JUNIO 96

PROBLEMA B1.— Una onda armónica transversal que se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje de las X tiene las siguientes características: amplitud A = 5 cm, longitud de onda λ = 8π cm, velocidad de propagación v = 40 cm/s. Sabiendo que la elongación de la partícula de abcisa x = 0, en el instante t = 0, es de 5 cm, determinar:

- **a) El número de onda y la frecuencia angular de la onda.**
- **b) La ecuación que representa el movimiento vibratorio armónico simple de la partícula de abcisa x = 0.**
- **c) La ecuación que representa la onda armónica transversal indicada.**

Las magnitudes que se citan en el enunciado, como datos o como incógnitas, son características de la ecuación de propagación de una onda armónica en una dimensión. En el caso concreto que nos ocupa, se trata de una onda en el eje X, propagándose en sentido positivo, de acuerdo a una ecuación del tipo

$$y(x;t) = A\ \mathrm{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\varphi_0\right) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

donde ϕ_0 es una constante que recoge la fase inicial de la oscilación del punto x = 0 m. Si la elongación de ese punto x = 0 m, en el tiempo t = 0 s, hubiese sido y = 0 cm — es decir, si hubiese estado en el punto de equilibrio, comenzando una oscilación —, el valor de φ_0 sería nulo y no aparecería en la ecuación de propagación de la onda. Como el caso es que el punto x = 0 m tiene la elongación máxima en el instante t = 0 s, y = 5 cm, su fase inicial es la que corresponde a un cuarto de oscilación, por tanto, $\varphi_0 = \pi/2$ rad. Todas estas ideas, junto con las relaciones conocidas

$$v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \quad (1) \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (2) \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3)$$

entre la velocidad de propagación de la onda v (<> m/s), la longitud de onda λ (<> m), el número de onda k (<> m^{-1}), la frecuencia ν (<> Hz) y el periodo T (<> s) permiten responder a las cuestiones que se nos plantean:

a) Conocida λ, el número de onda es inmediato: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{8\pi} = \mathbf{\frac{1}{4}\ cm^{-1}}$

y la frecuencia angular ω es también sencilla, obteniendo antes T o ν por medio de (1):

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{40}{8\pi} = \frac{5}{\pi}\ \mathrm{Hz} \quad \Rightarrow \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{5}{\pi} = \frac{5}{2}\ \mathrm{rad/s} = \mathbf{\frac{5}{2}\ s^{-1}}$$

b) De acuerdo con lo discutido más arriba, la respuesta es inmediata: se trata de una oscilación armónica en una dirección perpendicular al eje X, que supondremos el eje Y. La amplitud de la oscilación es A = 5 cm, la pulsación ω acaba de ser calculada y, por último, la fase inicial es $\phi_0 = \pi/2$ rad. De este modo, la ecuación del M.A.S. de este punto resulta

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) = \mathbf{5\ sen\left(\frac{5}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad t <> s;\ y <> cm$$

c) Por último, la ecuación de propagación de la onda, que también es inmediata, ya que tenemos k, ω y ϕ_0. Queda escribir la ecuación como

$$y(x;t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx + \phi_0) = \mathbf{5\ sen\left(\frac{5}{2}t-\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad t <> s;\ x <> cm;\ y <> cm$$

y está hecho. Nótese que se ha empleado cm como unidad de longitud en todos los casos en que ha sido preciso, tanto en el eje X en el que se propaga la oscilación como en el eje Y en que sucede ésta.

SEPTIEMBRE 96

CUESTIÓN 3.— ¿Qué cualidades distinguen entre sí a los diferentes sonidos? ¿Cómo dependen dichas cualidades de las magnitudes que caracterizan la onda sonora? Razona la respuesta.

Las cualidades que distinguen entre sí a los sonidos son el **tono** y el **timbre.** El **tono** no es sino la **frecuencia** del sonido, medida en Hz, que permite diferenciar los sonidos **graves**, de frecuencia más baja, de los **agudos**, que poseen frecuencias más altas. Como se sabe, el oído humano es capaz de percibir sonidos cuyas frecuencias van de los 20 Hz, los más graves que podemos oir, a los 20000 Hz, los más agudos que podemos oir.

Aunque no es una cualidad de los sonidos, quizá proceda decir aquí algo acerca de la **intensidad**. Como en cualquier otra onda, entendemos por intensidad la **cantidad de energía que la onda transporta por unidad de área perpendicular a la dirección de propagación y por unidad de tiempo;** se mide por tanto en W/m^2. Para poder percibir realmente un sonido, es preciso que tenga una frecuencia entre 20 y 20000 Hz — es decir, que se trate de un tono audible —, pero también que llegue a nuestro oído con un mínimo de intensidad, por debajo de la cual el sonido es demasiado débil para ser percibido. Esa **intensidad umbral** es distinta para las diferentes frecuencias; por ejemplo, para un sonido de frecuencia 1000 Hz el umbral de audición está en 10^{-12} W/m^2.

El **timbre** es una cualidad de los sonidos que permite distinguir, por ejemplo, la misma nota emitida por instrumentos musicales diferentes, y que hace también única la voz de cada persona. Cuando un instrumento musical emite un sonido de una determinada frecuencia, emite también un conjunto de armónicos de ese sonido, cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia base fundamental. El conjunto de armónicos emitidos es característico de cada instrumento, como lo es también de la voz de cada persona, de manera que podemos diferenciarlos gracias al **timbre** de cada cual. Cuanto mayor es el número de armónicos presentes en una nota, más agradable y **armoniosa** resulta la misma.

Como puede verse, la frecuencia — y, por tanto, también la longitud de onda — es la magnitud esencialmente comprometida en la caracterización de un sonido, ya que es directamente identificable con el **tono**, y un conjunto de múltiplos determinado de la frecuencia, los armónicos presentes, determina el **timbre**.

JUNIO 97

CUESTIÓN 3.— a) Si el oído humano puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas en el intervalo de 20 a 20000 Hz aproximadamente, ¿cuáles son las longitudes de onda en el aire que corresponden a estas frecuencias?
b) Si el oído humano es capaz de distinguir aproximadamente dos sonidos que se emiten con un intervalo de 0,1 s, ¿cuál es la distancia mínima a la que debe estar de una pared una persona, para que perciba el eco?
Datos: Velocidad del sonido en el aire, v = 340 m s^{-1}

a) Una cuestión muy sencilla: se trata de emplear la expresión fundamental $v = \lambda\nu$ para despejar las longitudes de onda correspondientes a las frecuencias de 20 Hz y de 20000 Hz

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340\ \text{m/s}}{20\ \text{Hz}} = \mathbf{17\ m} \qquad\qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340\ \text{m/s}}{20000\ \text{Hz}} = 17.10^{-3}\ \text{m} = \mathbf{17\ mm}$$

b) Para que el oído "separe" los dos sonidos, debe recibirlos con un intervalo de separación de 0,1 s al menos. Así, si una persona situada frente a una pared da un grito, el primer sonido que oye es su propio grito, en el momento mismo en que lo produce. Ese sonido debe viajar hasta la pared, reflejarse allí y retornar hacia la persona, que oirá así un segundo sonido un tiempo después del primero: ese tiempo depende obviamente de la distancia entre pared y persona. Si están muy próximas, el sonido reflejado llegará a la persona antes de que haya pasado 0,1 s después de su grito, y no será capaz de distinguir un sonido de otro: no percibirá el eco. El tiempo mínimo para que se perciba el eco es, como se ha dicho, de 0,1 s, que debería ser el tiempo que emplea el sonido en ir a la pared, reflejarse allí y volver al lugar donde se encuentra la persona. Ya que el sonido se mueve con velocidad constante v = 340 m/s, la distancia que recorre en 0,1 s es obvia:

$$\text{distancia} = v\ .\ t = 340\ \text{m/s}\ .\ 0{,}1\ \text{s} = 34\ \text{m}$$

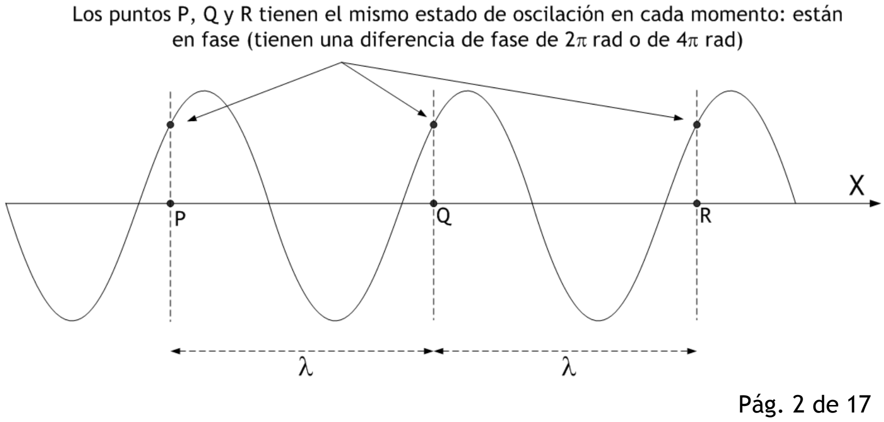
de manera que la distancia mínima entre persona y pared debería ser la mitad de esa cantidad, es decir, **17 m**. Con una distancia menor que 17 m, no hay eco; por encima de 17 m, existe eco y el tiempo entre el grito y el retorno del eco es cada vez mayor.

JUNIO 97

PROBLEMA B2.— Una onda armónica cuya frecuencia es de 50 Hz se propaga en la dirección positiva del eje X. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de $\pi/2$ radianes, determinar:

a) El periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
b) En un punto dado, ¿qué diferencia de fase existe entre los desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 s?

Este ejercicio aborda la cuestión de la periodicidad espacial de una onda armónica monodimensional, como la que nos proponen en el eje X. Una onda de estas características requiere que imaginemos una zona del eje X cuyos puntos oscilan a causa de la onda que se propaga: como sabemos, si tomamos un punto P cualquiera del eje y otro punto Q situado a una distancia λ del primero, debemos esperar que ambos oscilen en fase (más correcto sería decir con una diferencia de fase de 2π rad, ya que P habrá completado en todo momento **una oscilación más** que Q, puesto que la onda empleó un periodo T en propagarse desde P hasta Q, y mientras la onda hacía ese viaje, P cumplió su primera oscilación; así, cuando Q comienza su primera oscilación, P está empezando su



segunda oscilación. De la misma manera, el punto R a una distancia λ de Q, y 2λ de P, estará en fase con P y Q (o, dicho con más propiedad, tendrá un retraso de fase de 2π respecto a Q y de 4π respecto a P).

De este modo, la fotografía instantánea del eje X oscilante permite reconocer puntos con diferencias de fase 2π, 4π, 6π, etc. con la sencilla condición de que estén separados distancias iguales a λ, 2λ, 3λ, etc. La cuestión es, entonces, que seamos capaces de conocer la diferencia de fase entre dos puntos del medio que no estén separados un número entero de longitudes de onda, sino **una distancia d cualquiera**. Por fortuna, la relación que liga la **distancia entre dos puntos del medio** y la **diferencia de fase** entre ellos es muy simple, ya que son cantidades proporcionales, así que podemos escribir

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\delta\phi}{d} \qquad (1)$$

donde 2π es la diferencia de fase entre dos puntos separados una distancia λ, en tanto que $\delta\phi$ es la diferencia de fase existente entre dos puntos del eje separados una distancia d: (1) recoge una sencilla proporcionalidad, como hemos dicho. Esta ecuación permite despejar $\delta\phi$, que quedaría como

$$\delta\phi = \frac{\mathbf{2\pi d}}{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{kd} = \frac{2\pi d}{vT} = \boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}} \qquad (2)$$

escrita en distintas versiones: v es la velocidad de propagación de la onda, ω la frecuencia angular, k el número de ondas y T es el periodo; se han empleado ahí relaciones conocidas, como $\lambda = vT$ o $k = 2\pi/\lambda$. Las relaciones que recoge (2), en cualquiera de las formas, son de gran interés, ya que la periodicidad espacial de una onda armónica es una característica esencial y a menudo no bien entendida.

a) En el caso que nos plantean, conocemos la distancia entre los puntos del medio, d = 20 cm, y también la diferencia de fase $\delta\phi = \pi/2$ rad entre ellos. Empleando (2) obtenemos inmediatamente la longitud de onda λ:

$$\lambda = \frac{2\pi d}{\delta\phi} = \frac{2\pi.20}{\pi/2} = \mathbf{80\ cm}$$

y encontramos un resultado que, esta vez, era fácilmente previsible: después de todo, una diferencia de fase de $\pi/2$ rad debe corresponder a la cuarta parte de λ, del mismo modo que una diferencia de fase de π rad se referiría a puntos separados por ½ λ; en eso consiste la proporcionalidad.

El periodo, conocida la frecuencia ν = 50 Hz, es obvio $\qquad T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{50} = \mathbf{0{,}02\ s}$

y la velocidad de propagación es también inmediata $\qquad v = \lambda\nu = 80.50 = 4000\ cm/s = \mathbf{40\ m/s}$

Conviene observar que hemos utilizado cm como unidad de longitud en todos los cálculos, desde el momento en que pusimos d = 20 cm; así, la longitud de onda aparece en cm, y la velocidad de propagación en cm/s.

b) El segundo apartado incide en la periodicidad temporal de una onda armónica. Se trata ahora de fijar la atención en un punto del medio y seguir su oscilación a lo largo del tiempo; por tanto, estamos hablando sencillamente del M.A.S. que ejecuta ese punto del medio, idéntico al que lleva a cabo cualquier otro punto —— siempre que se trate de una onda monodimensional ——, salvo por diferencias de fase. Si escribimos la ecuación de propagación de onda

$$y(x;t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

para una onda armónica transversal viajera en el eje X, moviéndose hacia la derecha, podemos fijar un punto dado con una posición $x = x_1$, de modo que el término $kx = kx_1$ = Cte, y la función ya no será de 2 variables, sino sólo de t: se habrá convertido en la ecuación del M.A.S. que está ejecutando el punto $x = x_1$:

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx_1) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - Cte)$$

y el valor Cte no sería sino una fase inicial de ese M.A.S. Los desplazamientos del punto $x = x_1$ siguen esa ley, y la fase de este MAS se escribe

$$\phi(t) = \omega t - Cte$$

de modo que el cambio de fase en un intervalo de Δt determinado tomaría el valor

$$\Delta\phi = \phi(t+\Delta t) - \phi(t) = \boldsymbol{\omega}\,.\,\boldsymbol{\Delta t}$$

expresión que podemos utilizar sistemáticamente para resolver cuestiones acerca de variaciones de fase en el tiempo en un MAS. En el caso que nos ocupa, Δt = 0,01 s, de manera que resultaría

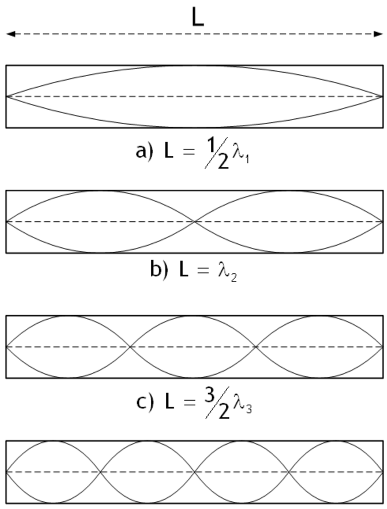
$$\Delta\phi = \omega.\Delta t = 2\pi\nu.0{,}01 = 2\pi.50.0{,}01 = \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{rad}$$

y se trataría de un resultado que debíamos esperar, desde que sabíamos que el periodo T = 0,02 s: en efecto, un periodo completo significaría una oscilación completa del punto dado, por tanto, un cambio de fase de 2π rad. En consecuencia, un intervalo de 0,01 s, la mitad de un periodo, implicaría media oscilación del punto y un cambio de fase de π rad.

SEPTIEMBRE 97

CUESTIÓN 2.— Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuáles son los valores de la frecuencia fundamental y de los otros armónicos en el caso de las ondas estacionarias en un tubo de 1 m de longitud cerrado por ambos extremos? ¿Cuáles son los valores de las longitudes de onda correspondientes a dichas frecuencias?
Justifica las respuestas.

Si los dos extremos del tubo están cerrados, **ambos extremos han de ser nodos**, es decir, puntos de amplitud de vibración nula. La figura que puede verse al lado recoge, entonces, cuál sería la forma de la onda correspondiente a la frecuencia fundamental, caso a), y los tres primeros armónicos, dispuestos de forma ordenada hacia abajo, casos b), c) y d).



a) $L = \frac{1}{2}\lambda_1$

b) $L = \lambda_2$

c) $L = \frac{3}{2}\lambda_3$

d) $L = 2\lambda_4$

Para la frecuencia fundamental, como puede verse, tomamos los dos extremos como nodos consecutivos, de forma que la longitud del tubo resulta igual a media longitud de onda, que hemos llamado λ_1. El primer armónico, de longitud de onda λ_2, tiene un nodo intercalado entre los dos extremos; el segundo armónico, de longitud de onda λ_3, tiene dos nodos intercalados entre los dos extremos, etc..

Es fácil concluir cuál es la relación entre la longitud L del tubo y las longitudes de onda de las ondas estacionarias posibles en estas condiciones:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad (n=1, 2, 3, 4,..) \qquad (1)$$

donde λ_n representa las distintas longitudes de onda, λ_1, λ_2, λ_3, .., que podemos encontrar para los valores n = 1, 2, 3,…; por supuesto, el valor n = 1 corresponde a la onda fundamental. Para hablar de frecuencias, recordemos la relación esencial entre longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de la onda:

$$\lambda_n . \nu_n = v \qquad (2)$$

que, llevada a (1) y despejando, nos da la fórmula para ir obteniendo las frecuencias pedidas:

$$\nu_n = n\,\frac{v}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (3)$$

de las cuales la primera, ν_1, es la fundamental. Con los valores L = 1 m y v = 340 m/s, tenemos:

$$\nu_1 = \frac{340}{2} = \mathbf{170\ Hz} \qquad (4)$$

y los armónicos sucesivos tienen frecuencias doble, triple, cuádruple, etc..que el valor encontrado en (4). Así:

$$\nu_2 = 2\nu_1 = \mathbf{340\ Hz}$$
$$\nu_3 = 3\nu_1 = \mathbf{510\ Hz}$$
$$\nu_4 = 4\nu_1 = \mathbf{680\ Hz}$$
....

En lo que respecta a las longitudes de onda, podemos volver a (1) y despejar

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (5)$$

para ir obteniendo

$$\lambda_1 = 2L = \mathbf{2\ m}$$
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} = \mathbf{1\ m}$$
$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3} = \mathbf{0,67\ m}$$
....

y comprobar que las longitudes de onda de los armónicos sucesivos resultan la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, etc.. de la longitud de onda correspondiente al estado fundamental.

SEPTIEMBRE 97

PROBLEMA B1.– Una partícula de masa 5 g oscila con movimiento armónico simple, en torno a un punto O, con una frecuencia de 12 Hz y una amplitud de 4 cm. En el instante inicial la elongación de la partícula es nula.

a) Si dicha oscilación se propaga según una dirección que tomamos como eje X, con una velocidad de 5 m/s, escribir la ecuación que representa la onda unidimensional originada.

b) Calcular la energía que transmite la onda generada por el oscilador.

a) Supondremos que se trata de una onda transversal, además de armónica, propagándose hacia la derecha en el eje X, de acuerdo por tanto a una ecuación de propagación como

$$y(x;t) = A\,\text{sen}(\omega t - kx) \qquad (1)$$

y en la que, como señala el enunciado, la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu = 2\pi.12 = 24\pi$ rad/s. En cuanto al número de ondas k, podemos obtenerlo recordando

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{24\pi}{5} = 4{,}8\pi \text{ m}^{-1}$$

de manera que, con esos valores, podemos escribir ya

$$\mathbf{y(x;t) = 4\,sen(24\pi t - 4{,}8\pi x)} \qquad y \Leftrightarrow \text{cm};\ t \Leftrightarrow \text{s};\ x \Leftrightarrow \text{m}$$

la ecuación de propagación que nos piden. Nótese que no incluimos ninguna fase inicial en la misma, ya que el enunciado especifica que la elongación de la partícula es inicialmente nula (aunque ahí queda alguna imprecisión; en realidad también podría tratarse de una fase inicial π, sabiendo **solo** que la elongación inicial es cero. No tiene mayor importancia, en todo caso). Las unidades tienen igualmente interés, y destacamos el que, habiendo conservado la amplitud A = 4 cm en estas unidades, la elongación y se mide en cm; en cambio x se mide en m, igual que k se mide en m^{-1}.

b) La energía transmitida por la onda lo es en la dirección del eje X exclusivamente, ya que se trata de una onda monodimensional. En una situación más frecuente y también más compleja, con una onda propagándose en el espacio tridimensional, nos referiríamos a la **intensidad** de la onda: como se sabe, se trata de la **energía que transporta la onda por unidad de área y de tiempo**; pero en una onda monodimensional este concepto se reduce en todo caso a la **energía transmitida por unidad de tiempo**, es decir, la potencia transmitida por la onda. Podemos recordar que ésta se escribe según

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2$$

donde μ es la densidad lineal de masa del medio en la dirección X; v = 5 m/s es la velocidad de propagación de la onda, ω y A han sido calculadas más arriba. No tenemos información acerca de la densidad del medio, de modo que tendríamos que dejar el resultado en función de μ. Resultaría

$$P = \frac{1}{2}\mu\, 5 (24\pi)^2\, 0{,}04^2 = \mathbf{22{,}74\mu\ W} \quad (\mu \text{ en kg/m})$$

Así, la cuestión planteada en b) no se puede responder. Es posible que el redactor del enunciado desease una respuesta más sencilla, pensando en que la energía del oscilador constituido por la partícula de masa 5 g es la energía que se transmite en la onda. Si es así, calculamos la energía del oscilador

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

cuyo valor numérico sería $E = \frac{1}{2}\, 5.10^{-3} (24\pi)^2 (4.10^{-2})^2 = \mathbf{2{,}27.10^{-3}\ J}$

pero no podríamos saber en qué tiempo se transmite: no conoceríamos la potencia de la onda.

JUNIO 99

CUESTIÓN 2.- Dos sonidos tienen niveles de intensidad sonora de 50 dB y 70 dB, respectivamente. Calcule cuál será la relación entre sus intensidades.

La intensidad sonora es una magnitud que se relaciona con nuestro nivel de percepción de los sonidos. Se define de acuerdo según

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \qquad (I,\ I_0 \text{ en W/m}^2,\ \beta \text{ en dB}) \qquad (1)$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 es la intensidad umbral para la audición de un sonido de 1000 Hz, que se toma como referencia, y β se mide en **decibelios, dB**. Así,

si I es 10 veces mayor que I_0, entonces β = 10 dB;
si I es 100 veces mayor que I_0, entonces β = 20 dB;
si I es 1000 veces mayor que I_0, entonces β = 30 dB;

etc… Cada orden de magnitud que se incrementa la intensidad, haciéndola 10 veces mayor, produce un incremento de 10 dB de intensidad sonora. Por ejemplo, un sonido de 50 dB tiene una intensidad I que es 5 órdenes de magnitud mayor que I_0; por tanto, una intensidad igual a 10^{-7} W/m^2, del mismo modo que una intensidad sonora de 70 dB es la de un sonido cuya intensidad es 10^{-5} W/m^2. Aunque la comparación entre estos sonidos es ya evidente, hagamos un cálculo formal de las intensidades correspondientes a ambos sonidos:

$$50 = 10\ \lg\frac{I_1}{I_0} \quad\Rightarrow\quad \lg\frac{I_1}{I_0} = 5 \quad\Rightarrow\quad \frac{I_1}{I_0} = 10^5 \quad\Rightarrow\quad I_1 = 10^{-12}.10^5 = \mathbf{10^{-7}\ W/m^2}$$

$$70 = 10\ \lg\frac{I_2}{I_0} \quad\Rightarrow\quad \lg\frac{I_2}{I_0} = 7 \quad\Rightarrow\quad \frac{I_1}{I_0} = 10^7 \quad\Rightarrow\quad I_1 = 10^{-12}.10^7 = \mathbf{10^{-5}\ W/m^2}$$

donde I_1 e I_2 son las intensidades respectivas de ambos sonidos. Bastaría dividir ambas intensidades

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{-5}}{10^{-7}} = \mathbf{100}$$

para concluir que el segundo sonido es 100 veces más intenso que el primero.

SEPTIEMBRE 99

PROBLEMA B1.- Un tren de ondas armónicas se propaga en un medio unidimensional de forma que las partículas del mismo están animadas de un movimiento armónico simple representado por:

$$\mathbf{y = 4\,sen(\frac{\pi}{3}t + \varphi)} \qquad \text{(y en centímetros y t en segundos)}$$

Determine:

a) **La velocidad de propagación de las ondas, sabiendo que su longitud de onda es igual a 240 cm.**
b) **La diferencia de fase en un instante dado correspondiente a dos partículas del medio separadas una distancia de 210 cm.**

a) La velocidad de propagación de una onda armónica se puede escribir $\quad v = \frac{\lambda}{T}$

donde, como se nos dice, λ = 240 cm y, en lo que refiere al periodo T, podemos obtenerlo con facilidad a partir de la ecuación del MAS que anima a las partículas del medio. En efecto,

$$\omega = \frac{\pi}{3}\ \text{rad/s} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6\ \text{s}$$

de modo que la velocidad de propagación resulta ser

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{240\ \text{cm}}{6\ \text{s}} = \mathbf{40\ cm/s}$$

b) La diferencia de fase entre dos partículas del medio separadas una distancia **d** se obtiene de

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,d$$

véase **JUNIO 97 PROBLEMA B2** para una explicación detallada de esta expresión. En el caso que nos ocupa

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,d = \frac{2\pi}{240\ \text{cm}}\,210\ \text{cm} = \mathbf{\frac{7\pi}{4}\ rad} = (315°)$$

una cantidad cercana a una oscilación completa.

JUNIO 00

CUESTIÓN 2.— Una onda transversal que se propaga en una cuerda, coincidente con el eje X, tiene por expresión matemática: y(x,t) = 2 sen(7t – 4x), en unidades SI. Determine:

a) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad máxima de vibración de cualquier punto de la cuerda.

b) El tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda.

a) La ecuación de propagación que nos ofrece el enunciado contiene suficiente información para responder, se trata de localizar los parámetros de la onda, que son:

$$A = 2\text{ m}; \qquad \omega = 7\text{ rad/s}; \qquad k = 4\text{ m}^{-1}$$

de modo que la velocidad de propagación se tendría directamente según $v = \frac{\omega}{k} = \frac{7}{4} = \mathbf{1{,}75\ m/s}$

mientras que la velocidad de vibración de los puntos de la cuerda es la correspondiente a M.A.S. de amplitud A = 2 m y pulsación ω = 7 rad/s. Por supuesto, sabemos que esa velocidad es variable en el tiempo pero, si se trata de calcular la velocidad **máxima** de la vibración de cualquier punto, debemos recordar que es

$$v_{máx} = \pm A\omega = \pm 2.7 = \mathbf{\pm 14\ m/s}$$

y que esta velocidad se tiene cuando el punto de la cuerda está pasando por su posición de equilibrio. Además, los signos ± se corresponden con la posibilidad de que el punto en cuestión se esté moviendo hacia arriba o hacia abajo cuando pasa por ese lugar.

b) Una pregunta muy simple: es el **periodo**. Periodo, cuando se trata de la propagación de una onda armónica, es un tiempo que tiene dos interpretaciones posibles, por supuesto coincidentes:

1) Es el tiempo que tarda un punto del medio en ejecutar una oscilación completa.

2) Es el tiempo que la onda precisa para recorrer una longitud de onda λ.

de modo que estamos de lleno en la segunda de ellas. El valor del periodo, por otro lado, es obvio:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7} = \mathbf{0{,}90\ s}$$

SEPTIEMBRE 00

CUESTIÓN 2.— Uno de los extremos de una cuerda tensa, de 6 m de longitud, oscila transversalmente con un movimiento armónico simple de frecuencia 60 Hz. Las ondas generadas llegan al otro extremo de la cuerda en 0,5 s. Determine:

a) La longitud de onda y el número de onda de las ondas de la cuerda.

b) La diferencia de fase de oscilación existente entre dos puntos de la cuerda separados 10 cm.

a) Comenzaremos calculando la velocidad de propagación de la onda, a partir de un dato tan simple como es que recorra 6 m en un tiempo de 0,5 s, de modo que bastaría dividir distancia recorrida por tiempo empleado en ello:

$$v = \frac{L}{t} = \frac{6\text{ m}}{0{,}5\text{ s}} = 12\text{ m/s} \qquad (1)$$

y el resto es muy sencillo: conocida la frecuencia ν = 60 Hz y la velocidad de propagación, obtenemos la longitud de onda inmediatamente:

$$v = \lambda\nu \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{12\text{ m/s}}{60\text{ Hz}} = \mathbf{0{,}2\ m}$$

y también el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2\pi}{0{,}2} = \mathbf{10\pi\ m^{-1}}$

b) Una vez más, la cuestión relativa a diferencia de fase en la oscilación de dos puntos del medio separados una cierta distancia. Ya que la longitud de onda es λ = 0,2 m = 20 cm, y puesto que los puntos de que nos hablan distan 10 cm, es decir, ½ λ, podríamos concluir sin más trámite que la diferencia de fase entre ellos corresponde a media oscilación, por tanto, sería π rad. También podemos, en todo caso, recurrir a la proporcionalidad que ya conocemos entre las magnitudes diferencia de fase y distancia entre puntos del medio:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\delta\phi}{d}$$

donde, en nuestro caso, λ = 0,2 m = 20 cm y d = 10 cm. Quedaría despejar la diferencia de fase $\delta\phi$:

$$\delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi.10}{20} = \mathbf{\pi\ rad}$$

MODELO 01
CUESTIÓN 2.— La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa coincidente con el eje X es y = 0,2 sen (100 πt – 200 πx), en unidades SI. Determine:

a) Los valores del periodo, la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

b) La expresión matemática de la onda en términos de la función coseno.

a) La lectura directa de la ecuación de propagación de onda indica que se trata de una onda viajera en el eje X, moviéndose hacia la derecha, con una amplitud de 0,2 m. Los valores de la frecuencia angular, ω, y del número de ondas, k, son

$$\omega = 100\pi \text{ rad/s}; \qquad k = 200\,\pi \text{ m}^{-1}$$

de modo que el periodo T será $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = \mathbf{0{,}02\ s}$

y la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{200\pi} = \mathbf{0{,}01\ m}$

mientras que la velocidad de propagación de la onda resultará

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{100\pi}{200\pi} = \mathbf{0{,}5\ m/s}$$

y la amplitud, como ya se ha dicho, $A = \mathbf{0{,}2\ m}$

b) La función seno puede convertirse en función coseno recordando $\text{sen}\,\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

de manera que nuestra onda quedará, en términos de función coseno, como

$$y = 0{,}2\ \text{sen}\,(100\,\pi t - 200\,\pi x) = \mathbf{0{,}2\cos\left(100\,\pi t - 200\,\pi x - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{(SI)}$$

y está hecho.

MODELO 01
PROBLEMA B1.— El sonido emitido por un altavoz tiene un nivel de intensidad de 60 dB a una distancia de 2 m de él. Si el altavoz se considera como una fuente puntual, determine:

a) La potencia del sonido emitido por el altavoz.

b) A qué distancia el nivel de intensidad sonora es de 30 dB y a qué distancia es imperceptible el sonido.

Datos: El umbral de audición es $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

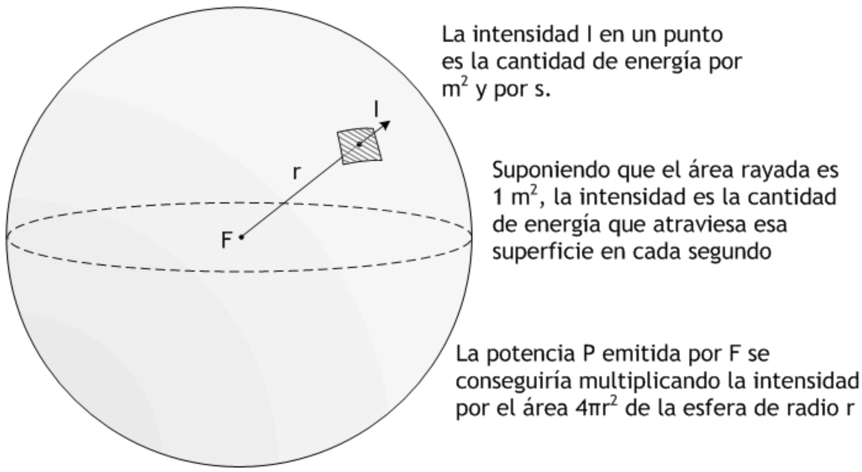
a) El nivel de intensidad sonora conocido permite calcular con facilidad la intensidad del sonido a la distancia de 2 m del altavoz:

$$\beta = 10\,\lg\frac{I}{I_0} \quad\Rightarrow\quad 60 = 10\,\lg\frac{I}{10^{-12}} \quad\Rightarrow\quad \lg\frac{I}{10^{-12}} = 6 \quad\Rightarrow\quad I = 10^{6}.10^{-12} = 10^{-6}\ \text{Wm}^{-2}$$

y de ahí resulta inmediato conocer la potencia con que emite el altavoz, ya que bastaría multiplicar la intensidad que acabamos de obtener por la superficie de la esfera de radio r = 2 m; esto es

$$P = 4\pi r^2\, I$$

$$P = 16\pi.10^{-6}\ \text{W} = \mathbf{5{,}03.10^{-5}\ W}$$



b) Podemos hallar la primera de las distancias que nos piden mediante un sencillo cálculo mental: recordemos, en efecto, que al alejarnos radialmente del foco emisor van disminuyendo tanto la intensidad I (medida en W m^{-2}) como el nivel de intensidad sonora, β (medido en dB). De hecho, como sabemos, si la intensidad **se divide por 10**, entonces el nivel de intensidad sonora **disminuye 10 dB.** Naturalmente, esto se aplica de forma reiterada, de forma que si la intensidad **se divide por 100**, entonces β **disminuye 20 dB**, etc..; así, como el nivel de intensidad sonora ha bajado de 60 dB a 30 dB, parece evidente que hemos debido dividir la intensidad por un factor 1000, de forma que la nueva intensidad será

$$I' = \frac{I}{1000} = \frac{10^{-6}}{10^{3}} = 10^{-9}\ \text{Wm}^{-2}$$

y ahora, recordando que la intensidad decrece con el cuadrado de la distancia al foco emisor, $I.r^2 = I'.r'^2$
podemos hallar la distancia r' a la que ß = 30 dB:

$$I' = 10^{-9} = I\,\frac{r^2}{r'^2} = 10^{-6}\,\frac{2^2}{r'^2} \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{4000} = \mathbf{63{,}25\ m}$$

Para hallar la segunda distancia, a la que el sonido es ya imperceptible, recordemos que un sonido se vuelve inaudible cuando su intensidad es I" = 10^{-12} W m^{-2}, de modo que podemos usar de nuevo la caída de la intensidad con el cuadrado de la distancia al foco

$$I.r^2 = I''.r''^2 \quad \Rightarrow \quad I'' = 10^{-12} = I\,\frac{r^2}{r''^2} = 10^{-6}\,\frac{2^2}{r''^2} \quad \Rightarrow \quad r'' = \sqrt{4.10^6} = \mathbf{2000\ m}$$

SEPTIEMBRE 01

PROBLEMA A1.– La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa orientada según el eje X es:

$$\mathbf{y = 0{,}5\ sen\ (6\pi t - 2\pi x)} \qquad \text{(x, y en metros; t en segundos)}$$

Determine:

a) **Los valores de la longitud de onda y de la velocidad de propagación de la onda.**
b) **Las expresiones que representan la elongación y la velocidad de vibración en función del tiempo, para un punto de la cuerda situado a una distancia x = 1,5 m del origen.**
c) **Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la vibración de los puntos de la cuerda.**
d) **La distancia mínima que separa dos puntos de la cuerda que, en un mismo instante, vibran desfasados en 2π radianes.**

La ecuación de propagación de onda que nos dan se corresponde con la conocida onda armónica viajera en el eje X, en sentido positivo,

$$y(x;t) = A\ sen(\omega t - kx) \qquad (1)$$

a) de modo que una sencilla comparación nos da, inmediatamente, los valores de A, ω y k:

$$A = 0{,}5\ m; \qquad \omega = 6\pi\ rad\ s^{-1}; \qquad k = 2\pi\ m^{-1}$$

de los que deducimos con sencillez:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = \mathbf{1\ m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{6\pi}{2\pi} = \mathbf{3\ ms^{-1}}$$

b) Para un punto situado 1,5 m a la derecha del origen, x = 1,5 m, la elongación de la oscilación armónica en función del tiempo es

$$y(t) = 0{,}5\ sen(6\pi t - 2\pi.1{,}5) = 0{,}5\ sen(6\pi t - \pi) \qquad (x\ e\ y <> m;\ t <> s)$$

Nótese que, aunque la fase inicial calculada para ese punto es $\varphi_0 = -3\pi$ rad, en términos prácticos equivale a –π rad, descontando 2π rad: eso no produciría ningún cambio en las elongaciones que obtuviésemos para cualquier valor de t.

Naturalmente, la ley de velocidades para ese punto es la derivada de la elongación:

$$v(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = 3\pi\cos(6\pi t - \pi) \qquad (v <> m/s;\ t <> s)$$

c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de vibración son los mismos para cualquier punto de la cuerda: como sabemos, los máximos de velocidad se alcanzan cada vez que un punto de la cuerda pasa por su posición de equilibrio, en tanto que los máximos de aceleración se tienen en las posiciones extremas de la oscilación de cada punto.

Podemos ver directamente el valor de la velocidad máxima en la ley de velocidades del apartado anterior:

$$v_{max} = \pm A\omega = \mathbf{\pm 3\pi\ m/s}$$

y el de la aceleración máxima es, como recordaremos

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\ 0{,}5.(6\pi)^2 = \mathbf{\pm 18\pi^2\ m/s^2}$$

d) La distancia mínima (en realidad, aquí sobra el adjetivo) entre dos puntos que oscilan con diferencia de fase de 2π rad es, por definición, λ. La ambigüedad con que se dice muchas veces "oscilar en fase", hablando de puntos separados una distancia λ, 2λ, 3λ, .. es quizá la razón de que el enunciado emplee la expresión "distancia mínima". Como sabemos, si dos puntos están separados una distancia λ, la diferencia de fase δφ entre ellos es 2π rad; si están separados una distancia 2λ, entonces δφ = 4π rad; etc.. Por supuesto, en el caso que nos ocupa, la respuesta es λ = **1 m**.

MODELO 02

CUESTIÓN 2.– Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 10^{-6} W.

a) Determine el nivel de intensidad expresado en decibelios a 1 m de la fuente sonora.

b) ¿A qué distancia de la fuente sonora el nivel de intensidad se ha reducido a la mitad del valor anterior?

Dato: La intensidad umbral de audición es $I_o = 10^{-12}$ W m^{-2}

a) Podemos empezar por calcular la intensidad de la onda a una distancia de 1 m de la fuente: eso se consigue, ya que debemos suponer que se trata de una onda esférica, con el cociente de la potencia (energía por unidad de tiempo) emitida por la superficie de una esfera de radio r = 1 m; es decir

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-6}\ W}{4\pi\ m^2} = 7{,}96.10^{-8}\ Wm^{-2}$$

e inmediatamente el nivel de intensidad sonora a 1 m de la fuente,

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{7{,}96.10^{-8}}{10^{-12}} = \mathbf{49\ dB}$$

b) Así que el nivel de intensidad a la distancia r' que buscamos has de ser β' = 24,5 dB. Podríamos proceder en sentido inverso al apartado anterior, hallando I' de

$$\beta' = \frac{\beta}{2} = 24{,}5\ dB = 10\log\frac{I'}{I_0} \quad \Rightarrow \quad \log\frac{I'}{10^{-12}} = 2{,}45 \quad \Rightarrow \quad I' = 10^{2{,}45}.10^{-12} = 2{,}82.10^{-10}\ Wm^{-2}$$

y de ahí, recordando la potencia de la fuente, la distancia pedida:

$$I' = \frac{P}{4\pi r'^2} \quad \Rightarrow \quad 2{,}82.10^{-10} = \frac{10^{-6}}{4\pi r'^2} \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{\frac{10^{-6}}{4\pi.2{,}82.10^{-10}}} = \mathbf{16{,}80\ m}$$

SEPTIEMBRE 02

CUESTIÓN 1.– Se tiene una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa. Si se reduce a la mitad su frecuencia, razone qué ocurre con:

a) el periodo; b) la velocidad de propagación; c) la longitud de onda; d) la amplitud.

a) Frecuencia y periodo son magnitudes inversas. Si la frecuencia se divide por dos, **el periodo se hará doble.**

b) La velocidad de propagación de una onda en una cuerda tensa depende de características físicas del medio: la tensión de la cuerda, T, y su densidad lineal, μ, pero **no depende de la frecuencia de la onda viajera**, de manera que todas las ondas, sea cual sea su frecuencia, viajan en la cuerda con la misma velocidad, $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

c) Recordemos la ecuación $v = \lambda\nu$. Puesto que v no cambia al cambiar la frecuencia, el producto $\lambda\nu$ no cambia: así, si la frecuencia se reduce a la mitad, **la longitud de onda se duplicará**.

d) La amplitud A de una onda es una **magnitud independiente de la frecuencia: no cambiará.** En términos sencillos de entender, la amplitud la determinamos nosotros de forma arbitraria (agitamos la cuerda con la amplitud que deseemos), así como la frecuencia (agitamos la cuerda tan rápido como deseemos), y ambas decisiones son independientes una de otra. Eso sí, ambas influyen de modo cuadrático en la cantidad de energía que transportará la onda.

SEPTIEMBRE 02

CUESTIÓN 4.— Una bolita de 0,1 g de masa cae desde una altura de 1 m, con velocidad inicial nula. Al llegar al suelo el 0,05% de su energía cinética se convierte en un sonido de duración 0,1 s.

a) Halle la potencia sonora generada.

b) Admitiendo que la onda sonora generada puede aproximarse a una onda esférica, estime la distancia máxima a la que puede oírse la caída de la bolita si el ruido de fondo sólo permite oír intensidades mayores que 10^{-8} W/m^2

a) Como sabemos, la energía cinética con que llegará la bolita al suelo es igual a la energía potencial gravitatoria que tiene cuando está a 1 m de altura, ya que parte de velocidad inicial nula y se trata de caída libre. Por tanto, esa energía vale

$$E_c^{suelo} = E_p^{arriba} = mgh = 10^{-4}.9{,}8.1 = 9{,}8.10^{-4}\ J$$

donde la masa m va medida en kg, se ha tomado g ≅ 10 m/s^2 y la energía resultante se mide en J. De esta cantidad, un 0,05% se convierte en energía sonora, de manera que la energía total del sonido que se produce sería

$$E_{sonido} = \frac{0{,}05}{100}.9{,}8.10^{-4} = 4{,}9.10^{-7}\ J$$

y, como la duración del sonido es de 0,1 s, la potencia sonora (energía emitida por unidad de tiempo) es una sencilla división entre energía total emitida, E_{sonido}, y duración del sonido, Δt = 0,1 s:

$$P = \frac{E_{sonido}}{\Delta t} = \frac{4{,}9.10^{-7}\ J}{0{,}1\ s} = \mathbf{4{,}9.10^{-6}\ W}$$

b) La potencia que acabamos de calcular expresa **cuánta energía produce la fuente de la onda en un segundo**. Esa energía se propaga en el medio en la medida en que lo va haciendo la onda sonora, de manera que si nos fijamos en un frente de onda cualquiera, supuesto esférico como dice el enunciado, la **cantidad de energía que debe cruzar el frente de onda en un segundo es la que sale de la fuente en un segundo**, es decir, la potencia con que emite la fuente. Como esa energía debe, además, repartirse entre toda la superficie del frente de onda, **la intensidad (energía que atraviesa el frente de onda por unidad de área y de tiempo) se obtendrá dividiendo la potencia de la fuente por la superficie del frente de onda:**

$$I = \frac{P}{S} = \frac{4{,}9.10^{-6}}{4\pi r^2}\ W/m^2$$

así que la distancia máxima a la que podrá oírse la caída de la bolita será aquella a la que esta intensidad haya bajado hasta los 10^{-8} W m^{-2} que nos proponen como cantidad mínima audible. Igualando, entonces, obtendremos r:

$$I = \frac{4{,}9.10^{-6}}{4\pi r^2} = 10^{-8}\ W/m^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{\frac{4{,}9.10^{-6}}{4\pi.10^{-8}}} = \mathbf{6{,}24\ m}$$

que marca el límite pedido: por debajo de esa distancia, se oirá la caída de la bolita; a esa distancia o más lejos del punto de la caída, no se oirá.

MODELO 03

PROBLEMA B1.— Una onda armónica transversal de frecuencia 80 Hz y amplitud 25 cm se propaga a lo largo de una cuerda tensa de gran longitud, orientada según el eje X, con una velocidad de 12 m/s en su sentido positivo. Sabiendo que en el instante t = 0 el punto de la cuerda de abcisa x = 0 tiene una elongación y = 0 y su velocidad de oscilación es positiva, determine:

a) La expresión matemática que representa dicha onda.
b) La expresión matemática que representa la velocidad de oscilación en función del tiempo del punto de la cuerda de abcisa x = 75 cm.
c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de oscilación de los puntos de la cuerda.
d) La diferencia de fase de oscilación en un mismo instante entre dos puntos de la cuerda separados 37,5 cm.

El enunciado describe una onda sin fase inicial, ya que al tiempo t = 0 el foco de la onda, x = 0, está en la posición de equilibrio y con velocidad máxima positiva. De este modo, la ecuación de propagación de esta onda ha de responder al modelo

$$y(x;t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t - kx) \qquad \text{en las unidades apropiadas}$$

a) Sabemos $A = 0{,}25$ m, del enunciado,

y también que $\omega = 2\pi\nu = 2\pi.80 = 160\pi$ rad/s,

y además $v = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{160\pi}{12} = \frac{40}{3}\pi\ m^{-1}$

así que podemos escribir $\mathbf{y(x;t) = 0{,}25\ sen(160\pi t - \frac{40\pi}{3}x)}$ $\quad x, y <> m;\ t <> s$

b) Entrando en la ecuación de propagación con el valor x = 0,75 m tendremos la ecuación de las elongaciones de ese punto como función del tiempo, es decir, la ley del MAS que describe el movimiento de ese punto de la cuerda. Nos quedará:

$$y(t) = 0{,}25\ \mathrm{sen}(160\pi t - \frac{40\pi}{3}0{,}75) = 0{,}25\ \mathrm{sen}(160\pi t - 10\pi) \qquad y <> m;\ t <> s$$

y, a la vista del resultado, parece que este punto oscila en fase con el foco x = 0, aunque con un retraso de cinco oscilaciones completas, que corresponden a una diferencia de fase de 10π rad. Además, esto nos dice también que en 0,75 m hay cinco longitudes de onda, de modo que tendrá que ser λ = 0,15 m. Disgresiones aparte, como nos piden la velocidad de oscilación de este punto, hemos de derivar la elongación:

$$\mathbf{v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 40\pi\ cos(160\pi t - 10\pi);} \qquad v <> m/s;\ t <> s$$

c) Los valores máximos de velocidad y aceleración son los mismos para todos los puntos de la cuerda, los correspondientes a un MAS de amplitud A = 0,25 m y frecuencia angular ω = 160π rad/s. Se trata de

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm\ 0{,}25.160\pi = \mathbf{\pm 40\pi\ m/s}$$

y

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\ 0{,}25.(160\pi)^2 = \mathbf{\pm 6400\pi^2\ m/s^2}$$

d) Por último, la diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda separados 37,5 cm (nosotros sabemos que eso serían 2,5 λ, así que debería tratarse de 5π rad, pero hemos de hacer los cálculos). Recordemos que la diferencia de fase entre dos puntos del medio es

$$\delta\varphi = k.d = \delta\varphi = k.d = \frac{40\pi}{3}.0{,}375 = \mathbf{5\pi\ rad}$$

como habíamos adelantado.

JUNIO 03

CUESTIÓN 2.— El periodo de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa es de 2.10^{-3} s. Sabiendo, además, que dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase vale $\pi/2$ rad están separados una distancia de 10 cm, calcule:

a) la longitud de onda

b) la velocidad de propagación.

a) El dato relevante para hallar λ es el hecho de que dos puntos consecutivos con diferencia de fase de π/2 rad disten 10 cm. Sabemos que una diferencia de fase como esa corresponde a dos puntos separados por **un cuarto de longitud de onda**, de modo que podríamos concluir inmediatamente que λ = **40 cm**. De un modo más formal, recordando

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda}d$$

con d = 10 cm y Δφ = π/2, podemos despejar λ: $\lambda = \frac{2\pi d}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi.10}{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{40\ cm}$

como habíamos visto ya.

b) Ahora conocemos el periodo, $T = 2.10^{-3}$ s, y la longitud de onda, λ = 40 cm: la velocidad de propagación es inmediata, ya que

$$\lambda = vT \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{40}{2.10^{-3}} = 20000\ cm/s = \mathbf{20\ m/s}$$

SEPTIEMBRE 03

CUESTIÓN 2.— La expresión matemática de una onda armónica es y(x,t) = 3 sen (200πt − 5x + π), estando todas las magnitudes en unidades del SI. Determine:

a) La frecuencia y la longitud de onda.

b) La amplitud y la velocidad de propagación de la onda.

a) La lectura directa de la ecuación de propagación de ondas que nos proponen contiene las respuestas. En efecto, observamos que

$$\omega = 100\pi\ rad/s \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{50\ Hz}$$

del mismo modo que $k = 5\ m^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}4\pi\ m = \mathbf{1{,}26\ m}$

b) La amplitud, leída directamente en la ecuación de propagación, es A = **3 m**

y la velocidad de propagación es también inmediata, $v = \frac{\omega}{k} = \frac{100\pi}{5} = 20\pi = \mathbf{62{,}83\ m/s}$

JUNIO 04

PROBLEMA A1.— Una onda transversal se propaga a lo largo de una cuerda horizontal, en el sentido negativo del eje de abcisas, siendo 10 cm la distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase. Sabiendo que la onda está generada por un foco emisor que vibra con un movimiento armónico simple de 50 Hz y una amplitud de 4 cm, determine:

a) La velocidad de propagación de la onda.

b) La expresión matemática de la onda, si el foco emisor se encuentra en el origen de coordenadas, y en t = 0 la elongación es nula.

c) La velocidad máxima de oscilación de una partícula de la cuerda.

d) La aceleración máxima de oscilación en un punto cualquiera de la cuerda.

a) Como sabemos, la expresión "distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase" alude a la **longitud de onda**, que sería, por tanto, λ = 10 cm (en realidad, como también sabemos, la diferencia de fase entre los dos puntos en cuestión es de 2π rad).

Por otro lado, el foco emite ondas de frecuencia 50 Hz, tal como señala el enunciado. Podemos escribir inmediatamente la velocidad de propagación, que sería

$$v = \lambda\nu = 10\ \text{cm}.\ 50\ \text{Hz} = \mathbf{500\ cm/s} = \mathbf{5\ m/s}$$

b) Tal como se describe la situación en t = 0, parece claro que no hay fase inicial (en rigor, si todo lo que sabemos es que la elongación es nula podría ser $\varphi_0 = \pi$ rad, pero supondremos que se quiere dar a entender $\varphi_0 = 0$ rad). Así, la ecuación de propagación de ondas que nos piden es, recordando que se propaga en sentido negativo, como

$$y(x;t) = A\ \text{sen}(\omega t + kx)$$

donde $\omega = 2\pi\nu = 100\pi$ rad/s y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}2\pi\ \text{cm}^{-1}$

de manera que podemos escribir $y(x;t) = \mathbf{4\ sen(100\pi t + 0{,}2\pi x)}$ x <> cm; t <> s; y <> cm

c) Cualquier partícula de la cuerda lleva a cabo un MAS de frecuencia 50 Hz y amplitud 4 cm. Como sabemos, su velocidad máxima se alcanzará al pasar por el centro de las oscilaciones, y su valor será

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm\ 4.100\pi = \pm\ 1256{,}64\ \text{cm/s} = \mathbf{\pm 12{,}57\ m/s}$$

d) Y la aceleración máxima de las oscilaciones de un punto cualquiera se alcanzará cuando el punto en cuestión se encuentre en la situación de elongación máxima, en los extremos de su oscilación. Su valor será

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\ 0{,}04.(100\pi)^2 = \mathbf{\pm 3947{,}84\ m/s^2}$$

SEPTIEMBRE 04

CUESTIÓN 2.— Una partícula oscila con movimiento armónico simple según el eje Y en torno al origen de coordenadas, originando una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 20 m.s^{-1}, una amplitud de 0,02 m y una frecuencia de 10 Hz. Determine:

a) El periodo y la longitud de onda.

b) La expresión matemática de la onda, si en t = 0 la partícula situada en el origen de coordenadas está en la posición de máxima elongación positiva.

a) Conocido la frecuencia, conocido el periodo $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1\ s}$

y la longitud de onda, con la velocidad de propagación y la frecuencia, $v = \lambda\nu \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{20\ \text{m/s}}{10\ \text{Hz}} = \mathbf{2\ m}$

b) Si la partícula en x = 0 está en la máxima elongación positiva al tiempo t = 0, concluimos que existe una fase inicial de su oscilación de valor π/2 rad, que debemos trasladar a la ecuación de propagación de la onda, a partir de ese punto, a lo largo del eje X. Con los datos disponibles, es inmediato escribir

$$y(x;t) = \mathbf{0{,}02\ sen(20\pi t - \pi x + \frac{\pi}{2})} \qquad \text{(SI)}$$

donde se ha empleado, como es fácil de ver, $\omega = 2\pi\nu = 20\pi$ rad/s y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ \text{m}^{-1}$

JUNIO 05

CUESTIÓN 1.– El nivel de intensidad sonora de la sirena de un barco es de 60 dB a 10 m de distancia. Suponiendo que la sirena es un foco emisor puntual, calcule:

a) El nivel de intensidad sonora a 1 km de distancia.

b) La distancia a la que la sirena deja de ser audible.

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

a) Como sabemos, la intensidad de una onda esférica emitida por un foco puntual decae con el cuadrado de la distancia al foco, según

$$I \sim \frac{1}{r^2}$$

así que, siendo r_1 = 10 m y r_2 = 1 km = 1000 m, y siendo I_1 e I_2 las correspondientes intensidades de la onda a esas distancias del foco, se puede escribir

$$I_1\ r_1^2 = I_2\ r_2^2 \qquad (1)$$

donde conoceríamos r_1, r_2 e I_1 ya que, recordando que el nivel de intensidad sonora es de 60 dB a la distancia r_1 = 10 m, es fácil obtener I_1

$$60\ \text{dB} = 10\log\frac{I_1}{I_0} = 10\log\frac{I_1}{10^{-12}} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{10^{-12}} = 10^6 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

de modo que, volviendo a la ecuación (1), despejamos

$$I_1\ r_1^2 = I_2\ r_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = \frac{I_1\ r_1^2}{r_2^2} = \frac{10^{-6}\,10^2}{1000^2} = 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}$$

y el nivel de intensidad sonora a la distancia de 1 km queda $\beta_2 = 10\ \log\ \frac{I_2}{10^{-12}} = 10\ \log\ \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = \mathbf{20\ dB}$

¿Podríamos haber obtenido este resultado más rápidamente? Sin duda: bastaría fijarnos en que hemos incrementado la distancia a la fuente por un factor 100 (de 10 m a 1000 m), así que habremos decrementado la intensidad por un factor 10^4 (recordemos la dependencia inversa y **cuadrática)**. Por otro lado, debemos saber que, si se divide la intensidad I por 10, la sonoridad ß (o nivel de intensidad sonora, como usa el enunciado) pierde 10 dB; si se divide por 100, la sonoridad pierde 20 dB; etc.: **si disminuye la intensidad I por un factor 10000, entonces la sonoridad ß perderá 40 dB**, así que restarán 20 dB de los 60 dB iniciales.

b) Comenzando por razonar según el último párrafo, deberíamos ser capaces de responder de modo inmediato: a 10 km del foco emisor. Obviamente, habría que justificarlo: para perder los 20 dB a la distancia de 1 km, la intensidad debería dividirse, a partir de ese punto, por 100 (pasando de 10^{-10} a 10^{-12} W/m^2, límite de lo audible). Y si la intensidad se ha dividido por 100, la distancia al foco debe haberse **multiplicado** por 10: habríamos pasado de 1 km a 10 km del foco.

Probablemente nos sentiríamos más cómodos resolviendo esto a golpe de ecuación. En tal caso, responderíamos como sigue: la distancia a la que la sirena deja de ser audible es aquella en que la intensidad de onda se reduzca a $I = I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Llamando R a esa distancia, empleamos (1) para hallarla fácilmente:

$$I_1\ r_1^2 = I_0\ R_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad R = \sqrt{\frac{10^{-6}\,10^2}{10^{-12}}} = \sqrt{10^8} = 10000\ \mathrm{m} = \mathbf{10\ km}$$

JUNIO 05

PROBLEMA B1.– Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda tensa de gran longitud y, por ello, una partícula de la misma realiza un movimiento armónico simple en la dirección perpendicular a la cuerda. El periodo de dicho movimiento es de 3 s y la distancia que recorre la partícula entre posiciones extremas es de 20 cm.

a) ¿Cuáles son los valores de la velocidad máxima y de la aceleración máxima de oscilación de la partícula?

b) Si la distancia mínima que separa dos partículas de la cuerda que oscilan en fase es de 60 cm, ¿cuál es la velocidad de propagación de la onda? ¿cuál es el número de onda?

a) Si la distancia que recorre la partícula entre posiciones extremas es de 20 cm (desde +A hasta —A), parece claro que la amplitud de la onda es A = 10 cm. De otra parte, conocemos el periodo, T = 3 s, así que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}\ \mathrm{rad/s}$$

y esto nos permite escribir la velocidad máxima y la aceleración máxima de la oscilación de la partícula:

$$v_{max} = \pm\ A\ \omega = \pm\ 10\ .\ \frac{2\pi}{3} = \mathbf{\pm\ 20{,}94\ cm/s}$$

$$a_{max} = \pm\ A\ \omega^2 = \pm\ 10\ .\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \mathbf{\pm\ 43{,}86\ cm/s^2}$$

b) Una vez más, se refieren a dos puntos separados por una longitud de onda, λ = 60 cm (y, una vez más, hubiese sido más correcto decir que la diferencia de fase entre ambos es de 2π rad). Podemos hallar muy fácilmente lo que nos piden:

La velocidad de propagación $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{60\ \mathrm{cm}}{3\ \mathrm{s}} = \mathbf{20\ cm/s}$

y el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{60} = \boldsymbol{\frac{\pi}{30}}\ \mathrm{cm^{-1}} = \mathbf{0{,}10\ cm^{-1}}$

SEPTIEMBRE 05

PROBLEMA B1.– Dada la expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa de gran longitud:

$y = 0{,}03 \text{ sen } (2\pi t - \pi x)$ donde x e y están expresados en metros y t en segundos.

a) **¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?**
b) **¿Cuál es la expresión de la velocidad de oscilación de las partículas de la cuerda? ¿cuál es la velocidad máxima de oscilación?**
c) **Para t = 0, ¿cuál es el valor de desplazamiento de los puntos de la cuerda cuando x = 0,5 m y x = 1 m?**
d) **Para x = 1 m, ¿cuál es el desplazamiento cuando t = 0,5 s?**

a) La velocidad de propagación de la onda se obtiene de forma inmediata de la ecuación de propagación, donde puede leerse $k = \pi \text{ m}^{-1}$ y $\omega = 2\pi$ rad/s; de manera que

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = \mathbf{2\ m/s}$$

b) La expresión $y(x;t) = 0{,}03 \text{ sen } (2\pi t - \pi x)$ es, como sabemos, una función que proporciona la **elongación** de las partículas de la cuerda. Tiene dos variables, posición x del punto de la cuerda que interese, e instante de tiempo t que se desee. Esta función puede **derivarse respecto al tiempo t**, obteniéndose así la función velocidad

$$v(x;t) = \frac{\partial y(x;t)}{\partial t} = 0{,}03.2\pi \cos(2\pi t - \pi x) = \mathbf{0{,}06\pi \cos(2\pi t - \pi x)\ m/s}$$

de las partículas de la cuerda. Nótese que se trata de una función de las variables x y t, de modo que nos permite conocer el estado de velocidad instantánea de cualquier partícula de la cuerda (dando a la variable x la posición de la partícula que deseemos), en cualquier momento (danto a la variable t el valor que interese). Obsérvese, además, que hemos calculado la **derivada parcial** de la función y(x;t) respecto a t; esto debe entenderse al tener presente que y es **función de dos variables**, de modo que puede derivarse también respecto a la variable x.

Por lo demás, la velocidad máxima de cualquier partícula puede leerse directamente en la función que acabamos de obtener:

$$v_{max} = \pm\ \mathbf{0{,}06\pi\ m/s}$$

c) Bastará recurrir a la ecuación de propagación de ondas, $y(x;t) = 0{,}03 \text{ sen } (2\pi t - \pi x)$, dando a t el valor t = 0 s y a la variable de posición x los valores que se indican

$$y(0{,}5;\ 0) = 0{,}03 \text{ sen } \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{-0{,}03\ m}$$

$$y(1;\ 0) = 0{,}03 \text{ sen } (-\pi) = \mathbf{0\ m} \qquad \text{(bajando)}$$

Una observación sería ahora pertinente: la ecuación de propagación de una onda en el eje x, del tipo $y(x;t) = A \text{ sen } (\omega t - kx)$, no implica necesariamente que la onda comience en x = 0, ni que lo haga al tiempo t = 0. Hablando de modo genérico, empleamos esa ecuación para referirnos a una onda viajera en el sentido positivo del eje. Por eso, podemos hacer los cálculos de posición de puntos cualesquiera de la cuerda, en cualquier momento, como acabamos de ver.

Ahora bien, si hacemos una interpretación estricta y aceptamos que la onda de la que hablamos tiene su origen en x = 0, al tiempo t = 0, entonces las elongaciones que acabamos de calcular tendrían otro valor:

$$y(0{,}5;\ 0) = \mathbf{0\ m} \qquad ; \qquad y(1;\ 0) = \mathbf{0\ m}$$

ya que la onda, al tiempo t = 0, **no habrá llegado a ninguno de esos puntos** (tarda 0,25 s en llegar al primero, 0,5 s en llegar al segundo), de modo que aún estarán en reposo.

d) En todo caso, la onda llega a x = 1 m precisamente al tiempo t = 0,5 s, de modo que ese punto debería estar justo empezando a oscilar:

$$y(1;\ 0{,}5) = 0{,}03 \text{ sen } (\pi - \pi) = \mathbf{0\ m} \qquad \text{(subiendo)}$$

tal como esperábamos.

SEPTIEMBRE 06

PROBLEMA B1.– Una onda armónica transversal se desplaza en la dirección del eje X en sentido positivo y tiene una amplitud de 2 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determine:

a) **La velocidad de propagación de la onda.**
b) **La fase inicial, sabiendo que para x = 0 y t = 0 la elongación es y = –2 cm.**
c) **La expresión matemática que representa la onda.**
d) **La distancia mínima de separación entre dos partículas del eje X que oscilan desfasadas π/3 rad.**

a) La velocidad de propagación es $v = \lambda\nu = 4 \text{ cm} \cdot 8 \text{ Hz} = \mathbf{32\ cm/s}$

b) La ecuación de propagación, tomando en consideración la existencia de una posible fase inicial, es

$$y(x;t) = 2 \text{ sen } (16\pi t - 0{,}5\pi x + \varphi_0) \qquad \text{x e y en cm, t en s}$$

de modo que, si la elongación para x = 0, al tiempo t = 0, es y = −2 cm, tendría que ser

$$y = -2 \text{ cm} = 2 \text{ sen } \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \varphi_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \mathbf{\pi\ rad}$$

c) Así que la ecuación matemática de propagación de la onda quedaría

$$y(x;t) = \mathbf{2\ sen\ (16\pi t - 0{,}5\pi x + \pi)} \qquad x \text{ e } y \text{ en cm, } t \text{ en s}$$

d) Por último, la distancia entre dos puntos desfasados en π/3 rad. Como sabemos, el desfase entre dos puntos separados una distancia d es

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda}d \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}d \quad \Rightarrow \quad d = \mathbf{0{,}67\ cm}$$

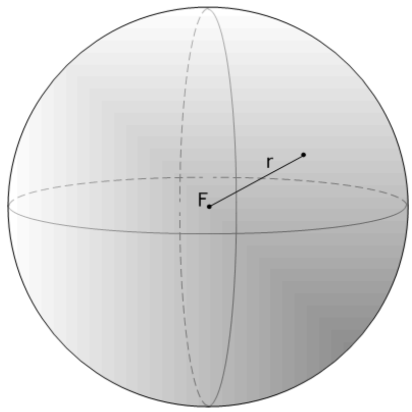
MODELO 07

CUESTIÓN 2.– Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 80 W. Calcule:

a) La intensidad sonora en los puntos distantes 10 m de la fuente.

b) ¿A qué distancia de la fuente el nivel de intensidad sonora es de 130 dB?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}



a) Una vez más, tenemos un foco emisor puntual F, emitiendo con una potencia de 80 J/s. La energía emitida se propaga con la onda esférica en todas direcciones, formando frentes de onda esféricos como el que puede verse en la figura. La intensidad en todos los puntos de este frente de onda de radio 10 m se obtiene de dividir **la potencia** emisora de la fuente puntual **por la superficie del frente de onda**:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{80}{4\pi.10^2} = \mathbf{0{,}064\ W / m^2}$$

b) Si el nivel de intensidad sonora es de 130 dB, la intensidad de la onda será

$$\beta = 130 = 10 \log \frac{I'}{I_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{I'}{I_0} = 10^{13} \quad \Rightarrow \quad I' = 10\ W/m^2$$

de modo que la distancia a la fuente habrá sido tal que

$$I' = \frac{P}{4\pi r'^2} = \frac{80}{4\pi r'^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad r'^2 = \frac{8}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad r' = \mathbf{0{,}80\ m}$$

Naturalmente, podríamos haber resuelto este apartado recordando que la intensidad decae con el cuadrado de la distancia al foco puntual, es decir,

$$I.r^2 = I'.r'^2 \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{\frac{I}{I'}r^2} = \sqrt{\frac{0{,}064}{10}100} = \sqrt{0{,}64} = \mathbf{0{,}80\ m}$$

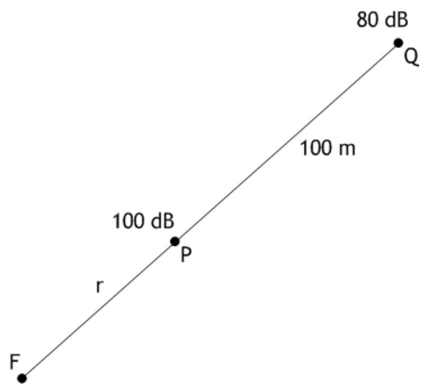
JUNIO 08

PROBLEMA 2.– Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual, siendo la primera de 100 dB a una distancia x del foco, y la segunda de 80 dB al alejarse en la misma dirección 100 m más.

a) Obtenga las distancias al foco desde donde se efectúan las mediciones.

b) Determine la potencia sonora del foco.

Datos: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2



a) La figura muestra la situación que describe el enunciado: en el punto P, a una distancia r de la fuente F, el nivel de intensidad sonora es 100 dB; en el punto Q, a una distancia de 100 m de P (por tanto, 100+r de la fuente), el nivel de intensidad sonora es 80 dB.

Sea I_P la intensidad de la onda en P, e I_Q la intensidad en Q. Ya que hay un descenso de 20 dB al pasar de P a Q, podemos saber que I_P es 100 veces mayor que I_Q,

$$I_P = 100\ I_Q \qquad (1)$$

porque recordamos que, por cada factor 10 que **divide** a la intensidad, el nivel de intensidad sonora **cae** 10 dB: ya que se pierden 20 dB, la intensidad se ha dividido por 10.10 = 100 veces.

Recordemos, además, que la intensidad de una onda esférica es **inversamente proporcional a la distancia a la fuente**, de manera que podemos escribir

$$I_P r_P^2 = I_Q r_Q^2 \qquad (2)$$

donde $r_P = r$ y $r_Q = r + 100$, como muestra la figura. Llevando esto a (2), y empleando (1) a la vez, tenemos

$$100\ I_Q\ r^2 = I_Q\ (r + 100)^2 \quad \Rightarrow \quad 100\ r^2 = (r + 100)^2$$

de donde se obtiene fácilmente

$$r = \mathbf{11{,}11\ m}; \qquad r + 100 = \mathbf{111{,}11\ m}$$

b) Ahora estamos en condiciones de hallar la intensidad en cualquiera de los puntos P o Q. Trabajamos con P, recordando la definición de nivel de intensidad sonora

$$\beta_P = 100\ \text{dB} = 10 \log \frac{I_P}{10^{-12}} \quad \Rightarrow \quad I_P = 10^{-2}\ \text{W/m}^2$$

que sería, como hemos dicho, la intensidad en el punto P, a la distancia r = 11,11 m de la fuente F. Esto implica que la fuente debe emitir con una potencia P tal que

$$I_P = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad 10^{-2} = \frac{P}{4\pi .11{,}11^2} \quad \Rightarrow \quad P = 4\pi .11{,}11^2 .10^{-2} = \mathbf{15{,}51\ W}$$