después se deja en libertad, **se aleja** del punto de equilibrio en lugar de volver a él.

Septiembre 98

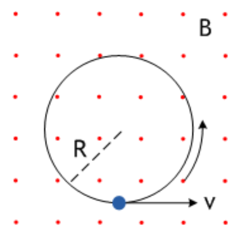
C4.— Un electrón que se mueve con una velocidad constante v penetra en un campo magnético uniforme B, de tal modo que describe una trayectoria circular de radio R. Si la intensidad de campo magnético disminuye a la mitad y la velocidad aumenta al doble, determine:

a) El radio de la órbita.

b) La velocidad angular.

a) El electrón tiene que entrar perpendicularmente al campo, para quedar atrapado describiendo una órbita circular. Como sabemos, el radio de la órbita se determina según

$$R = \frac{mv}{eB} \qquad (1)$$



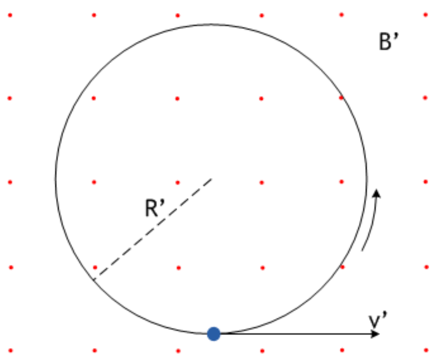
donde e es el valor absoluto de la carga del electrón. Si la intensidad del campo se hace la mitad, y la velocidad del electrón se duplica, llamando B’ y v’ a los nuevos valores

$$B' = \frac{B}{2} \quad ; \quad v' = 2v \qquad (2)$$

el nuevo radio de giro sería R’

$$R' = \frac{mv'}{eB'} \qquad (3)$$

y, dividiendo miembro a miembro (1) y (3), teniendo además (2) en cuenta



$$\frac{R}{R'} = \frac{\frac{mv}{eB}}{\frac{mv'}{eB'}} = \frac{\frac{v}{B}}{\frac{v'}{B'}} = \frac{vB'}{v'B} = \frac{vB'}{2v.2B'} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R' = 4R}$$

b) La velocidad angular de un electrón moviéndose en las condiciones descritas,

$$\omega = \frac{e}{m}B \qquad (4)$$

tiene una característica muy interesante, que es su **independencia de la velocidad lineal v y, por tanto, también del radio de giro**. De hecho, (4) expresa claramente que ω depende únicamente del valor B del campo magnético uniforme en que está el electrón, y de la relación carga/masa del electrón, que es invariable y la misma siempre. En consecuencia, bajo las nuevas circunstancias, lo único que importa es el cambio del campo expresado en (2), y la nueva velocidad angular será

$$\omega' = \frac{e}{m}B' = \frac{e}{m}\frac{B}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{2}}$$

la mitad de la que tendría en las circunstancias iniciales.

JUNIO 99

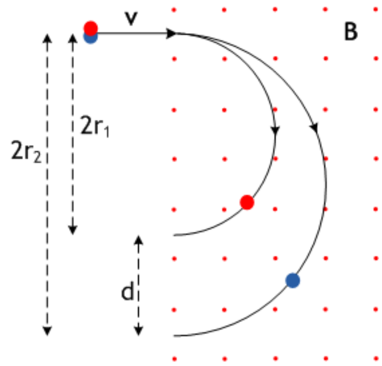
B1.– Dos isótopos, de masas $19{,}92.10^{-27}$ kg y $21{,}59.10^{-27}$ kg, con la misma carga de ionización, son acelerados hasta que adquieren una velocidad constante de $6{,}7.10^{5}$ m/s. Se les hace atravesar una región de campo magnético uniforme de 0,85 T cuyas líneas de campo son perpendiculares a la velocidad de las partículas.

a) Determine la relación entre los radios de las trayectorias que describe cada isótopo.

b) Si han sido ionizados una sola vez, determine la separación entre los dos isótopos cuando han descrito una semicircunferencia.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

Podemos imaginar una situación como se representa en la figura, con un campo magnético uniforme dirigido perpendicularmente al plano del papel, hacia el lector. Los dos isótopos se mueven inicialmente hacia la derecha, cuando están entrando en el campo, y se han representado con colores distintos: rojo, el más ligero; azul, el más pesado.



La fuerza de Lorentz que actúa sobre cada uno de ellos es la conocida $\mathbf{F} = q\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, y el resultado de esta acción sería el giro de ambos iones, cargados positivamente, en el plano del papel y en sentido horario, tal como recoge la figura.

a) La expresión del radio de la trayectoria de una partícula cargada, moviéndose perpendicularmente a un campo magnético **B** uniforme es la conocida

$$r = \frac{m\,v}{qB} \qquad (1)$$

de modo que, puesto que ambos isótopos entran en el campo con la misma velocidad $v = 6{,}7.10^{5}$ m/s, y ya que ambos tienen la misma carga de ionización q, el único factor que diferencia las trayectorias es la masa: de acuerdo con (1), los radios de las órbitas descritas serán proporcionales a las masas respectivas, según

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{m_1 v}{qB} \\[2ex] r_2 = \dfrac{m_2 v}{qB} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\dfrac{m_1 v}{qB}}{\dfrac{m_2 v}{qB}} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{19{,}92.10^{-27}\ \text{kg}}{21{,}59.10^{-27}\ \text{kg}} = \mathbf{0{,}92}$$

b) En cuanto a la segunda cuestión, podemos volver a (1) para calcular los radios de las órbitas, ya que ahora sabemos cuál es la carga q de los iones: si han sido ionizados una vez, tienen un electrón de menos, de manera que su carga es positiva y de valor $q = e = 1{,}6.10^{-19}$ C. Con esta cantidad, y con los datos del enunciado, es inmediato obtener

$$r_1 = \frac{m_1 v}{eB} = \frac{19{,}92.10^{-27}\ \text{kg} \,.\, 6{,}7.10^{5}\ \text{m/s}}{1{,}6.10^{-19}\ \text{C} \,.\, 0{,}85\ \text{T}} = 9{,}81.10^{-2}\ \text{m}$$

$$r_2 = \frac{m_2 v}{eB} = \frac{21{,}59.10^{-27}\ \text{kg} \,.\, 6{,}7.10^{5}\ \text{m/s}}{1{,}6.10^{-19}\ \text{C} \,.\, 0{,}85\ \text{T}} = 10{,}64.10^{-2}\ \text{m}$$

Finalmente, la figura muestra cómo, tras haber girado cada uno de los isótopos una semicircunferencia, la separación entre ambos es d, la diferencia entre los diámetros de sus trayectorias respectivas, que pueden escribirse como $2r_1$ y $2r_2$. En consecuencia, la separación pedida es

$$d = 2r_2 - 2r_1 = 2(10{,}64.10^{-2} - 9{,}81.10^{-2}) = 1{,}65.10^{-2}\ \text{m} = \mathbf{1{,}65\ cm}$$

SEPTIEMBRE 99

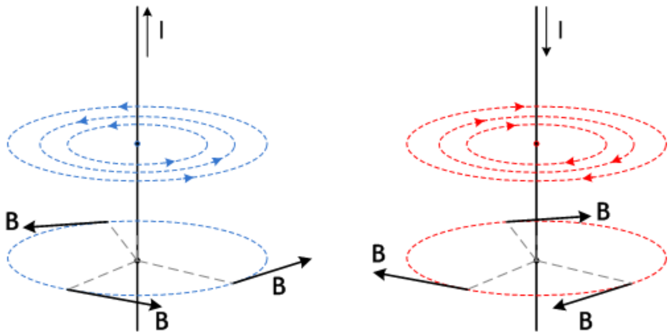
C4.— a) Analice cómo es la fuerza que ejercen entre sí dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos, separados una distancia d y recorridos por una corriente de intensidad I, según que los sentidos de las corrientes coincidan o sean opuestos.

b) Explique si es posible que un electrón se mueva con velocidad v, paralelamente a estos conductores y equidistante entre ellos, sin cambiar su trayectoria.

a) El campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto cualquiera sigue la ley de Biot y Savart

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

donde r es la distancia del punto al hilo indefinido; I es el valor de la corriente. La dirección y sentido de este campo se entiende bien a partir de sus líneas de campo, que son circulares, centradas en el hilo, y deben recorrerse de modo tal que al girar un destornillador o sacacorchos lleve el sentido de la corriente (equivalente a esta regla es la denominada "de la mano derecha", en la que el pulgar de esta mano debe mostrar el sentido de la intensidad de corriente cuando el resto de los dedos de la mano se curvan en el sentido de recorrido de la línea de campo). La figura muestra cómo serían las líneas de campo magnético creados por hilos verticales indefinidos que llevan corrientes de sentidos opuestos.



De otro lado, conocemos la acción de un **campo magnético uniforme** sobre una **corriente rectilínea indefinida**, que se escribe en términos

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \qquad (2)$$

donde **l** es un trozo de hilo de longitud arbitraria. Por supuesto, **B** no es aquí el campo creado por esta corriente, sino el campo — creado por quienquiera que sea, en todo caso se tratará de otras corrientes — en el que está metida nuestra corriente. Esta duplicidad de campos magnéticos, el que crea la corriente y el que actúa sobre ella, es fuente de múltiples confusiones y debe entenderse bien desde el principio.

Junio 01

C3.— Un electrón que se mueve con una velocidad de 10^6 m/s describe una órbita circular en el seno de un campo magnético uniforme de valor 0,1 T cuya dirección es perpendicular a la velocidad. Determine:

a) El valor de radio de la órbita que realiza el electrón.

b) El número de vueltas que da el electrón en 0,001 s.

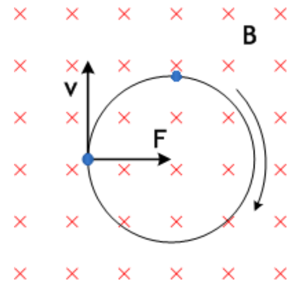
Datos: Masa del electrón $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

a) En las condiciones descritas, con el electrón entrando en dirección perpendicular al campo magnético, su movimiento es un **giro uniforme**. El radio de la órbita está dado por

$$r = \frac{m_e v}{eB} \qquad (1)$$

donde e es el valor absoluto de la carga del electrón, y m_e su masa. Tenemos cuantos datos se precisan para operar sin más:

$$r = \frac{9{,}1.10^{-31}.10^{6}}{1{,}6.10^{-19}.0{,}1} = \mathbf{5{,}7.10^{-5}\ m}$$



y, en lo que respecta al sentido de giro, debe determinarse en función de la situación concreta: por ejemplo, en la figura hemos supuesto un campo magnético **B** uniforme dirigido perpendicularmente y hacia dentro del papel; suponemos también al electrón moviéndose inicialmente hacia arriba: en tales condiciones, la fuerza magnética sobre el electrón resulta

$$\mathbf{F} = -e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

y estaría en el plano del papel, horizontal y hacia la derecha: eso permite entender que el electrón giraría en **sentido horario**. Naturalmente, sería en sentido antihorario si, por ejemplo, hubiésemos imaginado el campo hacia fuera del papel, o si, dejando el campo como está en la figura, supusiésemos al electrón inicialmente moviéndose hacia abajo y no hacia arriba.

b) El periodo en un movimiento giromagnético es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{B\frac{e}{m_e}} = \frac{2\pi}{B}\frac{m_e}{e}$$

y su característica principal es su **independencia del radio r o de la velocidad v** del giro del electrón. Cualquiera que sea el valor de r y v, el periodo es el mismo, y está determinado exclusivamente por el valor del campo, B, y por la relación carga/masa (e/m_e en nuestro caso) de la partícula.

En nuestro caso, el periodo vale $$T = \frac{2\pi}{0{,}1}\frac{9{,}1.10^{-31}}{1{,}6.10^{-19}} = 3{,}57.10^{-10}\ s$$

de manera que el número de vueltas en una milésima de segundo será

$$N = \frac{0{,}001\ s}{3{,}57.10^{-10}\ s\,/\,vuelta} = \mathbf{2{,}8.10^{6}\ vueltas}$$

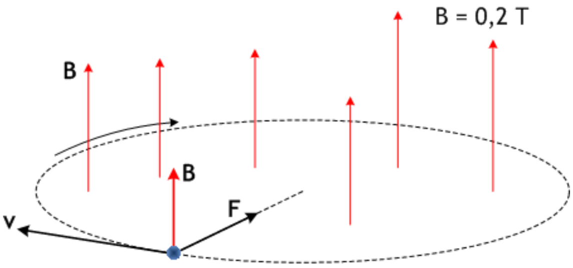
SEPTIEMBRE 01

C3.— Una partícula de carga q = 1,6.10^{-19} C se mueve en un campo magnético uniforme de valor B = 0,2 T, describiendo una circunferencia en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético con período 3,2.10^{-7} s y velocidad de 3,8.10^{6} m/s. Calcule:

a) El radio de la circunferencia descrita.

b) La masa de la partícula.

a) La carga de la partícula es, en valor absoluto, la de un electrón. Eso es compatible con una variedad de partículas, que incluye, entre otras, electrón y protón o sus correspondientes antipartículas. En la figura se ha supuesto que se trata de una carga positiva; así puede entenderse el sentido de giro de la partícula, teniendo en cuenta que el plano XY de giro se imagina horizontal y el campo magnético, perpendicular a ese plano, en la dirección del eje Z.



En todo caso, el radio de giro de una partícula en un giro uniforme del que se conoce el periodo y la velocidad es una obviedad, con independencia de que se trate de un giro en un campo magnético o de cualquier otro supuesto, como podría ser un satélite en órbita circular alrededor de un planeta. En efecto, sabemos que

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v\,T}{2\pi} = \frac{3{,}8.10^{6}.3{,}2.10^{-7}}{2\pi} = \mathbf{19{,}4\ cm} = \mathbf{0{,}19\ m}$$

b) Ahora podemos emplear la expresión del radio giromagnético $$r = \frac{mv}{qB}$$

para despejar la masa de la partícula $$m = \frac{qBr}{v} = \frac{1{,}6.10^{-19}.0{,}2.0{,}19}{3{,}8.10^{6}} = \mathbf{1{,}63.10^{-27}\ kg}$$

que resulta, con una aproximación muy buena, la masa de un protón; así, podríamos imaginar que se trata de esta partícula, o puede que se trate de un antiprotón, que tiene la mimsa masa y la misma carga e, pero negativa.

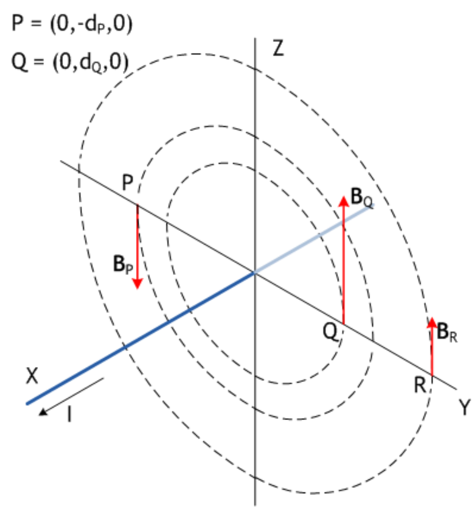
SEPTIEMBRE 01

A2.— Por un hilo conductor rectilíneo e infinitamente largo, situado sobre el eje X, circula una corriente eléctrica en el sentido positivo del eje X. El valor del campo magnético producido por dicha corriente es de 3.10^{-5} T en el punto P $(0,-d_P,0)$, y es de 4.10^{-5} T en el punto Q $(0,+d_Q,0)$. Sabiendo que d_P+d_Q = 7 cm, determine:

a) La intensidad que circula por el hilo conductor.

b) Valor y dirección del campo magnético producido por dicha corriente en el punto de coordenadas (0, 6 cm, 0).

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2} ; Las cantidades d_P y d_Q son positivas.



a) La figura muestra el hilo indefinido a lo largo del eje X, transportando una corriente I en sentido positivo. Las líneas de campo magnético creado por esta corriente serían círculos centrados en puntos del hilo; nos interesan especialmente las líneas de campo que pasan por los puntos P (0,—dP,0) y Q (0,dQ,0), ambos del eje Y. Estas dos líneas de campo son círculos centrados en el origen de coordenadas, y se encuentran en el plano YZ, el del papel: aparecen dibujadas en la figura.

Nótese que el campo $\mathbf{B}_P$ en el punto P, tangente a la línea de campo, está dirigido verticalmente (dirección del eje Z) y hacia abajo; por su parte, el campo $\mathbf{B}_Q$ en Q está dispuesto también en la dirección Z, pero hacia arriba. El enunciado facilita los módulos de ambos vectores, que reponden a la conocida ecuación

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

del campo creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto a distancia r de la misma. El punto P está a distancia d_P (en valor absoluto, que es lo necesario en (1)) del hilo; el punto Q a distancia d_Q. Podemos, por tanto, escribir

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_P} = 3.10^{-5}\ T \qquad (2) \qquad\qquad B_Q = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_Q} = 4.10^{-5}\ T \qquad (3)$$

un par de ecuaciones con tres incógnitas: d_P, d_Q e I. La tercera ecuación necesaria está en el enunciado,

$$d_P + d_Q = 7\ \text{cm} \qquad (4)$$

de modo que, dividiendo miembro a miembro (2) y (3)

$$\frac{B_P}{B_Q} = \frac{3}{4} = \frac{\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d_P}}{\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d_Q}} = \frac{d_Q}{d_P} \quad \Rightarrow \quad d_Q = \frac{3}{4} d_P$$

que, llevada a (4), da $\qquad d_P + \frac{3}{4} d_P = 7 \quad \Rightarrow \quad 7\,d_P = 28 \quad \Rightarrow \quad d_P = 4\ \text{cm}$

así que sólo falta volver a (2) $\qquad I = 3.10^{-5} \dfrac{2\pi.0,04}{4\pi.10^{-7}} = \mathbf{6\,A}$

b) El campo en un punto R (0, 6 cm, 0) sería semejante al campo en Q, como en todos los puntos del eje Y a la derecha del origen: será vertical, en la dirección del eje Z, y hacia arriba. Su módulo quedará

$$B_R = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_R} = \frac{4\pi.10^{-7}.6}{2\pi.0,06} = \mathbf{2.10^{-5}\ T}$$

MODELO 02

C3.— Una partícula cargada se mueve en línea recta en una determinada región.

a) Si la carga de la partícula es positiva, ¿puede asegurarse que en esa región el campo magnético es nulo?

b) ¿Cambiaría su respuesta si la carga fuese negativa en vez de ser positiva?

a) No, no puede asegurarse tal cosa. La acción de un campo magnético sobre una carga en movimiento es

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

y, como sabemos, la única acción posible de esta fuerza es la desviación de la dirección de movimiento de la carga. Si la partícula cargada se mueve en línea recta, como dice el enunciado, es posible que no exista campo, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, de modo que no exista fuerza, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, pero también es posible que la partícula cargada **se mueva precisamente en la dirección del campo**, no importa si con el mismo sentido o no; en tal caso, el producto vectorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$, y de nuevo resultará $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, así que la partícula tampoco se desviará en estas condiciones.

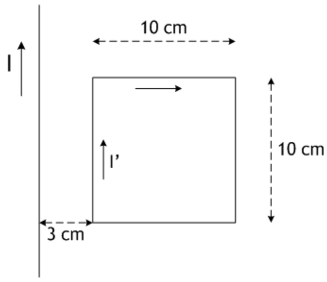
b) No, no cambiará: el signo de la carga nada tiene que ver con los argumentos que se han empleado. El signo de q influye en el sentido de la fuerza **F** en la expresión de Lorentz, pero eso carece de importancia cuando estamos hablando de que suceda $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

MODELO 02

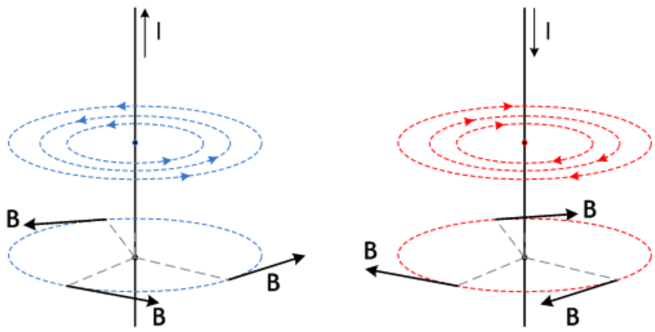
B2.- Sea un conductor rectilíneo y de longitud infinita, por el que circula una intensidad de corriente I = 5 A. Una espira cuadrada de lado a = 10 cm está colocada con dos de sus lados paralelos al conductor rectilíneo, y con su lado más próximo a una distancia d = 3 cm de dicho conductor. Si la espira está recorrida por una intensidad de corriente I' = 0,2 A en el sentido que se indica en la figura, determine:

a) El módulo, la dirección y el sentido del campo magnético creado por el conductor rectilíneo en cada uno de los lados de la espira paralelos a dicho conductor.

b) El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza ejercida sobre cada uno de los lados de la espira paralelos al conductor rectilíneo.

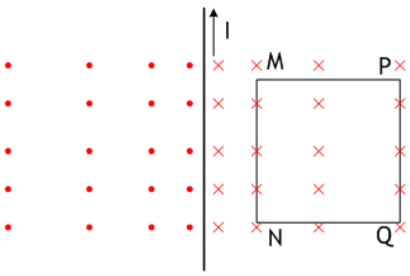


a) El campo creado por el conductor rectilíneo indefinido debe ser familiar: sus líneas de campo son circulares, centradas en puntos del hilo y el sentido del campo debe ser el adecuado para que, al girar según ese sentido en una línea de campo, un destornillador avance en la dirección de la corriente. La figura muestra cómo sería ese campo, representando algunas de las líneas de campo y los vectores **B** en algunos puntos.



Conocemos también el módulo del campo creado por un conductor rectilíneo indefinido, dado por

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad (1)$$



donde r es la distancia al conductor del punto donde se mide el campo: el radio de la línea de campo que pase por allí.

Naturalmente, podemos aplicar lo anterior a cualquier punto de la espira. Como todos los puntos del lado MN de ésta distan lo mismo del conductor, parece claro que **B medirá lo mismo en todos ellos**. Ese campo estará dirigido hacia dentro del papel, tal como sucede en todos los puntos de la figura a la derecha del conductor; a la izquierda de éste, el campo se dirige hacia el lector. Esto está recogido en la figura de la izquierda, donde también puede verse que, por idénticas razones, el campo **B será el mismo en todos los puntos del lado PQ**, y estará igualmente dirigido hacia dentro del papel, pero será menor que en el lado MN. Llamando $\mathbf{B_{MN}}$ al campo en el lado MN, y $\mathbf{B_{PQ}}$ al que existe en el lado PQ, las medidas de ambos serán, tomando datos del enunciado, y usando (1):

$$B_{MN} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{MN}} = \frac{4\pi.10^{-7}.5}{2\pi.0,03} = \mathbf{3,33.10^{-5}\ T} \qquad (2)$$

$$B_{PQ} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{PQ}} = \frac{4\pi.10^{-7}.5}{2\pi.0,13} = \mathbf{7,69.10^{-6}\ T} \qquad (3)$$

b) Se trata ahora de calcular la fuerza sobre los lados MN y PQ de la espira. En principio, parece una aplicación sencilla de la expresión conocida para la interacción (atracción o repulsión) entre corrientes indefinidas rectilíneas y paralelas:

$$F = \frac{\mu_0 II'}{2\pi d} l \qquad (4)$$

donde I e I' son los valores de las corrientes; d es la distancia entre ambas y l la longitud de los lados MN o PQ, en el caso que nos ocupa. Sin embargo, ni NM ni PQ son indefinidas, aunque sí son rectilíneas y paralelas al conductor de la izquierda. ¿Deberíamos preocuparnos por esto?

La respuesta es que no: el campo creado por el conductor indefinido en los segmentos de espira MN y PQ es, sin duda, el dado por (1), y eso garantiza la validez de (4) para hallar la fuerza sobre MN o sobre PQ. Otra cosa sería la discusión de la fuerza sobre un trozo de conductor rectilíneo de la longitud de MN o de PQ, en la que (4) plantearía dificultades.

Aplicamos, pues, (4) para hallar la fuerza sobre MN: ya que I' tiene el mismo sentido que I, se trata de corrientes del mismo sentido, **que se atraerán**, como sabemos. La fuerza sobre MN será de atracción hacia el conductor indefinido y valdrá

$$F_{MN} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi d_{MN}} l = \frac{4\pi.10^{-7}.5.0,2}{2\pi.0,03}.0,1 = \mathbf{6,67.10^{-7}\ N}$$

En cambio, la corriente I' en PQ es de sentido contrario a la del conductor indefinido: la fuerza sobre PQ será **repulsiva** y de valor

$$F_{PQ} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi d_{PQ}} l = \frac{4\pi.10^{-7}.5.0,2}{2\pi.0,13}.0,1 = \mathbf{1,54.10^{-7}\ N}$$

¿Qué pasa con la fuerza sobre los lados MP o NQ? La expresión (4) no puede usarse ahora, ya que el campo creado por el conductor indefinido en MP o NQ no es constante, de modo que el cálculo de la fuerza requeriría integración.

SEPTIEMBRE 02

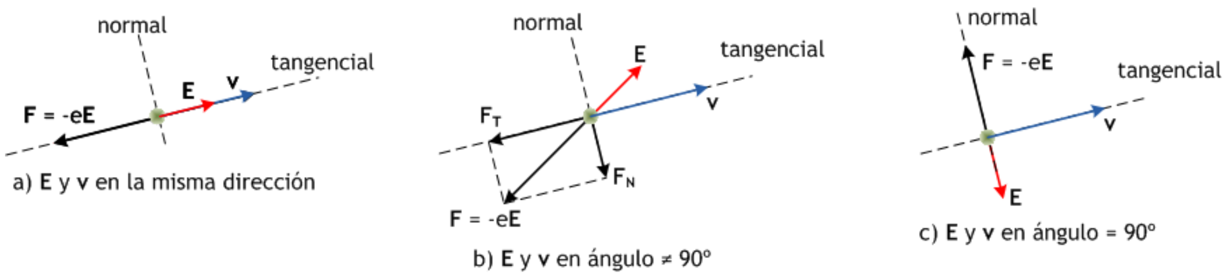
C2.– Un electrón se mueve con velocidad v en una región del espacio donde coexisten un campo eléctrico y un campo magnético, ambos estacionarios. Razone si cada uno de estos campos realiza o no trabajo sobre la carga.

La fuerza sobre el electrón estará dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = -e\mathbf{E} - e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

suma de las acciones eléctrica y magnética. Por supuesto, sabemos que los vectores **E** y **B** son perpendiculares, como sucede en cualquier punto del campo electromagnético.

De estas dos fuerzas, la eléctrica $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ es, en general, una fuerza con componentes tangencial y normal; aunque pudiera ocurrir, en situaciones excepcionales, que fuese exclusivamente tangencial o exclusivamente normal. Todo ello depende del ángulo entre la velocidad **v** y el campo **E** en el punto en que se halle la partícula: en la figura, mostramos



las posibilidades que, salvo matices, pueden plantearse de hecho. Como puede verse,

a) caso en que **v** y **E** coinciden en dirección. Entonces la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ es exclusivamente **tangencial** en ese punto;
b) caso en que **v** y **E** forman un ángulo no recto. Entonces la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ tiene componentes **tangencial** y **normal**. Este caso sería el más frecuente.
c) caso en que **v** y **E** son perpendiculares. Entonces la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ es exclusivamente **normal** en ese punto.

En cuanto a la fuerza magnética, $\mathbf{F_m} = -e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$, su dirección **siempre** es perpendicular a la velocidad **v**, ya que implica el producto vectorial $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$. En consecuencia, la fuerza $\mathbf{F_m}$ siempre es una fuerza **normal**.

Recordemos ahora principios básicos de mecánica de la partícula: **las fuerzas normales que actúan sobre una partícula no hacen trabajo sobe ella**. Dicho de otra manera, **todo el trabajo que recibe una partícula lo realizan las fuerzas tangenciales que actúan sobre ella**.

Nuestra conclusión parece ahora clara:

La fuerza eléctrica $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$, en general, **realiza trabajo sobre el electrón**. Excepcionalmente, en un supuesto como el recogido en la situación c), podría suceder que no hubiese tal trabajo.

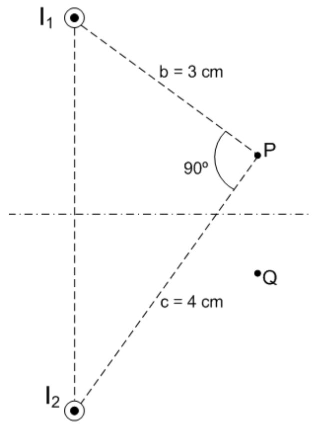
La fuerza magnética $\mathbf{F_m} = -e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ **nunca realiza trabajo**, porque siempre es un fuerza normal.

Como corolario, hago notar que estos resultados implican cosas muy interesantes: en general, un campo eléctrico **E** hará que cambie la **dirección** y el **módulo** de la velocidad del electrón; naturalmente, los cambios de módulo significan cambios de energía cinética (tanto como el trabajo recibido). Excepcionalmente, como en la situación a), sólo cambiará el módulo de la velocidad; en la situación c), sólo cambiará la dirección, quedando el módulo intacto. Dicho de manera muy compacta: un campo eléctrico **E**, en general, **desvía y acelera**. Ocasionalmente, puede que **sólo desvíe** o que **sólo acelere**. Nótese que un campo eléctrico **siempre cambia la velocidad de la partícula cargada, el electrón, de algún modo.**

Un campo magnético, en cambio, no puede modificar el módulo de la velocidad del electrón: **sólo puede desviarle**. Ocasionalmente, como sabemos, puede que no haga nada, cuando **v** y **B** tiene la misma dirección.

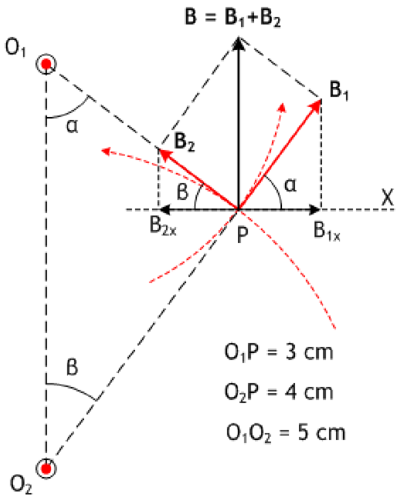
SEPTIEMBRE 02

B1.– En la figura se representan dos hilos conductores rectilíneos de gran longitud que son perpendiculares al plano del papel y llevan corrientes de intensidades I_1 e I_2 de sentidos hacia el lector.



a) Determine la relación entre I_1 e I_2 para que el campo magnético B en el punto P sea paralelo a la recta que une los hilos indicada en la figura.

b) Para la relación entre I_1 e I_2 obtenida anteriormente, determine la dirección del campo magnético B en el punto Q (simétrico del punto P respecto del plano perpendicular a la citada recta que une los hilos y equidistante de ambos).



a) La figura recoge la situación que demanda el enunciado. En ella deben distinguirse, para comprender la situación final:

— la línea de campo campo magnético creado por el hilo 1 en el punto P. Se trata de un círculo, en el plano del papel, con centro en el hilo y radio 3 cm; debe recorrerse en sentido antihorario. El campo $\mathbf{B_1}$ creado por el hilo 1 en P es tangente a esta línea, como se muestra.

— la línea de campo campo magnético creado por el hilo 2 en el punto P. Se trata de un círculo, en el plano del papel, con centro en el hilo y radio 4 cm; debe recorrerse en sentido antihorario. El campo $\mathbf{B_2}$ creado por el hilo 2 en P es tangente a esta línea, como se muestra.

— El campo en P, finalmente, se calcula aplicando el principio de superposición: los campos se suman. Así, $\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$.

— El triángulo O_1O_2P, en el plano del papel, es rectángulo; los ángulos en O_1 y O_2 se han llamado respectivamente α y β.

Las medidas de los vectores $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ se siguen de

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

expresión familiar del campo creado por una corriente rectilínea e indefinida. Aplicándola a estos supuestos, tenemos:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi . 0,03} \quad (2); \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi . 0,04} \quad (3)$$

Ahora, para que el campo **B** en P sea finalmente paralelo a la línea O_1O_2, **las componentes horizontales de B_1 y B_2 deben anularse**. Eso es posible porque, como se ve, tienen sentidos opuestos; bastará con que midan lo mismo. Se han denominado, respectivamente, B_{1x} y B_{2x}, ya que llevan la dirección horizontal que habitualmente es la de ese eje. La observación cuidadosa de la figura permitirá entender que los ángulos α y β aparecen de nuevo al buscar estas componentes; de ella se deduce que

$$B_{1x} = B_1 \cos\alpha \quad ; \quad B_{2x} = B_2 \cos\beta \qquad (4)$$

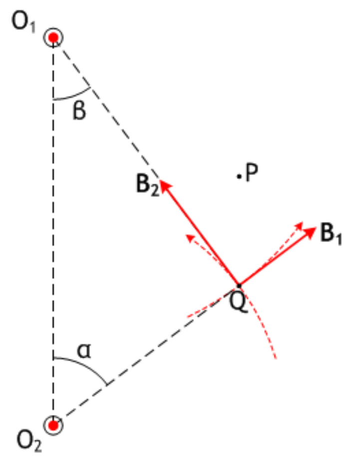
y, por otro lado, en el triángulo O_1O_2P

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{4}{5} \qquad (5)$$

de modo que, si debe cumplirse $B_{1x} = B_{2x}$, empleando (3), (4) y (5) se sigue que

$$B_{1x} = B_{2x} \;\Rightarrow\; B_1\cos\alpha = B_2\cos\beta \;\Rightarrow\; \frac{\mu_0 I_1}{2\pi . 0,03}\,\frac{3}{5} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi . 0,04}\,\frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \mathbf{I_1 = I_2}$$

es decir, ambas corrientes deben tener el mismo valor.



b) La situación es perfectamente simétrica con lo que sucede en el punto P, cambiando el papel que juegan los campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$: las respectivas componentes horizontales se anulan de nuevo, exactamente como sucedió en P. De nuevo, por tanto, el campo **B** resultante en Q lleva **la dirección de la línea O_1O_2 que une los hilos**. De hecho, como es fácil de comprobar, es exactamente el mismo campo que en P.

SEPTIEMBRE 03

C3.— Una partícula de carga positiva q se mueve en la dirección del eje de las X con una velocidad constante v = a **i y entra en una región donde existe una campo magnético de dirección eje Y y módulo constante B** = b **j.**

a) Determine la fuerza ejercida sobre la partícula en módulo, dirección y sentido.

b) Razone qué trayectoria seguirá la partícula y efectúe un esquema gráfico.

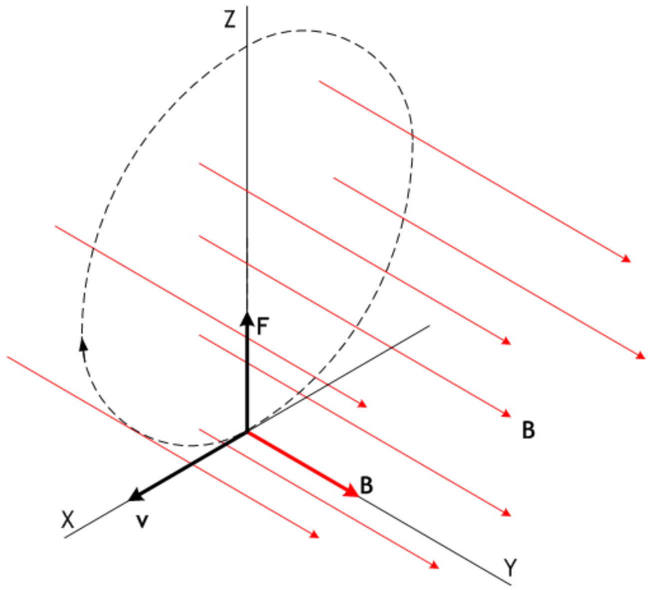
a) Un caso sencillo de empleo de la fuerza de Lorentz sobre una partícula en un campo magnético

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

que, además, es uniforme. Con toda la información disponible, el cálculo es inmediato:

$$\mathbf{F} = q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = qab\mathbf{k}$$

resultando una fuerza en la dirección del eje Z, sentido positivo.



b) Obsérvese en la figura la dirección y sentido de todos los vectores en el momento que se describe: puede verse con claridad que, siendo **v** y **B** perpendiculares, estamos ante una aplicación más del movimiento de giro uniforme de una carga en un campo magnético uniforme; en nuestro caso, el giro sucede en el plano XZ. El sentido positivo de **F** en el eje Z, junto con el sentido igualmente positivo de **v**, en el eje X, dejan bien claro cómo va a girar la partícula: lo hará en **sentido horario**, tal como se muestra en la figura.

MODELO 04

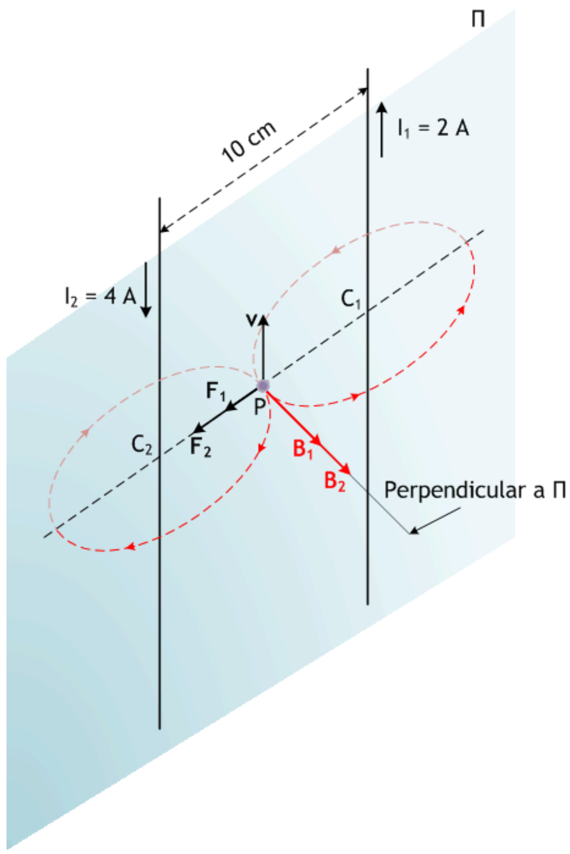
A2.– Por dos hilos conductores, rectilíneos y paralelos, de gran longitud, separados una distancia de 10 cm, circulan dos corrientes de intensidades 2 A y 4 A, respectivamente, en sentidos opuestos. En un punto P del plano que definen los conductores, equidistante de ambos, se introduce un electrón con una velocidad de 4.10^4 m/s paralela y del mismo sentido que la corriente de 2 A. Determine:

a) El campo magnético en la posición P del electrón.

b) La fuerza magnética que se ejerce sobre el electrón situado en P.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N A^{-2}; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6.10^{-19}$ C

a) El plano Π es el que forman los dos conductores, que hemos llamado I_1 e I_2; los detalles sobre ellos pueden verse con facilidad en la figura. El punto P en el que se introduce el electrón es medio entre los puntos C_1 y C_2 de los hilos; la distancia C_1C_2 = 10 cm y las distancias $C_1P = C_2P$ = 5 cm.



El campo $\mathbf{B_1}$ creado por el hilo I_1 en el punto P es tangente en ese punto a un círculo centrado en C_1 y de radio $r_1 = C_1P$; ya que la corriente I_1 se ha imaginado hacia arriba, la línea de campo circular debe recorrerse en sentido antihorario, como se muestra en la figura. Así, $\mathbf{B_1}$ resulta perpendicular al plano Π, dirigido hacia el lector. Su módulo es sencillo:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = 2.10^{-7}\frac{2}{0{,}05} = 8.10^{-6}\ \text{T} = 8\ \mu\text{T}$$

De modo semejante, el campo $\mathbf{B_2}$ creado por el hilo I_2 en el punto P es tangente en ese punto a un círculo centrado en C_2 y de radio $r_2 = C_2P$. Como la corriente I_2 se ha supuesto hacia abajo, la línea de campo circular debe recorrerse en sentido horario, y $\mathbf{B_2}$ resulta perpendicular al plano Π, dirigido hacia el lector, con la misma dirección y sentido que $\mathbf{B_1}$. El módulo de $\mathbf{B_2}$ es también inmediato:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = 2.10^{-7}\frac{4}{0{,}05} = 16.10^{-6}\ \text{T} = 16\ \mu\text{T}$$

Finalmente, el campo en P será $\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$

y, con los resultados obtenidos, es sencillo comprender que **B** llevará la misma dirección y sentido que comparten $\mathbf{B_1}$ **y** $\mathbf{B_2}$; será, por tanto, perpendicular al plano Π en el punto P, dirigido hacia el lector y de módulo

$$B = B_1 + B_2 = 24\ \mu\text{T}$$

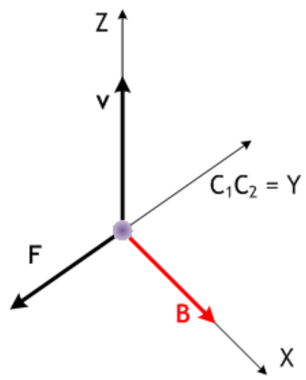
Si miramos la figura con atención podemos ver un triedro trirrectángulo que puede usarse como sistema de referencia XYZ: estaría formado por la dirección de **B** en el punto P como eje X, la dirección C_1C_2 como eje Y, y la dirección de la velocidad **v** del electrón en P, vertical y hacia arriba (como I_1), como eje Z.

Usando ese sistema de referencia, que se muestra abajo, la respuesta al apartado a) sería

$$\mathbf{B} = 24\mathbf{i}\ \mu\text{T}$$

b) Bastaría aplicar la expresión de la fuerza magnética sobre una carga q con velocidad **v** en un punto en el que el campo magnético es **B**:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$



donde $\mathbf{v} = 4.10^4\mathbf{k}$ m/s, en nuestro sistema de referencia, igual que $\mathbf{B} = 24\mathbf{i}$ μT, como ya hemos visto: ambos vectores están recogidos en la figura, al lado. La fuerza sobre el electrón resulta inmediata: recordando que q = −e = $-1{,}6.10^{-19}$ C, será

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = -e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = -1{,}6.10^{-19}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 4.10^4 \\ 24.10^{-6} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1{,}54.10^{-19}\,\mathbf{j}\ \text{N}$$

en la dirección del eje Y, en sentido negativo: aunque el producto vectorial $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ llevaría el sentido positivo del eje Y, el valor negativo de la carga del electrón invierte el sentido de la fuerza.

Naturalmente, podríamos haber calculado el valor de la fuerza que aplica **cada hilo** sobre el electrón, con expresiones que hubiesen sido, respectivamente, $\mathbf{F_1} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{F_2} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B_2}$, para sumar después ambas fuerzas y obtener $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, el mismo resultado final. Las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ se muestran en la primera figura, y hubiesen resultado, respectivamente,

$$\mathbf{F_1} = -0{,}51.10^{-19}\mathbf{j}\ \text{N}; \qquad \mathbf{F_1} = -1{,}02.10^{-19}\mathbf{j}\ \text{N}$$

de manera que su suma ofrezca el resultado final que ya conocemos.

SEPTIEMBRE 04

C4.– En una región del espacio existe un campo magnético uniforme dirigido en el sentido negativo del eje Z. Indique mediante un esquema la dirección y el sentido de la fuerza que actúa sobre una carga, en los siguientes casos:

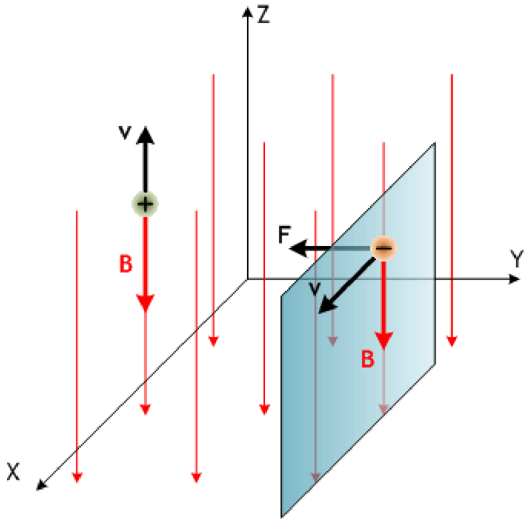
a) La carga es positiva y se mueve en el sentido positivo del eje Z.

b) La carga es negativa y se mueve en el sentido positivo del eje X.

La fuerza sobre la carga será la conocida fuerza magnética **F** = q **v**∧**B**. El campo magnético puede escribirse **B** = −B**k** T en los dos casos, para que resulte un vector uniforme en el sentido negativo del eje Z. Así, queda entrar en esa expresión con los datos acerca de q y de su velocidad:

a). Si la carga es positiva, q > 0, y su velocidad lleva la dirección del eje Z, sentido positivo, será **v** = v**k** m/s. Siendo los vectores **v** y **B** de la misma dirección, su producto vectorial será **nulo**, así que no se observará fuerza sobre la carga. En efecto,

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = \mathbf{0}\ \mathrm{N}$$



b) Si la carga es negativa, q < 0, y su velocidad es en el sentido positivo del eje X, **v** = v**i** m/s, debemos considerar el plano que forman **v** y **B**, que resultaría el plano XZ. El producto vectorial **v**∧**B** llevaría la dirección del eje Y, sentido positivo. El signo negativo de la carga invertiría el sentido de la fuerza, que acabaría en la dirección del eje Y, sentido negativo. En efecto,

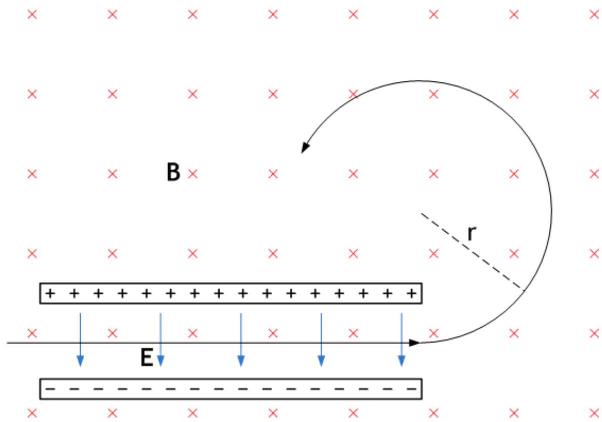
$$\mathbf{F} = -q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = -q(Bv\,\mathbf{j}) = -qvB\,\mathbf{j}\ \mathrm{N}$$

MODELO 05

A2.— Una partícula cargada pasa sin ser desviada de su trayectoria rectilínea a través de dos campos, eléctrico y magnético, perpendiculares entre sí. El campo eléctrico está producido por dos placas metálicas (situadas a ambos lados de la trayectoria) separadas 1 cm y conectadas a una diferencia de potencial de 80 V. El campo magnético vale 0,002 T. A la salida de las placas, el campo magnético sigue actuando perpendicularmente a la trayectoria de la partícula, de forma que ésta describe una trayectoria circular de 1,14 cm de radio. Determine:

a) La velocidad de la partícula en la región entre las placas.

b) La relación masa/carga de la partícula.



Un problema que puede parecer complejo a causa de la acumulación de circunstancias implicadas, pero que no lo es tanto si se procede a discutirlo ordenadamente. Comencemos por considerar cómo pasa la partícula cargada, sin sufrir desviación, atravesando la zona entre las placas metálicas en la que tenemos los campos eléctrico y magnético: hemos imaginado el campo eléctrico hacia abajo, en el plano del papel, y el campo magnético perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro del mismo; además, tal como señala el enunciado, el campo eléctrico **E** es uniforme y existe únicamente en el espacio entre las placas, mientras que el campo magnetico **B** es igualmente uniforme y existe dentro y fuera del espacio entre las placas.

La figura inmediata muestra la trayectoria completa que propone el ejercicio, formada por una línea recta entre las placas, cuando la partícula cargada desarrolla un movimiento rectilíneo y uniforme sin sufrir modificación alguna en la velocidad, seguida de una trayectoria circular cuando, al salir de las placas, queda en un campo magnético uniforme y con una velocidad perpendicular al mismo.

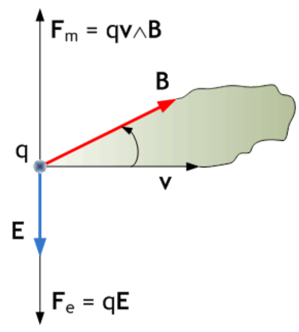
a) Entendida entonces la situación en términos globales, discutámosla en detalle en las dos zonas de interés, primero entre las placas y después al salir de ellas. Entre las placas, y suponiendo que la carga de la partícula sea positiva, existirán dos fuerzas sobre ella:

1) la fuerza eléctrica, **F** = q**E**, dirigida verticalmente y hacia abajo.

2) la fuerza de Lorentz magnética, **F** = q **v**∧**B**, que será igualmente vertical, pero dirigida hacia arriba (**v** está en el plano del papel, hacia la derecha; **B** va hacia dentro del papel: basta considerar el producto vectorial para comprender la dirección y el sentido de **F**).

Para que no exista desviación, como hemos visto ya en otras ocasiones, es preciso que ambas fuerzas, de igual dirección y sentido opuesto, se anulen. Para ello, sus módulos deberán ser iguales

$$qE = qvB \qquad (\mathbf{v} \text{ y } \mathbf{B} \text{ forman ángulo de 90º, cuyo seno es 1})$$



de manera que la velocidad tendría que ser exactamente $v = \frac{E}{B}$ (1)

el cociente entre los módulos de **E** y **B**, presentes en el enunciado: B es 0,002 T, sin más vueltas, y E no aparece directamente, sino a través de la diferencia de potencial entre las placas, de 80 V. Para conseguir E, hay que recordar que, en un campo uniforme entre placas, la relación entre la intensidad de campo y la diferencia de potencial entre las placas es muy sencilla

$$V = E.d$$

donde d, distancia entre placas, es en nuestro caso d = 1 cm = 10^{-2} m. De esta manera, es inmediato obtener

$$E = \frac{V}{d} = \frac{80}{0,01} = 8000\ \frac{V}{m} = 8000\ \frac{N}{C}$$

y sólo resta ir a (1) para responder a la primera pregunta $v = \frac{E}{B} = \frac{8000}{0,002} = \mathbf{4.10^6\ m/s}$

acerca de la velocidad de la partícula cargada.

b) La segunda cuestión es más rápida, una vez que conocemos la velocidad de la carga. Como sabemos, una carga q moviéndose con velocidad **v** perpendicular a un campo mágnético uniforme **B** describe un giro de radio r dado por

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad (2)$$

en nuestro caso, además, considerando las direcciones que hemos supuesto para **E** y **B**, se trataría de un giro en sentido antihorario, tal como aparece en la primera figura. Puesto que nos dicen que el radio de giro es r = 1,14 cm, y dado que conocemos los valores de B y de v, parece claro que podemos despejar directamente la relación masa/carga (m/q) de la partícula, que tomaría el valor

$$\frac{m}{q} = \frac{rB}{v} = \frac{1,14.10^{-2}.0,002}{4.10^6} = 5,7.10^{-12}\ \frac{kg}{C}$$

y habríamos terminado. Acaso se pueda hacer una rápida reflexión acerca del valor que acabamos de obtener: ¿qué clase de partícula puede tener esa relación carga/masa?. La respuesta podría orientarse hacia una partícula elemental, como un protón, por ejemplo, pero las cuentas dan un resultado del orden 10^{-8} kg/C; mucho mejor va la cosa con un electrón, que resulta tener un cociente masa/carga $5,69.10^{-12}$ kg/C: se trata entonces, seguramente, de un electrón, o acaso de un positrón, si se quiere pensar en carga positiva.

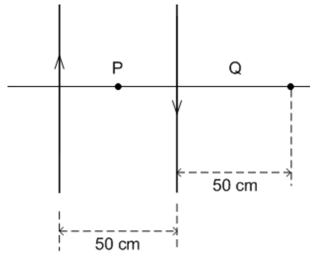
MODELO 05

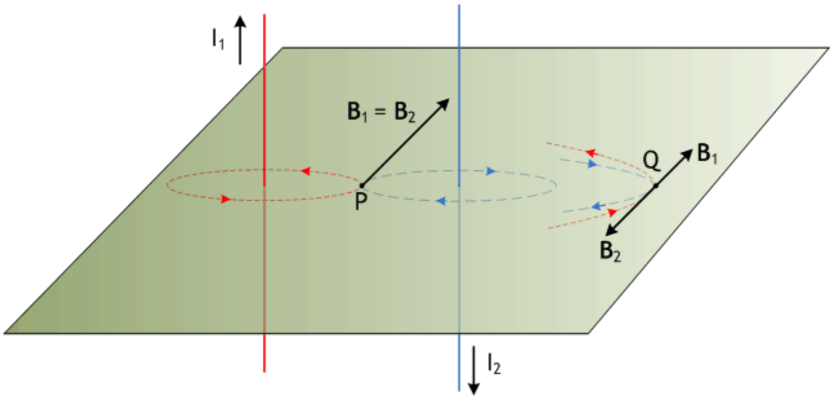
B2.— Dos hilos conductores de gran longitud, rectilíneos y paralelos, están separados una distancia de 50 cm, tal como se indica en la figura. Si por los hilos circulan corrientes iguales de 12 A de intensidad y sentidos opuestos, calcule el campo magnético resultante en los puntos indicados en la figura:

a) Punto P equidistante de ambos conductores.

b) Punto Q situado a 50 cm de un conductor y a 100 cm del otro.

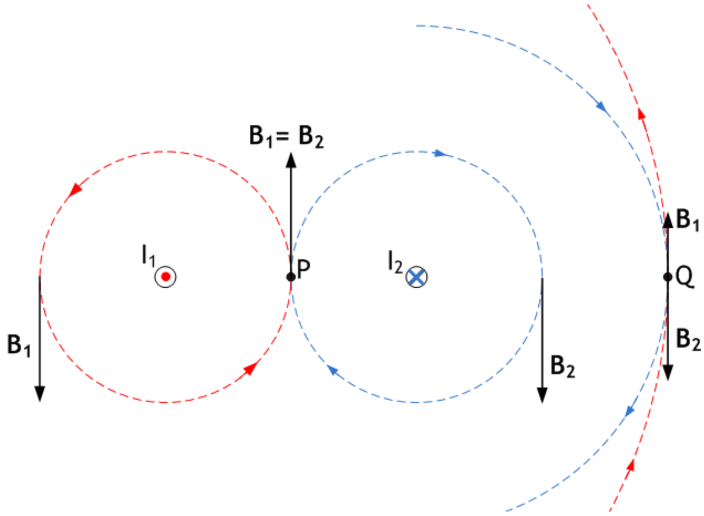
Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N.A^{-2}





Llamaremos 1 al hilo situado a la izquierda de la figura, que lleva corriente hacia arriba. El campo creado por este hilo en los puntos P y Q es perpendicular al plano del papel y hacia dentro del mismo, como en todos los puntos del plano del papel a la derecha de ese hilo. En cambio, el hilo 2, situado a la derecha del hilo 1, lleva corriente hacia abajo: eso implica que el campo creado por ese hilo en P está dirigido hacia dentro del papel, pero en Q está dirigido hacia fuera del papel.

Un punto de vista útil a menudo es el que recoge la figura que aparece al lado, en la que se representan los hilos perpendicularmente al plano del papel: uno de ellos — el hilo 1 — con corriente dirigida hacia el lector (se representa con el símbolo ⊙) y el otro — el hilo 2 — con corriente dirigida hacia dentro del papel (se representa con ⊗). Los puntos P y Q están ahora en el plano del papel, y se han dibujado las líneas de campo de los campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ creados por ambos hilos y que pasan por P y por Q.



Así, puede verse que las líneas de campo de $\mathbf{B_1}$ se recorren en sentido antihorario (de modo que un sacacorchos girando en ese sentido avanzaría hacia el lector), mientras que las de $\mathbf{B_2}$ se recorren en sentido contrario.

a) Como consecuencia, en P los dos campos, $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ coinciden en dirección y sentido, de modo que si regresamos al punto de vista de arriba, irían ambos hacia dentro del papel. Por otro lado, ya que I_1 e I_2 tienen el mismo valor, y dado que P equidista 25 cm de los dos hilos, es fácil comprender que $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ medirán lo mismo en P: son, pues, vectores iguales. La medida de cualquiera de ellos sería:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{4\pi.10^{-7}.12}{2\pi.25.10^{-2}} = 9,6.10^{-6}\ \text{T}$$

y el campo en el punto P mediría el doble de esa cantidad, ya que habría que sumar $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$:

(Punto P) B = $\mathbf{1,92.10^{-5}}$ **T**

dirigido hacia dentro del papel, tal como lo representa la figura de arriba.

b) En el punto Q, los dos campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ tienen medidas diferentes, ya que este punto está a 50 cm del hilo 2 y a 100 cm del hilo 1; además, los campos tienen sentidos opuestos, con $\mathbf{B_2}$ hacia fuera del papel y $\mathbf{B_1}$ hacia dentro, siempre desde el punto de vista de la figura del enunciado. Los módulos de $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ en Q resultan ser

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{4\pi.10^{-7}.12}{2\pi.1} = 2,4.10^{-6}\ \text{T} \quad ; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi.10^{-7}.12}{2\pi.50.10^{-2}} = 4,8.10^{-6}\ \text{T}$$

de modo que B_2, como era de esperar, tiene doble medida que B_1. El campo total sería la diferencia entre ambos,

(Punto Q) B = $\mathbf{2,4.10^{-6}}$ **T**

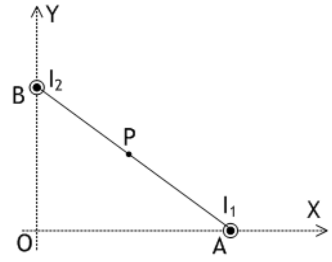
e iría dirigido hacia fuera del papel, considerando una vez más el punto de vista del dibujo en el enunciado.

MODELO 06

B2.– Dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos, perpendiculares al plano XY, pasan por los puntos A(80,0) y B(0,60) según indica la figura, estando las coordenadas expresadas en centímetros. Las corrientes circulan por ambos conductores en el mismo sentido, hacia fuera del plano del papel, siendo el valor de la corriente I_1 = 6 A. Sabiendo que $I_2 > I_1$ y que el valor del campo magnético en el punto P, punto medio de la recta que une ambos conductores, es de B = 12.10^{-7} T, determine:

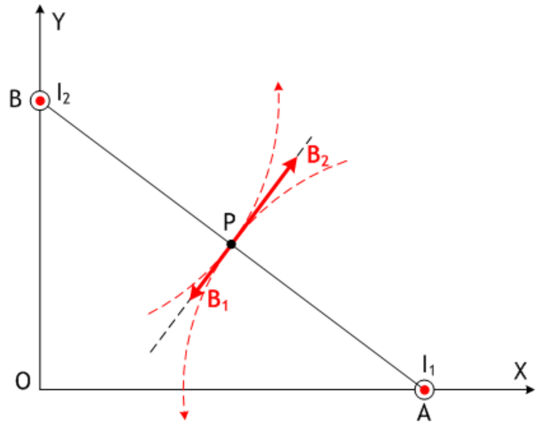
a) El valor de la corriente I_2.

b) El módulo, la dirección y el sentido del campo magnético en el origen de coordenadas O, utilizando el valor de I_2 obtenido anteriormente.



Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N.A^{-2}

a) La distancia AB = 100 cm, ya que es hipotenusa del triángulo AOB. El punto P es el medio de AB, de modo que los segmentos AP = BP = 50 cm = 0,5 m. Las líneas de campo magnético creadas por ambos conductores en el punto P serían circulares, en el plano XY (el del papel), centradas respectivamente en los puntos A y B, y se recorrerían en ambos casos en sentido antihorario, ya que las corrientes se dirigen al lector.



Todo ello aparece recogido en la figura, en la que se muestran los campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ creados en P por las corrientes I_1 e I_2. Ya que P es punto a la misma distancia, 50 cm, de ambos hilos, parece claro que el campo $\mathbf{B_2}$ será más intenso en ese punto que $\mathbf{B_1}$, debido a que la corriente I_2 es mayor que I_1, condición impuesta por el enunciado.

En todo caso, $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ tienen la misma dirección (perpendicular a AB) y sentidos opuestos. En consecuencia, el campo total en P será

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$$

un vector que llevará **esa misma dirección y sentido de $\mathbf{B_2}$**. Su módulo, que nos da el enunciado, es B = 12.10^{-7} T; que debe ser la diferencia entre los módulos de $\mathbf{B_2}$ y $\mathbf{B_1}$:

$$B = B_2 - B_1 \qquad (1)$$

Ahora bien, esos módulos son, respectivamente:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{AP}} \quad ; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{BP}}$$

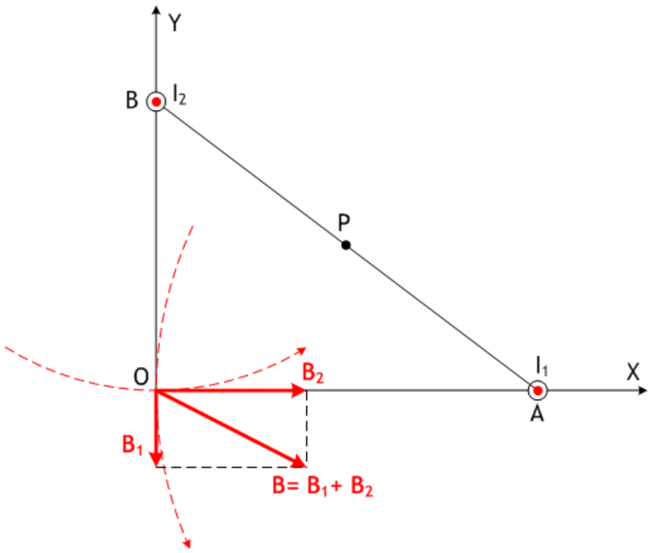
donde I_1 = 6 A; $r_{AP} = r_{BP}$ = 0,5 m; I_2 es desconocida. Como ha de cumplirse (1), bastará entrar con los valores conocidos y despejar I_2:

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{BP}} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{AP}} = 12.10^{-7}\ \text{T}$$

es decir, $$2.10^{-7}\frac{I_2}{0,5} - 2.10^{-7}\frac{6}{0,5} = 12.10^{-7}\ \text{T} \quad \Rightarrow \quad 4I_2 - 24 = 12 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \mathbf{9\ A}$$

la corriente en el segundo conductor.

b) Conocidas ambas corrientes, la búsqueda del campo en el origen de coordenadas en sencilla. Nótese que I_1 crea en O un campo $\mathbf{B_1}$ en el sentido negativo del eje Y, tangente a una circunferencia con centro en A y que pasa por O, recorrida en sentido antihorario. Del mismo modo, I_2 crea en O un campo $\mathbf{B_2}$ en la dirección del eje X y sentido positivo. La figura, al lado, debería ilustrar suficientemente ambas cosas.



Los campos quedarían, tomando en consideración lo dicho acerca de sus direcciones y sentidos:

$$\mathbf{B_1} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{AO}}\mathbf{j} = -2.10^{-7}\frac{6}{0,8}\mathbf{j} = -1,5.10^{-6}\,\mathbf{j}\ \text{T}$$

$$\mathbf{B_2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{BO}}\mathbf{i} = 2.10^{-7}\frac{9}{0,6}\mathbf{i} = 3,0.10^{-6}\,\mathbf{i}\ \text{T}$$

de modo que el campo **B** será

$$\mathbf{B} = 3,0.10^{-6}\,\mathbf{i} - 1,5.10^{-6}\,\mathbf{j}\ \text{T}$$

el vector representado en la figura. Su módulo es

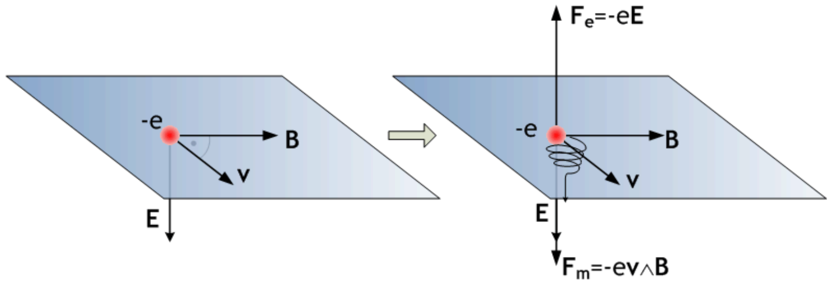
$$B = \sqrt{9.10^{-12} + 2,25.10^{-12}} = \mathbf{3,61.10^{-6}\ T}$$

SEPTIEMBRE 2007

C4.– a) ¿Cuál es la velocidad de un electrón cuando se mueve en presencia de un campo eléctrico de módulo $3{,}5.10^5$ N/C y de un campo magnético de 2 T, ambos mutuamente perpendiculares y, a su vez, perpendiculares a la velocidad del electrón, para que éste no se desvíe?

b) ¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico?

Datos: Masa del electrón, $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

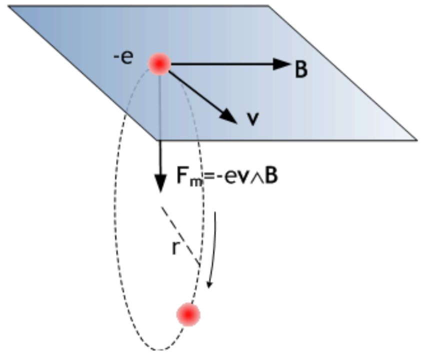


a) Una situación que hemos encontrado frecuentemente: el electrón está bajo las fuerzas eléctrica y magnética, que deben anularse, de modo que su trayectoria no sufra alteraciones. Para que esto sea posible, con independencia de la carga implicada, los vectores campo eléctrico **E**, campo magnético **B** y velocidad de la carga **v** deben cumplir la relación

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

que, en módulo, queda tan sencilla como E = vB. De este modo, imaginando una situación como la que se representa en la figura, la velocidad del electrón debería ser

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3{,}5.10^5}{2} = \mathbf{1{,}75.10^5\ m/s}$$



b) Si se elimina el campo eléctrico desaparece la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ sobre el electrón, quedando sólo la fuerza magnética. Eso nos deja el escenario bien conocido de una partícula cargada en un campo magnético uniforme y con velocidad perpendicular al mismo: sabemos que la partícula describe un **giro uniforme**, que se ha representado en la figura adjunta. El radio de la órbita se consigue con facilidad

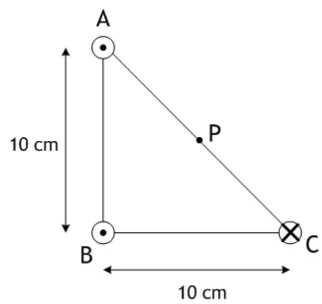
$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{9{,}1.10^{-31}.1{,}75.10^5}{1{,}6.10^{-19}.2} = \mathbf{4{,}98.10^{-7}\ m}$$

Septiembre 07

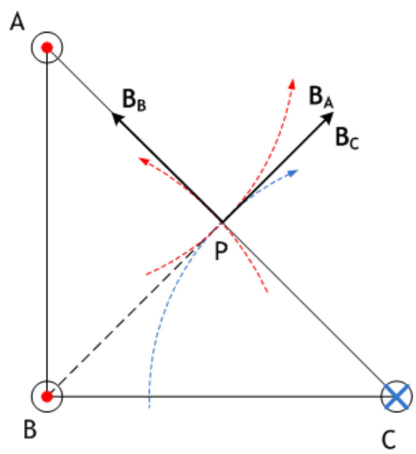
A2.– Tres hilos conductores rectilíneos, muy largos y paralelos, se disponen como se muestra en la figura (perpendiculares al plano del papel pasando por los vértices de un triángulo rectángulo). La intensidad de corriente que circula por todos ellos es la misma, I = 25 A, aunque el sentido de la corriente del hilo C es opuesto al de los otros dos hilos. Determine:

a) El campo magnético en el punto P, punto medio del segmento AC.

b) La fuerza que actúa sobre una carga positiva $Q = 1{,}6.10^{-19}$ C si se encuentra en el punto P moviéndose con una velocidad de 10^6 m/s perpendicular al plano del papel y con sentido hacia fuera.



Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N A^{-2}



a) En el punto P, del plano del papel, los campos creados por los conductores serán llamados $\mathbf{B_A}$, $\mathbf{B_B}$ y $\mathbf{B_C}$, respectivamente. Se trata de vectores en el plano del papel, tangentes a líneas de campo centradas, respectivamente, en los puntos A, B y C. Para entender los resultados, debe mirarse con atención la figura, considerando en qué sentido deben recorrerse estas líneas de campo: las dos primeras, centradas en A y B, en sentido **antihorario**, de acuerdo con intensidades de corriente hacia fuera del papel; la última, centrada en C, se gira en sentido **horario**, como corresponde a una corriente dirigida hacia dentro del papel.

Obsérvese, entonces que las direcciones y sentidos de $\mathbf{B_A}$ y $\mathbf{B_C}$ coinciden, y forman ángulo de 90º con la dirección de $\mathbf{B_B}$. Los módulos de los tres campos se obtienen de

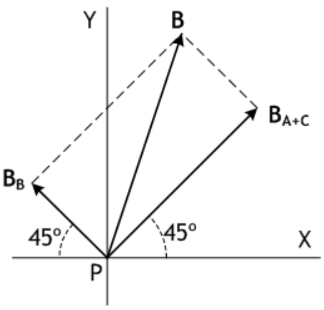
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

expresión del campo creado por una corriente rectilínea e indefinida en un punto a distancia r de la misma. Cuando la usemos en los tres casos, pondremos siempre el mismo valor de I = 25 A, idéntica corriente en los tres conductores. En cuanto al valor de r, se tratará, respectivamente, de los segmentos AP, BP y CP: es muy sencillo concluir, ya que ABC es un triángulo rectángulo e isósceles, que esos tres segmentos son iguales y de valor

$$AP = BP = CP = 5\sqrt{2}\ \text{cm}$$

de forma que los tres campos $\mathbf{B_A}$, $\mathbf{B_B}$ y $\mathbf{B_C}$ van a terminar teniendo el mismo módulo, que será

$$B_A = B_B = B_C = \frac{4\pi.10^{-7}.25}{2\pi.0{,}05\sqrt{2}} = \mathbf{7{,}07.10^{-5}\ T} \qquad (2)$$



Ahora hemos de sumarlos, para hallar el campo magnético resultante en el punto P:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_A} + \mathbf{B_B} + \mathbf{B_C}$$

y eso puede hacerse con facilidad: empezamos sumando $\mathbf{B_A}$ + $\mathbf{B_C}$, lo que dará un vector de la misma dirección y sentido que ambos, y de módulo doble que (2); llamaremos $\mathbf{B_{A+C}}$ a este vector que, después, sumaremos con $\mathbf{B_B}$. Para hacer esta última suma nos remitimos a la figura, en la que mostramos ambos vectores y un sistema de ejes XY orientados como BA y BC. Es fácil ver que los ángulos de los vectores con el eje X son de 45° (o de 45° en un caso y de −45° en otro, con más propiedad). Así, los vectores pueden escribirse calculando sus respectivas componentes:

$$\mathbf{B_{A+C}} = 2.7{,}07.10^{-5}\cos 45°\ \mathbf{i} + 2.7{,}07.10^{-5}\,\text{sen}\,45°\ \mathbf{j} = 10^{-5}\,\mathbf{i} + 10^{-5}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B_B} = -7{,}07.10^{-5}\cos 45°\ \mathbf{i} + 7{,}07.10^{-5}\,\text{sen}\,45°\ \mathbf{j} = -5.10^{-6}\,\mathbf{i} + 5.10^{-6}\,\mathbf{j}$$

de suerte que el campo finalmente resulta $\quad \mathbf{B} = \mathbf{B_{A+C}} + \mathbf{B_B} = 0{,}5.10^{-5}\,\mathbf{i} + 1{,}5.10^{-5}\,\mathbf{j}$

un vector en el plano del papel, de módulo $\quad B = \sqrt{(0{,}5.10^{-5})^2 + (1{,}5.10^{-5})^2} = \mathbf{1{,}58.10^{-5}\ T}$

b) Tal como tenemos las cosas, parece que lo más sencillo en este apartado sería emplear la expresión vectorial de **B** que acabamos de obtener, para usarla en $\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ y obtener de este modo la fuerza sobre la carga Q. Necesitamos escribir su velocidad **v**, pero eso no plantea dificultad: mide 10^6 m/s y está dirigida perpendicularmente al plano del papel y hacia fuera; eso equivale a decir, según están colocados los ejes XY, en la dirección del eje Z, sentido positivo, de modo que

$$\mathbf{v} = 10^6\ \mathbf{k}\ \text{m/s}$$

y, por tanto, es ya inmediato

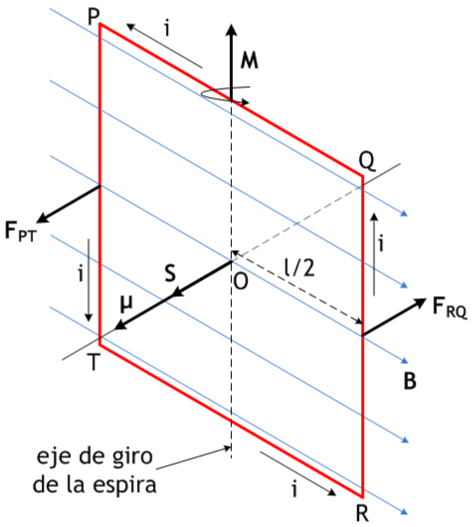
$$\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = 1{,}6.10^{-19}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 10^6 \\ 0{,}5.10^{-5} & 1{,}5.10^{-5} & 0 \end{vmatrix} = 1{,}6.10^{-19}(-15\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}) = -2{,}4.10^{-18}\,\mathbf{i} + 8.10^{-19}\,\mathbf{j}\ \text{N}$$

una fuerza que está también en el plano XY, y cuyo módulo es F = $\mathbf{2{,}53.10^{-18}}$ **N**. Aunque no se ha representado, el alumno debe intentar visualizarla, considerando las direcciones de **B**, en el plano del papel, de **v**, perpendicular al plano del papel, y la que llevaría, por tanto, su producto vectorial.

C4.– Una espira cuadrada de 10 cm de lado está recorrida por una corriente eléctrica constante de 30 mA.

a) Determine el momento magnético de la espira.

b) Si esta espira está inmersa en un campo magnético uniforme B = 0,5 T paralelo a dos de sus lados, determine las fuerzas que actúan sobre cada uno de sus lados. Analice si la espira girará o no hasta alcanzar la posición de equilibrio en el campo.



a) El momento magnético de una espira se calcula según

$$\boldsymbol{\mu} = i\,\mathbf{S} \qquad (1)$$

donde el vector superficie **S** tiene el sentido de avance de un sacacorchos o destornillador que gire en la espira en el sentido de la corriente. De este modo, el momento magnético **μ** tiene un sentido que depende del de la corriente en la espira. Hemos supuesto la corriente en la espira PTRQ en sentido antihorario, de modo que los vectores **S** y **μ** tienen el sentido mostrado en la figura. El módulo de **S** es

$$S = 0{,}1.0{,}1 = 0{,}01\ \text{m}^2$$

y el momento magnético de la espira resulta

$$\mu = 30.10^{-3}.\ 10^{-2} = \mathbf{3.10^{-4}\ A.m^2}$$

b) Imaginamos el campo magnético uniforme **B** paralelo a los lados QP y TR, como puede verse. Para calcular la fuerza que actúa sobre cada lado de la espira debemos usar

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \qquad (2)$$

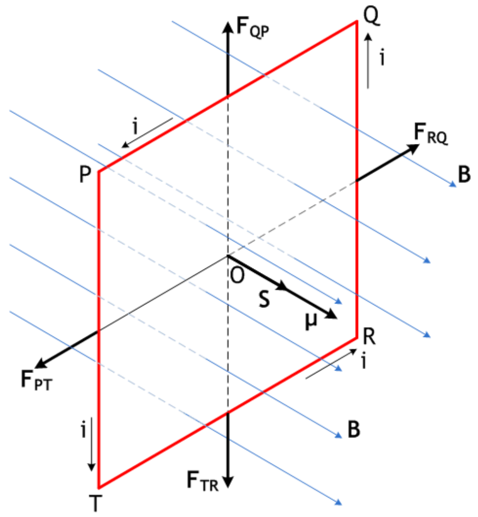
donde **l** = **QP**; **l** = **PT**; **l** = **TR**; **l** = **RQ**, respectivamente en los cuatro lados de la espira: **l**, como sabemos, debe llevar el sentido de la corriente. De este modo, resulta sencillo, observando la figura, concluir que la fuerza sobre los lados QP y TR es nula, ya que los vectores **QP** y **RT** son de la misma dirección que **B**:

$$\mathbf{F_{QP}} = i\mathbf{QP} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F_{TR}} = i\,\mathbf{TR} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

aunque una vez son del mismo sentido y la otra, opuestos: no importa, el producto vectorial es nulo en ambos casos.

La fuerza sobre los lados PT y RQ no es nula; su dirección puede verse en la figura, en la que deben considerarse cuidadosamente los vectores involucrados en los productos vectoriales

$$\mathbf{F_{PT}} = i\mathbf{PT} \wedge \mathbf{B} \qquad ; \qquad \mathbf{F_{RQ}} = i\mathbf{RQ} \wedge \mathbf{B}$$



La espira ha girado 90°
desde la posición inicial

pero, por razones sencillas, las dos fuerzas medirán los mismo: de hecho, se trata de dos fuerzas iguales y de sentido contrario, que forman un **par de fuerzas**, cuyo efecto sobre la espira es un **momento de giro** que la obliga a rotar sobre el eje de giro señalado en la figura, en el sentido también señalado, el antihorario. El módulo común de estas fuerzas es

$$F_{PT} = F_{RQ} = ilB = 30.10^{-3}.0{,}1.0{,}5 = \mathbf{1{,}5.10^{-3}\ N}$$

y el momento **M** del par de fuerzas tiene como medida el producto de cualquiera de ellas por la longitud del lado de la espira (el brazo del par):

$$M = Fl = 1{,}5.10^{-3}.0{,}1 = \mathbf{1{,}5.10^{-4}\ N.m}$$

¿Qué sucederá, entonces? La espira empezará a girar alrededor del eje indicado. Como consecuencia, las fuerzas sobre los lados de la espira comenzarán también a cambiar, así como el momento de giro (se hará más pequeño, de hecho). Cuando la espira haya **girado 90°**, la situación será la que se recoge en esta segunda imagen: queda para el lector la tarea de comprobar que el campo **B** aplica ahora fuerzas sobre los cuatro lados de la espira, que se anulan dos a dos ($\mathbf{F_{QP}} = -\mathbf{F_{TR}}$; $\mathbf{F_{RQ}} = -\mathbf{F_{PT}}$). No existe ningún momento de giro sobre la espira en esta posición, **que sería de equilibrio**, y a ello se refiere el enunciado. Cosa diferente sería discutir si la espira se queda en esa posición, o si la rebasa debido a la inercia de giro adquirida, que es lo que realmente sucedería: al final, estaría oscilando, salvo rozamientos que lo impidiesen.

Nótese, en cualquier caso, que la situación de equilibrio se tiene cuando el campo **B** y el momento magnético **μ** de la espira tienen la **misma dirección** (no importa si el mismo sentido o no; en realidad, hay dos posiciones de equilibrio). Una manera rigurosa y muy útil de manejar esta idea es recordar que el momento de giro **M** sobre una espira en un campo uniforme **B** se escribe

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B}$$

de modo que el momento de giro es nulo (la espira está en equilibrio) cuando **μ** y **B** tienen la misma dirección y su producto vectorial se anula.

JUNIO 09

C4.— Analice si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) **Una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme aumenta su velocidad cuando se desplaza en la misma dirección de las líneas del campo.**

b) **Una partícula cargada puede moverse en una región en la que existe un campo magnético y un campo eléctrico sin experimentar ninguna fuerza.**

a) Esto es **falso**. De hecho, un campo magnético no puede alterar el módulo de la velocidad de una partícula cargada que se mueve en su seno; **lo único que puede hacer es desviar su trayectoria**, debido a que las fuerzas magnéticas son siempre fuerzas normales. Pero, además, si la partícula se mueve en la dirección de las líneas del campo, la fuerza magnética $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{0}$, por ser paralelos los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$. Por tanto, nuestra partícula cargada **no sufrirá modificación alguna de la velocidad, ni en su módulo ni en su dirección**. Literalmente, se movería como si el campo magnético no existiese.

b) En parte, hemos respondido ya. Para que el campo magnético no aplique fuerza sobre la partícula, **ésta debe moverse en la dirección de las líneas de B**. Cosa diferente es el comportamiento del campo eléctrico $\mathbf{E}$, que aplica una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$: esta fuerza no es nula nunca, salvo que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, b) parecería ser también falso, si consideramos las dos fuerzas de manera individual, intentando que ambas sean nulas.

Existe, no obstante, una alternativa que apuntaría a la existencia de fuerzas magnética y eléctrica que se anulan mutuamente, en unas circunstancias que hemos encontrado repetidamente (véase **JUNIO 97 C1** y **JUNIO 98 C4**, también **MODELO 10 A–C3**, más adelante). Para que esto suceda, debe cumplirse la condición $\mathbf{E} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula cargada. Si se cumple esta condición, la fuerza neta sobre la partícula será cero, y b) resultaría **cierto**.

SEPTIEMBRE 09

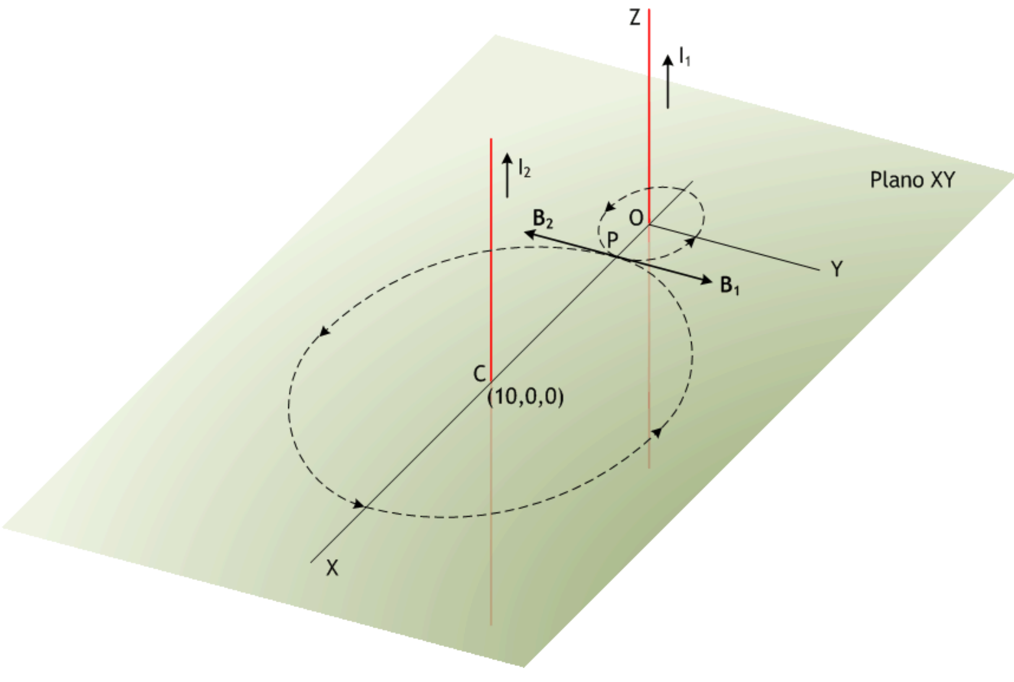
B2.— Un hilo conductor rectilíneo de longitud infinita está situado en el eje Z y transporta una corriente de 20 A en el sentido positivo de dicho eje. Un segundo hilo conductor, también infinitamente largo y paralelo al anterior, corta al eje X en el punto de coordenada x = 10 cm. Determines:

a) **La intensidad y el sentido de la corriente en el segundo hilo, sabiendo que el campo magnético resultante en el punto del eje X de coordenada x = 2 cm es nulo.**

b) **La fuerza por unidad de longitud que actúa sobre cada conductor, explicando cuál es su dirección y sentido.**

Dato: **Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N A^{-2}**

La situación descrita en el enunciado, en lo que respecta al primer apartado, queda recogida en la figura. Se muestran los dos conductores rectilíneos indefinidos, uno en el eje Z con una corriente I_1; el otro, paralelo al anterior, pasa por el punto C(10,0,0) del eje X y transporta corriente I_2.



Sabemos que I_1 = 20 A, en sentido positivo del eje Z. Se muestra en la figura la línea de campo creada por el conductor I_1, que debe recorrerse en sentido antihorario, acorde con la corriente hacia arriba.

De este modo, en el punto P(2,0,0) al que alude el apartado a), el conductor I_1 crea un campo $\mathbf{B_1}$ como el que se muestra: llevaría la dirección del eje Y, sentido positivo. Para que el campo magnético resultante en P sea nulo, el segundo conductor debe crear en P un campo como $\mathbf{B_2}$, de sentido opuesto a $\mathbf{B_1}$; además, como es lógico, deberán tener el mismo módulo para anularse finalmente.

En consecuencia, la línea de campo creada por I_2 y que pasa por P debe recorrerse en sentido también antihorario, para que $\mathbf{B_2}$ tenga el sentido deseado. **Ambas corrientes van hacia arriba**.

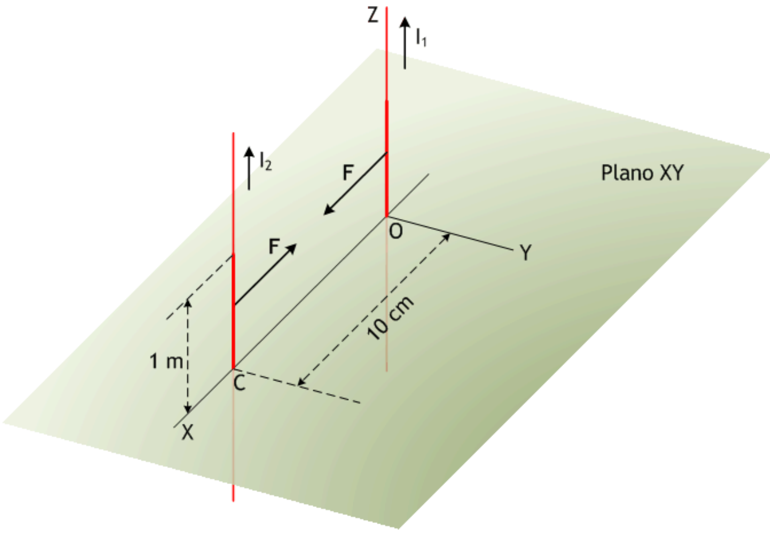
Además, como ya se ha dicho, los módulos de $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ deben ser iguales. Recordando la expresión del campo creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto a distancia r de la misma, cuyo módulo es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

se sigue que en nuestro caso debe cumplirse

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{OP}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{CP}} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{r_{OP}} = \frac{I_2}{r_{CP}} \quad \Rightarrow \quad \frac{20\ \text{A}}{2\ \text{cm}} = \frac{I_2}{8\ \text{cm}} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \mathbf{80\ A}$$

que sería el valor de la corriente en el segundo hilo.



b) Dos conductores rectilíneos indefinidos y paralelos se atraen cuando soportan corrientes paralelas; se repelen en caso contrario. Ya que nuestro caso se refiere a I_1 e I_2 paralelas, nuestros conductores **se atraerán**, del modo que se recoge en la figura.

Si d = 10 cm = 0,1 m es la distancia entre los hilos, la fuerza **por unidad de longitud**, es decir, la fuerza sobre un trozo de hilo de 1 m resulta

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = 2.10^{-7}\,\frac{20.80}{0,1} = \mathbf{3{,}2.10^{-3}\ N/m}$$

OPCIÓN A–C3.– Una carga puntual Q con velocidad v = v_xi entra en una región donde existe un campo magnético uniforme B = B_xi + B_yj + B_zk. Determine:

a) **La fuerza que se ejerce sobre la carga en el campo magnético.**
b) **El campo eléctrico E que debería existir en la región para que la carga prosiguiese sin cambio del vector velocidad.**

a) La fuerza que aparece sobre una carga Q, moviéndose con velocidad **v**, en un punto en el que el campo magnético es **B** es la conocida expresión de Lorentz, **F** = Q **v**∧**B**. En nuestro supuesto, resultará

$$\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = Q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = Q\,v_x\,(-B_z\mathbf{j}+B_y\mathbf{k})$$

una fuerza en el plano YZ, puesto que carece de componente **i**.

b) En presencia de ambos campos, **E** y **B**, la fuerza neta sobre la partícula cargada es la suma de las contribuciones eléctrica y magnética,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_e} + \mathbf{F_m} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

de modo que, para conseguir que la velocidad **v** de la carga no experimente ningún cambio (ni en módulo ni en dirección), es preciso que las fuerzas $\mathbf{F_e}$ y $\mathbf{F_m}$ se anulen, de acuerdo a

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} = \mathbf{F_e} + \mathbf{F_m} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \qquad Q\mathbf{E} = -\,Q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

así que la condición que debe cumplirse termina siendo

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \qquad (1)$$

En el caso que nos ocupa, ya que conocemos **v** y **B**, es inmediato conocer la expresión de **E** que sería necesaria para que se produzca la anulación de fuerzas:

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = v_xB_z\,\mathbf{j} - v_x\,B_y\,\mathbf{k}\ \ \mathrm{N/C}$$

de nuevo un vector sin componente en la dirección X, como era de esperar. La figura recoge de qué forma podríamos imaginar los vectores implicados: **v** lleva la dirección del eje X; **B** tiene una dirección arbitraria, no coincidente con ninguno de los ejes X, Y o Z, finalmente **E** debería estar dispuesto en una dirección perpendicular al plano formado por **v** y **B**, de forma que pueda verificarse la condición (1). Naturalmente, el módulo de **E** tendría que ser el que se desprende del resultado que acabamos de obtener, es decir,

$$E = \sqrt{v_x^2\,(B_z^2+B_y^2)} = v_x\,\sqrt{B_z^2+B_y^2}$$