JUNIO 96

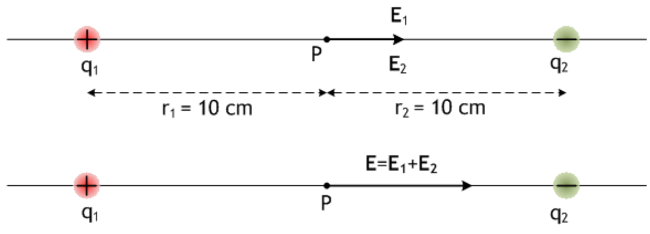
B2.- Se tienen dos cargas eléctricas puntuales de 3 μC cada una, una positiva y la otra negativa, colocadas a una distancia de 20 cm. Calcular la intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico en los siguientes puntos:

a) En el punto medio del segmento del segmento que las une.

b) En un punto equidistante 20 cm de ambas cargas.

Datos: (medio es el vacío) Constante de la ley de Coulomb $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}

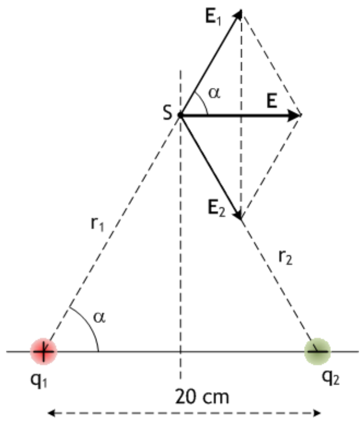
a) Sea P el punto medio del segmento que une las cargas. Suponemos q_1 positiva, a la izquierda, y q_2 negativa, a la derecha de la imagen. Los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ creados por ambas cargas en P son radiales, como corresponde a cargas puntuales, y coinciden en el sentido, hacia la carga q_2. Miden lo mismo, además, por ser iguales las cargas y estar a la misma distancia de P:



$$E_1 = E_2 = K\frac{q_1}{r_1^2} = K\frac{|q_2|}{r_2^2} = 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{0,1^2} = 27.10^5 \text{ N / C}$$

así que, de acuerdo con el principio de superposición, el campo en P será $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$, de modo que será un vector en la línea que une las cargas, hacia la carga negativa, y se ha dibujado debajo para mayor claridad. Su módulo será la suma de módulos de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$:

$$E = E_1 + E_2 = 27.10^5 + 27.10^5 = \mathbf{5{,}4.10^6 \text{ N / C}}$$



b) Evidentemente, un punto que diste 20 cm de cada carga tiene que estar fuera de la línea que las une. Podemos encontrarlo, en el plano del papel, en un lugar como S, un punto de la mediatriz del segmento entre las cargas.

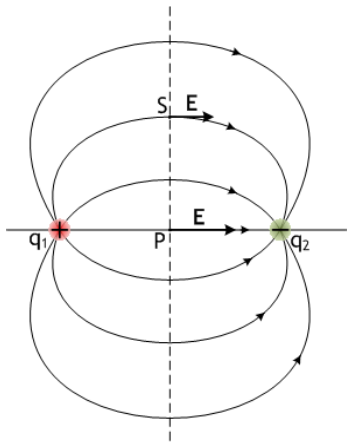
Se muestran las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ en ese punto S: son vectores radiales, hacia fuera el primero de ellos y hacia dentro el segundo, como corresponde a una carga negativa q_2. Los módulos de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ son otra vez iguales, por razones de simetría:

$$E_1 = E_2 = K\frac{q_1}{r_1^2} = K\frac{|q_2|}{r_2^2} = 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{0,2^2} = 6{,}75.10^5 \text{ N / C}$$

y su suma, $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$, llevará la dirección horizontal , paralela a la línea que une las cargas, apuntando hacia la negativa. El módulo se obtiene fácilmente en el paralelogramo de la figura, notando que el ángulo entre $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ será $2\alpha = 120°$, ya que $\alpha = 60°$ es el ángulo del triángulo equilátero formado por las cargas y S. Así, quedará

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 120°} = \sqrt{(6{,}75.10^5)^2 + (6{,}75.10^5)^2 + 2.6{,}75.10^5 .\, 6{,}75.10^5 .(-0.5)} = \mathbf{6{,}75.10^5 \text{ N / C}}$$

el mismo módulo que $\mathbf{E_1}$ o $\mathbf{E_2}$, como seguramente hubiese hecho ver la observación directa de la imagen: el triángulo formado por $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E}$ es también equilátero.



Un comentario para acabar: esta distribución de cargas, como se habrá notado, es un **dipolo eléctrico**. Si recordamos como es el diagrama de líneas de campo de un dipolo, con líneas que nacen en q_1 y van a morir en q_2, podemos confirmar los resultados que acabamos de calcular: puede verse en la figura como las intensidades de campo en P y S, tangentes a la correspondiente línea de campo en cada punto, llevan la dirección que hemos encontrado en los dos apartados anteriores.

SEPTIEMBRE 96

C2.– Define los conceptos de intensidad de campo, potencial, línea de fuerza y superficie equipotencial en un campo de fuerzas gravitatorio. ¿Bajo qué ángulo cortan las líneas de fuerza a las superficies equipotenciales? ¿Por qué?

Véase la teoría.

Sol.– Las líneas de fuerza cortan perpendicularmente a las superficies equipotenciales, debido a que la intensidad de campo es el gradiente (con signo menos) de la energía potencial.

JUNIO 97

C4.– ¿Puede existir diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de una región en la cual la intensidad de campo eléctrico es nula? ¿Qué relación general existe entre el vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico? Razona las respuestas.

La relación entre campo eléctrico y potencial es la que existe entre cualquier fuerza conservativa y su correspondiente energía potencial: recuérdese que **E** es la **fuerza que actúa sobre +1 C colocado en un punto**, y que V representa **la energía potencial por culombio** en un punto. En términos matemáticos, el trabajo que hace **E** entre dos puntos A y B se escribe como la **diferencia de potencial** entre ambos

$$\int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{r} = V_A - V_B \qquad (1)$$

de forma que, si **E** = **0** en una región del espacio, la integral del primer miembro será cero: una fuerza nula no hace ningún trabajo, obviamente. Por consiguiente,

$$V_A - V_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V_A = V_B}$$

no puede haber diferencia de potencial entre los dos puntos. Por supuesto, esto no significa que $V_A = V_B = 0$; sino que A y B — como todos los puntos de la zona en que **E** = **0** — **están al mismo potencial**. La implicación más importante de esto es que mover cargas dentro de esa zona no requiere trabajo alguno.

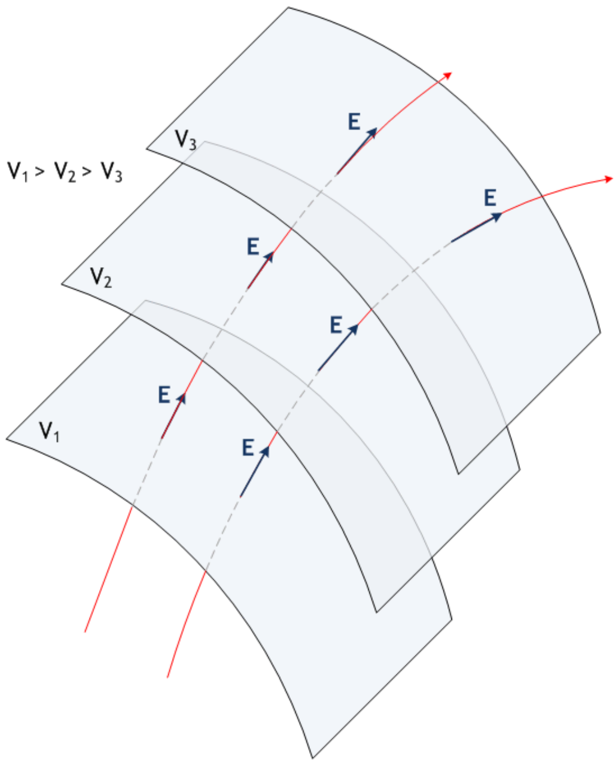
Por lo demás, recuérdese que esta situación aparece siempre **dentro de un conductor**, esté o no cargado: **el interior de un conductor es siempre una zona de E = 0; por lo tanto, de potencial constante.**

La relación entre campo y potencial está recogida en (1). Podemos expresarla también con

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (2)$$

que es, en términos matemáticos, la inversa de (1): ambas ecuaciones en realidad expresan lo mismo, aunque (1) permite obtener V cuando se conoce **E**, mientras que (2) proporciona **E** cuando se tiene V.

En cualquier caso, el significado de (1) y (2), es decir, la relación entre **E** y V se resume en: **el vector intensidad de campo E** en cualquier punto tiene **la dirección en que V varía más rápidamente**, y el **sentido en que V decrece.** Entre otras cosas, esto implica la conocida relación de perpendicularidad entre **líneas de campo** y **superficies equipotenciales.** En la figura se muestra una familia típica de superficies de potencial constante V_1, V_2, V_3 en el orden decreciente $V_1 > V_2 > V_3$ y se muestra igualmente una línea de campo típica, que ha de ir cortando ortogonalmente cada superficie equipotencial que va encontrando. Además, el campo **E** apunta en el sentido de los potenciales bajos.



Líneas de campo y superficies equipotenciales

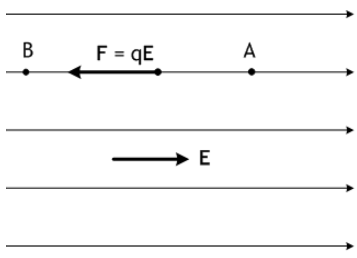
SEPTIEMBRE 97

C3.– Si una carga eléctrica negativa se desplaza en un campo eléctrico uniforme a lo largo de una línea de fuerza bajo la acción de la fuerza del campo:

a) ¿Cómo varía la energía potencial de la carga al pasar ésta desde un punto A a un punto B del campo?

b) ¿Dónde será mayor el potencial eléctrico del campo, en A o en B?

Razona las respuestas.



Campo uniforme

a) Bajo la acción de las fuerzas del campo, es decir, moviéndose de forma **espontánea** dentro del campo, cualquier carga, del signo que sea, lo hará yendo a lugares donde su **energía potencial eléctrica sea más baja**. Distinto sería que la carga se mueva bajo la acción de otras fuerzas, además de **E**; en tal caso, el movimiento **no sería espontáneo**, y podría suceder con un aumento de la energía potencial eléctrica.

Otro modo de explicar esto puede verse en la figura adjunta. Ahí aparecen los puntos A y B entre los que se moverá una carga negativa q, de forma espontánea, bajo la acción la fuerza **F** = q**E** (siendo q negativa, **F** y **E** tienen sentidos distintos). La carga q, pues, se mueve espontáneamente en sentido contrario a las líneas de campo, por tanto, hacia los potenciales eléctricos altos; esto, como sabemos, sucede **en cualquier campo eléctrico**. La energía potencial de la carga se escribirá

$$E_p^A = qV_A \quad \text{(en A)} \quad ; \qquad E_p^B = qV_B \quad \text{(en B)}$$

y la diferencia de energía potencial al ir de A a B será $\Delta E_p = E_p^B - E_p^A = q(V_B - V_A)$

donde el paréntesis expresa una cantidad positiva, puesto que la carga se está moviendo hacia potenciales altos, de modo que $V_B > V_A$. Al multiplicar por una carga q negativa, la variación de energía potencial calculada queda negativa, es decir, ha disminuido, tal y como decíamos más arriba.

b) Aquí no cabe sino insistir en que las **líneas de campo apuntan siempre hacia potenciales bajos**, así que el **punto A de la figura anterior está a potencial más bajo que el punto B**. La carga negativa se mueve, espontáneamente, hacia potenciales altos; por tanto, como se discute en el apartado anterior, hacia energías potenciales más bajas.

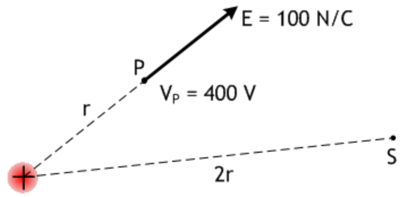
SEPTIEMBRE 97

A2.– A una distancia "r" de una carga puntual "Q", fija en un punto O, el potencial eléctrico es V = 400 V y la intensidad de campo eléctrico es E = 100 N/C. Si el medio considerado es el vacío, determinar:

a) Los valores de la carga "Q" y de la distancia "r".

b) El trabajo realizado por la fuerza del campo al desplazarse una carga de 1 μC desde la posición que dista de O el valor "r" calculado hasta una posición que diste de O el doble de la distancia anterior.

Datos: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m² C⁻²



a) Llamemos P al punto del que nos hablan: si el potencial en P es 400 V, positivo, eso implica que la carga creadora Q es **positiva**. Las expresiones de la intensidad de campo eléctrico E (en módulo) y del potencial V creados por una carga puntual son sencillas y bien conocidas

$$E = K\frac{Q}{r^2} \quad (1); \qquad V = K\frac{Q}{r} \quad (2)$$

de forma que basta introducir en ellas los datos relativos al punto P y dividir miembro a miembro:

$$\left.\begin{aligned} 100 &= K\frac{Q}{r^2} \\ 400 &= K\frac{Q}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = \frac{K\frac{Q}{r^2}}{K\frac{Q}{r}} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{4\ m}$$

para tener r, la distancia de P a la carga Q. En cuanto al valor de ésta, podemos volver a cualquiera de las dos expresiones, sabiendo ya r, y despejar. Por ejemplo, en el potencial de P:

$$400 = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\frac{Q}{4} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{400.4}{9.10^9} = \mathbf{1{,}78.10^{-7}\ C = 0{,}18\ \mu C}$$

b) Ahora consideramos el desplazamiento de una carga de +1 μC desde el punto P al punto S, distante 2r = 8 m de la carga puntual Q. Como ya sabemos el potencial de P, y ya que el potencial decrece inversamente con la distancia a Q, el potencial de S será 200 V:

$$V_S = K\frac{Q}{2r} = 9.10^9\,\frac{1{,}78.10^{-7}}{8} = \mathbf{200\ V}$$

así que, cuando una carga de +1 μC se mueve desde P hasta S, lo hace en el sentido de los potenciales decrecientes, que es **espontáneo** para una carga positiva. El campo hará, por consiguiente, un trabajo **positivo**:

$$\underset{+1\,\mu C}{\overset{campo}{}}W_P^S = q(V_P - V_S) = 10^{-6}(400-200) = \mathbf{2.10^{-4}\ J}$$

SEPTIEMBRE 98

A2.– a) ¿Qué diferencia de potencial debe existir entre dos puntos de un campo eléctrico uniforme para que un electrón que se mueva entre ellos, partiendo del reposo, adquiera una velocidad de 10^6 m s^{-1}? ¿Cuál será el valor del campo eléctrico si la distancia entre estos dos puntos es de 5 cm?

b) ¿Qué energía cinética posee el electrón después de recorrer 3 cm desde el reposo?

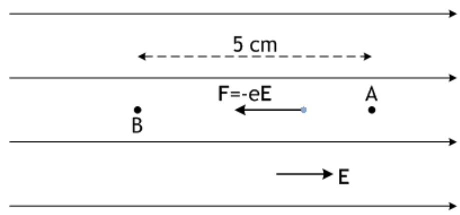
Datos: Masa del electrón, m_e = 9,109.10^{-31} kg; Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6.10^{-19} C

a) Una carga, en nuestro caso un electrón, puede ser acelerada o frenada por un campo eléctrico. Independientemente de que se trate o no de un campo uniforme, cuando una carga q se mueve en un campo, desde el punto A al punto B, **bajo la acción exclusiva de la fuerza del campo, qE**, su energía total (suma de cinética y potencial) se conserva:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \qquad (1)$$

donde la energía potencial se escribe E_p = qV. Se sigue de ahí que la variación de energía cinética, ΔE_c, es

$$\Delta E_c = E_c^B - E_c^A = -\Delta E_p = -q\Delta V = q(V_A - V_B) \qquad (2)$$



Téngase presente que $\Delta V = V_B - V_A$ para entender bien el significado de (2). Obsérvese que, si la carga gana energía cinética, el primer miembro es positivo; la igualdad requiere que lo sea el segundo también. Las conclusiones que se pueden sacar de esto son fundamentales y deben entenderse con claridad:

Si q es positiva, la diferencia $V_A - V_B$ debe serlo igualmente, y $V_A > V_B$: la carga se habrá movido **espontáneamente** (eso quiere decir que el campo la ha movido) hacia potenciales bajos.

Si q es negativa, la diferencia $V_A - V_B$ debe serlo igualmente, para que el producto de ambas en el segundo miembro quede positivo, y $V_A < V_B$: la carga se habrá movido **espontáneamente** hacia potenciales altos.

Podemos aplicar todo esto a nuestro caso, un electrón en reposo dentro de un campo eléctrico uniforme. Imaginamos que el campo está dirigido hacia la derecha; el electrón será empujado hacia la izquierda por la fuerza **F** = −e**E**, y se movería en línea recta desde A hacia la izquierda, acelerado por el campo y cada vez más rápido. Supongamos que B es el punto en el que la velocidad alcanza el valor $v_B = 10^6$ m/s; sabemos también que v_A = 0 m/s, pues partió del reposo. La aplicación de (2) deja

$$\Delta E_c = E_c^B - E_c^A = E_c^B = \frac{1}{2}mv_B^2 = -e(V_A - V_B) \qquad (3)$$

de modo que, sustituyendo y operando

$$\frac{1}{2}9{,}109.10^{-31}.10^{12} = -1{,}6.10^{-19}(V_A - V_B) \qquad \Rightarrow \qquad V_A - V_B = -\frac{9{,}109.10^{-31}.10^{12}}{2.1{,}6.10^{-19}} = \mathbf{-2{,}85\ V}$$

así que el potencial de B es más alto, como debía ser. Si queremos responder en términos de $\Delta V = V_B - V_A$, entonces será ΔV = **2,85 V**.

La diferencia de potencial entre dos puntos es **el trabajo que hace el campo al llevar +1 C de uno al otro**. En términos más concretos, es

$$\int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{r} = V_A - V_B$$

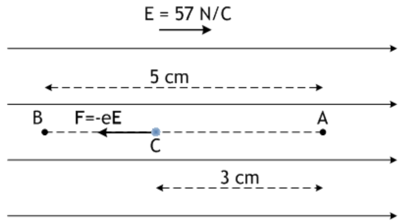
Cuando se trata de un campo uniforme, **E = Cte**, de forma que puede salir de esa integral y el cálculo del trabajo resulta particularmente sencillo:

$$\int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{r} = \mathbf{E}\int_A^B d\mathbf{r} = \mathbf{E}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = V_A - V_B \qquad (4)$$

ya que es un simple **producto escalar** del campo **E** por el vector desplazamiento Δ**r** de la carga +1 C. En nuestro caso, de acuerdo con la figura, el campo es un vector **E** horizontal y hacia la derecha; el desplazamiento es el vector **AB**, horizontal y hacia la izquierda; el ángulo entre ambos sería π rad = 180º. Conocemos también el segundo miembro, que vale −2,85 V, así que resta sólo despejar E, módulo de **E**:

$$E.AB.\cos 180^\circ = E.0{,}05.(-1) = -2{,}85 \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{2{,}85}{0{,}05} = \mathbf{57\ N/C}$$

b) La figura muestra la situación a que se refiere el apartado: el electrón está en C, después de haber recorrido 3 cm desde que salió del reposo, en A. Podemos entonces usar (4), entre los puntos A y C, para hallar la diferencia de potencial entre ellos: de nuevo **E** y Δ**r** son vectores de sentido opuesto, pero Δ**r** mide 3 cm ahora:



$$\mathbf{E}\,\Delta\mathbf{r} = V_A - V_C \quad \Rightarrow \quad V_A - V_C = 57 . 0{,}03 . \cos 180° = -1{,}71\ \text{V}$$

y ahora usar (3), entre los puntos A y C:

$$\Delta E_c = E_c^C - E_c^A = E_c^C = \frac{1}{2} m v_C^2 = -e(V_A - V_C)$$

de modo que resulta $\quad E_c^C = -e(V_A - V_C) = -1{,}6.10^{-19}.(-1{,}71) = \mathbf{2{,}74.10^{-19}\ J} = \dfrac{2{,}74.10^{-19}\ \text{J}}{1{,}6.10^{-19}\ \text{J/eV}} = \mathbf{1{,}71\ eV}$

SEPTIEMBRE **99**

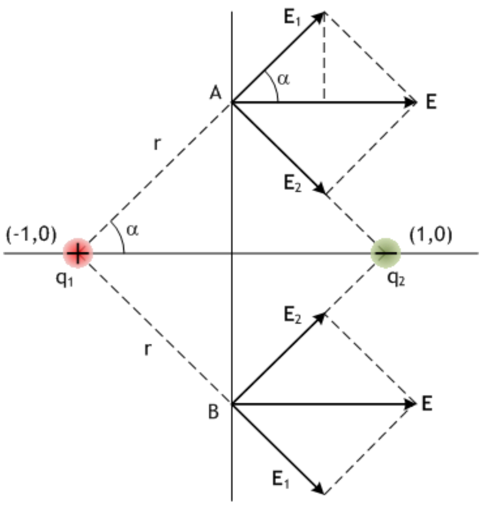
A2.– Se tienen dos cargas eléctricas iguales y de signo opuesto, de valor absoluto 1.10^{-9} C, situadas en el plano XY, en los puntos (–1,0) la carga positiva y (1,0) la carga negativa. Sabiendo que las distancias están dadas en m, se pide:

a) El potencial y el campo eléctrico en los puntos A(0,1) y B(0,–1).

b) El trabajo necesario para llevar un electrón desde A hasta B, interpretando el resultado.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6.10^{-19} C; Permitividad del vacío, ε$_0$ = 8,85.10^{-12} N^{-1}m^{-2}C^2

Dos cargas puntuales iguales y de signo contrario constituyen un **dipolo eléctrico** (véase JUNIO **96 B2**). En este caso, se encuentran en el eje X, equidistantes del origen de coordenadas y a 1 m del mismo.



a) La figura muestra la total simetría que existe entre los puntos A y B en los que hemos de calcular la intensidad de campo y el potencial. Es especialmente destacable como la intensidad de campo **E** es la misma en ambos puntos, de forma que bastará que hagamos los cálculos en A.

De otra parte, los puntos A y B están en la mediatriz del segmento que une las cargas q_1 y q_2. Así, el punto A está a la misma distancia r de q_1 y de q_2,

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

así que el módulo de las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ en el punto A es el mismo, y su valor es

$$|\mathbf{E_1}| = |\mathbf{E_2}| = E_1 = E_2 = K\frac{q_1}{r^2} = 9.10^9 \frac{1.10^{-9}}{2} = 4{,}5\ \text{N/C}$$

Ahora debemos fijarnos en que las componentes verticales de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ se anularán, en tanto que las componentes horizontales se sumarán, siendo además iguales. Es muy sencillo calcular cualquiera de esas componentes horizontales, notando que el ángulo α = 45°:

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos\alpha = 4{,}5 . \cos 45° = 3{,}18\ \text{N/C}$$

de modo que el vector **E** resultante en A tendrá módulo $\quad E = E_{1x} + E_{2x} = 2E_{1x} = \mathbf{6{,}36\ N/C}$

o, en forma vectorial, $\quad$ **E** = 6,36 **i N/C** $\quad$ y, como se ha dicho ya, el campo en el punto B es el mismo que en A.

En cuanto al potencial, sabemos que los puntos de la mediatriz del dipolo tienen potencial cero, ya que están a la misma distancia de las dos cargas. Más concretamente, sería:

$$V_A = V_B = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{r} + K\frac{q_2}{r} = 9.10^9 \frac{1.10^{-9}}{\sqrt{2}} + 9.10^9 \frac{-1.10^{-9}}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \mathbf{0\ V}$$

donde V_1 es el potencial que crea q_1 en cualquiera de los puntos A o B, y V_2 el potencial que crea q_2 en cualquiera de esos puntos.

b) El trabajo necesario será **nulo**. En efecto, el trabajo realizado por el campo cuando una carga cualquiera se mueve entre dos puntos A y B del campo, con independencia del camino que siga, es

$$W = \int_A^B q\mathbf{E}.d\mathbf{r} = q(V_A - V_B)$$

donde esta vez sería q = e, la carga de un electrón. Ahora bien, $V_A - V_B = 0$, de suerte que el trabajo hecho por el campo será cero.

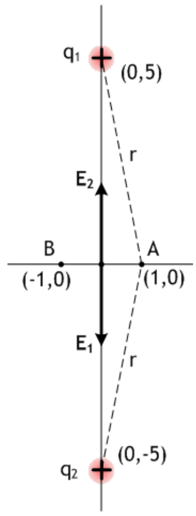
JUNIO 00

C3.– Dos cargas puntuales e iguales de valor 2 μC cada una se encuentran situadas en el plano XY en los puntos (0,5) y (0,–5), respectivamente, estando las distancias expresadas en metros.

a) ¿En qué punto del plano el campo eléctrico es nulo?

b) ¿Cuál es el trabajo necesario para llevar una carga unidad desde el punto (1,0) al punto (–1,0)?

a) Hay un único punto en que se anula el campo creado por dos cargas iguales y del mismo signo: **el punto medio de la línea que une las cargas**. Esto es así siempre, sean cuales fueren las cargas y la distancia entre ellas, y la razón puede entenderse bien en la figura: el centro de coordenadas, (0,0), es el punto medio entre las cargas en nuestro caso; está a la misma distancia de ambas y los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ llevan la misma dirección y sentido opuesto, además tendrán el mismo módulo; por consiguiente, $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ en ese punto.



No hay ningún otro punto del campo creado por q_1 y q_2 con intensidad de campo nula. De este modo, el único sitio en que podríamos colocar una carga **en reposo** y dejarla en equilibrio sería (0,0). Ahora bien, se trataría de un equilibrio **inestable**; es decir, si la carga situada en reposo y equilibrio en (0,0) fuese desplazada mínimamente (es decir, por pequeño que fuese el desplazamiento producido) en cualquier dirección y después se la soltase, entonces ya no regresaría a la posición de equilibrio, sino que se alejaría cada vez más de esa posición.

Estas sencillas ideas se extienden a cualquier campo eléctrico, cualquiera que sea la distribución de cargas creadora del campo. En un campo eléctrico no existen puntos de equilibrio estable; si se encuentran puntos de equilibrio (en los que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$), serán de equilibrio inestable.

b) Tampoco aquí serán precisas operaciones. La simetría de la distribución de cargas y de los puntos (1,0) y (–1,0) se ve con claridad en la figura, y muestra que los potenciales de los puntos A y B serán iguales, así que la diferencia de potencial entre ellos será $V_A – V_B = 0$ V. Sabemos que el trabajo **hecho por el campo** para desplazar una carga q del punto A al punto B es

$$W = \int_A^B q\mathbf{E}.\mathrm{d}\mathbf{r} = q(V_A - V_B)$$

así que podemos concluir inmediatamente que el trabajo será **nulo**.

SEPTIEMBRE 00

A2.– Los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero de 2 m de lado. Dos cargas iguales positivas de 2 μC están en A y en B.

a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto C?

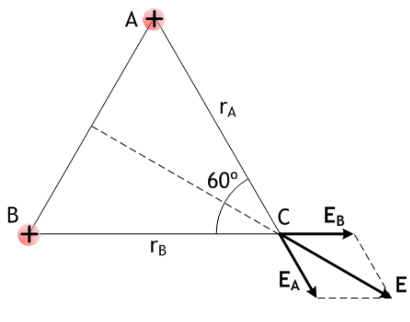
b) ¿Cuál es el potencial en el punto C?

c) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una carga positiva de 5 μC desde el infinito hasta el punto C si se mantienen fijas las otras cargas?

d) Responder al apartado anterior c) si la carga situada en B se sustituye por una carga de –2 μC.

Datos: Permitividad del vacío, $\varepsilon_o = 8{,}85 \,.\, 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^2

a) La figura representa la situación de las cargas en A y B, así como las intensidades de campo $\mathbf{E_A}$ y $\mathbf{E_B}$ creadas por estas cargas en el punto C. Ya que las distancias de A y B, respectivamente r_A y r_B, no son sino el lado l del triángulo, y ya que las cargas en A y B son iguales, parece obvio que la simetría exige que los módulos de $\mathbf{E_A}$ y $\mathbf{E_B}$ sean iguales



$$E_A = E_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2.10^{-6}}{4\pi.8{,}85.10^{-12}.2^2} = 4500 \text{ N/C}$$

Ahora, principio de superposición: el campo en C es la suma de los campos creados por las dos cargas,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_A} + \mathbf{E_B}$$

suma, naturalmente, **vectorial**. El paralelogramo necesario está dibujado en la figura, donde puede verse con claridad que el ángulo entre los vectores $\mathbf{E_A}$ y $\mathbf{E_B}$ es de 60º, igual al ángulo del triángulo en C. Así, por simetría, el campo **E** resulta en la dirección de la bisectriz de ese ángulo (y de la mediatriz del lado AB, altura sobre ese lado, mediana también). Su módulo es inmediato:

$$E = \sqrt{E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B \cos 60^\circ} = \sqrt{4500^2 + 4500^2 + 2.4500.4500.0{,}5} = 4500\sqrt{3} = \mathbf{7794{,}23 \text{ N/C}}$$

en la dirección y sentido explicados.

b) Principio de superposición: **los potenciales se suman**. Así, el potencial del punto C es la suma de los potenciales creados por las cargas colocadas en A y B; pero estos potenciales, por razones de simetría, son **iguales**: misma carga en A y B, a la misma distancia de C:

$$V = V_A + V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = 2\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} = 2\,\frac{2.10^{-6}}{4\pi.8{,}85.10^{-12}.2} = \mathbf{18000 \text{ V}}$$

c) Es muy frecuente cometer errores cuando se ha de calcular el trabajo sobre una carga que se mueve en un campo, derivados de no entender con claridad si el trabajo lo hace el campo o lo hacemos nosotros contra las fuerzas que el campo aplica sobre la carga. Una cierta disciplina de cálculo podría evitar estos errores:

Situación: la carga q (con signo!) va a moverse desde P hasta S

Paso 1: ¿Conocemos los potenciales de P y S? Si no es así, deberíamos calcularlos.

Paso 2: El trabajo hecho por el campo, sobre la carga q, que se mueve de P a S es $\quad {}^{\text{campo}}_{q}W_P^S = q(V_P - V_S)$

Paso 3: Si ese trabajo sale negativo, la carga se ha movido **contra las fuerzas del campo**. En tal caso, ha habido que moverla con alguna fuerza exterior, opuesta a la del campo: el **trabajo mínimo** (generalmente se refieren siempre a esto) que habrá realizado esa fuerza es el mismo que realizado por el campo, cambiado de signo.

En nuestro caso, q = 5 μC (positiva, irá espontáneamente hacia potenciales bajos). El potencial del punto de llegada, C, es V_C = 18000 V; el potencial de salida en infinito es cero (ese punto está a distancia infinita de A y de B). Así que lo sabemos todo, y podemos ir al paso 2:

El trabajo hecho por el campo será $\quad {}^{\text{campo}}_{5\,\mu C}W_\infty^C = q(V_\infty - V_C) = 5.10^{-6}(0-18000) = -0{,}09\ J$

Como es negativo, se ha requerido trabajo **contra el campo** para transportar la carga. Su valor mínimo será

$$ {}^{\text{contra el campo}}_{5\,\mu C}W_\infty^C = \mathbf{0{,}09\ J} $$

d) ¿Qué es lo que cambia? El potencial del punto C, que va a ser nulo: en efecto, ahora las cargas en A y B tienen el mismo valor, pero son de signo contrario, de modo que crean en el punto C potenciales positivo (la de A) y negativo (la de B), que se anulan,

$$V_C = V_A + V_B = 0\ V$$

así que, como C está al mismo potencial que infinito, la diferencia de potencial $\quad V_\infty - V_C = 0\ V$

y el trabajo necesario para mover la carga es **cero** esta vez.

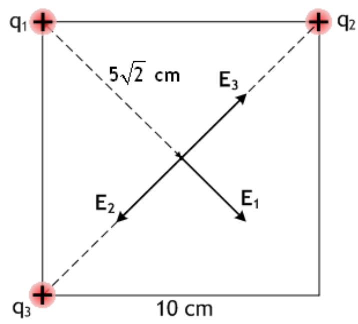
JUNIO 01

B2.– Tres cargas positivas e iguales de valor q = 2 μC cada una se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de lado 10 cm. Determine:

a) El campo eléctrico en el centro del cuadrado, efectuando un esquema gráfico en su explicación.

b) Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.

Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacío, $K = 9.10^9\ N\ m^2\ C^{-2}$



a) Las tres cargas q_1, q_2 y q_3 tienen el mismo valor q = 2 μC y se encuentran en tres de los vértices del cuadrado de la figura. Ya que están a la misma distancia del centro C del cuadrado, que es la mitad de la diagonal,

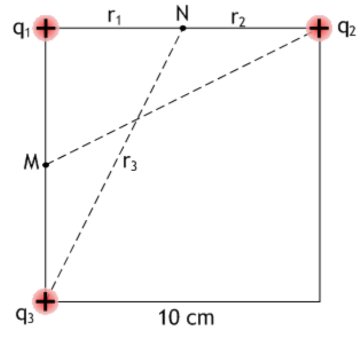
$$r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+10^2} = \frac{1}{2}10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ \text{cm}$$

parece claro que las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_3}$ creadas por las tres cargas en el punto C van a tener el mismo módulo, tal como aparece recogido en la figura. Además, por razones de simetría obvias, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_3}$ se anularán, $\mathbf{E_2} + \mathbf{E_3} = \mathbf{0}$, de forma que la intensidad de campo resultante en C será

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} + \mathbf{E_3} = \mathbf{E_1}$$

el campo creado por la carga q_1. Este vector lleva la dirección de la diagonal y apunta al cuarto vértice del cuadrado. Su módulo es

$$E = K\frac{q}{r^2} = 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{(5\sqrt{2}.10^{-2})^2} = \mathbf{3{,}6.10^6\ N/C}$$



b) Los puntos medios de los lados que unen las cargas son M y N. Por razones de simetría evidentes, el potencial en ambos será el mismo, de modo que lo calcularemos en uno de ellos, digamos el punto N. La figura muestra las distancias de las tres cargas al punto N, que hemos llamado r_1, r_2 y r_3; dos de ellas son evidentes

$$r_1 = r_2 = 5\ \text{cm}$$

puesto que son la mitad de un lado. La tercera, r_3, es hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 10 cm y 5 cm, como puede verse fácilmente en la figura, de forma que

$$r_3 = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\ \text{cm}$$

así que podemos calcular el potencial del punto N, recordando el **principio de superposición**: los potenciales creados por las tres cargas se suman:

$$V_N = V_{1N} + V_{2N} + V_{3N} = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} + K\frac{q_3}{r_3}$$

donde V_{1N} es el potencial en M creado por q_1, y de manera semejante se entienden los otros sumandos; por supuesto, V_N es el potencial resultante en N. Los cálculos son

$$V_N = 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{5.10^{-2}} + 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{5.10^{-2}} + 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{5\sqrt{5}.10^{-2}} = 3{,}6.10^5 + 3{,}6.10^5 + 1{,}6.10^5 = \mathbf{8{,}8.10^5\ V}$$

y, como ya se ha dicho, el potencial en M será el mismo por razones de simetría. De este modo, desplazar cualquier carga entre M y N, por ejemplo la unida de carga, **no supondrá ningún trabajo**, por ser nula la diferencia de potencial V_M–V_N entre los dos puntos.

SEPTIEMBRE 01

B2.– Se tienen dos cargas puntuales sobre el eje X, q_1= –0,2 μC está situada a la derecha del origen y dista de él 1 m; q_2= +0,4 μC está a la izquierda del origen y dista de él 2 m.

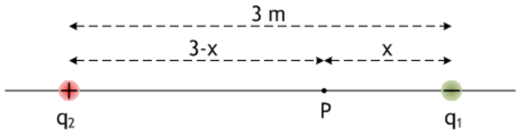
a) ¿En qué puntos del eje X el potencial creado por las cargas es nulo?

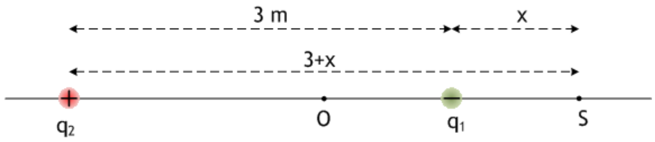
b) Si se coloca en el origen una carga q= +0,4 μC, determine la fuerza ejercida sobre ella por las cargas q_1 y q_2.

Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacío, $K = 9.10^9\ N.m^2\ C^{-2}$

a) El potencial creado en cualquier punto por esta distribución de cargas es, de acuerdo con el principio de superposición, la suma de los potenciales debidos a una y otra:

$$V = V_1 + V_2 \qquad (1)$$





y, ya que una de las cargas es positiva y la otra negativa, puede ocurrir que esa suma sea cero en puntos determinados. Por supuesto, si las dos cargas fuesen del mismo signo, eso no podría suceder en ningún punto.

¿En qué puntos puede resultar, entonces, V = 0? Hay puntos fuera del eje X, desde luego, y es algo más complicado buscarlos. Y hay algún punto, exactamente **dos**, en el eje X, y esos son los que nos piden.

El primero de ellos está **entre las cargas**, dentro del segmento que las une, que contiene el origen O. Como se supone que no sabemos qué punto es, le llamamos P, en la figura de arriba. Suponemos que está a x m de q_1; como la distancia entre q_1 y q_2 es de 3 m, parece claro que P estará a 3—x m de q_2. La condición de V = 0 en este punto requiere que

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{x} + K\frac{q_2}{3-x} = 0$$

de donde se sigue $\quad \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{3-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-0{,}2.10^{-6}}{x} + \frac{0{,}4.10^{-6}}{3-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}4x = 0{,}2(3-x) \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{1\ m}$

así que P está 1 m a la izquierda de q_1; por tanto, 2 m a la derecha de q_2. Parece obvio que se trata justamente del origen de coordenadas.

La otra solución hay que buscarla fuera del segmento, a la derecha de q_1. Sabemos esto porque, ya que q_1 es una carga más pequeña que q_2, el punto de potencial cero tiene que estar más cerca de q_1 que de q_2. Llamamos S a ese punto, y lo suponemos a distancia x de q_1, como aparece en la figura de abajo. Ahora, como puede verse, q_2 queda a distancia 3+x del punto S. La condición de V = 0 en S se escribe

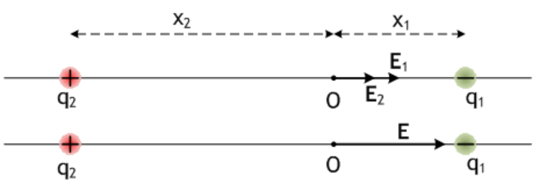
$$V = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{x} + K\frac{q_2}{3+x} = 0$$

de donde se sigue $\quad \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{3+x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-0{,}2.10^{-6}}{x} + \frac{0{,}4.10^{-6}}{3+x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}4x = 0{,}2(3+x) \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{3\ m}$

y ahora S está 3 m a la derecha de q_1; por tanto, 6 m a la derecha de q_2. El dibujo no hace justicia al resultado.

b) La fuerza sobre una carga q colocada en un lugar donde la intensidad de campo es **E** resulta

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} \qquad (2)$$



así que necesitamos conocer la intensidad de campo en O. Una vez más, principio de superposición: los campos se suman. En la figura se muestran las intensidades de campo $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ creadas en O por las cargas q_1 y q_2, respectivamente.

Como se ve, ambos vectores llevan la dirección del eje y sentido hacia la derecha. Sus módulos son

$$E_1 = K\frac{|q_1|}{x_1^2} = 9.10^9\,\frac{0,2.10^{-6}}{1^2} = 1800 \text{ N/C} \quad ; \qquad E_2 = K\frac{q_2}{x_2^2} = 9.10^9\,\frac{0,4.10^{-6}}{2^2} = 900 \text{ N/C}$$

de manera que, ya que son vectores de misma dirección y mismo sentido, su suma también estará en el eje y hacia la derecha; su módulo será la suma de los módulos

$$E = E_1 + E_2 = 2700 \text{ N/C}$$

Por lo tanto, al aplicar (2) sobre una carga q = +0,4 μC colocada en O, la fuerza llevará **la dirección del eje X, sentido positivo,** y medirá

$$F = q\,E = 0{,}4.10^{-6}.\ 2700 = \mathbf{1{,}08.10^{-4}\ N} \qquad (\mathbf{F} = 1{,}08.10^{-4}\,\mathbf{i}\ \text{N})$$

MODELO 02

A2.– Un electrón es lanzado con una velocidad de 2.10^6 m/s paralelamente a las líneas de un campo eléctrico uniforme de 5000 V/m. Determine:

a) La distancia que ha recorrido el electrón cuando su velocidad se ha reducido a $0,5.10^6$ m/s.

b) La variación de la energía potencial que ha experimentado el electrón en ese recorrido.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1,6.10^{-19}$ C; Masa del electrón, $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg

El problema **SEPTIEMBRE 98 A2** es una buena lectura previa para este ejercicio. Una vez más se plantea el movimiento de una carga — un electrón, esta vez — en un campo. Como sabemos, en cualquier caso (sea uniforme el campo o no), si la carga se mueve entre A y B **bajo la acción exclusiva de las fuerzas del campo**, existe conservación de energía, ya que el campo eléctrico es siempre conservativo. Esto se escribe

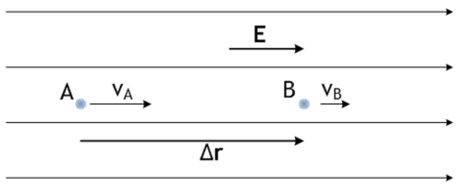
$$\Delta E_c = E_c^B - E_c^A = -\,\Delta E_p = -\,q\Delta V = q(V_A - V_B) \qquad (1)$$

Además, como se explicó detalladamente en el citado ejercicio, el trabajo hecho por **E** entre dos puntos, en un campo uniforme, es especialmente sencillo,

$$\int_A^B \mathbf{E}.\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{E}\int_A^B \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{E}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \mathbf{E}\,\Delta\mathbf{r} = V_A - V_B \qquad (2)$$

y no necesitamos nada más. Entiéndase bien, (2) sólo es correcta en un **campo uniforme**, para poder sacar **E** de la integral. En esta expresión, **E** es el campo y Δ**r** el vector desplazamiento de la carga.

Ahora, apliquemos esto a nuestro asunto: el electrón está en A, lanzado hacia la derecha, en la dirección del campo. Se está moviendo hacia potenciales bajos, en el sentido de las líneas del campo, que le estará **frenando**: es obvio que le aplica una fuerza hacia la izquierda.



Así que va perdiendo velocidad, y llegará a detenerse. Cuando pasa por B, su velocidad se ha reducido de forma considerable. Como sabemos la velocidad en A, $v_A = 2.10^6$ m/s, y en B, $v_B = 0,5.10^6$ m/s, podemos usar (1) para hallar la diferencia de potencial entre A y B:

$$\Delta E_c = E_c^B - E_c^A = \frac{1}{2}m_e v_B^2 - \frac{1}{2}m_e v_A^2 = \frac{1}{2}9{,}1.10^{-31}(0{,}5^2.10^{12} - 2^2.10^{12}) = -\,1{,}71.10^{-18}\ \text{J}$$

Es decir, $\quad \Delta E_c = -\,1{,}71.10^{-18}\ \text{J} = -\,e(V_A - V_B) \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \dfrac{1{,}71.10^{-18}}{1{,}6.10^{-19}} = \mathbf{10{,}66\ V}$

y el punto A está a potencial más alto que B; ya lo sabíamos. Ahora podemos usar (2) para hallar la distancia entre A y B: nótese que **E** y Δ**r** son esta vez vectores de la misma dirección y sentido; su producto escalar es un simple producto de módulos

$$\mathbf{E}.\Delta\mathbf{r} = V_A - V_B \quad \Rightarrow \quad E.AB = 10{,}66 \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{10{,}66}{5000} = \mathbf{2{,}13.10^{-3}\ m = 2{,}13\ mm}$$

b) La respuesta es inmediata, y está escrita en (1): la variación de energía potencial es la misma que la de energía cinética, pero con signo contrario. De hecho, esto es una obviedad: bajo fuerzas conservativas — como las eléctricas, por ejemplo — la energía total (suma de E_c y E_p) se conserva; lo que pierda una, lo gana la otra. Así que resulta

$$\Delta E_p = -\,\Delta E_c = \mathbf{1{,}71.10^{-18}\ J}$$

Por supuesto, podemos hacer el cálculo de modo directo, ya que la energía potencial del electrón es E_p = —eV, y por tanto la variación es

$$\Delta E_p = E_p^B - E_p^A = -\,eV_B - (-eV_A) = e(V_A - V_B) = 1{,}6.10^{-19}.10{,}66 = \mathbf{1{,}71.10^{-18}\ J}$$

JUNIO 05

A2.– Tres partículas cargadas Q_1 = +2 μC, Q_2 = +2 μC y Q_3 de valor desconocido están situadas en el plano XY. Las coordenadas de los puntos en los que se encuentran las cargas son Q_1: (1,0), Q_2: (-1,0) y Q_3: (0,2). Si todas las coordenadas están expresadas en metros:

a) **¿Qué valor debe tener la carga Q_3 para que una carga situada en el punto (0,1) no experimente ninguna fuerza neta?**

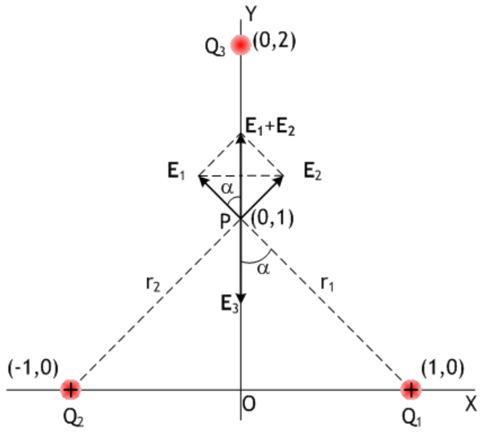
b) **En el caso anterior, ¿cuánto vale el potencial eléctrico resultante en el punto (0,1) debido a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3?**

Dato: Constante de la ley de Coulomb, K = 9.10^9 N m^2 C^{-2}

a) En el punto P (0,1) ocupado por una eventual carga q existe un campo creado por las cargas Q_1, Q_2 y Q_3; de acuerdo con el principio de superposición

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \qquad (1)$$

como se muestra en la figura. La fuerza que actúa sobre la carga q puesta en P es **F** = q**E**, de manera que es necesario que **E** = **0** en ese punto para que la fuerza resulte nula, tal como se nos pide.



La observación de la figura ilustra cómo las intensidades de campo $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ deben tener el mismo módulo, ya que Q_1 = Q_2 y ambas cargas están a la misma distancia (r_1 = r_2) del punto P. Esa distancia es

$$r_1 = r_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

y las intensidades de campo miden, por tanto

$$E_1 = E_2 = K\frac{Q_1}{r_1^2} = K\frac{Q_2}{r_2^2} = 9.10^9\,\frac{2.10^{-6}}{2} = 9000\ \text{N/C}$$

Ahora bien, al sumar los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ parece obvio que las componentes horizontales, por simetría, serán iguales y de signo contrario, de forma que se anularán. Quedarán las componentes verticales, ambas hacia arriba y de la misma medida, de nuevo por razones de la simetría de la distribución. Esas componentes verticales, que llamaremos E_{1y} y E_{2y}, son las correspondientes proyecciones de los vectores sobre el eje Y, y valen

$$E_{1y} = E_{2y} = E_1\cos\alpha = E_2\cos\alpha = 9000.\frac{1}{\sqrt{2}} = 6363{,}96\ \text{N/C}$$

de manera que la suma $\mathbf{E}_1$ + $\mathbf{E}_2$ acaba siendo un vector dirigido hacia Q_3, a lo largo del eje Y, y su módulo es el doble de la proyección que acabamos de calcular:

$$|\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2| = 2E_{1y} = 2E_{2y} = 12727{,}92\ \text{N/C} \qquad (2)$$

Así, parece claro que si la suma (1) debe ser nula, el vector $\mathbf{E}_3$ debe estar dirigido también a lo largo del eje Y, hacia abajo, y debe tener como módulo la cantidad obtenida en (2). De esto, y ya que la distancia de Q_3 a P es r_3 = 1 m, se puede obtener el valor de Q_3

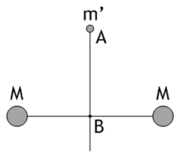
$$E_3 = K\frac{Q_3}{r_3^2} = 12727{,}92\ \text{N/C} \qquad \Rightarrow \qquad Q_3 = 12727{,}92\,\frac{1}{9.10^9} = +\mathbf{1{,}41\ \mu C}$$

b) El potencial en el punto P es la suma de los potenciales creados por las tres cargas Q_1, Q_2 y Q_3. Ahora que sabemos lo que vale cada una de ellas, y también la distancia de cada una a P, el cálculo es inmediato:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} + K\frac{Q_3}{r_3} = 9.10^9\,\left(\frac{2.10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{2.10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{1{,}41.10^{-6}}{1}\right) = \mathbf{38183{,}77\ V}$$

SEPTIEMBRE 05

C2.– Dos masas iguales, M = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m' = 0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a 1 m de la línea que las une (AB = 1 m). Si no actúan más que las interacciones gravitatorias entre estas masas, determine:



a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m' en la posición A.

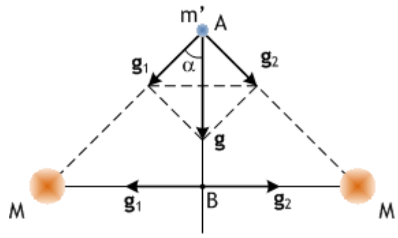
b) Las aceleraciones de la masa m' en las posiciones A y B.

Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

a) La fuerza que actúa sobre una masa m en un punto de campo gravitatorio, a menudo llamada "peso" del cuerpo en ese lugar, es la conocida

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{g} \qquad (1)$$

donde **g** es la intensidad del campo gravitatorio en ese punto. En el caso que nos plantean, la intensidad de campo gravitatorio en A, donde está m', será (principio de superposición) la **suma de los campos creados por cada una de los masas M**. En la figura mostramos cómo serán esos vectores, a los que denominaremos $\mathbf{g_1}$ y $\mathbf{g_2}$: se trata de campos radiales, dirigidos hacia la masa que los crea.



$$\mathbf{g} = \mathbf{g_1} + \mathbf{g_2} \qquad (2)$$

Además, los módulos g_1 y g_2 son iguales, por sencillas razones de simetría. Su valor es

$$g_1 = g_2 = G\frac{M}{r^2} = 6,67.10^{-11}\,\frac{20}{2} = 6,67.10^{-10}\ \mathrm{N/kg}\ (= \mathrm{m/s^2})$$

donde se ha empleado la distancia r de cualquiera de las masas M al punto A, deducida de la figura

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

La suma, como puede apreciarse en la figura, no es difícil: las componentes horizontales de ambos vectores son de sentido opuesto y medirán lo mismo: se anularán. Las componentes verticales, dirigidas ambas hacia abajo y de la misma medida, se reforzarán. En conclusión, el campo **g** en A quedará dispuesto verticalmente y hacia abajo.

Hallamos las componentes verticales de $\mathbf{g_1}$ y $\mathbf{g_2}$, a las que llamaremos g_{1y} y g_{2y}, respectivamente:

$$g_{1y} = g_{2y} = g_1\cos\alpha = g_2\cos\alpha = 6,67.10^{-10}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 4,72.10^{-10}\ \mathrm{N/kg}$$

y concluimos que el campo en A estará dispuesto verticalmente, hacia B, y medirá el doble de esta última cantidad:

$$g = \mathbf{9{,}43.10^{-10}\ N/kg}$$

La aplicación de (1), ahora, acabará la cuestión: la fuerza sobre la masa m' = 0,2 kg colocada en A será **vertical, apuntando hacia B, y su módulo** será

$$F = m'g = 0,2\ .\ 9,43.10^{-10} = \mathbf{1{,}89.10^{-10}\ N}$$

b) Ahora hemos de recordar que la intensidad de campo gravitatorio en un punto mide la fuerza que actuaría sobre una masa de 1 kg colocada en ese punto, pero también representa la **aceleración de cualquier objeto masivo que se coloque ahí**. Por tanto, ya que conocemos la intensidad **g** de campo en A, sabemos cuál será la aceleración de m' en ese punto

$$g = \mathbf{9{,}45.10^{-10}\ m/s^2}$$

En cuanto al punto B, el campo gravitatorio se calcula de nuevo aplicando (2): esta vez, ya que se trata del punto intermedio entre las dos masas M, los campos $\mathbf{g_1}$ y $\mathbf{g_2}$ tienen la misma dirección, sentidos opuestos y, por razones de simetría, el mismo módulo, de manera que suman **0**. Consiguientemente, la intensidad de campo en B es cero, y la aceleración de m' cuando pasa por B es

$$g = \mathbf{0\ m/s^2}$$

SEPTIEMBRE 05

C5.— Un protón que parte del reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 10 V. Determine:

a) la energía que adquiere el protón expresada en eV y su velocidad en m/s;

b) la longitud de onda de De Broglie asociada al protón moviéndose con la velocidad anterior.

Datos: Carga del protón, $q_p = 1{,}6.10^{-19}$ C; Masa del protón, $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg; Constante de Planck, $h = 6{,}63.10^{-34}$ J s

a) Un ejercicio que aborda una cuestión muy común, la de cargas aceleradas (o frenadas) por medio de una diferencia de potencial. De manera genérica, el planteamiento debe ser el siguiente: una partícula de masa m y carga q, en un campo eléctrico, tiene una energía que se obtiene sumando energía cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV \qquad (1)$$

donde V es el potencial del punto en el que se encuentre la carga, y v su velocidad en ese lugar. Convendría recordar aquí, una vez más, el sentido físico del potencial eléctrico: en esencia, no es otra cosa que la energía potencial por unidad de carga; de ahí que la energía potencial eléctrica de una carga q se escriba como $E_p = qV$.

De este modo, ya que las fuerzas eléctricas son conservativas, si una partícula de carga q se mueve desde un punto A a un punto B **bajo la acción exclusiva de las fuerzas del campo** (¡esto es fundamental!) **la energía se conserva**. Esto es

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \qquad (2)$$

independientemente, además, del camino que la partícula haya seguido para ir de A a B. Podemos entonces relacionar la **variación de la energía cinética** de la partícula con la **diferencia de potencial entre los puntos A y B**:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q(V_A - V_B) = -q\Delta V = -\Delta E_p \qquad (3)$$

donde las expresiones $\quad \Delta E_c = E_c^{final} - E_c^{inicial} = E_c^B - E_c^A\,; \qquad \Delta V = V_{final} - V_{inicial} = V_B - V_A$

se entienden, como toda variación de una magnitud, en términos de valor final menos valor inicial. El uso de (3),

$$\Delta E_c = -q\Delta V$$

es muy frecuente, en los cálculos de aceleración o frenado de cargas en un campo eléctrico. La diferencia de potencial entre **llegada** y **salida**, ΔV, se llama **potencial de aceleración, o de frenado**, según los casos: es de aceleración cuando la carga gana energía cinética; es de frenado si sucede lo contrario.

Así, en el problema que nos ocupa, se dice que un protón es **acelerado por una diferencia de potencial de 10 V**. Como va a ganar energía cinética, ΔE_c va a ser positiva, y la observación de (3) muestra que ΔV **tiene que ser negativa**: esto no hace sino confirmar algo que ya sabíamos, y es que un protón — carga positiva — es empujado por un campo eléctrico hacia los potenciales bajos.

Las cuentas darán $$\Delta E_c = -1{,}6.10^{-19}(-10) = \mathbf{1{,}6.10^{-18}\ J} = \frac{1{,}6.10^{-18}\ \text{J}}{1{,}6.10^{-19}\ \text{J/eV}} = \mathbf{10\ eV}$$

para la energía cinética ganada por el protón. Como parte del reposo, esa es también la energía cinética final, de modo que la velocidad alcanzada será

$$E_c^{final} = \frac{1}{2}m_p v^2 = 1{,}6.10^{-18}\ \text{J} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2.1{,}6.10^{-18}}{1{,}67.10^{-27}}} = \mathbf{4{,}38.10^4\ m/s}$$

b) La longitud de onda de De Broglie asociada a tal protón es ya inmediata

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_p v} = \frac{h}{\sqrt{2m_p E_c}}$$

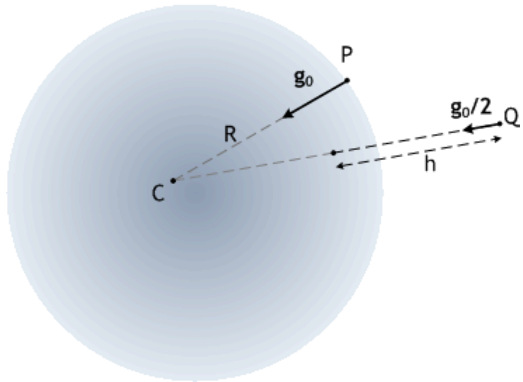
y, ya que tenemos la energía cinética del protón, usaremos la última de esas expresiones

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_p E_c}} = \frac{6{,}63.10^{-34}}{\sqrt{2.1{,}67.10^{-27}.1{,}6.10^{-18}}} = \mathbf{9{,}07.10^{-12}\ m}$$

JUNIO 06

C1.– Llamando g_0 y V_0 a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) **La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad del campo gravitatorio es $g_0/2$.**
b) **La altura sobre la superficie terrestre a la cual la el potencial gravitatorio es $V_0/2$.**



a) La figura muestra un punto P sobre la superficie terrestre y la intensidad del campo gravitatorio en ese punto, $\mathbf{g_0}$. Se trata de un vector radial, apuntando al centro de la Tierra, y de módulo

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

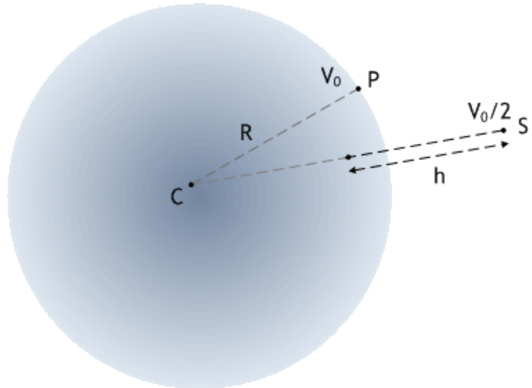
donde M y R son la masa y el radio de la Tierra. También se muestra un punto Q, a una altura h sobre la superficie, en el que la intensidad de campo gravitatorio es un vector igualmente radial, hacia dentro, de módulo mitad de g_0. La distancia de Q al centro de la Tierra es r = R+h, de modo que debe cumplirse

$$\frac{g_0}{2} = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} \qquad (2)$$

así que, llevando a (2) el valor de g_0 de (1), tenemos

$$G\frac{M}{2R^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \Rightarrow \quad 2R^2 = (R+h)^2 \quad \Rightarrow \quad R\sqrt{2} = R+h \quad \Rightarrow \quad h = R(\sqrt{2}-1) = \mathbf{0{,}41R}$$

la primera respuesta.



b) La figura muestra ahora el punto P de la superficie terrestre, que está a un potencial V_0 (recuérdese que la superficie de la Tierra es equipotencial, de modo que **todos** los puntos de la superficie están a ese potencial). El valor de V_0 es

$$V_0 = -G\frac{M}{R} \qquad (3)$$

donde M y R son de nuevo la masa y el radio de la Tierra. Un punto S, a una altura h sobre la superficie de la Tierra, está a un potencial gravitatorio

$$V_S = -G\frac{M}{r}$$

donde r = R+h. Para que el potencial aquí sea $V_0/2$, deberá cumplirse

$$V_S = -G\frac{M}{R+h} = \frac{V_0}{2} = -G\frac{M}{2R} \quad \Rightarrow \quad 2R = R+h \quad \Rightarrow \quad h = \mathbf{R}$$

la segunda respuesta. Nótese que, tratándose de cantidades negativas, el potencial en S, V_S, es mayor que en la superficie.

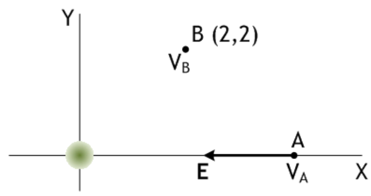
JUNIO 06

C3.– Una carga puntual de valor Q ocupa la posición (0,0) del plano XY en el vacío. En un punto A del eje X el potencial es V = –120 V y el campo eléctrico es E = –80 i N/C, siendo i el vector unitario en el sentido positivo del eje X. Si las coordenadas están dadas en metros, calcule:

a) La posición del punto A y el valor de Q.

b) El trabajo necesario para llevar un electrón desde el punto B(2,2) hasta el punto A.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^{9}\ N\ m^2\ C^{-2}$



a) La carga puntual Q se encuentra en el origen de coordenadas del plano XY. El punto A está en todo caso en el eje X, y, ya que el potencial ahí es negativo, es fácil concluir que la carga Q es **negativa**. Sabiendo eso, también sabemos que el campo **E** creado por Q debe ser radial y hacia la carga, así que A debe estar a la derecha de (0,0), en algún punto del semieje X positivo: la figura recoge la situación, tal como la hemos descrito.

Lo que queda es una simple cuestión de escribir campo y potencial, para tener dos ecuaciones con las que trabajar. Las expresiones, para una carga puntual, son las bien conocidas

$$E = K\frac{|Q|}{r^2} \qquad ; \qquad V = K\frac{Q}{r}$$

donde E es el **módulo** de **E**: como hemos señalado en diversas ocasiones, es una de las escasas situaciones en las que Q debe ser tomado en **valor absoluto**, prescindiendo de su signo. Eso, por ejemplo, no se hace en la expresión del potencial. Llevando los valores en A, tenemos

$$\left.\begin{aligned} E = 80 = K\frac{|Q|}{r^2} \\ V_A = -120 = K\frac{Q}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{80}{-120} = \frac{K\frac{|Q|}{r^2}}{K\frac{Q}{r}} = \frac{-\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r}} = -\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{1{,}5\ m}$$

la posición del punto A: nótese que Q es negativa, mientras que |Q| es una cantidad positiva. Ahora, llevando el valor de r al potencial en A:

$$V_A = K\frac{Q}{r} = -120\ V \qquad \Rightarrow \qquad 9.10^9\,\frac{Q}{1{,}5} = -120 \qquad \Rightarrow \qquad Q = -\frac{120.1{,}5}{9.10^9} = \mathbf{-\ 0{,}02\ \mu C}$$

b) Para discutir el trabajo entre dos puntos de un campo eléctrico necesitamos los potenciales de ambos: el de A es un dato del problema; el de B se calcula con facilidad. La distancia de este punto a la carga Q es

$$r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ m$$

así que el potencial en B resulta

$$V_B = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\ \frac{-2.10^{-8}}{2\sqrt{2}} = -\,63{,}64\ V$$

de modo que nos hablan de mover un electrón — una carga e negativa — desde un punto B a potencial —63,64 V hasta un punto A a potencial —120 V: por tanto, **hacia potenciales bajos**. Ahora bien, las cargas negativas se mueven **espontáneamente** en un campo **hacia potenciales altos**; por lo tanto, estamos tratando un desplazamiento **en contra de las fuerzas del campo**. Se precisaría un trabajo **realizado por nosotros**, contra el campo, y su valor sería, **como mínimo**, el mismo que haga el campo y de signo contrario. Una manera práctica de hacer el cálculo y no depender demasiado de la memoria (¿era $V_A - V_B$, o era del revés, $V_B - V_A$?) es calcular **siempre** el **trabajo que hace el campo**:

$${}^{\text{campo}}_{-e}W_B^A = -\,e\,(V_B - V_A) = -\,1{,}6.10^{-19}\,(-63{,}64-(-120)) = -\,9{,}07.10^{-18}\ J$$

donde, como debemos saber — ¡¡eso es lo que debemos saber!! — se resta el potencial del punto de **salida**, B en nuestro caso, menos el potencial del punto de **llegada**, A en nuestro caso.

El hecho de que el trabajo realizado por el campo sea negativo tiene un significado inequívoco: la carga se movió de forma **no espontánea**, contra las fuerzas del campo. En nuestro caso, ya lo habíamos entendido. Además, el trabajo necesario **mínimo**, contra el campo, es ese mismo, con signo positivo

$${}^{\text{contra el campo}}_{-e}W_B^A = \mathbf{9{,}07.10^{-18}\ J}$$

Un comentario último: ¿por qué hablamos de trabajo necesario mínimo? Generalmente, cuando nos plantean una cuestión como este apartado b), hay un sobreentendido que no se menciona: imaginemos al electrón inicialmente, en B, en reposo, con velocidad v = 0.

Si el electrón se va a mover de forma no espontánea, el campo hará trabajo negativo, como ya hemos visto, y no ayudará en el desplazamiento; se estará oponiendo a él. Para conseguir que el electrón se mueva, necesitamos vencer el trabajo del campo con otro **positivo**. Si realizamos exactamente el mismo trabajo que hace el campo, aunque con signo positivo, el electrón de mueve de B a A sin ganancia de velocidad: si sale de B con velocidad v = 0, llega a A con velocidad v = 0. Ese es el **trabajo mínimo necesario**, y el electrón **no ha cambiado de energía cinética.**

Claro está, podemos realizar un trabajo mayor que el mínimo necesario: en nuestro caso, el campo hace el trabajo que hemos calculado, $-9{,}07.10^{-18}$ J, y nosotros podemos realizar otro, positivo, y mayor que ese: entonces el electrón llegará a A con alguna velocidad, y **habrá ganado energía cinética**.

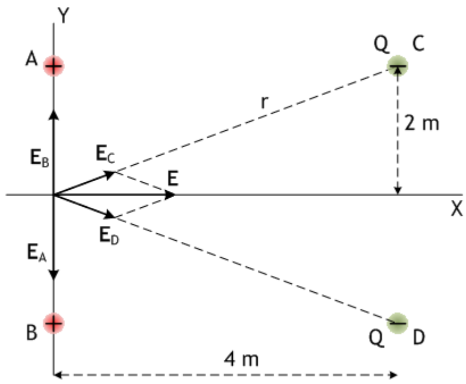
SEPTIEMBRE 06

B2.– Dos cargas eléctricas positivas e iguales de valor 3.10^{-6} C están situadas en el punto A(0,2) y B(0,–2) del plano XY. Otras dos cargas iguales Q están localizadas en los puntos C(4,2) y D(4,–2). Sabiendo que el campo eléctrico en el origen de coordenadas es E = 4.10^{3} i N/C, siendo i el vector unitario en la dirección del eje X, y que todas las coordenadas están expresadas en metros, determine:

a) El valor numérico y el signo de las cargas Q.

b) El potencial eléctrico en el origen de coordenadas debido a esta configuración de cargas.

Datos: Constante de la Ley de Coulomb, K = 9.10^{9} N m^2 C^{-2}



a) La figura muestra la disposición de las cuatro cargas, en los puntos A, B, C y D. De entrada, es evidente que los campos creados en el origen de coordenadas por las cargas situadas en A y B son vectores opuestos, ya que se trata de cargas positivas, iguales y a la misma distancia. Por tanto, $\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B = \mathbf{0}$, y sólo debemos preocuparnos por las cargas Q situadas en C y D. Un poco de reflexión permitirá entender que estas cargas son negativas: de otro modo, no sería posible que el campo en el origen de coordenadas acabe siendo $\mathbf{E} = 4.10^3\ \mathbf{i}$ N/C, un vector que lleva el sentido positivo del eje X: únicamente si los campos $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ apuntan hacia C y D puede obtenerse ese resultado.

El resto es un cálculo sencillo. La igualdad de las cargas Q, junto a la simetría respecto al origen de coordenadas, impone que los vectores $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ tengan el mismo módulo. Puede verse entonces con facilidad que las componentes de $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ en la dirección del eje Y se anularán, pues tienen sentido contrario. Así, quedan las componentes de $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ en la dirección X, que se superponen y se refuerzan, para dar el campo final en el origen de coordenadas.

La distancia entre C (o D, tanto da) y el origen es $r = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ m

El módulo coincidente de $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ vale, entonces, en función de Q

$$E_C = E_D = K\frac{Q}{r^2} = 9.10^9\,\frac{Q}{20} = 4,5Q.10^8\ \text{N/C}$$

y la componente de cualquiera de ellos en el eje X, teniendo en cuenta que $\cos\alpha = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, resulta ser

$$E_{Cx} = E_{Dx} = E_C\cos\alpha = 4,5Q.10^8\,\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{N/C}$$

así que el campo en el origen finalmente resulta un vector en la dirección del eje X, sentido positivo, y que mide el doble que cualquiera de esas componentes. Si ha de tener el valor que exige el enunciado, deberá cumplirse la siguiente igualdad entre módulos:

$$E = 2E_{Cx} = 2E_C\cos\alpha = 2.4,5Q.10^8\,\frac{2}{\sqrt{5}} = 4.10^3 \quad\Rightarrow\quad Q = 4,97.10^{-6}\ \text{C} = 4,97\ \mu\text{C}$$

pero debemos recordar que Q es negativa, de modo que nuestra respuesta sería **$Q = -4,97.10^{-6}$ C = $-4,97$ μC**

b) Ahora conocemos la configuración de cargas de manera completa. El potencial del origen de coordenadas es, de acuerdo con el principio de superposición, la suma de los potenciales debidos a cada una de las cuatro cargas, que llamaremos V_A, V_B, V_C y V_D y que serán iguales dos a dos, por razones de simetría obvia ($V_A = V_B$, $V_C = V_D$). Resultará:

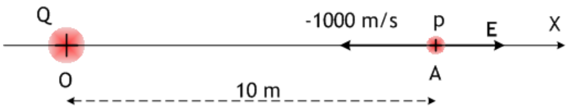
$$V = V_A + V_B + V_C + V_D = 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{2} + 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{2} + 9.10^9\,\frac{-4,97.10^{-6}}{2\sqrt{5}} + 9.10^9\,\frac{-4,97.10^{-6}}{2\sqrt{5}} = \mathbf{7000\ V}$$

B1.– Una carga positiva de 2 μC se encuentra situada inmóvil en el origen de coordenadas. Un protón moviéndose por el semieje positivo de las X se dirige hacia el origen de coordenadas. Cuando el protón se encuentra en el punto A, a una distancia del origen de x = 10 m, lleva una velocidad de 1000 m/s. Calcule:

a) El campo eléctrico que crea la carga situada en el origen de coordenadas en el punto A.
b) El potencial y la energía potencial del protón en el punto A.
c) La energía cinética del protón en el punto A.
d) El cambio de momento lineal experimentado por el protón desde que parte de A y por efecto de la repulsión vuelve al mismo punto A.

Datos: Cte de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}; masa del protón, $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg; Carga del protón, $q_p = 1{,}6.10^{-19}$ C

a) El primer apartado es un sencillo cálculo de intensidad de campo creado por una carga puntual. El vector **E** en el punto A llevará la dirección del eje X, sentido positivo, como se muestra en la figura, y será



$$\mathbf{E} = K\frac{Q}{r^2}\mathbf{i} = 9.10^9\,\frac{2.10^{-6}}{10^2}\,\mathbf{i} = 1{,}8.10^6\,\mathbf{i}\ \ N/C$$

b) El potencial del punto A es también obvio; de nuevo hablamos de una carga puntual creadora:

$$V = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\,\frac{2.10^{-6}}{10} = \mathbf{1800\ V}$$

y la energía potencial del protón que se encuentra en ese punto:

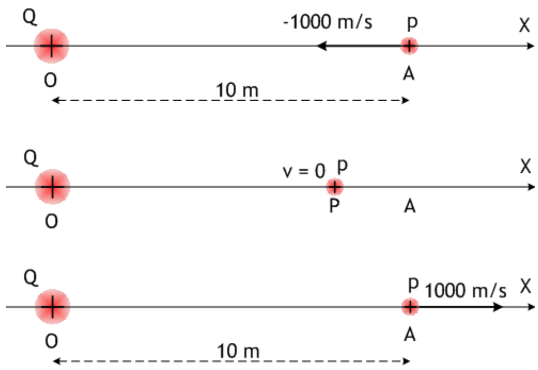
$$E_p = q_p V = 1{,}6.10^{-19}.1800 = \mathbf{2{,}88.10^{-16}\ J} = \mathbf{1{,}8\ keV}$$

(recuérdese que 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J, para aclarar el último cambio de unidades)

c) Conocemos la masa del protón y también su velocidad en el punto A, así que su energía cinética es inmediata. Ya que se está moviendo hacia la izquierda, escribiremos su velocidad con signo negativo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\,1{,}67.10^{-27}.(-1000)^2 = \mathbf{8{,}35.10^{-22}\ J}$$

y resulta, como puede verse, mucho más pequeña que la energía potencial, por más de cinco órdenes de magnitud. Esto, naturalmente, debe entenderse como consecuencia de la baja velocidad del protón.



d) ¿Qué le sucede al protón después de pasar por A? La fuerza eléctrica sobre él es de frenado, y será mayor cuanto más cerca esté del origen, donde está la carga Q. Así, el protón pierde velocidad y, con ello, pierde energía cinética; a cambio, la energía potencial aumenta en la misma cuantía: las fuerzas eléctricas son conservativas, de modo que **la suma de las energías cinética y potencial es invariante**, puesto que se trata de la única fuerza sobre el protón.

Así que el protón se detendrá, agotada su velocidad, en un punto P; en ese lugar, toda la energía será potencial eléctrica. No es necesario saber con exactitud dónde está P, pero tampoco es difícil calcularlo: apenas 3 centésimas de milímetro a la izquierda de A, aunque la figura no recoge esto con fidelidad, por razones obvias.

Lo importante es que, después de detenerse, el protón sigue siendo empujado hacia la derecha por el campo, de modo que comienza a acelerar, moviéndose en sentido contrario al que traía; naturalmente, volverá a pasar por A. En ese momento, la energía potencial eléctrica volverá a ser la que obtuvimos en el apartado b; por tanto, **la conservación de energía exige que el protón tenga la misma energía cinética que en su paso anterior por A**, y por ello la misma velocidad, aunque esta vez con signo positivo, pues se mueve hacia la derecha.

De esta manera, considerando como situaciones inicial y final los dos pasos del protón por A, podemos escribir su velocidad en cada caso como

$$\mathbf{v}_i = -1000\,\mathbf{i}\ \ m/s \qquad ; \qquad \mathbf{v}_f = 1000\,\mathbf{i}\ \ m/s$$

y la variación de momento lineal del protón

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) = 1{,}67.10^{-27}(1000\,\mathbf{i} - (-1000\,\mathbf{i})) = 3{,}34.10^{-24}\,\mathbf{i}\ \ kg\,m\,s^{-1}$$

JUNIO 07

B2.– Dos partículas con cargas de +1 μC y de –1 μC están situadas en los puntos del plano XY de coordenadas (–1,0) y (1,0) respectivamente. Sabiendo que las coordenadas están expresadas en metros, calcule:

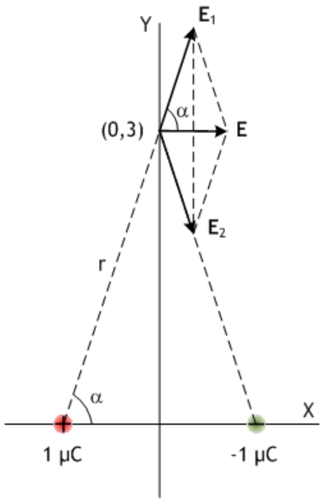
a) El campo eléctrico en el punto (0,3).

b) El potencial eléctrico en los puntos del eje Y.

c) El campo eléctrico en el punto (3,0).

d) El potencial eléctrico en el punto (3,0).

Dato: Constante de la ley de Coulomb, K = 9.10^9 N m^2 C^{-2}



a) Las cargas +1 μC y −1 μC, que llamaremos Q_1 y Q_2 respectivamente, constituyen de hecho un **dipolo eléctrico,** con X como eje del dipolo. Aparecen en la figura, en los puntos que se han indicado. El punto (0,3) está a una distancia r de cualquiera de ambas cargas, de valor fácil de obtener

$$r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\ \text{m}$$

El campo eléctrico en el punto (0,3) será, de acuerdo al principio de superposición, **la suma de los campos creados por cada una de las dos cargas**. Esos campos aparecen dibujados en la figura: la carga Q_1 = +1 μC crea un campo $\mathbf{E_1}$ radial y hacia fuera; y la carga Q_2 = −1 μC crea un campo $\mathbf{E_2}$ radial y hacia la carga. Ambas intensidades de campo, por evidentes razones de simetría, tienen el mismo módulo

$$E_1 = E_2 = K\frac{Q_1}{r^2} = 9.10^9\ \frac{10^{-6}}{10} = 900\ \text{N / C}$$

El vector campo en el punto (0,3) es, como hemos dicho, $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$ una suma vectorial. La figura muestra que esa suma sería muy sencilla en este caso, por razones de simetría: en efecto, **E** queda paralelo a la línea que une las cargas (lleva la dirección del eje X). Las componentes verticales de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ se anulan, en tanto que las componentes horizontales son iguales, ambas hacia la derecha, y se suman para dar el resultado final. Estas componentes horizontales valen

$$E_1 \cos\alpha = E_2 \cos\alpha = 900\ \frac{1}{\sqrt{10}} = 90\sqrt{10}\ \text{N/C}$$

donde α es el ángulo marcado en la figura, el mismo en el paralelogramo de los vectores que en el triángulo formado por los puntos (−1,0), (0,0) y (0,3): el cos α se ha calculado en éste último.

Como esas dos componentes se suman, el campo acabará midiendo el doble que cualquiera de ellas:

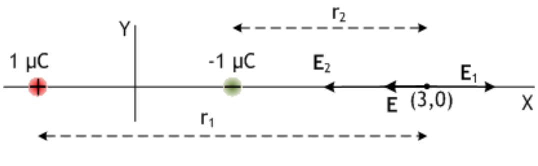
$$E = 2\ E_1 \cos\alpha = 2\ E_2 \cos\alpha = \mathbf{180\sqrt{10}\ N / C}$$

o, si se prefiere escribir el vector **E**, habida cuenta de su dirección paralela al eje X: $\mathbf{E} = 180\sqrt{10}\,\mathbf{i}\ \text{N / C}$

b) Cualquier punto del eje Y está a la misma distancia de la carga positiva del dipolo que de la carga negativa del mismo. Cuando queremos calcular el potencial de un punto aplicamos el principio de superposición: **los potenciales se suman**. Así, escribiríamos

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{Q_1}{r} + K\frac{Q_2}{r}$$

de modo que, siendo r la misma en los dos casos para un punto del eje Y, se sigue que sumaremos cantidades iguales y de signo contrario, pues $Q_1 = -Q_2$: **el potencial quedará 0 V.**



c) Esta vez los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ aparecen ambos en la dirección del eje X, de modo que su suma resultará más sencilla. El módulo de $\mathbf{E_2}$ será mayor, ya que (3,0) está más próximo a la carga negativa. Los módulos de ambos campos, en todo caso, resultan ser ahora

$$E_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2} = 9.10^9\ \frac{10^{-6}}{4^2} = 562{,}5\ \text{N / C}\ ; \qquad E_2 = K\frac{|Q_2|}{r_2^2} = 9.10^9\ \frac{10^{-6}}{2^2} = 2250\ \text{N / C}$$

así que el campo $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$, finalmente, llevará la dirección del eje X, en sentido negativo (hacia la carga de −1 μC) y su módulo será la diferencia entre los módulos E_2 y E_1:

$$E = E_2 - E_1 = 2250 - 562{,}5 = \mathbf{1687{,}5\ N/C}$$

O, si queremos escribir el vector **E**, ya que su dirección es el eje X y su sentido negativo, será **E = −1687,5 i N/C**

d) El potencial eléctrico en (3,0), como en cualquier otro punto, es **la suma de los potenciales creados en ese punto por ambas cargas**. Se trata de una sencilla suma de escalares, uno de los cuales es positivo (el potencial creado por la carga +1 μC), y el otro, (el potencial creado por la carga −1 μC), es negativo:

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{Q_1}{r_1} + K\ \frac{Q_2}{r_2} = 9.10^9\frac{10^{-6}}{4} + 9.10^9\frac{-10^{-6}}{2} = 2250 - 4500 = \mathbf{-\ 2250\ V}$$

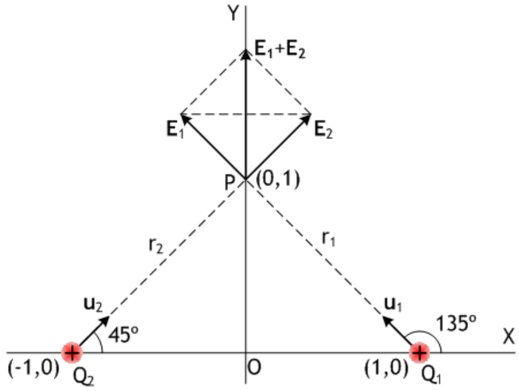
SEPTIEMBRE 07

B2.– Se disponen dos cargas eléctricas sobre el eje X: una de valor Q_1 en la posición (1,0), y otra de valor Q_2 en (–1,0). Sabiendo que todas las distancias están expresadas en metros, determine en los dos casos siguientes:

a) Los valores de las cargas Q_1 y Q_2 para que el campo eléctrico en el punto (0,1) sea el vector $E = 2.10^5$ j N/C, siendo j el vector unitario en el sentido positivo del eje Y.

b) La relación entre las cargas Q_1 y Q_2 para que el potencial eléctrico en el punto (2,0) sea cero.

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}



a) El dibujo muestra de qué forma debemos imaginar las cosas en este primer apartado. Nótese que la disposición de los puntos (1,0) y (—1,0), donde se encuentran las cargas, y del punto (0,1) donde se calcula la intensidad de campo implica una evidente simetría, que cobra más evidencia cuando se nos dice que el campo **E** en el punto (0,1) tiene que llevar la dirección del eje Y.

Un poco de reflexión muestra enseguida que la única posibilidad que existe es que Q_1 y Q_2 sean **ambas positivas**, y que tengan el **mismo valor**: considérese cualquier otra opción y se comprobará que no hay forma de que **E**, la suma de los campos creados por Q_1 y Q_2, resulte ser $\mathbf{E} = 2.10^5\,\mathbf{j}$.

Así, podríamos imaginar la imagen de la figura: los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, creados por las dos cargas en el punto (0,1), medirán lo mismo, por razones de simetría obvia. Cuando se suman, sus componentes en la dirección del eje X se anulan, ya que resultarían iguales y de signo contrario. Por el contrario, las componentes de ambos vectores en la dirección del eje Y son iguales, van hacia arriba y se suman. De este modo nos queda finalmente una intensidad de campo **E** en la dirección del eje Y, sentido positivo.

Todas las afirmaciones anteriores se basan en consideraciones de simetría. El cálculo formal, prescindiendo de ellas, se plantea con dos incógnitas, las cargas Q_1 y Q_2, que deben crear el campo pedido en el punto P. Los vectores unitarios de dirección de las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ se muestran en la figura, y no requieren mayores explicaciones; son, respectivamente

$$\mathbf{u}_1 = \cos 135^\circ\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 135^\circ\,\mathbf{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \qquad ; \qquad \mathbf{u}_2 = \cos 45^\circ\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 45^\circ\,\mathbf{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$$

así que podemos escribir las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ en función de las cargas Q_1 y Q_2:

$$\mathbf{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2}\mathbf{u}_1 = 9.10^9\frac{Q_1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right)\ \mathrm{N/C} \qquad ; \qquad \mathbf{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2}\mathbf{u}_1 = 9.10^9\frac{Q_2}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right)\ \mathrm{N/C}$$

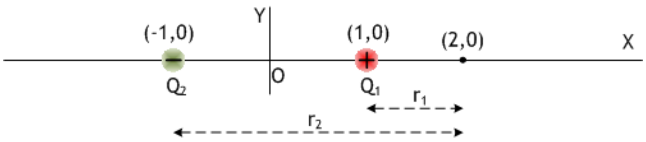
y ahora debemos obligar a que $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} = 2.10^5\,\mathbf{j}$, lo que implica que la suma de las primeras componentes de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ sea cero, y que la suma de las segundas componentes sea 2.10^5; esto es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2.10^5\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 9.10^9\frac{Q_1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 9.10^9\frac{Q_2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ 9.10^9\frac{Q_1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 9.10^9\frac{Q_2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} &= 2.10^5 \end{aligned}$$

De la primera de esas dos igualdades se sigue evidentemente $Q_1 = Q_2$, como ya habíamos entendido. Y llevando esta identidad a la segunda igualdad se tiene:

$$2.9.10^9\frac{Q_1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.10^5 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = \frac{4.10^5}{9\sqrt{2}.10^9} = \mathbf{3{,}14.10^{-5}\ C = 31{,}4\ \mu C}$$

así que, finalmente, dos cargas iguales y positivas, como esperábamos.



b) Este apartado es mucho más sencillo: el potencial en (2,0) es la suma de los potenciales creados por Q_1 y Q_2. Para que el potencial resulte cero, ha de ser

$$V = V_1 + V_2 = 0$$

Naturalmente, eso implica que uno de los potenciales ha de ser positivo y el otro negativo, de manera que las cargas tendrán que tener signos diferentes: una de las posibilidades es que Q_1 sea positiva y Q_2 negativa, como se ha representado en la figura. Los potenciales respectivos se escriben

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} \quad ; \quad V_2 = K\frac{Q_2}{r_2}$$

con $r_1 = 1$ m; $r_2 = 3$ m. De este modo, tendrá que ser

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{1} + \frac{Q_2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q_2 = -3Q_1}$$

cargas de signo opuesto y una triple que la otra; la figura recoge una de las dos posibles soluciones.

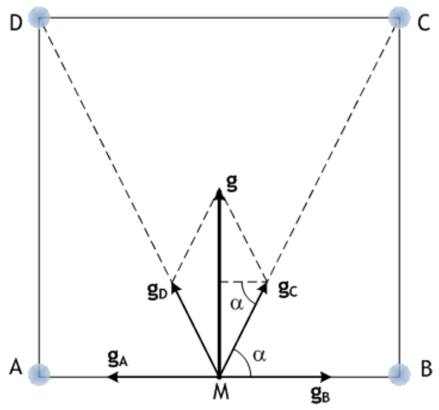
MODELO 08

C1.– Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcule:

a) El campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado.

b) El potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}



a) Podemos considerar el centro de cualquier lado, ya que los cálculos serían idénticos. Tomemos, por ejemplo, el centro M del lado AB, tal como se ve en la figura; se representan ahí los campos $\mathbf{g_A}$, $\mathbf{g_B}$, $\mathbf{g_C}$ y $\mathbf{g_D}$ creados en M por las cuatro masas puntuales. Nótese que cada uno de ellos es, como sabemos, radial y hacia la masa creadora. Calcularemos sus módulos de acuerdo a la expresión

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

del campo creado por una masa puntual. Las distancias de las masas al punto M son, respectivamente

$r_A = r_B = 1$ m ya que cada una es la mitad del lado AB

$r_C = r_D = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ m , hipotenusas de los triángulos MBC y MAD.

y ahora podemos plantearnos sumar todos los campos, para hallar el valor de **g** en el punto M:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g_A} + \mathbf{g_B} + \mathbf{g_C} + \mathbf{g_D} \qquad (2)$$

De entrada, parece obvio que $\mathbf{g_A}$ y $\mathbf{g_B}$ van a medir lo mismo, por simetría, y se anularán al sumarse. Así que sólo debemos ocuparnos de los campos creados por C y D. Los módulos de ambos serán iguales, de nuevo por razones de simetría, y valdrán

$$g_C = g_D = G\frac{M}{r_C^2} = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{6}{5} = 8{,}00.10^{-11}\ \mathrm{N/kg}$$

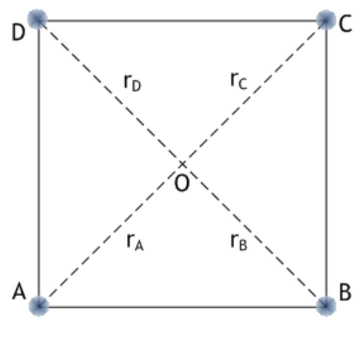
y, al sumar $\mathbf{g_C}$ y $\mathbf{g_D}$, sus componentes horizontales se anularán, reforzándose en cambio las componentes verticales, que además medirán lo mismo. Una de esas dos componentes verticales, digamos la de $\mathbf{g_C}$, se puede obtener con facilidad. De la figura

$$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{g_{Cy}}{g_C} \qquad \Rightarrow \qquad g_{Cy} = g_C\,\mathrm{sen}\,\alpha = 8{,}00.10^{-11}.\frac{2}{\sqrt{5}} = 7{,}16.10^{-11}\ \mathrm{N/kg}$$

donde sen α se ha obtenido del triángulo MBC. Como se suman las componentes verticales de $\mathbf{g_C}$ y $\mathbf{g_D}$, el vector resultante medirá el doble de esa cantidad

$$g = 2\,g_{Cy} = \mathbf{1{,}43.10^{-10}\ N/kg}$$

y estará dirigido, como se ve, hacia el centro del cuadrado. Lo mismo sucedería con el campo en el punto medio de otro cualquiera de los otros lados.



b) La expresión del potencial creado por una masa puntual en un punto a distancia r de la misma es

$$V = -G\frac{M}{r} \qquad (3)$$

y tiene ya, como sabemos, su valor cero a distancia infinita de la masa, siendo crecientemente negativo al acercarnos a ella. De acuerdo con el principio de superposición, el potencial en el punto O, centro del cuadrado, será la suma de los cuatro potenciales creados por las masas dispuestas en los vértices; ahora bien, ya que son todas ellas de 6 kg, y ya que están todas a la misma distancia de O,

$$AC = DB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad r_A = r_B = r_C = r_D = \frac{1}{2}\,AC = \sqrt{2}\ \mathrm{m}$$

se sigue que los cuatro potenciales valdrán lo mismo

$$V_A = V_B = V_C = V_D = -G\frac{M}{r} = -6{,}67.10^{-11}\,\frac{6}{\sqrt{2}} = -2{,}83.10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

así que el potencial en O será el cuádruplo de esa cantidad

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D = 4\,V_A = \mathbf{-1{,}13.10^{-9}\ J/kg}$$

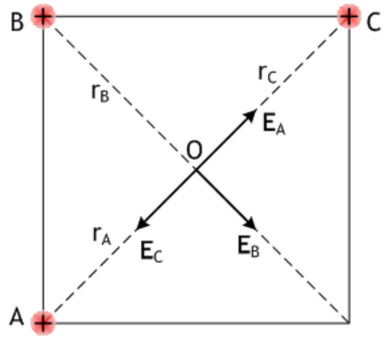
SEPTIEMBRE 08

C3.– Se disponen tres cargas de 10 nC en tres de los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determine en el centro del cuadrado:

a) El módulo, la dirección y el sentido del vector campo eléctrico.

b) El potencial eléctrico.

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}



a) Imaginamos las tres cargas en los vértices A, B y C del cuadrado. El centro O del cuadrado está a la misma distancia de cualquiera de los vértices, la mitad de la diagonal del cuadrado,

$$AC = \sqrt{2}\ \text{m} \qquad \Rightarrow \qquad r_A = r_B = r_C = \frac{1}{2}\ AC = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{m}$$

El principio de superposición, como siempre, es la clave: los campos se suman. En la figura aparecen las intensidades de campo creadas en O por cada una de las cargas: se trata, en los tres casos, de vectores radiales y hacia fuera, como corresponde a cargas puntuales positivas. Además, y ya que las cargas son iguales y están a la misma distancia de O, parece obvio que las tres intensidades de campo, $\mathbf{E_A}$, $\mathbf{E_B}$ y $\mathbf{E_C}$, tendrán el mismo módulo. Su valor es

$$E_A = E_B = E_C = K\frac{Q}{r^2} = 9.10^9\ \frac{10.10^{-9}}{(\sqrt{2})^2} = 45\ \text{N/C} \qquad (1)$$

Finalmente, el campo en O se escribe $\mathbf{E} = \mathbf{E_A} + \mathbf{E_B} + \mathbf{E_C}$ de acuerdo con el principio de superposición. Pero la figura muestra que los vectores $\mathbf{E_A}$ y $\mathbf{E_C}$ son opuestos y se anulan, de modo que el campo acaba siendo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_B}\ ; \qquad E = \mathbf{45\ N/C}$$

un vector dirigido hacia el cuarto vértice del cuadrado y cuyo módulo está dado en (1).

b) El potencial eléctrico en O es, de nuevo, suma de los potenciales creados por las tres cargas. Además, por sencillas razones de simetría, el potencial que crea cada una de ellas en O es el mismo: cargas iguales y a la misma distancia de O. El valor del potencial creado por cada carga,

$$V_A = V_B = V_C = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\ \frac{10.10^{-9}}{\sqrt{2}} = 63{,}64\ \text{V}$$

y el potencial en O, suma de los tres, es el triple de cualquiera de ellos

$$V = V_A + V_B + V_C = 3\,V_A = \mathbf{190{,}92\ V}$$

MODELO 09

B1.– En el plano x = 0 existe una distribución superficial infinita de carga cuya densidad superficial de carga es $\sigma_1 = +10^{-6}$ C/m^2.

a) Empleando el teorema de Gauss, determine el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en los puntos del espacio de coordenadas (1,0,0) y (−1,0,0).

Una segunda distribución superficial infinita de carga de densidad superficial σ_2 se sitúa en el plano x = 3.

b) Empleando el teorema de Gauss, determine el valor de σ_2 para que el campo eléctrico resultante de ambas distribuciones superficiales de carga en el punto (−2,0,0) sea E = +10^4 i N/C

Nota: Todas las coordenadas están expresadas en unidades del SI.

Dato: Permitividad eléctrica del vacío, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

Véase Septiembre 09 C4 para aclarar detalles acerca del empleo del teorema de Gauss en el cálculo de **E**.

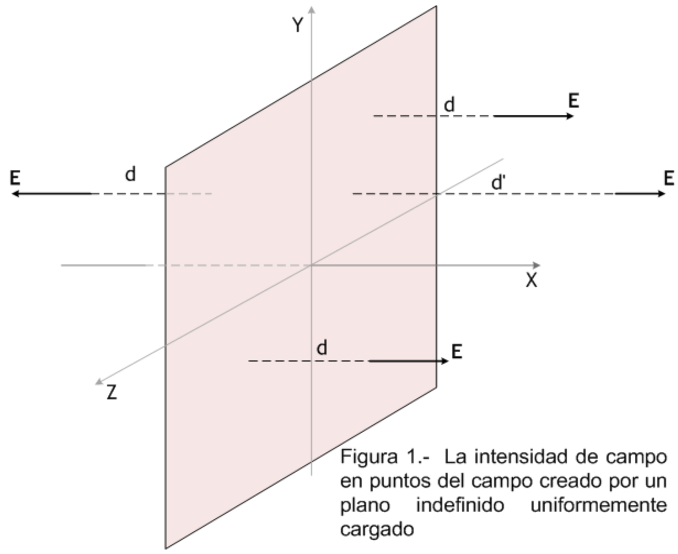


Figura 1.- La intensidad de campo en puntos del campo creado por un plano indefinido uniformemente cargado

a) Estúdiese atentamente la figura: el plano x=0 (es decir, el plano YZ) está cargado, con la densidad superficial de carga descrita en el enunciado. Por razones de simetría, y ya que se trata de un plano ilimitado, la intensidad de campo **E** debida a esta distribución de carga será **perpendicular al plano**, única dirección compatible con la simetría plana de la distribución.

Suponiendo que la carga es positiva, debemos imaginar **E** en el sentido positivo del eje X a la derecha del plano YZ, en la figura, y en el sentido negativo del eje X a la izquierda de dicho plano. Además, la simetría impone que **E** deberá ser el mismo para puntos que estén a la misma distancia del plano: en la figura mostramos hasta tres puntos que están a distancia d del plano XY, dos a un lado y uno al otro, en los que **E** tiene el mismo valor, salvo el sentido a un lado y otro del plano.

Es muy posible que la intuición (equivocada, como veremos) sugiera que el campo será menor en puntos más alejados del plano YZ, como en un punto a una distancia d'>d, en el que hemos dibujado un campo **E** menor.

Incluyendo supuestos erróneos como el que acabamos de hacer, lo cierto es que **la simetría de la distribución de carga nos permite conocer cuál será la dirección del vector intensidad de campo E en cualquier punto**: eso significa que se puede emplear el teorema de Gauss para hallar el módulo de **E** en un punto cualquiera del campo.

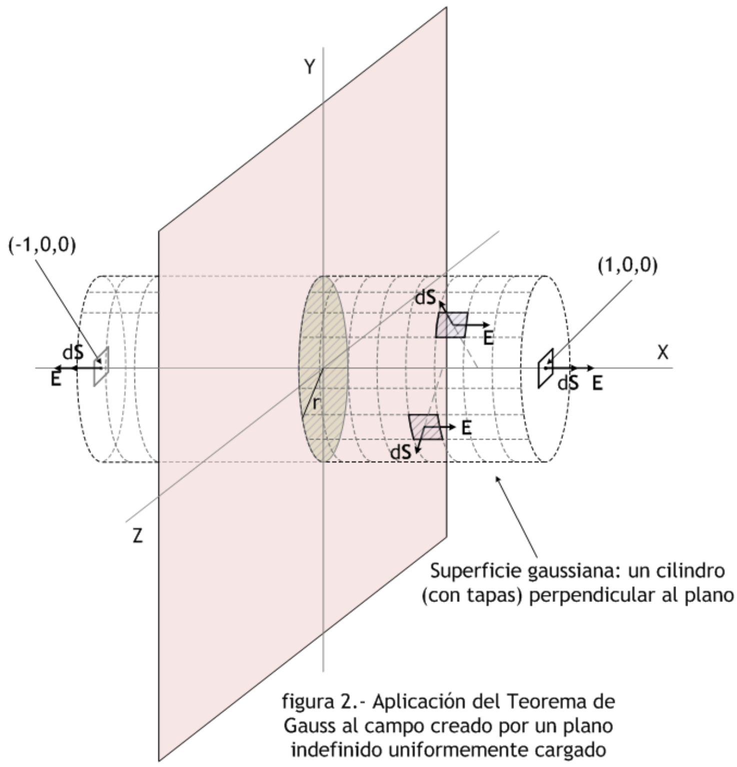


figura 2.- Aplicación del Teorema de Gauss al campo creado por un plano indefinido uniformemente cargado

Para hacerlo, necesitamos definir una superficie cerrada gaussiana a la que aplicar el teorema. Debe ser, como decimos, **cerrada** y debe también **adaptarse a la simetría** que presenta la distribución de cargas creadora del campo. Elegimos un cilindro (serviría un prisma igualmente) dispuesto perpendicularmente al plano YZ, cuyas tapas, a un lado y otro del plano ZY, contienen los puntos (1,0,0) y (−1,0,0) en los que hemos de hallar el campo **E**.

Dividimos la superficie gaussiana en elementos infinitesimales: la figura sugiere cómo hacer esto, y destaca varios de ellos, un par en la pared lateral del cilindro y uno en cada tapa. Se muestra el vector **E** en cada caso, así como el vector d**S** correspondiente.

Es de máxima importancia notar que los vectores **E** y d**S** son perpendiculares en la pared lateral del cilindro, así que su producto escalar será nulo. En las tapas, en cambio, los vectores **E** y d**S** son paralelos, con la misma dirección y sentido.

Recordemos entonces el teorema de Gauss:

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

que se aplica a la superficie cerrada gaussiana: el primer miembro es el **flujo de campo eléctrico a través de dicha superficie cerrada**; el segundo se refiere a la **carga neta q dentro de la superficie**. Para hacer la integral del primer miembro la romperemos en dos partes, una de ellas referida a la pared lateral del cilindro gaussiano y otra a las tapas del mismo

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \iint_{S\ lateral} \mathbf{E}.d\mathbf{S} + \iint_{Tapas} \mathbf{E}.d\mathbf{S} \qquad \text{(nótese que las integrales ya no se refieren a superficies cerradas)}$$

La primera de esas integrales es nula, ya que **E**.d**S** = 0 en la pared del cilindro gaussiano, como se hizo notar anteriormente. Eso significa que **no hay flujo de E a través de la pared** del cilindro, lo que resulta bastante evidente si se considera que las líneas de campo son perpendiculares al plano, como aparecen en la figura al lado (se han representado las líneas a un lado del plano, serían semejantes al otro lado): parece claro que unas líneas de campo como estas atravesarán las tapas de nuestro cilindro gaussiano, pero no cruzarán la pared lateral del cilindro. Para la otra integral, recordemos que en las tapas **E**⇈d**S**; además, como todos los puntos de ambas tapas están a la misma distancia del plano, podemos estar seguros de que **E** = **cte** en ellas, incluso si mantenemos nuestra equivocada intuición acerca de la caída del campo al alejarnos del plano. De este modo, podemos escribir

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \iint_{Tapas} \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \iint_{Tapas} E.dS = E.\iint_{Tapas} dS = E.2S \qquad (2)$$

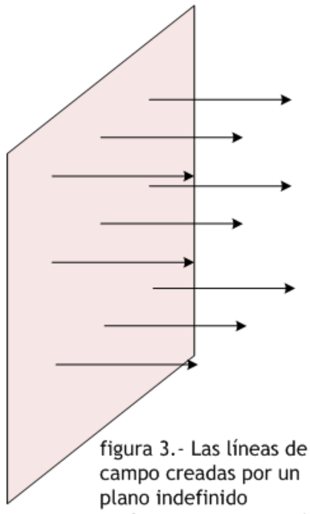


figura 3.- Las líneas de campo creadas por un plano indefinido uniformemente cargado

donde S es el área de una de las tapas, que es una cantidad arbitraria. De este modo, el primer miembro de (1) está evaluado. En cuanto al segundo miembro, la carga encerrada dentro de nuestro cilindro gaussiano es la que corresponde al corte del cilindro con el plano YZ cargado, y puede verse en la figura 2 como un área sombreada de valor S, ya que es igual al área de una tapa del cilindro. Es muy sencillo concluir que, si σ_1 es la densidad superficial de carga del plano, entonces

$$q = \sigma_1 S \qquad (3)$$

de manera que, llevando los resultados (2) y (3) al teorema (1), tenemos

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E.2S = \frac{\sigma_1 S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

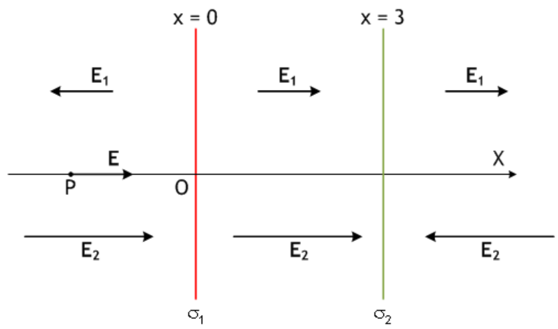
la respuesta al problema. Nótese que, como ya habíamos advertido, nuestra "intuición" acerca de que el campo disminuiría al alejarse del plano es incorrecta: el resultado obtenido es independiente de la distancia al mismo. De este modo, el vector **E** es el mismo en cualquier punto a la derecha del plano, como es el mismo también (con sentido contrario) en cualquier punto a la izquierda del plano. Dicho de otro **modo, una distribución plana indefinida y uniforme de carga crea un campo uniforme a cada lado del plano**; ambos campos uniformes tienen sentido opuesto.

En términos numéricos, nuestro campo vale $\quad E = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \dfrac{10^{-6}}{2.8{,}85.10^{-12}} = \mathbf{5{,}65.10^4\ N/C}$

y va dirigido en el sentido positivo del eje X en el punto (1,0,0), de modo que en ese punto $\quad \mathbf{E} = 5{,}65.10^4\ \mathbf{i}$ N/C

mientras que en el punto (−1,0,0) lleva el sentido negativo del eje X, así que allí es $\quad \mathbf{E} = -5{,}65.10^4\ \mathbf{i}$ N/C

b) Ahora debemos acordarnos del principio de superposición: los campos se suman. Ya que sabemos calcular el campo que crea plano indefinido con carga uniforme, podemos hallar el campo que crean *dos* distribuciones de ese tipo simplemente sumando los campos creados por cada una de ellas. En esta última figura mostramos los planos cargados x = 0 y x = 3, con densidades respectivas σ_1 y σ_2, dispuestos perpendicularmente al plano del papel.



Los campos creados por ambos planos llevarán la dirección del eje X; en el punto P(−2,0,0), a la izquierda del plano x = 0, el campo creado por el plano x = 0 va hacia la izquierda y sabemos que vale $\mathbf{E}_1 = -5{,}65.10^4\ \mathbf{i}$ N/C, de acuerdo con el apartado anterior. Si el campo final en P ha de ser $\mathbf{E} = 10^4\ \mathbf{i}$ N/C, tendrá que ser

$$\mathbf{E} = 10^4\,\mathbf{i} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -5{,}65.10^4\,\mathbf{i} + \mathbf{E}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_2 = 6{,}65.10^4\,\mathbf{i}\ \mathrm{N/C}$$

así que parece claro que el campo $\mathbf{E}_2$ creado por el plano x = 3 en P debe ir hacia la derecha, **de modo que σ_2 debe ser negativa**, para crear campo que apunte hacia el plano x = 3. El módulo de este campo, junto con la expresión para el campo creado por un plano indefinido que hemos encontrado antes, nos dará el valor absoluto de σ_2:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = 2\varepsilon_0 E_2 = 2.8{,}85.10^{-12}.6{,}65.10^4 = 1{,}18.10^{-6}\ \mathrm{C/m^2} = 1{,}18\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

y, recordando que ha de tratarse de carga negativa, la respuesta final sería $\quad \sigma_2 = \mathbf{-1{,}18.10^{-6}\ C/m^2} = \mathbf{-1{,}18\ \mu C/m^2}$.

JUNIO 09

A2.– Dos cargas puntuales de −3 μC y +3 μC se encuentran situadas en el plano XY, en los puntos (−1,0) y (1,0) respectivamente. Determine el vector campo eléctrico:

a) En el punto de coordenadas (10,0).

b) En el punto de coordenadas (0,10).

Nota: Todas las coordenadas están expresadas en metros; Dato: Constante de la ley de Coulomb, K = 9.10^9 N m^2 C^{-2}

Llamemos Q_1 y Q_2 a las cargas situadas en los puntos (−1,0) y (1,0), respectivamente. El campo eléctrico en cualquier punto será la suma de los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ debidos a cada una de esas cargas,

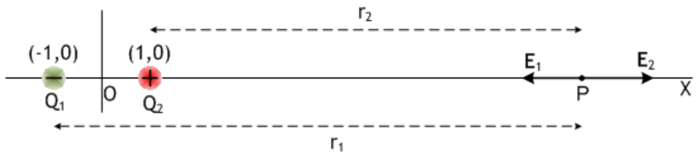
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

de manera que debemos hacer los cálculos en cada uno de los puntos que plantea el enunciado.

a) En P (10,0), un punto del eje X, los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ tienen la dirección de ese eje, de modo que el vector unitario que describe su dirección es **i**. Serían

$$\mathbf{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2}\mathbf{i} = 9.10^9\frac{-3.10^{-6}}{11^2}\mathbf{i} = -\frac{27}{121}10^3\,\mathbf{i}\ \ N/C$$

$$\mathbf{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2}\mathbf{i} = 9.10^9\frac{3.10^{-6}}{9^2}\mathbf{i} = \frac{1}{3}10^3\,\mathbf{i}\ \ N/C$$



de modo que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\frac{27}{121}10^3\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}10^3\,\mathbf{i} = \mathbf{1{,}10.10^2\ i\ \ N/C}$$ sería el campo en P.

b) En S (0,10), un punto del eje Y, los vectores $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ tienen la dirección que aparece en la figura, marcada por los vectores unitarios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ respectivamente. Recordando que un vector unitario en el plano XY puede escribirse como

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\ \mathbf{j}$$

donde α es el ángulo que forma el vector con el semieje X positivo, parece claro que podemos escribir los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ como

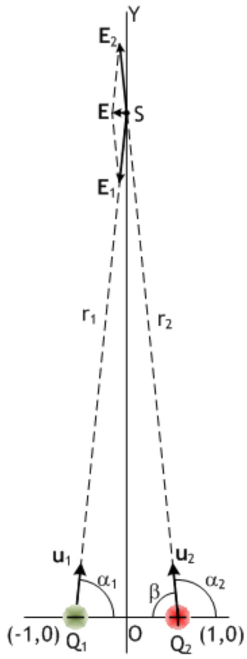
$$\mathbf{u}_1 = \cos\alpha_1\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha_1\ \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{101}}\ \mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_2 = \cos\alpha_2\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha_2\ \mathbf{j} = -\frac{1}{\sqrt{101}}\ \mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\ \mathbf{j}$$

teniendo presente que α_2 y β son ángulos suplementarios y que, por tanto, cos α_2 = −cos β; sen α_2 = sen β. Con todo esto, resulta sencillo escribir las expresiones para $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ en el punto S:

$$\mathbf{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2}\ \mathbf{u}_1 = 9.10^9\frac{-3.10^{-6}}{(\sqrt{101})^2}\ (\frac{1}{\sqrt{101}}\mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\mathbf{j}) = -\frac{27}{101\sqrt{101}}\ 10^3\,\mathbf{i} - \frac{27}{101\sqrt{101}}\ 10^3\,\mathbf{j}\ \ N/C$$

$$\mathbf{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2}\ \mathbf{u}_1 = 9.10^9\frac{3.10^{-6}}{(\sqrt{101})^2}\ (-\frac{1}{\sqrt{101}}\mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\mathbf{j}) = -\frac{27}{101\sqrt{101}}\ 10^3\,\mathbf{i} + \frac{27}{101\sqrt{101}}\ 10^3\,\mathbf{j}\ \ N/C$$



así que el campo en S finalmente resulta, ya que las componentes **j** se anulan:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{i} - \frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{i} = \mathbf{-53{,}2\,i\ \ N/C}$$

un vector en el sentido negativo del eje X, tal como aparece en la figura.

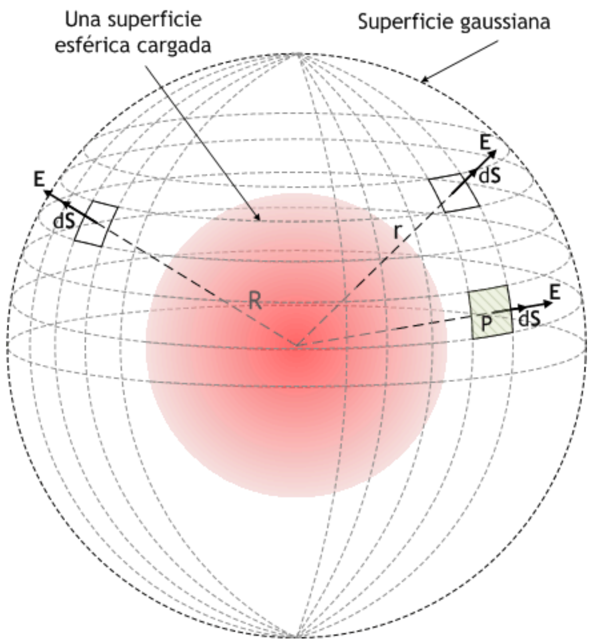
SEPTIEMBRE 09

C4.– Una superficie esférica de radio R tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente en ella.

a) Deduzca la expresión del módulo del vector campo eléctrico en el punto situado en el exterior de dicha superficie haciendo uso del teorema de Gauss.

b) ¿Cuál es la razón entre los módulos de los vectores campo eléctrico en dos puntos situados a las distancias del centro de la esfera $r_1 = 2R$ y $r_2 = 3R$?

a) El teorema de Gauss puede emplearse para hallar el módulo de la intensidad de campo creado por una distribución de carga **en situaciones de alta simetría**, como sucede con el caso que nos ocupa: una superficie esférica uniformemente cargada.



En términos prácticos, podemos reconocer si un problema de búsqueda de **E** podrá resolverse aplicando el teorema de Gauss respondiendo a la siguiente pregunta:

¿Es posible, basándose exclusivamente en la simetría de la distribución de cargas creadoras de campo, saber cuál será la dirección del vector **E** en un punto cualquiera del campo?

Para nuestro caso, la respuesta es sí. De hecho, es fácil comprender que el campo en cualquier punto en el **exterior** de la superficie esférica ha de ser **radial**, ya que esa es la única opción compatible con la simetría que impone al problema la distribución uniforme de carga en la superficie esférica.

Si suponemos que la carga Q es positiva, entonces podemos decir aún más: el vector intensidad de campo **E** en cualquier punto en el exterior de la superficie cargada será **radial y dirigido hacia fuera**. Esto está recogido en la figura al lado, en la que mostramos la intensidad de campo en algunos puntos en el exterior de la superficie cargada.

El siguiente paso, una vez que sabemos que el teorema de Gauss será de utilidad, es **elegir una superficie gaussiana** a la que aplicar el teorema; la superficie elegida debe ser **cerrada** y **adecuada a la simetría** que presenta la distribución de carga. No es difícil escoger: si queremos hallar el campo en un punto P, a una distancia r del centro C de la superficie cargada, debemos tomar una **superficie esférica centrada en C y de radio r**. De hecho, cualquier problema relativo a distribuciones de carga que presenten simetría esférica se discute, de forma natural, empleando superficie gaussianas de esta forma.

La figura muestra que la superficie gaussiana debe ser dividida en elementos infinitesimales de área, d**S**, tan pequeños que pueden suponerse planos; cada uno de ellos se representa por medio del correspondiente vector perpendicular a la superficie: nótese que el vector d**S** en cualquier lugar de la superficie gaussiana resulta **radial y hacia fuera**. También se representa el vector intensidad de campo **E** en el centro de algunos de los elementos de área d**S**: por razones de simetría, estos vectores **E** tendrán el mismo módulo, ya que están supuestos en puntos a la misma distancia del centro de la distribución esférica de carga.

Así, **E** y d**S** son vectores estrictamente paralelos en toda la superficie gaussiana; además, el módulo de **E** es constante en toda ella. Esas son las claves de una sencilla aplicación del teorema de Gauss,

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ya que la integral de la izquierda, el **flujo de campo E a través de la superficie gaussiana**, es bastante simple:

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} \overset{(1)}{=} \oiint E.dS \overset{(2)}{=} E \oiint dS \overset{(3)}{=} E.4\pi r^2$$

(1) ya que **E**.d**S** = E.dS, por ser vectores de la misma dirección y sentido;

(2) ya que el modulo de **E**, E, es constante en toda la superficie gaussiana y puede salir de la integral;

(3) ya que la integral resultante no es otra cosa que la superficie de la esfera, igual a $4\pi r^2$

y el segundo miembro, por su parte, es obvio: la carga q encerrada **dentro de la superficie gaussiana** es la carga Q de la superficie esférica cargada de radio R, a la que alude el enunciado.

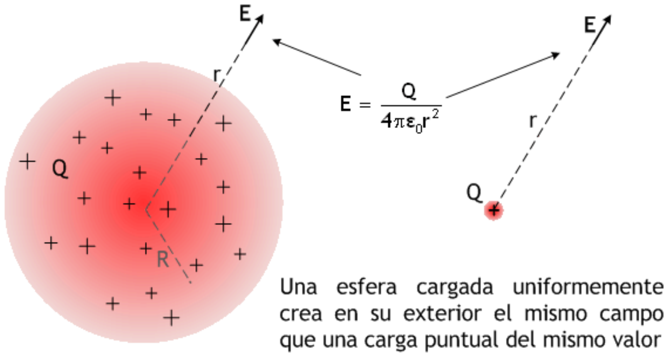
De este modo, el teorema aplicado en nuestro caso se resume en:

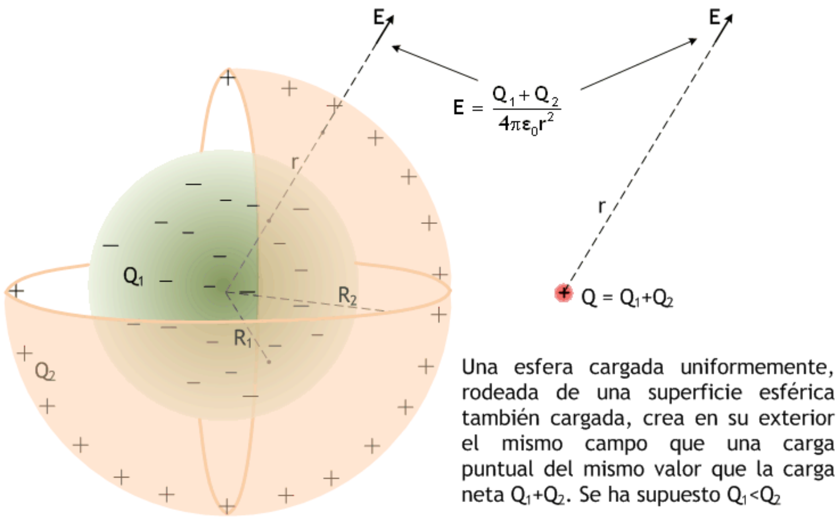
$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

y, por tanto, el módulo de la intensidad de campo resulta

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K\,\frac{Q}{r^2} \qquad (1)$$

siendo su dirección radial, como nos aseguró la simetría del problema. Es decir, **la misma intensidad de campo que crearía una carga puntual Q situada en el centro de la superficie esférica de radio R**. Este resultado es muy notable, y admite una generalización más notable aún: **cualquier distribución esférica y simétrica de carga, vista *desde fuera*, actúa igual que una sencilla carga puntual situada en su centro**; esa carga tiene el valor neto de la distribución. Unos ejemplos gráficos deberían ilustrar el sentido de esta generalización:





b) Se trata de una simple aplicación del resultado (1), para las distancias pedidas r_1 = 2R y r_2 = 3R. La razón entre los módulos de la intensidad de campo a esas distancias será:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}} = \frac{\frac{1}{4R^2}}{\frac{1}{9R^2}} = \frac{9}{4}$$