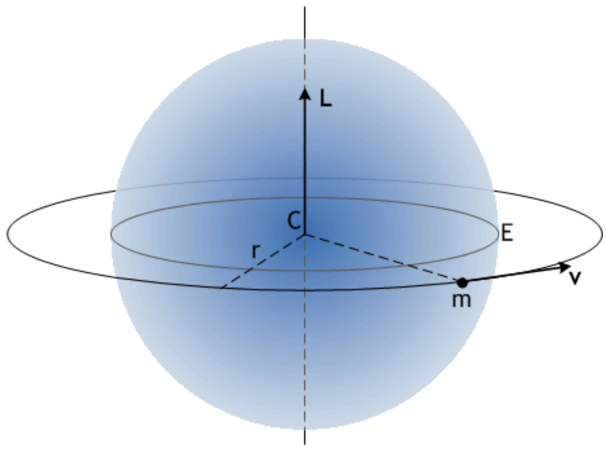
JUNIO 96

A1.– Un satélite de 2000 kg de masa describe una órbita ecuatorial circular alrededor de la Tierra de 8000 km de radio. Determinar:

a) Su momento angular respecto al centro de la órbita.

b) Sus energías cinética, potencial y total.

Datos: **Constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg**



a) Un ejercicio de aplicación de ideas básicas acerca de órbitas circulares. El momento angular del satélite es perpendicular al plano de su órbita, es **constante** (no varía ni su dirección ni su módulo, y sería igualmente constante en una órbita de cualquier tipo, además de las circulares) porque las gravitatorias son **fuerzas centrales**. Su módulo es

$$L = mvr$$

donde m = 2000 kg es la masa del satélite, $r = 8 \cdot 10^6$ m es el radio de su órbita, y la velocidad del satélite en órbita está perfectamente determinada por su radio, según

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

expresión que podemos usar directamente, ya que los datos nos proporcionan los valores de G y de la masa M de la Tierra. Llevando (2) a (1), y operando,

$$L = mr\sqrt{\frac{GM}{r}} = m\sqrt{GMr} = 2000\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 8 \cdot 10^{6}} = \mathbf{1{,}13 \cdot 10^{14}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total del satélite tienen relaciones que facilitan los cálculos. Por ejemplo, la energía cinética es positiva

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{2r} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 2000}{2 \cdot 8 \cdot 10^{6}} = \mathbf{4{,}99 \cdot 10^{10}\ J}$$

y su valor es, en términos absolutos, la mitad de la energía potencial negativa (esto es así para objetos en órbita circular, no para objetos moviéndose en otras condiciones, por ejemplo, verticalmente o describiendo órbitas elípticas). Así que la energía potencial de nuestro satélite es

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -2E_c = \mathbf{-9{,}97 \cdot 10^{10}\ J}$$

La energía total es la suma de las dos anteriores y eso, obviamente, dejará una cantidad igual a la cinética, aunque negativa (de nuevo, esto es así en órbitas circulares):

$$E = E_c + E_p = E_c = \mathbf{-4{,}99 \cdot 10^{10}\,J}$$

SEPTIEMBRE 96

A1.– El vehículo espacial Apolo VIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna, 113 km por encima de su superficie. Calcular:

a) El periodo del movimiento.

b) Las velocidades lineal y angular del vehículo.

c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.

Datos: **Constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; Radio medio lunar, R_L = 1740 km**

a) El radio de la órbita del Apolo VIII sobre la Luna sería r = 1740 + 113 = 1853 km

El periodo de un objeto en órbita circular sobre la Luna está completamente determinado por la masa de la Luna y el radio de la órbita. En efecto, la tercera ley de Kepler para órbitas circulares se escribe

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_L}r^3$$

así que resulta inmediato calcular

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_L}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1853 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}} = \mathbf{7153{,}05\ s = 1{,}99\ h}$$

b) La velocidad angular, a partir del periodo, en un giro uniforme como este

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{7153{,}05\ \text{s}} = \mathbf{8{,}78 \cdot 10^{-4}\ rad/s}$$

y la velocidad lineal, a partir de ω, $v = \omega\, r = 8{,}78.10^{-4}\ .\ 1853.10^3 =$ **1627,66 m/s = 1,63 km/s**

c) La velocidad de escape a la atracción lunar se obtiene discutiendo el valor de la energía mecánica, suma de energía cinética y energía potencial, del satélite. Hay que recordar que, para poder alejarse indefinidamente de la Luna, el Apolo VIII necesitaría una energía total igual, como mínimo, a 0 J. De hecho, con la velocidad de 1,63 km/s calculada en el apartado anterior, la energía total del Apolo VIII es negativa, como es fácil de comprobar y tal como debe ser, ya que se trata de un objeto **ligado** a la Luna.

Sin embargo, con más velocidad, podría escapar. Para ello, su energía debería ser, como hemos dicho, mayor o igual que 0 J. Por tanto, llamando v_e a la velocidad de escape desde esa órbita, las cuentas serían

$$E = E_C + E_p = \frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M_L m}{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{r}} = \sqrt{\frac{2.6{,}67.10^{-11}.7{,}36.10^{22}}{1853.10^3}} = \mathbf{2301{,}86\ m/s = 2{,}30\ km/s}$$

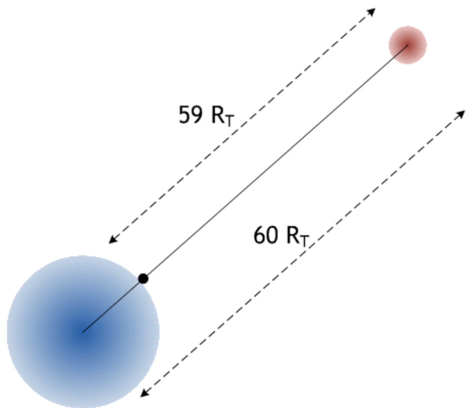
como mínimo.

JUNIO 97

C1.– a) Compara las fuerzas de atracción gravitatoria que ejercen la Luna y la Tierra sobre un cuerpo de masa m que se halla situado en la superficie de la Tierra. ¿A qué conclusión llegas?
b) Si el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es de 100 kp, ¿cuál sería el peso de ese mismo cuerpo en la superficie de la Luna?

Datos: **La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna.**
La distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es de 60 radios terrestres.
El radio de la Luna es 0,27 veces el radio de la Tierra.

a) La conclusión parece obvia incluso antes de empezar: para un cuerpo situado en la superficie de la Tierra la atracción gravitatoria lunar es despreciable frente a la terrestre. En la figura aparece la situación tal como la describe el enunciado, con el cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre, a una distancia R_T del centro de la Tierra y a una distancia 59 R_T del centro de la Luna.



Como sabemos, la Tierra y la Luna se comportan como masas puntuales para un objeto como m; de este modo, las fuerzas de atracción gravitatoria que nos piden son:

Fuerza gravitatoria terrestre $\qquad F_T = G\,\dfrac{M_T m}{R_T^2} \qquad (1)$

que sería lo que generalmente llamamos **peso** del cuerpo m, y su valor acabaría siendo 9,8 m, ya que el valor de g terrestre en la superficie es el conocido 9,8 N/kg.

Fuerza gravitatoria lunar $\qquad F_L = G\,\dfrac{M_L m}{(59R_T)^2} \qquad (2)$

así que podemos hacer la comparación que nos piden simplemente dividiendo ambas fuerzas, (1) partido por (2):

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{G\,\dfrac{M_T m}{R_T^2}}{G\,\dfrac{M_L m}{(59R_T)^2}} = \frac{\dfrac{M_T}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{(59R_T)^2}} = \frac{\dfrac{81M_L}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{(59R_T)^2}} = 81.59^2 = \mathbf{281961}$$

para comprobar que la fuerza gravitatoria terrestre es casi trescientas mil veces mayor que la lunar: ésta última es completamente despreciable.

b) Ahora debemos suponer al cuerpo, cuyo peso en la Tierra es 100 kp, **sobre la superficie lunar**. En este sitio, la fuerza gravitatoria dominante es la atracción lunar, que se escribiría

$$F_L = G\,\frac{M_L m}{R_L^2} \qquad (3)$$

de manera que podemos comparar ahora el peso del cuerpo cuando se halla en la superficie terrestre, dado por (1) y de valor 100 kp, con el peso cuando se encuentra en la superficie lunar, dado por (3):

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{100\ kp}{F_L} = \frac{G\,\dfrac{M_T m}{R_T^2}}{G\,\dfrac{M_L m}{R_L^2}} = \frac{\dfrac{M_T}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{R_L^2}} = \frac{\dfrac{81M_L}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{(0{,}27\ R_T)^2}} = 81.0{,}27^2 = 5{,}90 \qquad \Rightarrow \qquad F_L = \frac{100}{5{,}90} = \mathbf{16{,}94\ kp}$$

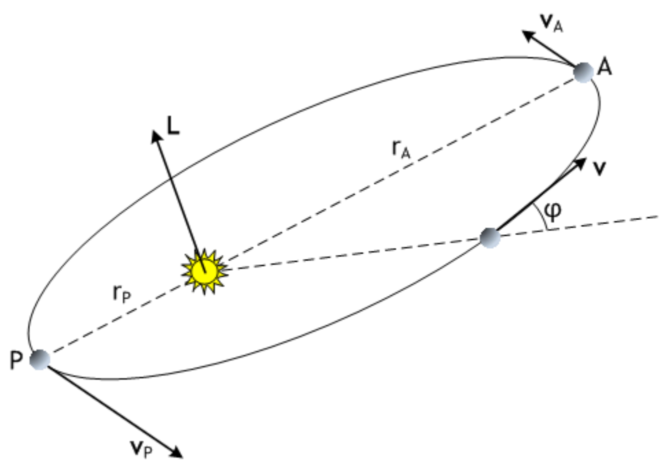
donde, como puede verse, se concluye que los cuerpos pesan en la Luna unas seis veces menos que en la Tierra.

JUNIO 97

A1.– Se considera el movimiento elíptico de la Tierra en torno al Sol. Cuando la Tierra está en el afelio (la posición más alejada del Sol) su distancia al Sol es de $1{,}52.10^{11}$ m y su velocidad orbital es de $2{,}92.10^{4}$ m/s. Hallar:

a) **El momento angular de la Tierra respecto al Sol.**
b) **La velocidad orbital de la Tierra en el perihelio (la posición más cercana al Sol) siendo en este punto su distancia al Sol de $1{,}47.10^{11}$ m.**

Datos complementarios: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg



a) La figura recoge la trayectoria de la Tierra en torno al Sol, y muestra el perihelio P y el afelio A de la misma. El momento angular de la Tierra se escribe

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge M_T\mathbf{v}$$

y resulta, como sabemos, un vector perpendicular al plano de la órbita terrestre. Su módulo puede escribirse de forma muy sencilla **en el afelio** y **en el perihelio**, resultando ser

$$L = M_T\, r_A\, v_A = M_T\, r_P\, v_P \qquad (1)$$

donde r_A y r_P son, como muestra la figura, las distancias de la Tierra al Sol en perihelio y afelio, respectivamente; v_A y v_P son las velocidades de la Tierra en esas posiciones. Las expresiones de (1) no se pueden generalizar a posiciones cualesquiera de la órbita, debido a que los vectores posición y velocidad de la Tierra **sólo son perpendiculares en afelio y perihelio**; en otras posiciones, el módulo del momento angular debería escribirse

$$L = M_T\, R\, v \operatorname{sen} \varphi \qquad (2)$$

donde φ sería el ángulo entre los vectores posición **r** y velocidad **v**. Ese ángulo, en el afelio y en perihelio, es de 90º, así que su seno es 1 y no aparece en las expresiones (1). Por supuesto, tal como sabemos, el momento angular de la Tierra es constante, y el resultado de (1) o (2) será el mismo.

Con los datos, parece obvio que calcularemos el momento angular cuando la Tierra está en el afelio:

$$L = 5{,}98.10^{24} \,.\, 1{,}52.10^{11} \,.\, 2{,}92.10^{4} = \mathbf{2{,}65.10^{40}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

b) Ahora podemos emplear las igualdades (1) para deducir la velocidad v_a de la Tierra en el perihelio. Será

$$M_T\, r_A\, v_A = M_T\, r_P\, v_P \Rightarrow \qquad r_A\, v_A = r_P\, v_P \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \frac{v_P\, r_P}{r_A} = \frac{2{,}92.10^4 .1{,}52.10^{11}}{1{,}47.10^{11}} = \mathbf{3{,}02.10^4\ m/s}$$

SEPTIEMBRE 97

C1.– a) ¿Cómo se define la gravedad en un punto de la superficie terrestre? ¿Dónde será mayor la gravedad, en los Polos o en un punto del Ecuador?
b) ¿Cómo varía la gravedad con la altura? ¿Qué relación existe entre la gravedad a una altura h y la gravedad en la superficie terrestre?

Razona las respuestas.

a) La gravedad en un punto de la superficie terrestre, como en cualquier otro punto, se define como la **fuerza que aplica el campo gravitatorio terrestre sobre una masa de 1 kg colocada en ese punto**. Como consecuencia de la identidad entre los valores de masa inercial y masa gravitatoria, la gravedad en un punto puede definirse también como **la aceleración con que se moverá una masa cualquiera m, colocada en ese punto, bajo la acción de la fuerza gravitatoria.**

En términos cuantitativos, y para puntos exteriores a la Tierra, incluyendo su superficie, la gravedad toma un valor dado por

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

donde M es la masa de la Tierra y r la distancia del punto en cuestión al centro de la Tierra. En rigor, esa expresión es cierta suponiendo que la Tierra es esférica, cosa que realmente no sucede (en eso se basa la diferencia entre Polos y Ecuador); a pesar de ello la empleamos de forma sistemática.

Así, como la Tierra está algo achatada en los Polos, la distancia r_P al centro del planeta en los Polos es algo menor que r_E, la distancia al centro de la Tierra en el Ecuador. Se sigue de (1), entonces que la gravedad en los Polos es algo mayor que en el Ecuador

$$r_P < r_E \quad \Rightarrow \quad G\frac{M}{r_P^2} > G\frac{M}{r_E^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g_P > g_E}$$

b) Parecería que el enunciado se refiere a la altura sobre la superficie terrestre. La expresión (1) muestra g en función de la distancia r al centro de la Tierra. Para escribirla en función de la altura h sobre la superficie de la Tierra debemos escribir r como

$$r = R + h$$

la suma del radio terrestre R más la altura h sobre la superficie. De este modo, g quedaría

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

una expresión de escasa utilidad, ya que el factor relevante es la distancia al centro de la Tierra, y no a su superficie. Sin duda, claro, la gravedad **disminuye con la altura, pero lo hace de forma cuadráticamente inversa a la distancia al centro de la Tierra.**

Por último, consideremos la gravedad en la superficie terrestre, cuando la distancia al centro de la Tierra es r = R, el radio terrestre. La expresión (1) queda entonces

$$g_{Superficie} = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

el conocido valor de la gravedad en la superficie terrestre (el mayor de los posibles valores de (1), como sabemos). La relación entre la gravedad a una altura h sobre la superficie y la gravedad en la superficie no es más que el cociente entre (3) y (4):

$$\frac{g}{g_{Superficie}} = \frac{G\frac{M}{(R+h)^2}}{G\frac{M}{R^2}} = \mathbf{\frac{R^2}{(R+h)^2}}$$

En la aproximación de Tierra plana, cuando **h <<< R**, de forma que R + h ≈ R, el cociente a la derecha en esta relación se convierte en 1, de manera que $g = g_{Superficie} = 9{,}8$ m/s^2 y podemos tomar g como constante.

JUNIO 98

A1.– La nave espacial Lunar Prospector permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determine:

a) **La velocidad lineal de la nave y el período de su movimiento.**
b) **La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.**

Datos: **Constante de Gravitación, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36.10^{22}$ kg; Radio medio lunar, $R_L = 1740$ km**

a) La velocidad lineal de un objeto en órbita de radio r alrededor de la Luna, de masa M_L, se escribe

$$v = \sqrt{G\frac{M_L}{r}}$$

donde el radio r de la órbita es $r = R_L + h = 1740 + 100 = 1840$ km

así que la velocidad lineal queda $v = \sqrt{6{,}67.10^{-11}.\frac{7{,}36.10^{22}}{1840.10^3}} = \mathbf{1633{,}4 \text{ m/s} = 1{,}63 \text{ km/s}}$

y el periodo, sabiendo v $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi.1840.10^3 \text{ m}}{1633{,}4 \text{ m/s}} = \mathbf{7077{,}91 \text{ s} = 1{,}97 \text{ h}}$

b) La velocidad de escape desde la órbita está ligada a la energía mecánica del satélite, que debe ser como mínimo igual a 0 J: en la órbita que hemos descrito, la energía mecánica de la Prospector es negativa. Si se suministrase a la nave la energía necesaria para llegar a 0 J, podría escaparse de la atracción lunar. Su velocidad entonces sería v_e, tal que

$$E = E_C + E_p = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_L m}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{r}} = \sqrt{\frac{2.6{,}67.10^{-11}.7{,}36.10^{22}}{1840.10^3}} = \mathbf{2309{,}98 \text{ m/s} = 2{,}31 \text{ km/s}}$$

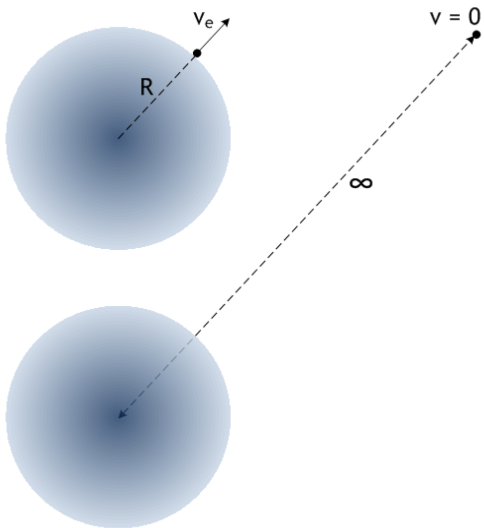
SEPTIEMBRE 98

C1.– a) ¿Cuál es la velocidad de escape de un objeto situado en la superficie de la Tierra?

b) Cómo influye la dirección con que se lanza un objeto desde la superficie de la Tierra en su velocidad de escape?

a) El propósito de este ejercicio parece ser la discusión detallada del concepto velocidad de escape desde la superficie: en principio, se define como tal la **velocidad mínima que ha de imprimirse a un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra para que no retorne a ella.** Nótese que, en ausencia de otros campos gravitatorios, eso implica una de dos cosas:

1) Que el objeto se aleje de la Tierra hasta una distancia infinita, donde se agotaría su velocidad (evidentemente, con más razón si al llegar a distancia infinita aún tiene alguna velocidad, pero hablamos de condiciones mínimas).
2) Que el objeto quede atrapado en una órbita alrededor de la Tierra, de modo que no retorna a la superficie de la misma.



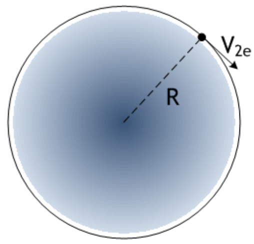
Parece claro que, si el objeto es lanzado desde la superficie de la Tierra **perpendicularmente a ella, en dirección vertical**, sólo puede hablarse de escape si se cumple la primera condición: si el objeto se detiene a una distancia finita de la Tierra, la atracción gravitatoria le hará caer de nuevo sobre la superficie. Como sabemos, la conservación de energía mecánica exige que su valor sea el mismo en el momento de la salida, a una distancia R del centro de la Tierra y con la velocidad v_e, y cuando se detiene (v = 0) a una distancia $r \to \infty$. Esto requiere que

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

donde el segundo miembro es cero porque, a distancia infinita, la energía potencial es cero y, además, suponemos que el objeto llega allí con velocidad cero, de modo que tampoco tiene energía cinética. Despejando v_e, nos queda

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} \qquad (1)$$

la conocida expresión que se conoce como **primera velocidad de escape**, y a menudo simplemente como velocidad de escape. Nótese que la condición (mínima) de escape es, en realidad, disponer de energía mecánica igual a 0 J (como mínimo) o mayor. En este sentido, pueden hacerse los mismos cálculos para hallar la velocidad de escape a la atracción terrestre desde cualquier posición (por ejemplo, desde una órbita de radio r), y el resultado sería exactamente igual, sustituyendo R por r. (Véase más adelante, **MODELO 08 B1**, para más detalles al respecto).



b) La segunda posibilidad que tenemos, como ya hemos dicho, es colocar el objeto en órbita. De todas las posibles, la más "baja" sería la órbita "pegada" a la superficie de la Tierra, con radio orbital r = R. La velocidad orbital que le correspondería sería

$$v_{2e} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (2)$$

así que esa sería la que a menudo se conoce como **segunda velocidad de escape**, y se correspondería con el supuesto de que el objeto sea lanzado desde la superficie de la Tierra, en dirección tangente a la misma, de forma que describiría una órbita justamente sobre la superficie.

Entre estos dos resultados, (1) cuando el lanzamiento es vertical, (2) cuando es tangencial, podemos imaginar direcciones de lanzamiento con inclinaciones variables: las velocidades necesarias estarán comprendidas entre los valores (1) — el máximo — y (2), el mínimo.

Así, el concepto de velocidad de escape desde la superficie terrestre está ligado a la dirección en que se lance el objeto. En general, sin embargo, las preguntas acerca de velocidad de escape se refieren a la primera de las opciones discutidas, y (1) es casi siempre nombrada como velocidad de escape.

SEPTIEMBRE 98

B1.– Si se considera que la Tierra tiene forma esférica, con un radio aproximado de 6400 km, determine:

a) **La relación existente entre las intensidades del campo gravitatorio sobre la superficie terrestre y a una altura de 144 km por encima de la misma.**

b) **La variación de energía cinética de un cuerpo de 100 kg de masa al caer libremente desde la altura de 144 km hasta 72 km por encima de la superficie terrestre.**

Datos: Constante de Gravitación, $G = 6{,}67.\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98\ .\ 10^{24}$ kg

a) La intensidad del campo gravitatorio terrestre, para puntos en el exterior de la Tierra (incluyendo la superficie), se escribe

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

donde r es la distancia al centro de la Tierra. Aplicando (1) podemos obtener la intensidad de campo en la superficie, donde r = R = 6400 Km, y en un punto P a 144 km por encima de la superficie, donde r = R + 144 = 6544 km. Nos quedaría

en la superficie, $g_{Sup} = G\frac{M}{R^2}$; a 144 km de la superficie, $g = G\frac{M}{(R+h)^2}$

de forma que la relación pedida es

$$\frac{g_{Sup}}{g} = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M}{(R+h)^2}} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \frac{6544^2}{6400^2} = \mathbf{1{,}05}$$

y muestra, como vemos, que la gravedad en la superficie es apenas un 5% mayor que a 144 km de altura. Sin embargo, un 5% de error puede ser excesivo en muchos cálculos: estaríamos, en la medida en que así sea, más allá de lo que suele llamarse aproximación de Tierra plana, en la que se toma g = 9,8 m/s^2 como constante, independientemente de la altura.

b) La respuesta a esta pregunta es, sin duda, una aplicación de la conservación de energía mecánica bajo fuerzas gravitatorias (conservativas, por tanto). La cuestión tiene acaso la dificultad de decidir qué energía potencial gravitatoria usamos, de entre las dos alternativas:

$E_p = -G\frac{Mm}{r}$ que es la energía potencial correcta, depende de la distancia al centro de la Tierra

$E_p = mgh$ que es la energía potencial en la aproximación de Tierra plana. Sólo podemos usarla cuando la altura h sobre la superficie es mucho menor que R, el radio de la Tierra.

Se diría que distancias como 144 km o 72 km son bastante pequeñas frente a 6400 km, y que esta última energía potencial sería adecuada, y más fácil de emplear; por otro lado, el apartado anterior ha mostrado una variación de 5% en el valor de g entre la superficie y la altura de 144 km. Así que, ¿cómo decidirse?

Usaremos este problema, entonces, para mostrar los resultados en ambos casos y poder compararlos. Empezamos con la energía potencial correcta, llamando v_i a la velocidad inicial, cuando el cuerpo de 100 kg está a 144 km de altura, y v_f a la velocidad final, cuando está a 72 km de altura:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R+h_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{Mm}{R+h_f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}100\,v_i^2 - G\frac{M100}{(6400+144).10^3} = \frac{1}{2}100\,v_f^2 - G\frac{M100}{(6400+72).10^3}$$

de donde se sigue que la variación de energía cinética (energía cinética final menos energía cinética inicial) es

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^i = G\,M100\left(\frac{1}{6472.10^3} - \frac{1}{6544.10^3}\right) = 6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.100\left(\frac{72}{6472.6544.10^3}\right) = \mathbf{6{,}78.10^7\ J}$$

Y ahora repetimos el cálculo con la energía potencial en la aproximación de Tierra plana. Esta vez sería

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}100\,v_i^2 + 100.9{,}8.h_i = \frac{1}{2}100\,v_f^2 + 100.9{,}8.h_f$$

y así la variación de energía cinética queda ahora

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^i = mgh_i - mgh_f = mg(h_i - h_f) = 100.9{,}8.72.10^3 = \mathbf{7{,}06.10^7\ J}$$

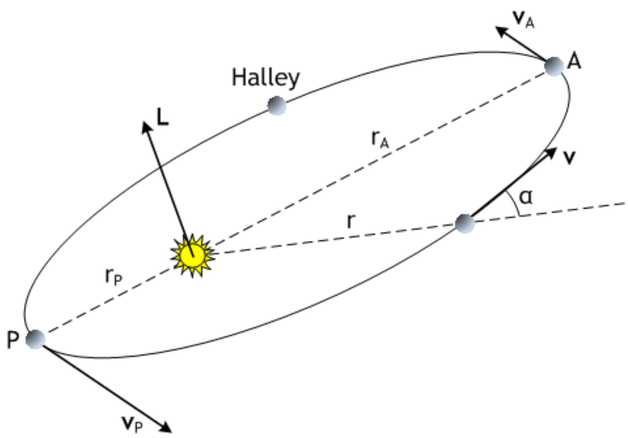
que es un valor notablemente diferente del anterior, concretamente alrededor de un 4%. Se sigue que el resultado correcto para la variación de energía cinética es **$6{,}78.10^7$ J**, y que alturas del orden de 100 km sobre la superficie de la Tierra son ya lo suficientemente grandes como para no usar la aproximación de Tierra plana.

JUNIO 99

C1.– El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a 8,75.107 km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a 5,26.109 km del Sol.

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?

b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?



a) El momento angular de un satélite en una órbita elíptica es, como sabemos, **constante**. Se trata de un vector dirigido perpendicularmente al plano de la órbita, tal como refleja la figura.

Podemos hallar el **módulo** del momento angular en cualquier posición de la órbita, de acuerdo a

$$L = m\, v\, r \,\text{sen}\, \alpha \qquad (1)$$

donde α es el ángulo entre los vectores posición (desde el Sol) y velocidad de Halley. Hay dos posiciones en las que ese ángulo es de 90º: el **afelio** y el **perihelio**, tal como puede verse en la figura. En ellas, la expresión (1) se simplifica y queda como

$$L = m\, v_A\, r_A = m\, v_P\, r_P$$

por supuesto, v_A y v_P son las velocidades de Halley en el afelio y perihelio, r_A y r_P las respectivas distancias al Sol. Se sigue de aquí la igualdad

$$v_A\, r_A = v_P\, r_P \qquad \frac{v_A}{v_P} = \frac{r_P}{r_A} \qquad (2)$$

y, ya que Halley está más cerca del Sol en el perihelio, su velocidad ahí debe ser **mayor** que en el afelio. Esto, como sabemos, no es sino un modo de enunciar la ley de las áreas de Kepler.

En cuanto a la aceleración, también los puntos singulares afelio y perihelio tienen una particularidad interesante respecto a otros puntos de la órbita: en ellos, **la aceleración de Halley es exclusivamente centrípeta**, ya que forma ángulo de 90º con la velocidad. En otras posiciones de Halley la aceleración tiene componentes tangencial y centrípeta.

Así que podemos escribir las aceleraciones en el afelio y en el perihelio según

$$a_A = \frac{v_A^2}{r_A}\,; \qquad a_p = \frac{v_p^2}{r_p}$$

cosa que no podríamos hacer en otros puntos de la órbita. La relación entre las aceleraciones resulta ser, usando (2)

$$\frac{a_A}{a_P} = \frac{\dfrac{v_A^2}{r_A}}{\dfrac{v_P^2}{r_P}} = \frac{v_A^2\, r_P}{v_P^2\, r_A} = \frac{r_P^3}{r_A^3}$$

así que, como $r_P < r_A$, se sigue que la aceleración en el afelio es menor que en el perihelio, $\mathbf{a_A < a_P}$.

b) La energía potencial, bajo la fuerza gravitatoria solar, está dada por la expresión

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

donde M es la masa del Sol, m la masa de Halley y r la distancia entre ambos. Ya que se trata de cantidades negativas, su valor resulta más alto (menos negativo) cuanto mayor sea r. En consecuencia, la energía potencial tiene **su valor máximo en el afelio,** cuando más lejos está Halley del Sol, y presenta **su valor mínimo en el perihelio**, cuando se encuentra más próximo al Sol.

La energía mecánica, como sabemos, es **constante** como consecuencia del carácter conservativo de la fuerza gravitatoria solar. **Tiene el mismo valor en todos los puntos de la órbita**.

JUNIO 99

A1.– Se coloca un satélite meteorológico de 1000 kg en órbita circular, a 300 km sobre la superficie terrestre. Determine:

a) La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.

b) El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre, $g = 9,8$ m s^{-2}; Radio medio terrestre, $R_T = 6370$ km

a) El radio de la órbita circular en torno a la Tierra es $r = R + h = 6370 + 300 = 6670$ km

y la velocidad lineal en una órbita de radio R está dada por $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$ (1)

donde el producto GM se puede obtener recordando que la gravedad en la superficie terrestre es

$$g_{Sup} = G\frac{M}{R^2} = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad GM = 9,8\,R^2$$

así que, entrando en (1), nos queda $v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{9,8R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,8.(6370.10^3)^2}{6670.10^3}} = \mathbf{7721,3 \text{ m/s} = 7,72 \text{ km/s}}$

La aceleración radial (la única, por otro lado) en la órbita circular es, al tiempo, la aceleración de la gravedad en la órbita, de modo que se puede escribir de diversas maneras equivalente

$$a_c = \frac{v^2}{r} = g = G\frac{M}{r^2}$$

Empleando la última expresión, $a_c = g = G\frac{M}{r^2} = \frac{9,8R^2}{r^2} = \frac{9,8.(6370.10^3)^2}{(6670.10^3)^2} = \mathbf{8,94 \text{ m/s}^2}$

Y, finalmente, el periodo, que se puede poner también en función del radio de la órbita, en lo que no es sino un uso de la tercera ley de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{9,8R^2}r^3} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{9,8}} = \frac{2\pi}{6370.10^3}\sqrt{\frac{(6670.10^3)^3}{9,8}} = \mathbf{5427,7 \text{ s} = 1\text{h } 30 \text{ min } 28 \text{ s}}$$

b) El trabajo para poner en órbita el satélite se obtiene de la diferencia entre la energía mecánica que tiene cuando está en la órbita circular y la que tenía cuando se encontraba en la superficie de la Tierra, en reposo. Empezamos calculando la energía mecánica en la órbita, con la expresión bien conocida

$$E_{órbita} = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -G\frac{Mm}{2r} = -9,8R^2\frac{1000}{2r} = -9,8.(6370.10^3)^2\frac{1000}{2.6670.10^3} = -2,98.10^{10} \text{ J}$$

Y ahora hallamos la energía cuando el satélite está en reposo sobre la superficie de la Tierra. Como no tiene energía cinética, sólo hemos de calcular la energía potencial:

$$E_{superficie} = E_p = -G\frac{Mm}{R} = -9,8R^2\frac{1000}{R} = -9,8.R.1000 = -9,8.6370.10^3.10^3 = -6,24.10^{10} \text{ J}$$

así que el trabajo necesario para poner en órbita el satélite resulta

$$W = \Delta E = E_{órbita} - E_{superficie} = -2,98.10^{10} - (-6,24.10^{10}) = \mathbf{3,26.10^{10} \text{ J}}$$

SEPTIEMBRE 99

A1.– Las distancias de la Tierra y de Marte al Sol son respectivamente $149,6.10^6$ km y $228,0.10^6$ km. Suponiendo que las órbitas son circulares y que el periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365 días:

a) ¿Cuál será el periodo de revolución de Marte?

b) Si la masa de la Tierra es 9,6 veces la de Marte y sus radios respectivos son 6370 km y 3390 km, ¿cuál será el peso en Marte de una persona de 70 kg?

Datos: Gravedad en la superficie terrestre $g = 9,8$ m s^{-2}

a) Una aplicación inmediata de la tercera ley de Kepler, según la cual los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas (en el supuesto de órbitas circulares). De este modo,

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_M^2}{r_M^3} \quad \Rightarrow \quad T_M = T_T\sqrt{\frac{r_M^3}{r_T^3}} = 365\sqrt{\frac{228,0^3}{149,6^3}} = \mathbf{686,75 \text{ días}}$$

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta se escribe $g = G\frac{M}{R^2}$, donde M es la masa del planeta y R su radio. Podemos aplicar esto a las intensidades de campo gravitatorio en las superficies de Tierra y de Marte

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ m/s^2\ ; \qquad g_M = G\,\frac{M_M}{R_M^2}$$

y obtener la gravedad marciana dividiendo ambas expresiones

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{g_M}{9{,}8} = \frac{G\frac{M_M}{R_M^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{\frac{M_M}{(3390.10^3)^2}}{\frac{9{,}6\,M_M}{(6370.10^3)^2}} = \frac{6370^2}{3390^2.9{,}6} = 0{,}368 \qquad \Rightarrow \qquad g_M = 0{,}368.9{,}8 = \mathbf{3{,}60\ m/s^2}$$

así que una persona de 70 kg pesará en Marte $P_{Marte} = m\,g_M = 70\ .\ 3{,}60 =$ **252 N**

casi tres veces menos que en la Tierra, donde su peso será de 686 N.

JUNIO 00

A1.– Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcule:

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial del satélite.

b) Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que se escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio medio de la Tierra $R_T = 6{,}37.10^6$ m

a) Hemos de considerar los valores de la energía potencial en la superficie de la Tierra y, más tarde, en la órbita. Por supuesto, la energía potencial debe escribirse

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

ya que alturas de 1200 km sobre la superficie de la Tierra están muy lejos de la aproximación de Tierra plana. De este modo, la energía potencial en la superficie de la Tierra es

$$E_p^{Superficie} = -G\frac{Mm}{R} = -6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}98.10^{24}.600}{6{,}37.10^6} = -3{,}76.10^{10}\ J$$

y la energía potencial en la órbita queda

$$E_p^{órbita} = -G\frac{Mm}{r} = -6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}98.10^{24}.600}{7{,}57.10^6} = -3{,}16.10^{10}\ J$$

En consecuencia, el aumento de la energía potencial, restando su valor en la órbita menos en la superficie:

$$\Delta E_p = E_p^{órbita} - E_p^{Superficie} = -3{,}16.10^{10} - (-3{,}76.10^{10}) = \mathbf{6.10^9\ J}$$

¿Qué hubiese pasado si alguien, alegremente, aplicase la expresión mgh para la energía potencial sobre la superficie de la Tierra, con h = 1200 km y g = 9,8 m/s^2? El resultado habría sido $7{,}06.10^9$ J, muy por encima del valor correcto que hemos hallado: usar mgh aquí sería disparatado.

b) Ahora tenemos que fijarnos en la **energía mecánica** del satélite en su órbita. Como sabemos, está dada por

$$E_{órbita} = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -G\frac{Mm}{2r} = -6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}98.10^{24}.600}{2.7{,}57.10^6} = -1{,}58.10^{10}\ J$$

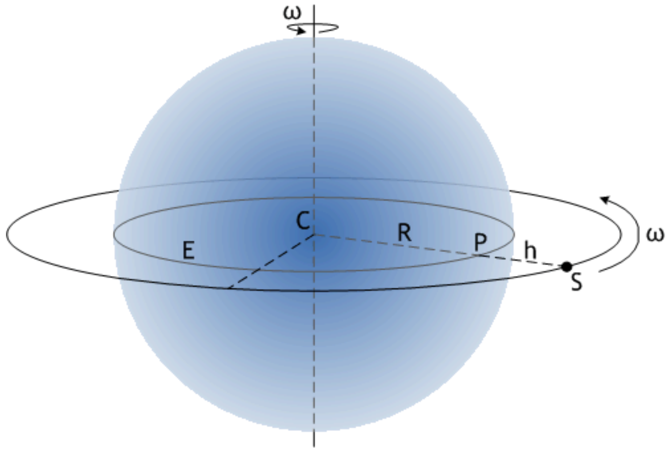
y es negativa, como corresponde a un objeto que está ligado a la Tierra, describiendo una órbita circular a su alrededor. Para escapar al campo gravitatorio terrestre, el satélite precisaría una energía mecánica mínima de 0 J, que le permitiría alejarse indefinidamente de la Tierra. En consecuencia, parece claro que la energía adicional necesaria sería de **$1{,}58.10^{10}$ J**.

SEPTIEMBRE 00

C1.– a) ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?

b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encontrará el satélite citado en el apartado anterior?

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2};
Radio medio de la Tierra = $6,37.10^6$ m



a) La discusión del satélite geoestacionario en una órbita ecuatorial se plantea en cualquier listado de problemas sobre gravitación terrestre: un clásico donde los haya.

La figura intenta reflejar lo que sucede: el satélite S se encuentra en órbita a una altura h sobre la superficie, en el plano ecuatorial terrestre y girando con una velocidad angular ω igual a la de rotación de la Tierra sobre sí misma, alrededor del eje que pasa por los Polos. De esta manera, el satélite se encuentra siempre sobre el mismo punto P de la superficie terrestre, ya que Tierra y satélite giran de modo sincronizado.

Obviamente, esto significa que el satélite, como la Tierra, debe completar una vuelta cada día; es decir, ambos tienen un periodo de giro T = 24 h.

Por lo tanto, la velocidad angular (el término frecuencia angular del enunciado se refiere a ω) valdrá

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24.60.60} = \mathbf{7{,}27.10^{-5}\ rad/s}$$

b) El radio de la órbita del satélite sería la suma del radio terrestre, R, y la altura h de la órbita sobre la superficie de la Tierra, r = R + h. La velocidad lineal de un satélite en órbita depende, como sabemos, del radio de su órbita

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (1)$$

de manera que el satélite **se mantiene en la órbita, de forma estable, si tiene exactamente esa velocidad**. Es fundamental, en este sentido, entender la relación precisa entre radio orbital y velocidad, fijada en (1).

Ahora bien, la velocidad lineal en un giro está relacionada con la velocidad angular, según $v = \omega.r$

de forma que (1) se puede poner

$$v = \omega r = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{G\frac{M}{r^3}} \qquad (2)$$

que establece para la velocidad angular el mismo requerimiento que para la velocidad lineal: para ocupar de forma estable (lo llamamos **órbita estacionaria**) una órbita de radio r hay que tener precisamente la velocidad angular ω dada por (2), ni más ni menos.

En consecuencia, si la velocidad angular de nuestro satélite es conocida, podemos hallar su radio orbital:

$$\omega = 7{,}27.10^{-5}\ rad/s = \sqrt{G\frac{M}{r^3}} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{G\frac{M}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}8R^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{9{,}8.(6{,}37.10^6)^2}{(7{,}27.10^{-5})^2}} = \mathbf{42207{,}62\ km}$$

y la altura de la órbita sobre la superficie, restando el radio terrestre, quedará

$$h = r - R = 42207{,}62 - 6370 = \mathbf{35837{,}62\ km}$$

que es un valor notable, unas 5,5 veces el radio terrestre. Ya que este es un ejercicio que aparece reiteradamente, no sobraría acordarse del resultado obtenido.

SEPTIEMBRE 00

A1.– Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averiguar:

a) La velocidad del satélite.

b) Su energía mecánica.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre, g = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra, R = 6,37.10^{6} m

a) Podemos encontrar con facilidad el radio de la órbita, puesto que conocemos la expresión de la aceleración de la gravedad — la intensidad del campo gravitatorio — debida a la Tierra. Se trata de

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

y depende, como sabemos, de la distancia r al centro de la Tierra. En la superficie, cuando r = R, la gravedad tiene el conocido valor 9,8 m/s^2. Como nos dicen que en la órbita del satélite la gravedad tiene la mitad de este valor, sabemos que g allí arriba vale 4,9 m/s^2; de ahí, con (1), nos resultará sencillo hallar r:

$$4,9 = G\frac{M}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{G\frac{M}{4,9}} = \sqrt{\frac{9,8R^2}{4,9}} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = 9,01.10^6 \text{ m}$$

Ahora, conocido el radio orbital, podemos hallar cualquier cosa: como sabemos, todo depende de r.

Así, por ejemplo, la velocidad lineal del satélite es

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{9,8R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,8.(6,37.10^6)^2}{9,01.10^6}} = \mathbf{6643,39\ m/s = 6,64\ km/s}$$

b) Y del mismo modo, la energía mecánica, que depende también de r. Su valor es

$$E = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -G\frac{Mm}{2r} = -\frac{9,8R^2m}{2r} = -\frac{9,8.(6,37.10^6)^2.200}{2.9,01.10^6} = \mathbf{-4,41.10^9\ J}$$

negativo, como corresponde a un satélite en órbita cerrada alrededor de la Tierra.

MODELO 01

C1.– Determine la relación que existe entre la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular en torno a un planeta y su energía potencial.

La velocidad de un satélite en órbita circular de radio r, alrededor de un planeta de masa M, es

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (1)$$

de modo que la energía cinética del satélite es $\quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mG\frac{M}{r} = G\frac{Mm}{2r} \qquad (2)$

y es **constante**. Es un buen momento para recordar que la velocidad (1) es correcta en una **órbita circular**, caso particular sencillo: finalmente, se trata de un **giro uniforme**. En una órbita elíptica, (1) deja de ser aplicable, y la velocidad del satélite es variable, de forma que su energía cinética no está dada por (2); obviamente, no es constante. Por suerte, estamos tratando con una órbita circular.

La energía potencial del satélite (con más rigor, la energía potencial del sistema planeta—satélite) está dada por

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \qquad (3)$$

de manera que, como la distancia r del satélite al planeta es siempre la misma, la energía potencial es también **constante**, y una sencilla inspección de (2) y (3) revela que su valor es doble, pero negativo, que el de E_c. Así de sencillas son las cosas en una órbita de este tipo. La expresión (3) es correcta siempre, sea cual sea la órbita, **pero es constante sólo si la órbita es circular**, por razón obvia.

La energía mecánica es la suma de cinética y potencial: siendo ambas constantes, la energía mecánica lo será también, de forma trivial. Su valor es

$$E = E_c + E_p = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r} \qquad (4)$$

negativo, e igual a la energía cinética cambiada de signo. También es, evidentemente, la mitad de la energía potencial. Una vez más, como ha sucedido con (2), esta expresión sólo es válida en órbitas circulares.

En órbitas cónicas (círculos, elipses, parábolas, hipérbolas), de forma general, la energía mecánica es **constante**, ya que esto es una consecuencia de que las fuerzas gravitatorias son siempre **conservativas**. Pero, salvo que la órbita sea circular, no se puede emplear ni (2) ni (4). Cuando se trata de órbitas elípticas, la expresión (4) para la energía total puede emplearse convirtiéndola en

$$E = -G\frac{Mm}{2a} = Cte$$

donde a es el semieje mayor de la órbita, que es fácil de conseguir si se tienen las distancias al planeta en el afelio y en el perihelio.

Del mismo modo, el momento angular de un satélite siempre es **constante**, ya que eso es consecuencia de que la fuerza gravitatoria ejercida por el planeta es **central**. Sin embargo, la expresión

$$L = mvr \qquad (5)$$

empleada frecuentemente para calcular su módulo, es correcta en una órbita circular y no lo es, en cambio, en otras cónicas. Para el caso de órbitas elípticas, como hemos discutido en alguna otra ocasión, (5) es válida en el afelio y en el perihelio.

MODELO 01

A1.– El periodo de revolución del planeta Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su correspondiente órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determine:

a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas.

b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus respectivas órbitas.

a) La tercera ley de Kepler, la llamada ley de los periodos de revolución, es la respuesta inmediata a esta sencilla cuestión. La ley, para órbitas circulares, dice que **los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas.**

En términos prácticos, la expresión matemática de la ley es $T^2 = A.r^3$ (1)

donde T es el periodo de rotación de un planeta y r su radio de giro. La constante A es, en eso consiste la esencia de la ley, la misma para todos los objetos que orbitan alrededor del Sol. De hecho, su valor es

$$A = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad (2)$$

siendo M la masa del Sol. Así, el valor de A depende únicamente de la masa del objeto central alrededor del que se orbita. Así, para satélites que giran alrededor de la Tierra, la masa M que aparece en (2) sería la de la Tierra.

La aplicación de (1) resuelve la primera pregunta. Sean T_T y T_J los periodos de rotación de Tierra y Júpiter, respectivamente; sus radios orbitales alrededor del Sol serán r_T y r_J. La ley (1), escrita para cada uno, es

$$T_T^2 = A r_T^3 \quad (3); \qquad T_J^2 = A r_J^3 \quad (3)$$

y, dividiendo miembro a miembro $\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{A r_J^3}{A r_T^3} \Rightarrow \frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{r_J^3}{r_T^3}$

así que basta acudir al enunciado para resolver $\frac{r_J^3}{r_T^3} = 144 \Rightarrow \mathbf{r_J = \sqrt[3]{144}\, r_T} \Rightarrow \mathbf{r_J = 5{,}24\, r_T}$

b) La aceleración de un planeta en órbita circular tiene una doble significación: de un lado, es la aceleración centrípeta en un giro uniforme

$$a = a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (4)$$

pero también se trata de la aceleración de la gravedad (intensidad del campo gravitatorio) solar en la órbita, que se escribe

$$a = g = G\frac{M}{r^2} \qquad (5)$$

donde M es la masa del Sol. Las expresiones (4) o (5) pueden usarse de forma alternativa; en realidad, la buena comprensión de esta identidad es la clave de la discusión de una órbita circular.

En nuestro caso, (5) resolverá de forma sencilla la razón que nos piden; para ello, escribimos los valores de g en cada una de las órbitas (g_T en la órbita terrestre, g_J en la joviana) y dividimos miembro a miembro:

$$\frac{g_T}{g_J} = \frac{G\frac{M}{r_T^2}}{G\frac{M}{r_J^2}} = \frac{\frac{1}{r_T^2}}{\frac{1}{r_J^2}} = \frac{r_J^2}{r_T^2}$$

así que, usando el resultado del apartado anterior para la relación entre los radios de las órbitas

$$\frac{g_T}{g_J} = \frac{r_J^2}{r_T^2} = 5{,}24^2 = \mathbf{27{,}47}$$

deducimos que la gravedad solar es 27,47 veces más intensa en la órbita de la Tierra que en la de Júpiter.

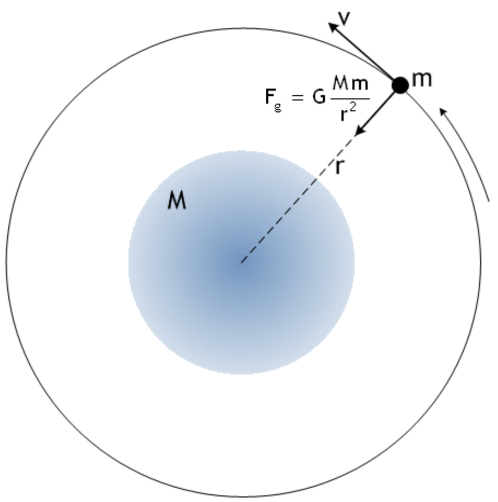
JUNIO 01

C1.– En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determine:

a) **La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra y del radio de la órbita.**

b) **La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.**

Un satélite en órbita circular en torno a la Tierra describe un **giro uniforme**: esto es una consecuencia de la ley de las áreas aplicada a esta trayectoria sencilla (para barrer áreas iguales en tiempos iguales, cuando se describe una órbita circular, hay que moverse con velocidad constante).



La única fuerza que actúa sobre el satélite, la de atracción gravitatoria terrestre, **ha de ser una fuerza centrípeta**, exclusivamente dedicada a **variar la dirección de la velocidad**, y no su módulo.

La fuerza centrípeta necesaria sobre un objeto de masa m, girando con velocidad constante v en una trayectoria circular de radio r, es la conocida expresión

$$F_c = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \qquad (1)$$

y debe estar dirigida, como es bien sabido, hacia el centro de giro. En la situación de un satélite en órbita circular terrestre, la fuerza gravitatoria sobre el satélite está dada por Newton,

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (2)$$

de modo que esta fuerza gravitatoria tiene que cumplir el papel de fuerza centrípeta necesaria para que exista giro del satélite. Dicho en términos muy sencillos, necesitamos una fuerza centrípeta como la que muestra (1), y lo que tenemos es la fuerza gravitatoria que aparece en (2): si el satélite ha de mantenerse en órbita estable, debe ser igual la fuerza que necesitamos, (1), que la que tenemos, (2). Nótese que no hablamos de dos fuerzas — la única fuerza que hay aquí es la gravitatoria, que aparece en la figura —, sino de que esta fuerza tiene que asumir el papel de fuerza centrípeta.

Así, (1) debe ser igual a (2). ¿Qué pasa si esto no sucede? Pues que el satélite no se mantiene en la órbita de radio r:

Si (1) > (2), la fuerza gravitatoria es demasiado pequeña y no es capaz de retener al satélite, que se alejará de la Tierra, quizá a otra órbita de mayor tamaño.

Si (2) > (1), hay demasiada fuerza gravitatoria y el satélite se acerca a la Tierra, quizá a una órbita de radio menor.

El mantenimiento de la órbita estacionaria de radio requiere que (1) = (2), de forma exacta. De esa identificación se sigue

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (3)$$

la muy empleada expresión de la velocidad exacta que debe tener un satélite en una órbita circular de radio r; por supuesto, M es la masa de la Tierra y, como puede verse, no importa la masa m del satélite: **para estar en esa órbita, cualquier satélite debe tener precisamente esa velocidad**.

a) Como consecuencia inmediata, la energía cinética del satélite de masa m en órbita circular de radio r resulta ser

$$\mathbf{E_c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M}{r}}\right)^2 = \mathbf{G\frac{Mm}{2r}} \qquad (4)$$

b) La energía potencial de una pareja de masas M y m, situadas a una distancia r, viene dada por

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \qquad (5)$$

y frecuentemente, cuando tratamos situaciones como la que nos ocupa, solemos referirnos a ella en términos de **energía potencial del satélite**: eso está mal expresado, ya que toda energía potencial se refiere, en los términos más simples, siempre a pares de objetos y no a objetos individuales. Del modo que sea, se trata de una costumbre muy extendida y que aceptaremos como un vicio de lenguaje.

La energía mecánica del satélite sería entonces la suma de las energías cinética (del satélite, con toda propiedad) expresada en (4) y potencial (del par Tierra—satélite) expresada en (5). Deberíamos recordar una vez más que (5) es una expresión válida en cualquier tipo de órbita, pero (4) **lo es únicamente en órbitas circulares**. La energía mecánica resulta

$$\mathbf{E} = E_c + E_p = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = \mathbf{-G\frac{Mm}{2r}} \qquad (6)$$

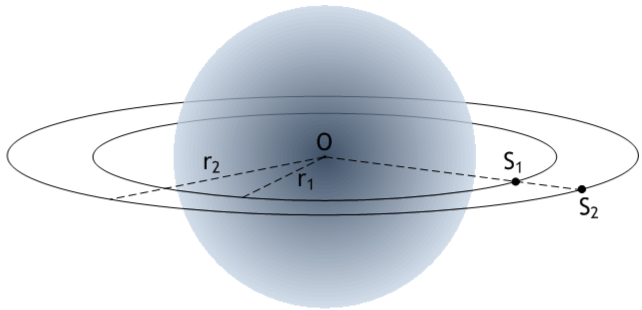
que es, de forma obvia, **la mitad de la energía potencial, $\mathbf{E = \frac{1}{2}E_p = -E_c}$**. Este resultado depende de expresiones como (4), válida en órbitas circulares, de forma que debe usarse en ese tipo de órbitas.

JUNIO 01

A1.– Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios r_1 = 8000 km y r_2 = 9034 km respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado:

a) ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?

b) ¿Qué relación existe entre los períodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado seis vueltas, desde el instante inicial?



a) La figura muestra la situación descrita en el enunciado: los satélites S_1 y S_2 describen órbitas alrededor de la Tierra, girando en el mismo plano con radios r_1 y r_2. El instante inicial a que refiere el enunciado es el que se representa, estando las posiciones de los satélites alineadas con el centro O de la Tierra.

Como sabemos, la velocidad lineal de un satélite en órbita circular sobre la Tierra está dada por

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (1)$$

donde M es la masa de la Tierra y r el radio de la órbita. Aplicando (1) a los satélites S_1 y S_2 podemos encontrar la relación existente entre sus velocidades orbitales:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{G\frac{M}{r_1}}}{\sqrt{G\frac{M}{r_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{r_1}}}{\sqrt{\frac{1}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{9034}{8000}} = \mathbf{1{,}06}$$

de modo que $\mathbf{v_1 = 1{,}06\, v_2}$, la velocidad del satélite más bajo es ligeramente mayor que la del satélite más lejano.

b) La respuesta es la tercera ley de Kepler, relativa a los periodos de revolución: sus cuadrados son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas, si es que son circulares. De manera que, conociendo los radios, no tenemos ninguna dificultad

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{9034^3}{8000^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{9034^3}{8000^3}} = \mathbf{1{,}2}$$

en hallar la relación entre los periodos, que es $\mathbf{T_2 = 1{,}2\, T_1}$, casi exactamente. Cuando el satélite S_1 haya girado seis veces, desde el instante representado en la figura, habrá pasado un tiempo

$$t = 6T_1$$

y, en ese tiempo, el número de vueltas dado por S_2 se obtendría dividiendo t por el periodo de giro T_2

$$\text{Número de vueltas de } S_2 = \frac{t}{T_2} = \frac{6\,T_1}{T_2} = \frac{6\,T_1}{1{,}2\,T_1} = \mathbf{5}$$

resultando, como se ve, **5 vueltas completas.** En consecuencia, **cuando S_1 haya completado seis vueltas la situación volverá a ser exactamente la misma que en el instante representado en la figura, con los satélites alineados con el centro O de la Tierra**, aunque S_2 habrá girado una vuelta menos.

SEPTIEMBRE 01

C1.– Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3200 m/s:

a) ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?

b) ¿En qué posición se alcanza?

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra = $6{,}37.10^6$ m

a) Una velocidad de 3200 m/s es bastante grande, casi un tercio de la velocidad de escape de la Tierra. Por consiguiente, **no puede discutirse este problema desde la aproximación de Tierra plana, usando mgh como medida de la energía potencial**, ya que el proyectil subirá hasta una altura h en absoluto despreciable frente al radio terrestre R.

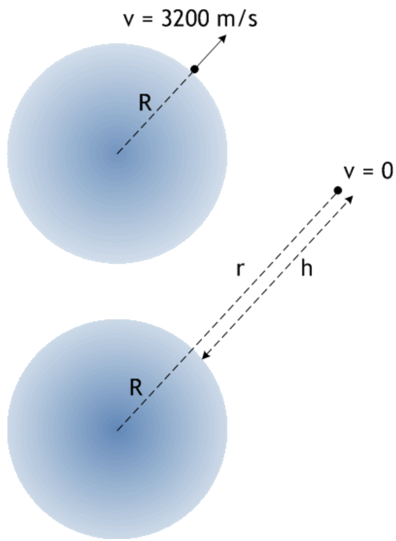
Escribiremos entonces la energía mecánica del proyectil en la forma

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{constante}$$

donde M es la masa de la Tierra, m la del proyectil, v es la velocidad de éste y r su distancia al centro de la Tierra. Como sabemos, **la energía mecánica se conserva constante**, ya que la fuerza gravitatoria terrestre es conservativa.

Así, escribiremos que la energía mecánica en el momento de salir desde la superficie terrestre, con la velocidad de 3200 m/s, debe valer lo mismo que la energía mecánica en el lugar donde el proyectil, al alcanzar su altura máxima sobre la superficie, se detenga. Esto es:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m.0^2 - G\frac{Mm}{r}$$



de modo que, en la posición de máximo alejamiento de la Tierra, toda la energía es potencial, **y ahí es donde toma su máximo valor**. Podemos hallar la energía mecánica en el momento de salir, puesto que conocemos todos los datos necesarios: el producto GM, ya que el enunciado no facilita el valor de la masa M de la Tierra, ni tampoco el valor de la constante G, se consigue recordando que el valor de la intensidad de campo gravitatorio **en la superficie de la Tierra** es el valor 9,8 m/s^2

$$g = 9{,}8 = G\frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad GM = 9{,}8R^2$$

así que la energía mecánica en el momento del lanzamiento se escribe

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{9{,}8R^2m}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - 9{,}8Rm$$

y su valor será

$$\frac{1}{2}mv^2 - 9{,}8Rm = \frac{1}{2}10.3200^2 - 9{,}8.6{,}3.10^6.10 = \mathbf{-5{,}73.10^8\ J}$$

de manera que la energía potencial en el punto de máximo alejamiento, donde **toda la energía es potencial**, será

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = \mathbf{-5{,}73.10^8\ J} \qquad (1)$$

A menudo nos parece raro un resultado como este, estando como estamos acostumbrados a emplear la energía potencial gravitatoria mgh, en la aproximación de Tierra plana: con una fórmula como esta, las energías potenciales por encima de la superficie terrestre son positivas, y eso es lo que hemos visto casi siempre. Pero no podemos usarla aquí, ya que nuestro proyectil se aleja demasiado de la superficie terrestre, y no podemos aceptar que g = 9,8 m/s^2 como valor constante a medida que nos alejamos de la superficie; de hecho, como sabemos, g decrece con el **cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.**

Las dos expresiones para la energía potencial terrestre tienen varias diferencias, y una de ellas es el lugar donde la energía potencial es cero. La tabla que sigue muestra ese y otros aspectos de interés en la comparación entre ambas:

	¿Qué necesitamos saber?	¿Dónde se puede aplicar?	¿Dónde toma el valor 0?
$E_p = -G\frac{Mm}{r}$	r es la distancia al centro de la Tierra	En cualquier punto por encima de la superficie terrestre, sin límite de alejamiento.	A distancia infinita del centro de la Tierra.
E_p = mgh	h es la altura sobre la superficie terrestre	En las inmediaciones de la superficie, a una altura h tal que h <<< R.	En la superficie terrestre.

Hay algo, sin embargo, que sí podemos hacer: podemos cambiar el cero de cualquier energía potencial, ya que podemos sumarle cualquier constante. Recuérdese, en este sentido, que la energía potencial asociada a cualquier fuerza conservativa está indeterminada.

La energía potencial del proyectil en el momento en que es lanzado desde la superficie de la Tierra es

$$E_p^{Superficie} = -G\frac{Mm}{R} = -\frac{9{,}8R^2m}{R} = -9{,}8Rm = -9{,}8.6{,}37.10^6.10 = -6{,}24.10^8\ J \qquad (2)$$

de modo que podemos ver **cuánta energía potencial ha ganado** al subir hasta pararse: se tratará de la diferencia entre el resultado (1), que da la energía potencial arriba, y (2), que da la energía potencial abajo. Eso sería

$$\Delta E_p = -5{,}73.10^8 - (-6{,}24.10^8) = 5{,}1.10^7\ J \qquad (3)$$

y así podríamos manejar una cantidad positiva, en lugar de la negativa que tenemos en (1). Para zanjar cualquier posible duda, resaltemos que la única diferencia entre (1) y (3) está en el lugar donde se tiene la energía potencial cero: para (1), está en infinito; para (3), en la superficie de la Tierra.

b) Para saber en qué posición se alcanza la máxima energía potencial basta ir a (1) para despejar r. Recordando que tomamos GM = 9,8 R^2, las cuentas son

$$-G\frac{Mm}{r} = -5{,}73.10^8\ J \quad \Rightarrow \quad r = \frac{9{,}8R^2m}{5{,}73.10^8} = \frac{9{,}8.(6{,}37.10^6)^2.10}{5{,}73.10^8} = \mathbf{6{,}94.10^6\ m}$$

lo que significa una altura sobre la superficie terrestre

$$h = r - R = 6{,}94.10^6 - 6{,}37.10^6 = 5{,}7.10^5 \text{ m} = 570 \text{ km}$$

una cantidad que confirma nuestras precauciones acerca del uso de mgh como energía potencial: de ningún modo se puede decir que 570 km son despreciables frente a 6370 km. A esta altura, la aceleración de la gravedad es

$$g = G\frac{M}{r^2} = \frac{9{,}8R^2}{r^2} = \frac{9{,}8.6{,}37^2}{6{,}94^2} = 8{,}26 \text{ m/s}^2$$

notablemente menor ya que los 9,8 m/s^2 de la superficie. Otra forma de confirmar la magnitud de los errores que cometeríamos sería usar mgh a esa altura

$$mgh = 10 \;.\; 9{,}8 \;.\; 5{,}7.10^5 = 5{,}6.10^7 \text{ J}$$

y comparar este resultado con (3): habríamos cometido un error del orden del 9%, muy por encima de lo que se puede aceptar.

MODELO 02

C1.– a) ¿A qué altitud tendrá una persona la mitad del peso que tiene sobre la superficie terrestre? Exprese el resultado en función del radio terrestre.

b) Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae un cuerpo pesado con mayor aceleración que un cuerpo ligero?

a) El peso de una persona se expresa como P = mg, donde g es la intensidad del campo gravitatorio en el punto en el que se encuentra. Llamemos g_0 y P_0 a la intensidad de campo y el peso correspondiente en la superficie de la Tierra, donde g_0 = 9,8 m/s^2, como sabemos

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \qquad (1)$$

Para que el peso se reduzca a la mitad, la intensidad de campo g deberá ser la mitad de g_0. Eso sucederá a una distancia r del centro de la Tierra tal que

$$g = G\frac{M}{r^2} = \frac{1}{2}g_0 = \frac{1}{2}G\frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = R\sqrt{2}}$$

y si el resultado debe ser expresado en términos de altitud sobre la superficie terrestre, entonces será

$$h = r - R = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1) = \mathbf{0{,}41\,R}$$

b) La respuesta a esta cuestión tiene que ver con la identidad entre la masa inercial de un cuerpo cualquiera y su correspondiente masa gravitatoria. La fuerza que actúa sobre un cuerpo en un campo gravitatorio es

$$P = m_g\, g \qquad (2)$$

donde g es la intensidad de campo en el punto que ocupa el cuerpo y m_g es la **masa gravitatoria** de éste. Esta fuerza acelerará al cuerpo, de acuerdo con la segunda ley de la dinámica de Newton

$$F = m_i\, a \qquad (3)$$

donde F es la fuerza que actúa sobre el cuerpo, en nuestro caso P, y m_i es la **masa inercial** del cuerpo. Escribiendo en (3) el valor de la fuerza P, queda

$$m_g\, g = m_i\, a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_g}{m_i}\, g \qquad (4)$$

como expresión para la aceleración de un cuerpo bajo la acción de la fuerza gravitatoria. Ahora bien, resulta que **el cociente entre las masas gravitatoria e inercial de un cuerpo cualquiera es el mismo siempre**, con independencia del cuerpo que usemos. Este es un hecho experimental, y en última instancia significa que existe algún tipo de relación profunda entre la gravedad y la inercia, que todavía no es bien comprendida.

Con un sistema de unidades adecuado, se puede hacer que el cociente $\frac{m_g}{m_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad m_g = m_i$

de modo que la masa gravitatoria de un cuerpo y su masa inercial tendrían el mismo valor (lo que es bien distinto que decir que serían la misma cosa, si se piensa un poco), y se expresarían de forma común como lo que solemos llamar **masa m del cuerpo**,

$$m = m_g = m_i$$

Evidentemente, y como corolario, la aceleración (4) con que se movería cualquier cuerpo quedaría a = g, fuese cual fuese el cuerpo empleado. Por cierto, la intensidad de campo gravitatorio g en un punto se llama **aceleración de la gravedad** en ese punto por esta razón: resulta que, además de expresar **la fuerza que actuaría sobre 1 kg colocado en ese punto**, también mide **la aceleración con que se movería cualquier objeto ahí situado.**

MODELO 02

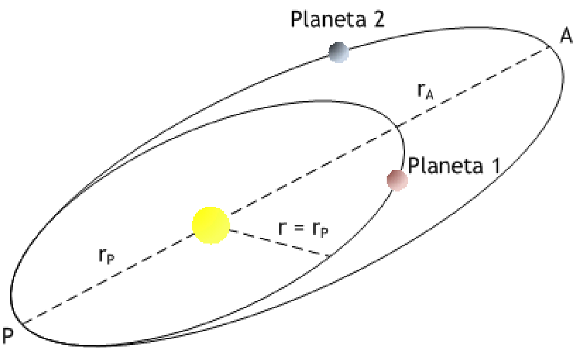
A1.– Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y periodo de 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1,8.10^{11}$ m.

a) ¿Cuál es la masa de la estrella? (0,5 puntos)

b) Halle el periodo de la órbita del planeta 2. (0,5 puntos)

c) Utilizando los principios de conservación del momento angular y de la energía mecánica, hallar la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella. (1 punto)

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}



a) Sea M la masa de la estrella. La tercera ley de Kepler, de los periodos de revolución, se escribe de modo muy sencillo para una órbita circular

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad (1)$$

de manera que, conociendo el radio de la órbita circular del planeta 1, así como su periodo, se despeja M sin mayores dificultades:

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}(2.365.86400)^2}.10^{33} = \mathbf{1,49.10^{29}\ kg}$$

b) Para una órbita elíptica, la tercera ley de Kepler se escribe igual que en (1), sustituyendo el radio de la órbita circular por el **semieje mayor** de la órbita. Esto sería

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \qquad (2)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita del planeta 2. La figura muestra la distancia del planeta 2 a la estrella en el perihelio, $r_P = 10^{11}$ m, y en el afelio, $r_A = 1,8.10^{11}$ m. Es fácil comprender que el semieje mayor, a, se consigue haciendo

$$a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{10^{11} + 1,8.10^{11}}{2} = 1,4.10^{11}\ \text{m}$$

y ahora podemos usar (2), metiendo ahí este valor de a y la masa M de la estrella, calculada previamente. Así obtenemos el periodo del planeta 2:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.1,49.10^{29}}.(1,4.10^{11})^3} = \mathbf{1,04.10^8\ s = 3,31\ años}$$

c) El momento angular L y la energía mecánica $E = E_c + E_p$ son los invariantes de un objeto moviéndose bajo fuerzas gravitatorias. La velocidad lineal, la energía cinética o la energía potencial, que son **constantes en una órbita circular**, no lo son en una órbita elíptica, ni en ninguna otra trayectoria cónica fuera de la circular.

Podemos escribir la energía mecánica del planeta, en cualquier posición, como función de su distancia a la estrella y de su velocidad:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

y el resultado es siempre el mismo: es, como ya hemos dicho, **una constante del movimiento del planeta**. En particular, podemos escribir que la energía mecánica es la misma en el afelio que en el perihelio

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_P} \qquad (3)$$

De otro lado, el momento angular (o, más exactamente, su módulo) se puede escribir de manera sencilla en el afelio y en el perihelio

$$L = mv_A r_A = mv_P r_P \qquad (4)$$

pero no así en otros puntos de la órbita, como ya hemos discutido en alguna ocasión. En cualquier caso, tratamos con los dos puntos singulares A y P, afelio y perihelio. De entre las igualdades (3) y (4) se obtiene la respuesta a la cuestión que nos ocupa. En efecto, de (4)

$$mv_A r_A = mv_P r_P \quad \Rightarrow \quad v_A r_A = v_P r_P \quad \Rightarrow \quad \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1,8.10^{11}}{10^{11}} = 1,8 \quad \Rightarrow \quad v_P = 1,8\,v_A$$

tenemos una sencilla relación entre las velocidades del planeta 2 en su afelio y perihelio. Si esta igualdad se lleva a (3), al tiempo que se simplifica m, queda

$$\frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M}{r_A} = \frac{1}{2}v_P^2 - G\frac{M}{r_P} \quad \Rightarrow \quad v_P^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}) \quad \Rightarrow \quad (1,8\,v_A)^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A})$$

así que, con los valores de M, r_A y r_P que tenemos, el resultado queda

$$(1{,}8\,v_A)^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}) \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2GM}{1{,}8^2 - 1}(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A})} = \sqrt{\frac{2.6{,}67.10^{-11}.1{,}49.10^{29}}{1{,}8^2 - 1}(\frac{1}{10^{11}} - \frac{1}{1{,}8.10^{11}})} = \mathbf{1{,}26.10^4\ ms^{-1}}$$

algo más de 12,5 km/s; un resultado que puede juzgarse por comparación con la velocidad de la Tierra alrededor del Sol, de unos 30 km/s. Son del mismo orden de magnitud, y la mayor velocidad de la Tierra se explica porque la masa del Sol es mayor (unas 13 veces) que la de esta estrella.

JUNIO 02

C1.– Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2.

a) ¿Cuál es su densidad media?

b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?

Dato : Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Por otro lado, suponiendo que la densidad del planeta es constante (o, lo que es lo mismo, suponiendo que tiene simetría esférica y empleando su **densidad media** ρ), la masa M se escribe

$$M = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

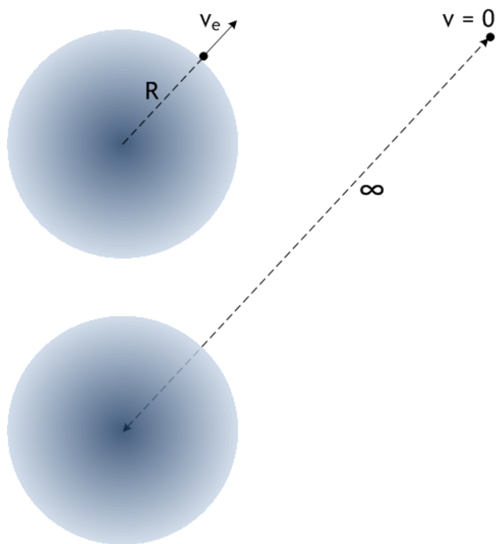
y, llevando esto a(1)

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\rho\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (2)$$

tenemos una expresión de la gravedad en la superficie de un planeta en función de su densidad media y de su radio. Esto nos permite responder de forma inmediata a la primera cuestión

$$6\ m/s^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho.3.10^6 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3}{4\pi}\frac{6}{6{,}67.10^{-11}.3.10^6} = \mathbf{7{,}16.10^3\ kg/m^3 = 7{,}16\ g/cm^3}$$

algo mayor que la densidad media de la Tierra, que es de 5,5 g/cm^3.



b) Como sabemos, la energía mecánica mínima que precisa un objeto para escapar de la gravedad del planeta es 0 J. Si v_e es la velocidad con que lo lanzamos desde la superficie, perpendicularmente a ella, su energía mecánica en el momento del despegue es

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

de donde se sigue la conocida expresión para la velocidad de escape,

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

así que sólo resta hacer las cuentas. Para evitar cálculos engorrosos, usaremos el valor de g en la superficie para escribir el producto GM:

$$g = 6\,m/s^2 = G\frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad GM = 6R^2$$

y la velocidad de escape quedará

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{12R} = \sqrt{12.3.10^6} = \mathbf{6000\ m/s = 6\ km/s}$$

poco más de la mitad que la velocidad de escape de la Tierra: eso parece razonable, ya que la gravedad de este planeta en la superficie es notablemente inferior a la terrestre.

JUNIO 02

A1.– La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en tomo al planeta Venus es $1{,}45.10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es $2{,}2.10^{12}$ kg m ^{2} s^{-1} .

a) **Determine el radio de la órbita del satélite y su masa.**
b) **¿Qué energía sería preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular 10^{-4} rad/s?**

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}; Masa de Venus = $4{,}87.10^{24}$ kg

a) La velocidad angular ω y la velocidad lineal v de un satélite en órbita circular se relacionan según

$$v = \omega\, r \qquad (1)$$

Sabemos, además, que la velocidad lineal del satélite en órbita circular de radio r, alrededor de Venus, cuya masa es M, se escribe

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (2)$$

de forma que es inmediato obtener r

$$v = \omega r = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11}.4{,}87.10^{24}}{1{,}45^2.10^{-8}}} = \mathbf{2{,}49.10^7\ m}$$

De otro lado, el módulo del momento angular se escribe

$$L = m\, v\, r \qquad (3)$$

de modo que podemos sustituir el valor de r conseguido para obtener m:

$$m = \frac{L}{v\,r} = \frac{L}{\omega r^2} = \frac{2{,}2.10^{12}}{1{,}45.10^{-4}.2{,}49^2.10^{14}} = \mathbf{24{,}47\ kg}$$

b) La idea básica en este apartado es que cada órbita del satélite tiene una determinada energía mecánica asociada. Para cambiar de órbita es necesario recibir, o desprenderse, de la diferencia de energías mecánicas entre las órbitas inicial y final. La energía mecánica de un satélite en órbita circular se escribe generalmente en función del radio de la órbita, de acuerdo a

$$E = -G\frac{Mm}{2r} \qquad (4)$$

pero, en este ejercicio, sería cómodo escribirla como función de la velocidad angular del satélite, para evitar la repetición de otro radio orbital, como se ha hecho más arriba. Esto se puede conseguir a partir de (2)

$$v = \omega r = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

y sólo hay que sustituir en (4) para tener

$$E = -G\frac{Mm}{2r} = -G\frac{Mm}{2\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}} = -\frac{1}{2}m\sqrt[3]{G^2M^2\omega^2} \qquad (5)$$

Esta es una manera poco frecuente de hacer los cálculos, pero útil en este ejercicio. Ahora tenemos las energías en las dos órbitas:

Órbita inicial $\quad E_i = -\frac{1}{2}m\sqrt[3]{G^2M^2\omega_i^2}\, m = -\frac{1}{2}\,24{,}47\,\sqrt[3]{6{,}67^2.10^{-22}.4{,}87^2.10^{48}.1{,}45^2.10^{-8}} = -1{,}60.10^8\ J$

Órbita final $\quad E_f = -\frac{1}{2}m\sqrt[3]{G^2M^2\omega_f^2}\, m = -\frac{1}{2}\,24{,}47\,\sqrt[3]{6{,}67^2.10^{-22}.4{,}87^2.10^{48}.10^{-8}} = -1{,}25.10^8\ J$

de modo que la órbita final es más energética (más grande, por tanto): eso era evidente desde que la velocidad angular en ella es menor que en la inicial. La energía necesaria para el cambio es la diferencia entre ambas:

$$\Delta E = E_f - E_i = -1{,}25.10^8 - (-1{,}60.10^8) = \mathbf{3{,}5.10^7\ J = 35\ MJ}$$

SEPTIEMBRE 02

A1.– Se pretende colocar un satélite artificial de forma que gire en una órbita circular en el plano del ecuador terrestre y en el sentido de rotación de la Tierra. Si se quiere que el satélite pase periódicamente sobre un punto del ecuador cada dos días, calcule:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la que hay que colocar el satélite.

b) La relación entre la energía que hay que comunicar a dicho satélite desde el momento de su lanzamiento en la superficie terrestre para colocarlo en esa órbita y la energía mínima de escape.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de la Tierra, R_T = 6370 km; Masa de la Tierra, M_T =5,98.10^{24} kg

a) La condición que imponen se refiere al periodo del satélite, e implica que éste ha de ser de 2 días. Eso nos permite conocer el radio de la órbita circular, empleando para ello la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.(2.24.3600)^2}{4\pi^2}} = 67068{,}4 \text{ km} = 6{,}71.10^7 \text{ m}$$

y ahora, la altura sobre la superficie, restando el radio terrestre

$$h = r - R = 67068{,}4 - 6370 = \mathbf{60698\ km}$$

b) La energía que hay que comunicar al satélite para ponerlo en órbita desde la superficie terrestre es la diferencia entre la energía orbital necesaria allí arriba

$$E_{\text{órbita}} = -G\frac{Mm}{2r}$$

y la energía potencial que tiene el satélite cuando se encuentra en reposo sobre la superficie terrestre, es decir

$$E_p^{\text{superficie}} = -G\frac{Mm}{R}$$

donde R es el radio de la Tierra y r el radio orbital. La energía necesaria en el lanzamiento es la energía cinética que debemos aportar cuando lo lanzamos, y es, como decimos, la diferencia

$$E_{\text{lanzamiento}} = -G\frac{Mm}{2r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r})$$

Por otro lado, la energía mínima de escape es la energía cinética que debemos imprimir al satélite para que, al lanzarlo verticalmente, se aleje indefinidamente de la Tierra, hasta alcanzar una distancia infinita. Como sabemos, eso requiere lanzar el satélite con la velocidad (mínima) de escape

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

es decir, proporcionarle una energía cinética $\quad E_{\text{mínima escape}} = \frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{R}$

Este resultado podría haberse escrito directamente: para alejarse indefinidamente de la Tierra, la **energía total** del satélite ha de ser, como mínimo, 0 J. Por tanto, partiendo de su situación en reposo sobre la superficie de la Tierra, hemos de darle como mínimo una energía cinética igual a su energía potencial, con signo positivo. Ese es precisamente el valor que acabamos de escribir.

La relación entre las energías involucradas en ambos lanzamientos resulta, entonces,

$$\frac{E_{\text{lanzamiento órbita}}}{E_{\text{mínima escape}}} = \frac{GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r})}{GMm\frac{1}{R}} = \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}}{\frac{1}{R}} = \frac{\frac{2r-R}{2rR}}{\frac{1}{R}} = \frac{2r-R}{2r} = \frac{2.67068{,}4 - 6370}{2.67068{,}4} = \mathbf{0{,}95}$$

así que la energía mínima de escape es sólo un 5% mayor que la energía involucrada en el lanzamiento. Esto no debería resultar extraño si se considera que se trata de una órbita bastante alejada de la Tierra, con un radio que supera en más de diez veces al radio terrestre.

MODELO 03

C1.– Un planeta esférico tiene una masa igual a 27 veces la masa de la Tierra, y la velocidad de escape para objetos situados cerca de su superficie es tres veces la velocidad de escape terrestre. Determine:

a) La relación entre los radios del planeta y de la Tierra.

b) La relación entre las intensidades de la gravedad en puntos de la superficie del planeta y de la Tierra.

a) La velocidad de escape desde la superficie de un planeta es la conocida

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}} \qquad (1)$$

donde M es la masa del planeta y R es su radio. Podemos escribir, entonces, las velocidades de escape para la Tierra y para el planeta en cuestión:

para la Tierra
$$v_e^{Tierra} = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} \qquad (2)$$

para el planeta
$$v_e^{Planeta} = \sqrt{2G\frac{M_P}{R_P}} \qquad (3)$$

de modo que basta dividir miembro a miembro, y tener en cuenta las indicaciones del enunciado para obtener la relación entre los radios:

$$\frac{v_e^{Tierra}}{v_e^{Planeta}} = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}}{\sqrt{2G\frac{M_P}{R_P}}} = \sqrt{\frac{\frac{M_T}{R_T}}{\frac{M_P}{R_P}}} = \sqrt{\frac{M_T R_P}{M_P R_T}} = \sqrt{\frac{R_p}{27 R_T}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R_P = 3R_T}$$

b) La intensidad gravitatoria en la superficie terrestre se escribe
$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} \qquad (4)$$

mientras que la intensidad del campo en la superficie del planeta es
$$g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} \qquad (5)$$

así que basta dividir miembro a miembro (5) y (4) para obtener

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_P R_T^2}{M_T R_P^2} = \frac{27}{9} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{g_P = 3g_T}$$

MODELO 03

A1.– Júpiter tiene aproximadamente una masa 320 mayor que la de la Tierra y un volumen 1320 superior al de la Tierra. Determine:

a) A qué altura sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite, en órbita circular en torno a este planeta, para que tuviera un periodo de 9 horas 50 minutos.

b) La velocidad del satélite en dicha órbita.

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra, $g = 9{,}8$ m/s^2 ; Radio medio de la Tierra, $R_T = 6{,}37.10^6$ m

a) La ley de los periodos, escrita para este satélite, es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_J} r^3 \qquad (1)$$

donde T = 9 h 50’ = 35400 s es el periodo; $M_J = 320\ M_T$ es la masa de Júpiter, 320 veces mayor que la de la Tierra. De aquí podemos obtener el radio orbital del satélite:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_J T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{320 G M_T T^2}{4\pi^2}}$$

y ahí, para operar, recordaremos que la gravedad en la superficie de la Tierra es la conocida 9,8 m/s^2 y se escribe

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8 \quad \Rightarrow \quad GM_T = 9{,}8 R_T^2$$

así que nos quedará

$$r = \sqrt[3]{\frac{320 G M_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{320.9{,}8.R_T^2\, T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{320.9{,}8.6{,}37^2.10^{12}.35400^2}{4\pi^2}} = 1{,}59.10^8 \text{ m}$$

Por otra parte, el radio de Júpiter se obtiene conociendo la relación de volúmenes Júpiter—Tierra:

$$\frac{V_J}{V_T} = 320 = \frac{\frac{4}{3}\pi R_J^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{R_J^3}{R_T^3} \quad \Rightarrow \quad R_J = \sqrt[3]{320}\, R_T = 6{,}84 R_T = 4{,}36.10^7 \text{ m}$$

de manera que la altura del satélite sobre la superficie de Júpiter resulta valer

$$h = r - R_J = 1{,}59.10^8 - 4{,}36.10^7 = \mathbf{1{,}15.10^8\ m}$$

b) La velocidad del satélite en órbita circular estacionaria alrededor de Júpiter, con el radio r calculado ya, resulta inmediata:

$$v = \sqrt{G\frac{M_J}{r}} = \sqrt{G\frac{320\, M_T}{r}} = \sqrt{320\frac{9{,}8 R_T^2}{r}} = \sqrt{320\ \frac{9{,}8.6{,}37^2.10^{12}}{1{,}59.10^8}} = \mathbf{28289{,}7\ m/s = 28{,}3\ km/s}$$

JUNIO 03

C1.– Suponiendo un planeta esférico que tiene radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, calcule:

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.

b) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape desde la superficie terrestre es 11,2 km/s.

Datos: Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g = 9,81 m/s^2

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se escribe generalmente

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Aceptando que la densidad del planeta es constante, y su valor es ρ, podemos modificar esa expresión, ya que la masa del planeta

$$M = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3$$

llevada a (1) deja

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\rho\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (2)$$

expresión que podemos usar para el planeta P y la Tierra T:

Para el planeta $g_P = \frac{4}{3}\pi G\rho_P R_P$ (3); Para la Tierra $g_T = \frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T$ (4)

así que, dividiendo miembro a miembro, tenemos la relación entre las intensidades gravitatorias respectivas:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_P R_P}{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T} = \frac{\rho_P R_P}{\rho_T R_T} = \frac{R_P}{R_T} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad g_P = \frac{g_T}{2} = \frac{9{,}81}{2} = \mathbf{4{,}91\ m/s^2}$$

b) La velocidad de escape desde la superficie terrestre es

$$v_e^T = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2G\ \frac{\rho_T\frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_T R_T^2} \qquad (5)$$

escrita en función de la densidad y el radio terrestres. De modo análogo, la velocidad de escape desde el planeta es

$$v_e^P = \sqrt{2G\frac{M_P}{R_P}} = \sqrt{2G\ \frac{\rho_P\frac{4}{3}\pi R_P^3}{R_P}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_P R_P^2} \qquad (6)$$

de manera que, dividiendo miembro a miembro de nuevo,

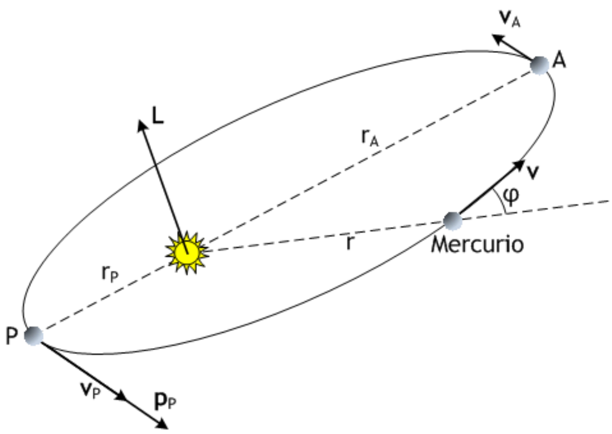
$$\frac{v_e^P}{v_e^T} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_P R_P^2}}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_T R_T^2}} = \sqrt{\frac{\rho_P R_P^2}{\rho_T R_T^2}} = \frac{R_P}{R_T} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_e^P = \frac{v_e^T}{2} = \frac{11{,}2}{2} = \mathbf{5{,}6\ km/s}$$

JUNIO 03

A1.– Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de 6,99.10^{10} m, y su velocidad orbital es de 3,88.10^{4} m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de 4,60.10^{10} m.

a) **Calcule la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.**
b) **Calcule las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio.**
c) **Calcule el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.**
d) **De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, digánse cuáles son iguales en el afelio.**

Datos: **Masa de Mercurio: 3,18.10^{23} kg; Masa del Sol: 1,99.10^{30} kg;**
Constante de Gravitación Universal: 6,67.10^{-11} N.m^2/kg^2



a) El momento angular de Mercurio en su giro orbital alrededor del Sol es un vector **L** constante, perpendicular al plano orbital. Podemos escribir el módulo de **L** en cualquier punto de la órbita según

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}| = m\,|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = m\,v\,r\,\text{sen}\varphi$$

donde φ es el ángulo entre los vectores **r** y **v**, variable según la posición del planeta. En los puntos singulares **perihelio** y **afelio** los vectores **r** y **v** resultan perpendiculares, φ = 90º, y su seno es 1. Así, es particularmente sencillo escribir el módulo de **L** en esos puntos, ya que resulta

$$L = M\, r_A\, v_A = M\, r_P\, v_P$$

donde M es la masa de Mercurio y r_A, r_P, v_A, v_P las distancias al Sol y velocidades de Mercurio en el afelio y perihelio, respectivamente. Conocidas ambas distancias y la velocidad en el afelio resulta inmediato obtener la velocidad en el perihelio:

$$v_P = \frac{r_A\, v_A}{r_P} = \frac{6{,}99.10^{10}\ \text{m}\ .\ 3{,}88.10^{4}\ \text{m/s}}{4{,}60.10^{10}\ \text{m}} = \mathbf{5{,}90.10^{4}\ m/s}$$

b) Las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio pueden hallarse de forma inmediata con los datos disponibles. En efecto, la energía cinética se tiene a partir de la masa y la velocidad del planeta:

$$E_c^{\text{Perihelio}} = \frac{1}{2} M\, v_P^2 = \frac{1}{2}\, 3{,}18.10^{23}\ \text{kg}\ .\ (5{,}90.10^{4}\ \text{m/s})^2 = \mathbf{5{,}53.10^{32}\ J}$$

y la energía potencial del par Mercurio–Sol, en todo caso, se consigue con

$$E_p^{\text{Perihelio}} = -G\frac{M_{SOL}\, M}{r_P} = -6{,}67.10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\,\frac{1{,}99.10^{30}\ \text{kg}.3{,}18.10^{23}\ \text{kg}}{4{,}60.10^{10}\ \text{m}} = \mathbf{-\,9{,}18.10^{32}\ J}$$

Finalmente, la energía mecánica (constante) de Mercurio es la suma de cinética y potencial en cualquier lugar, por ejemplo, en el perihelio:

$$E = E_c^{\text{Perihelio}} + E_p^{\text{Perihelio}} = 5{,}52.10^{32}\ \text{J} - 9{,}18.10^{32}\ \text{J} = \mathbf{-\,3{,}66.10^{32}\ J}$$

Aprovechemos para precisar algunas cuestiones fundamentales, relacionadas con las posibles confusiones entre órbitas circulares y elípticas. En estas últimas, como la que tratamos en este ejercicio, **no se cumplen** ciertas expresiones relativas a las energías cinética, potencial y total del satélite, **que sí funcionan** en órbitas circulares: por ejemplo, la energía cinética es la mitad, cambiada de signo, de la energía potencial. Esto, como acabamos de calcular, no es cierto en una órbita elíptica. Tampoco sucede que la energía total y la cinética tengan el mismo valor, salvo signo, como pasa de hecho en las órbitas circulares.

c) El momento lineal de Mercurio en el perihelio es tangente a la trayectoria en ese lugar, como muestra la figura. Su módulo es un sencillo producto de masa por velocidad en ese punto:

$$p^{\text{Perihelio}} = M\, v_P = 3{,}18.10^{23}\ \text{kg}\ .\ 5{,}90.10^{4}\ \text{m/s} = \mathbf{1{,}88.10^{28}\ kg\ m\ s^{-1}}$$

y no es un invariante en el movimiento del planeta: el momento lineal **cambia** constantemente, y lo hace tanto en dirección, para mantenerse tangente a la trayectoria en cada instante, como en módulo, ya que la rapidez de Mercurio no es constante; cabe destacar en ese sentido, como ejemplo, que en el perihelio Mercurio se mueve más rápidamente que en el afelio, para que pueda cumplirse la ley de las áreas.

En cambio, el momento angular de Mercurio en el perihelio tendrá el mismo valor que en cualquier otro lugar: es un vector invariante. Su módulo, calculado en el perihelio, es

$$L = M r_P\, v_P = 3{,}18.10^{23}\ \text{kg}\ .\ 4{,}60.10^{10}\ \text{m}\ .\ 5{,}90.10^{4}\ \text{m/s} = \mathbf{8{,}63.10^{38}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

d) En realidad ya hemos contestado a esto. Podemos resumir diciendo que las únicas magnitudes invariantes son el **momento angular** y la **energía mecánica total**, mientras que la velocidad de Mercurio, su momento lineal, su energía cinética o su energía potencial varían de punto a punto, y toman diferentes valores en el afelio y en el perihelio. Procede recordar que **L** es invariante porque la fuerza gravitatoria solar es una **fuerza central**, y que la energía total es invariante porque la fuerza gravitatoria solar es una **fuerza conservativa**.

SEPTIEMBRE 03

A1.– Un satélite artificial de 100 kg de masa se encuentra girando alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7100 km de radio. Determine:

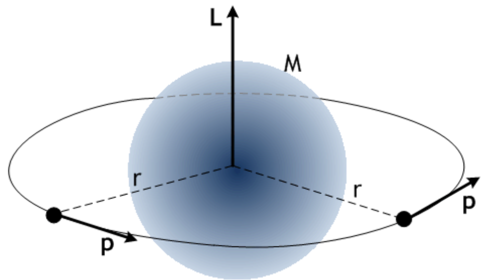
a) **El periodo de revolución del satélite.**
b) **El momento lineal y el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.**
c) **La variación de energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta esa posición.**
d) **Las energías cinética y total del satélite.**

Datos: **Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37.10^{6}$ m;**
Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) Una vez más, una órbita circular. La adaptación de la tercera ley de Kepler a estas órbitas sencillas permite hallar con facilidad el periodo de revolución, conocido el radio de la órbita:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \Rightarrow \quad T = 4\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 4\pi \sqrt{\frac{(7100.10^3 \text{ m})^3}{6{,}67.10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{kg}^{-2} . 5{,}98.10^{24} \text{ kg}}} = 11903{,}75 \text{ s} = \mathbf{3 \text{ h } 18 \text{ min } 23{,}8 \text{ s}}$$

b) El momento lineal es tangente a la órbita en cada posición del satélite, como puede verse en la figura. Ahora bien, el giro del satélite es **uniforme** en la órbita circular, así que la velocidad lineal v es constante y. como consecuencia, el momento lineal **p** tiene **módulo constante**. Su valor es un sencillo producto de masa por velocidad del satélite en órbita, que calculamos previamente



$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} . 5{,}98.10^{24}}{7100.10^3}} = 7495{,}22 \text{ m/s}$$

así que el momento lineal queda

$p = mv = 100 \text{ kg} . 7495{,}22 \text{ m/s} = \mathbf{7{,}50.10^5 \text{ kg m s}^{-1}}$

El momento angular es un vector invariante, perpendicular al plano orbital. Su módulo se obtiene fácilmente:

$$L = mvr = 100 \text{ kg} . 7495{,}22 \text{ m/s} . 71.10^5 \text{ m} = \mathbf{5{,}32.10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}}$$

c) La energía potencial del sistema Tierra–satélite está dada por $E_p = -G\dfrac{Mm}{r}$

expresión que podemos aplicar primero con el satélite en la superficie de la Tierra:

$$E_p^{\text{Superficie}} = -6{,}67.10^{-11} \frac{5{,}98.10^{24} . 100}{6{,}37.10^6} = -6{,}26.10^9 \text{ J}$$

y después en la órbita, con el satélite a una distancia r = $7{,}10.10^6$ m del centro de la Tierra:

$$E_p^{\text{órbita}} = -6{,}67.10^{-11} \frac{5{,}98.10^{24} . 100}{7{,}10.10^6} = -5{,}62.10^9 \text{ J}$$

de modo que, como puede verse, el satélite tiene mayor energía potencial en la órbita. La diferencia que nos piden es una sencilla resta, que ofrece el incremento de energía potencial:

$$\Delta E_p = E_p^{\text{órbita}} - E_p^{\text{Superficie}} = -5{,}62.10^9 - (-6{,}26.10^9) = \mathbf{6{,}4.10^8 \text{ J}} = \mathbf{640 \text{ MJ}}$$

Esa enorme cantidad de energía ha sido necesaria para levantar el satélite desde el suelo terrestre hasta la órbita. Además, habrá que dotar al satélite de energía cinética orbital (si nos limitamos a levantarlo y dejarlo en reposo, se caerá directamente), así que esos 640 MJ son sólo parte de la energía que gastaremos para poner en órbita al satélite.

d) La energía cinética del satélite puede obtenerse directamente de su velocidad,

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 100 . 7495{,}22^2 = \mathbf{2{,}81.10^9 \text{ J}}$$

aunque podríamos haber empleado $E_c = G\dfrac{Mm}{2r}$, o — más rápido aún — recordar que $E_c = \dfrac{1}{2}E_p$, expresiones válidas en órbitas circulares (pero no en órbitas elípticas o de otro tipo).

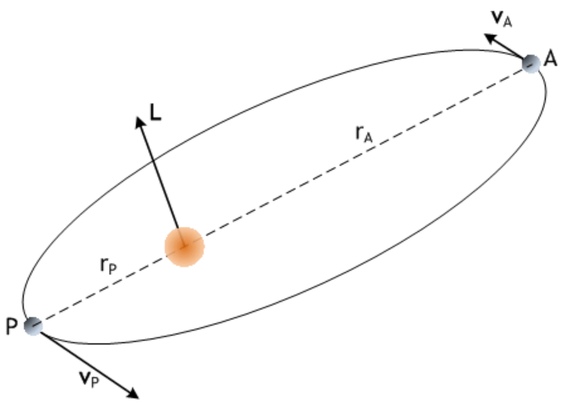
En cuanto a la energía total, podemos emplear $E = -G\dfrac{Mm}{2r}$, o recordar simplemente que $E = -E_c = \dfrac{1}{2}E_p$

válida para órbitas circulares, así que $E = \mathbf{-2{,}81.10^9 \text{ J}} = \mathbf{-2810 \text{ MJ}}$

MODELO 04

C1.– La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. Determine en esas posiciones cuál es la relación entre:

a) **Las distancias al Sol en torno al cual orbitan.**
b) **Las energías potenciales del asteroide.**



a) El momento angular del asteriode en su órbita alrededor del Sol permanece constante: un vector **L** perpendicular al plano orbital, cuya dirección y módulo son invariables. Este módulo puede calcularse de forma particularmente simple en el afelio y en el perihelio, donde resulta

$$L = m\, r_A\, v_A = m\, r_P\, v_P$$

de donde se sigue de inmediato que

$$\frac{r_A}{r_P} = \frac{v_P}{v_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_A}{r_P} = \frac{20}{14} = \mathbf{\frac{10}{7}}$$

la razón entre las distancias al Sol afelio–perihelio es 10 a 7.

b) Las energías potenciales del asteroide varían en función de su distancia al Sol, de acuerdo a

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

siendo M la masa del Sol y m la del asteroide. Obviamente, cuanto más lejos del Sol, mayor resulta la energía potencial, ya que decrece su valor absoluto y se trata de cantidades negativas. La relación entre las energías potenciales en ambos puntos es

$$\frac{E_p^{Afelio}}{E_p^{Perihelio}} = \frac{-G\dfrac{Mm}{r_A}}{-G\dfrac{Mm}{r_P}} = \frac{\dfrac{1}{r_A}}{\dfrac{1}{r_P}} = \frac{r_P}{r_A} = \mathbf{\frac{7}{10}}$$

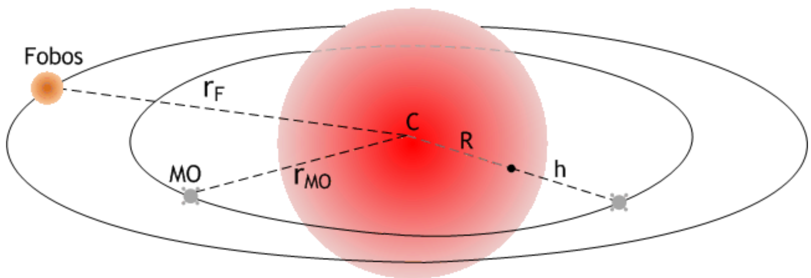
la inversa de la obtenida para la relación entre distancias al Sol.

MODELO 04

A1.– La sonda espacial Mars Odissey describe una órbita circular en torno a Marte a una altura sobre su superficie de 400 km. Sabiendo que un satélite de Marte describe órbitas circulares de 9390 km de radio y tarda en cada una de ellas 7,7 horas, calcule:

a) **El tiempo que tardará la sonda espacial en dar una vuelta completa.**
b) **La masa de Marte y la aceleración de la gravedad en su superficie.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de Marte, R_M = 3390 km



Fobos es el más cercano a Marte de sus satélites, y su radio y periodo son los que cita el enunciado. En este ejercicio se trata, pues, de establecer relaciones entre las órbitas de Fobos y de Mars Odissey, basadas en las leyes de Kepler, específicamente en la ley de los periodos. En efecto, para objetos orbitando alrededor de Marte esta ley establece

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad (1)$$

donde M es la masa de Marte, T el periodo de revolución del objeto orbital y r el radio de la órbita circular. Podemos aplicarla a Fobos, con un radio r_F = 9390 km y un periodo T_F = 7,7 horas, y a Mars Odissey, cuyo radio orbital se obtiene sumando el radio de Marte y la altura de la sonda sobre la superficie,

$$r_{MO} = R + h = 3390 + 400 = 3790 \text{ km}$$

y cuyo periodo T_{MO} estamos buscando. Esto nos dará

para Fobos $\quad T_F^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} r_F^3\,;$ $\qquad$ para Mars Odissey $\quad T_{MO}^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} r_{MO}^3$

de modo que sólo hemos de dividir ambas igualdades miembro a miembro para tener

$$\frac{T_F^2}{T_{MO}^2} = \frac{r_F^3}{r_{MO}^3} \quad \Rightarrow \quad T_{MO} = \sqrt{\frac{r_{MO}^3}{r_F^3} T_F^2} = \sqrt{\frac{3790^3}{9390^3} 7{,}7^2} = \mathbf{2{,}0\ h}$$

donde debe tenerse presente que las unidades de los radios no plantean problemas, pues se simplificarán, y el periodo T_{MO} aparecerá en las unidades en que se escriba T_F; por tanto, en horas. Además, se ha respetado la precisión de un decimal en el resultado, como en el enunciado.

b) La masa M de Marte puede conseguirse empleando (1) con los datos de Fobos o con los de Mars Odissey. Utilizando a Fobos, escribimos

$$T_F^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_F^3 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G T_F^2} r_F^3 = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11}.\,(7{,}7.3600)^2} (9390.10^3)^3 = \mathbf{6{,}38.10^{23}\ kg}$$

habiendo tenido precaución con las unidades: el periodo en s, el radio orbital en m, de forma que todas las unidades sean SI.

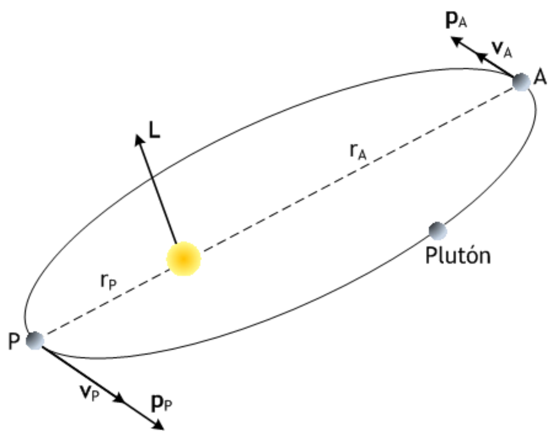
La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se escribe $g = G\frac{M}{R^2}$, siendo M y R la masa y radio del planeta en cuestión. Para Marte quedará $g = G\frac{M}{R^2} = 6{,}67.10^{-11}\frac{6{,}38.10^{23}}{(3390.10^3)^2} = \mathbf{3{,}70\ ms^{-2}}$

poco más de la tercera parte de la gravedad en la superficie terrestre.

JUNIO 04

C2.— Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indique para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol):
a) momento angular respecto a la posición del Sol; b) momento lineal; c) energía potencial; d) energía mecánica.

Las magnitudes invariantes en una órbita elíptica son el **momento angular L** y la **energía mecánica** E, suma de las energías cinética y potencial.



a) el momento angular, como acabamos de decir, **tiene el mismo módulo en el afelio, en el perihelio** y en cualquier otra posición. Esto es una consecuencia, como sabemos, de que la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre Plutón es una fuerza central.

b) La ley de las áreas exige que la velocidad en el perihelio sea mayor que en el afelio, $v_P > v_A$, de modo que el radio vector que une el Sol con Plutón barra áreas iguales por unidad de tiempo en ambas posiciones. Por lo tanto, **el momento lineal en el perihelio es también mayor que en el afelio**, $p_P > p_A$, siendo además $\mathbf{p_P}$ y $\mathbf{p_A}$ vectores de direcciones distintas, ya que han de ser tangentes a la trayectoria en cada lugar.

c) La energía potencial de Plutón depende de su distancia al Sol, de acuerdo a la conocida expresión

$$E_p = -G\frac{M_{Sol} M_{Plutón}}{r}$$

de forma que, siendo la distancia r al Sol variable, también lo es la energía potencial. Ya que $r_p < r_A$, y tratándose de cantidades negativas, **la energía potencial es mayor en el afelio** (menos negativa que en el perihelio).

d) La fuerza gravitatoria solar es una fuerza conservativa: en consecuencia, **la energía mecánica tiene el mismo valor en el afelio, en el perihelio** y en cualquier otro lugar de la trayectoria. Conviene recordar, en todo caso, que la expresión familiar

$$E = -G\frac{M_{Sol} M_{Plutón}}{2r}$$

no se puede emplear en una órbita elíptica, ya que está deducida para órbitas circulares, salvo que se sustituya el radio r de la órbita circular por el semieje mayor a de la órbita elíptica. Esto es,

$$E = -G\frac{M_{Sol} M_{Plutón}}{2a}$$

donde, como se ha visto en algún otro ejercicio, a puede calcularse fácilmente como $a = \frac{r_A + r_P}{2}$

SEPTIEMBRE 04

C1.– La luz solar tarda 8,31 minutos en llegar a la Tierra y 6,01 minutos en llegar a Venus. Suponiendo que las órbitas descritas por ambos planetas son circulares, determine:

a) el periodo orbital de Venus en torno al Sol sabiendo que el de la Tierra es de 365,25 días;

b) la velocidad con que se desplaza Venus en su órbita.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3.10^8$ m/s

a) La luz se mueve en el vacío con velocidad $c = 3.10^8$ m/s. Conociendo el tiempo de viaje de la luz solar hasta Venus y hasta la Tierra podemos hallar fácilmente los radios de sus órbitas respectivas. Así,

Radio orbital de Venus, $r_V = ct_V = 3.10^8 \text{ m/s}.\ 6{,}01.60 \text{ s} = 1{,}08.10^{11} \text{ m}$

Radio orbital de la Tierra, $r_T = ct_T = 3.10^8 \text{ m/s}.\ 8{,}31.60 \text{ s} = 1{,}50.10^{11} \text{ m}$

y ahora podemos emplear la ley de los periodos para comparar los de Venus y la Tierra: los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios (para órbitas circulares) de las órbitas. Es decir,

$$\frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{r_V^3}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad T_V = T_T\sqrt{\frac{r_V^3}{r_T^3}} = 365{,}25\sqrt{\frac{1{,}08^3}{1{,}50^3}} = \mathbf{223{,}15 \text{ días terrestres}}$$

b) Conocemos el radio de la órbita de Venus; también tenemos ahora su periodo: de ambas cosas se deduce la velocidad de modo muy sencillo, ya que

$$T_V = \frac{2\pi r_V}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\pi r_V}{T_V} = \frac{2\pi.1{,}08.10^{11} \text{ m}}{223{,}15.24.60.60 \text{ s}} = \mathbf{3{,}52.10^4 \text{ m/s}}$$

unos 35 km/s. Podemos hacer una estimación positiva acerca de la credibilidad de este resultado, sabiendo que la velocidad orbital de la Tierra es del orden de 30 km/s y que la velocidad de un planeta es mayor cuanto menor es su radio orbital; de este modo, la velocidad de Venus debe resultar mayor que la de la Tierra.

SEPTIEMBRE 04

A1.– Un planeta esférico tiene 3200 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6,2 m.s^{-2}. Calcule:

a) La densidad media del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.

b) La energía que hay que comunicar a un objeto de 50 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita circular alrededor del mismo, de forma que su periodo sea de 2 horas.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) Conocido el radio y la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es sencillo obtener su masa, ya que

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

donde g es la gravedad superficial, M la masa del planeta y R su radio. Evidentemente, eso equivale a conocer su densidad media, que no es otra cosa que el cociente entre la masa del planeta y su volumen,

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (2)$$

De (1), para el caso que nos ocupa, tenemos $M = \frac{gR^2}{G} = \frac{6{,}2.(3200.10^3)^2}{6{,}67.10^{-11}} = 9{,}52.10^{23} \text{ kg}$

y, llevando datos a (2) $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{9{,}52.10^{23}}{\frac{4}{3}\pi(3200.10^3)^3} = 6{,}94.10^3 \text{ kg/m}^3 = \mathbf{6{,}94 \text{ g/cm}^3}$

Obviamente, una sencilla combinación de (1) y (2) daría la expresión $g = \frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (3)$

de la intensidad de campo en la superficie de un planeta esférico, de densidad homogénea ρ y radio R, que nos hubiera dado directamente el valor obtenido más arriba. Sin embargo, el cálculo intermedio de la masa del planeta nos permite emplear ahora la expresión más usual para la velocidad de escape desde la superficie del planeta,

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\frac{6{,}67.10^{-11} \text{ N m}^2\text{kg}^{-2}.\ 9{,}52.10^{23} \text{ kg}}{3200.10^3 \text{ m}}} = \mathbf{6299{,}7 \text{ m/s}}$$

Por supuesto, podemos también escribir la velocidad de escape en función de la densidad media y del radio del planeta esférico: basta llevar a esta última expresión la masa M despejada de (2):

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\frac{G\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho R^2}$$

de modo que, como se ve, es bastante simple trabajar indistintamente con la masa M o con la densidad media ρ del planeta, apoyándose en (2). Otra posibilidad, que simplifica notablemente los cálculos, requiere recordar la igualdad $GM = gR^2$, donde g es la gravedad en la superficie del planeta, especialmente indicada en este ejercicio en que los datos de entrada son precisamente g y R. La velocidad de escape se escribiría, entonces

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2.6{,}2\ ms^{-2}.3200.10^3\ m} = \mathbf{6299{,}2\ m/s}$$

La pequeña desviación en el decimal se debe a los errores acumulados en el resultado intermedio de M; el mejor resultado es el último que se ha escrito.

b) Nos interesa saber qué radio r tendría la órbita cuyo periodo fuese 2 horas. Eso se puede conseguir empleando la ley de los periodos de Kepler, escrita para una órbita circular:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Para simplificar nuestras operaciones al despejar r, usemos de nuevo $GM = gR^2$, para poner

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 = \frac{4\pi^2}{gR^2} r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{T^2 gR^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(2.3600\ s)^2 .\ 6{,}2\ ms^{-2}.(3200.10^3\ m)^2}{4\pi^2}} = \mathbf{4368{,}5\ km}$$

Ahora podemos hacer cálculos energéticos relativos a esta órbita. Buscamos la diferencia entre la energía total del satélite en órbita con el radio r que acabamos de calcular, y la energía que tenía cuando estaba en reposo sobre la superficie del planeta, exclusivamente potencial, antes del lanzamiento. Estas energías son:

Energía total en la órbita $$E^{órbita} = -G\frac{Mm}{2r} = -\frac{gR^2 m}{2r} = -\frac{6{,}2\ ms^{-2}.(3200.10^3\ m)^2.50\ kg}{2.4368{,}5.10^3\ m} = -3{,}63.10^8\ J$$

Energía en el suelo $$E_p^{superficie} = -G\frac{Mm}{R} = -\frac{gR^2 m}{R} = -gRm = -6{,}2\ m/s^2.3200.10^3 m\ .\ 50\ kg = -9{,}92.10^8\ J$$

de modo que la energía que habrá comunicar en el lanzamiento es la diferencia entre ambas cantidades. Resulta ser:

$$E^{lanzamiento} = E^{órbita} - E^{superficie} = -3{,}63.10^8\ J - (-9{,}92.10^8\ J) = \mathbf{6{,}29.10^8\ J} = \mathbf{629\ MJ}$$

MODELO 05

C1.– Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble que la que necesita otro objeto de masa $m_2 = ½\ m_1$.

b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en la misma órbita un satélite de masa m_1 que otro de masa $m_2 = ½\ m_1$, lanzados desde la superficie de la Tierra.

a) La velocidad de escape para un objeto lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra es $v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}}$

y no depende, como se ve, de la masa del objeto lanzado: por lo tanto, la afirmación es **falsa**. Eso no significa que la masa del objeto que se lanza no sea relevante, ya que conseguir esa velocidad es más costoso con un objeto de mayor masa; por ejemplo, en el supuesto que nos proponen m_1 tendría doble energía cinética que m_2.

b) En la misma línea que el apartado anterior, la velocidad de ambos objetos, una vez hubiesen sido colocados en la órbita, sería la misma, $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$, independientemente de su masa. Sin embargo, el trabajo necesario para poner en órbita un objeto es la diferencia entre la energía mecánica en la órbita,

$$E^{órbita} = -G\frac{Mm}{2r}$$

y la energía mecánica cuando está en reposo sobre la superficie terrestre, que es tanto como decir la energía potencial del objeto en la superficie de la Tierra

$$E_p^{Superficie} = -G\frac{Mm}{R}$$

(nótese la diferencia entre r, radio de la órbita, y R, radio de la Tierra). La diferencia entre ambas cantidades nos da una expresión genérica del trabajo necesario para colocar al objeto en la órbita:

$$W = E^{óbita} - E_p^{Superficie} = -G\frac{Mm}{2r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}) = GMm(\frac{2r-R}{2rR})$$

una cantidad positiva, naturalmente (2r es mayor que R). Puede verse que la masa del objeto es relevante, y que el trabajo es mayor cuanto mayor sea la masa en cuestión, como cabía esperar. En conclusión, esta vez **la afirmación es cierta**: colocar a m_1 en órbita costaría un trabajo doble que hacerlo con m_2.

JUNIO 05

CUESTIÓN 2.– a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.
b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

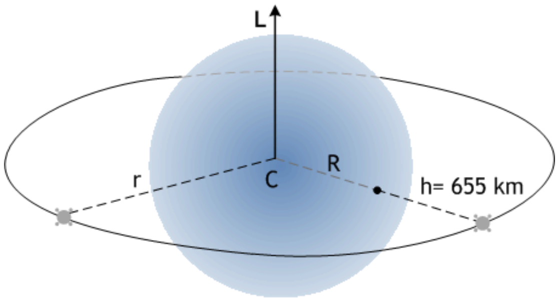
Véase JUNIO **01 C1**.

JUNIO 05

A1.– Un satélite artificial de la Tierra de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcule:

a) El periodo de la órbita.
b) La energía mecánica del satélite.
c) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
d) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37.10^6$ m



a) La figura muestra la órbita a una altura h = 655 km sobre la superficie terrestre; por tanto, con un radio orbital

r = h+R = 6370 + 655 = 7025 km

donde R es el radio terrestre. El periodo se tiene de la tercera ley de Kepler, la de los periodos de revolución: para una órbita circular, esa ley se escribe

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

(M es la masa de la Tierra). Las cuentas son

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}.(7025.10^3)^3} = \mathbf{5857,82\ s = 1\ h\ 37\ min\ 38\ s}$$

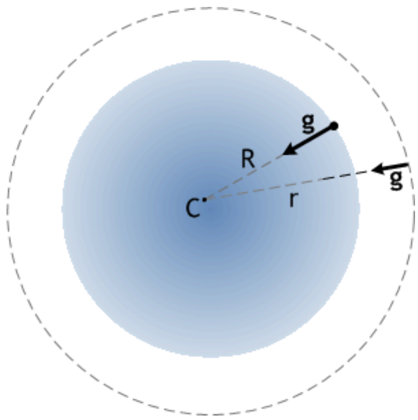
b) La energía mecánica del satélite es

$$E = -G\frac{Mm}{2r} = -6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}.100}{2.7025.10^3} = \mathbf{-2,84.10^9\ J = -2840\ MJ}$$

c) El momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es un vector **L** perpendicular al plano de la órbita y que permanece constante en módulo y dirección. Su módulo es

$$L = mvr = m\sqrt{G\frac{M}{r}}\ r = m\sqrt{GMr} = 100\ \sqrt{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}.7025.10^3} = \mathbf{5,29.10^{12}\ kg\,m^2\,s^{-1}}$$

d) La intensidad de campo gravitatorio creado por la Tierra en un punto a distancia r de su centro C es un vector radial, hacia el centro de la Tierra, y de módulo



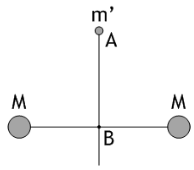
$$g = G\frac{M}{r^2}$$

así que la relación que nos piden entre ambos valores es

$$\frac{g_{órbita}}{g_{superficie}} = \frac{G\frac{M}{r^2}}{G\frac{M}{R^2}} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{R^2}} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{6370^2}{7025^2} = \mathbf{0,82}$$

SEPTIEMBRE 05

C2.– Dos masas iguales, M = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m' = 0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a 1 m de la línea que las une (AB = 1 m). Si no actúan más que las interacciones gravitatorias entre estas masas, determine:

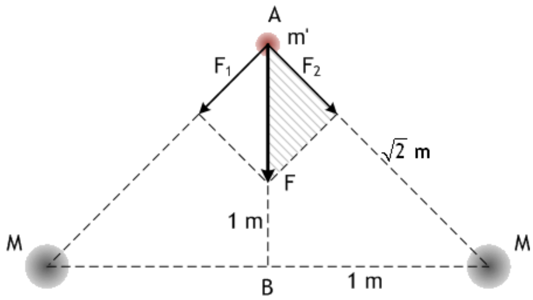


a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m' en la posición A.

b) Las aceleraciones de la masa m' en las posiciones A y B.

Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67.10^{-11}$ **N m^2 kg^{-2}**

a) La primera cuestión aparece representada en la figura. Cuando m' está en A, las fuerzas gravitatorias aplicadas sobre ella por ambas masas M son atractivas y responden a la ley de Newton para interacción entre masas puntuales. Llamándolas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, sus módulos F_1 y F_2 son iguales y miden:



$$F_1 = F_2 = G\frac{Mm}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{20.0{,}2}{2} = 1{,}33.10^{-10}\ \text{N}$$

donde se ha usado la distancia entre m' y M, que es obviamente $\sqrt{2}$ m. La simetría de la figura, entonces, permite ver con facilidad cómo será la fuerza

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$$

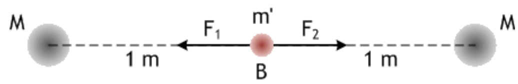
resultante de su suma: llevará la dirección vertical, apuntando hacia B, y su módulo, tomando en consideración el triángulo rayado en la figura, rectángulo e isósceles, quedará

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 1{,}33\sqrt{2}.10^{-10} = \mathbf{1{,}89.10^{-10}\ N}$$

b) La aceleración de m' en el punto A es ahora obvia: irá dirigida verticalmente, hacia abajo, apuntando a B; su módulo será

$$a_A = \frac{F}{m'} = \frac{1{,}89.10^{-10}}{0{,}2} = \mathbf{9{,}45.10^{-10}\ ms^{-2}}$$

En cuanto al punto B, la figura al lado muestra las fuerzas gravitatorias sobre m' en ese momento: apuntan a cada una de las masas M y son, por tanto, opuestas; por razones de simetría evidente miden lo mismo. En consecuencia, en la posición B la fuerza **F** = **F₁** + **F₂** sobre m' es **0**. Naturalmente, ese será también el valor de la aceleración de m' en ese lugar: a_B = **0 m/s²**



SEPTIEMBRE 05

A1.– Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 400 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia del centro de la Tierra igual a las 7/6 partes del radio terrestre. Calcule:

a) La intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite.

b) La velocidad y el periodo que tendrá el satélite en la órbita.

c) La energía mecánica del satélite en la órbita.

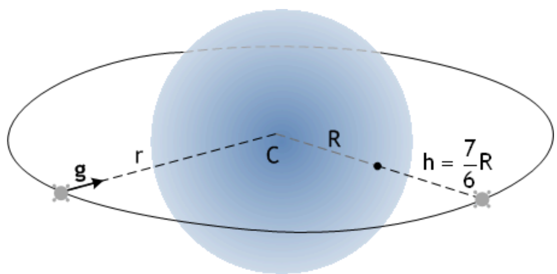
d) La variación de la energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en su órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ **N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra,** $M_T = 5{,}98.10^{24}$ **kg; Radio de la Tierra,** $R_T = 6{,}37.10^6$ **m**

a) El satélite queda en órbita con un radio

$$r = \frac{7}{6}R = 7{,}43.10^6\ \text{m}$$

La intensidad de campo gravitatorio en esa órbita es, en cada punto, un vector radial **g** que apunta al centro de la Tierra, como muestra la figura. El módulo es el mismo en todos los puntos de la órbita circular, y su valor es



$$g = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}98.10^{24}}{(\frac{7}{6}6{,}37.10^6)^2} = \mathbf{7{,}22\ N/kg}$$

b) La velocidad del satélite depende esencialmente del radio orbital y de la masa de la Tierra. En efecto, recordemos que

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}98.10^{24}}{7{,}43.10^6}} = \mathbf{7326{,}9\ m/s}$$

y la tercera ley de Kepler nos da el periodo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(7,43.10^6)^3}{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}} = \mathbf{6371,6\ s = 1\ h\ 46\ min\ 11,6\ s}$$

c) La energía mecánica del satélite en su órbita es la suma de las energías cinética y potencial. En una órbita circular, cada una de las tres es constante, aunque la más trascendente de esas tres invariancias es la de la energía mecánica, que es la única válida en cualquier tipo de órbita. En nuestro caso,

$$E = E_c + E_p = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r} = -6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}.400}{2.7,43.10^6} = \mathbf{-1,07.10^{10}\ J = -10700\ MJ}$$

d) La energía potencial del sistema Tierra–satélite se expresa según $E_p = -G\frac{Mm}{r}$, donde r es la distancia al centro de la Tierra. Las energías potenciales, entonces, sobre la superficie de la Tierra y en la órbita se escriben, respectivamente:

$$E_p^{superficie} = -G\frac{Mm}{R} \quad ; \quad E_p^{órbita} = -G\frac{Mm}{r}$$

donde r es el radio orbital y R el radio de la Tierra. Naturalmente, al alejarnos de la superficie r > R y la energía potencial se va haciendo menos negativa, es decir, aumenta. El incremento de la energía potencial al elevar el satélite desde la superficie hasta la órbita es la diferencia entre ambas:

$$\Delta E_p = E_p^{órbita} - E_p^{superficie} = -G\frac{Mm}{r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}) = GMm\frac{r-R}{rR}$$

es decir $$\Delta E_p = GMm\frac{r-R}{rR} = 6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}.400\ \frac{7,43.10^6 - 6,37.10^6}{7,43.10^6.6,37.10^6} = \mathbf{3,57.10^9\ J = 3570\ MJ}$$

Conviene hacer notar, para evitar una posible confusión, que esta cantidad no sería el trabajo necesario para poner al satélite **en órbita**. Con la energía que acabamos de calcular podríamos levantar el satélite hasta la altura de la órbita y dejarlo allí **con velocidad cero** (naturalmente, se caería de inmediato). Faltaría todavía la energía cinética necesaria, que se calcularía con facilidad sabiendo la masa del satélite y la velocidad orbital calculada en el apartado b): sumada esa energía cinética a los 3570 MJ que acabamos de obtener, tendríamos el trabajo necesario para llevar el satélite desde el reposo en la superficie de la Tierra hasta la situación estacionaria en la órbita.

MODELO 06

C1.– a) Enuncie las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.
b) Si el radio de la órbita de la Tierra es $1,50.10^{11}$ m y el de Urano $2,87.10^{12}$ m, calcule el periodo orbital de Urano.

a) Véase la teoría.

b) Una aplicación directa de la tercera ley de Kepler, que relaciona los movimientos de los distintos planetas entre sí: para órbitas circulares, los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas. Conociendo los radios orbitales de la Tierra y de Urano, y sabiendo que el periodo de revolución de la Tierra es de 365,25 días, resulta inmediato el periodo de Urano:

$$\frac{T_U^2}{T_T^2} = \frac{r_U^3}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad T_U = \sqrt{\frac{r_U^3}{r_T^3}T_T^2} = \sqrt{\frac{(2,87.10^{12}\ m)^3}{(1,50.10^{11}\ m)^3}(365,25\ días)^2} = \mathbf{30568,64\ días\ terrestres}$$

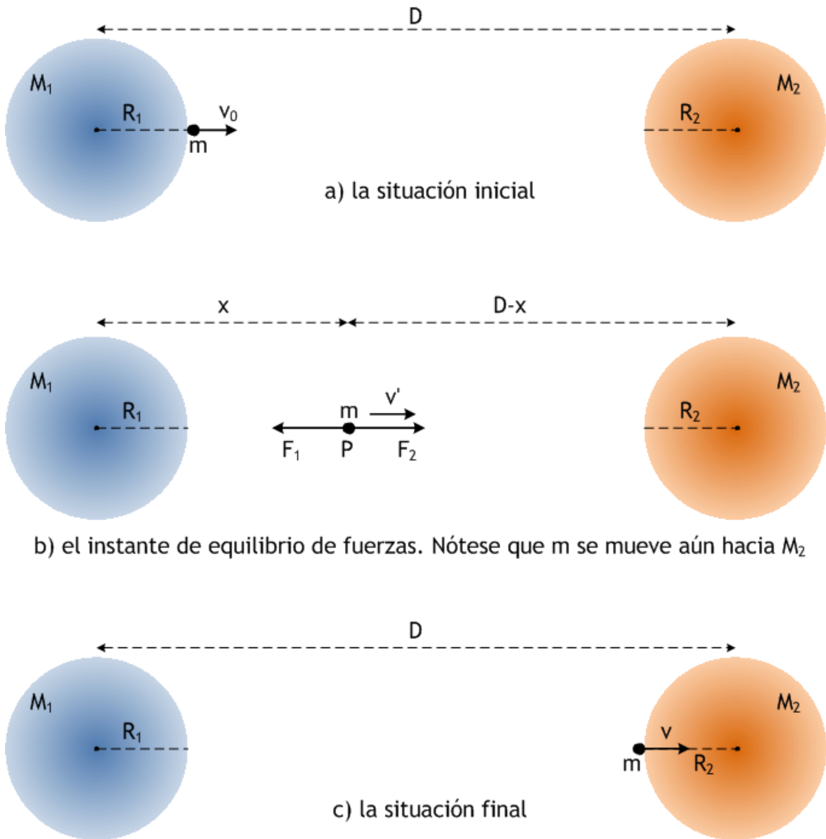
es decir, cerca de 84 años terrestres.

A1.– Se lanza una nave de masa m = 5.10^3 kg desde la superficie de un planeta de radio R_1 = 6.10^3 km y masa M_1 = 4.10^{24} kg, con velocidad inicial v_0 = 2.10^4 m/s, en dirección hacia otro planeta del mismo radio $R_2 = R_1$ y masa $M_2 = 2M_1$, siguiendo la línea recta que une los centros de ambos planetas. Si la distancia entre dichos centros es D = 4,83.10^{10} m, determine:

a) La posición del punto P en el que la fuerza neta sobre la nave es cero.

b) La energía cinética con la que llegará la nave a la superficie del segundo planeta.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}



a) la situación inicial

b) el instante de equilibrio de fuerzas. Nótese que m se mueve aún hacia M_2

c) la situación final

La figura recoge todas las situaciones instantáneas de interés en el problema. En a) podemos ver el momento del lanzamiento desde la superficie de M_1, cuando m sale con velocidad v_0. Sobre la nave hay dos fuerzas gravitatorias, aplicadas por M_1 y M_2, que son de sentido opuesto y hemos llamado F_1 y F_2. La distancia D es mucho mayor que los radios $R_1 = R_2$ de los planetas, lo que va a ser importante en algunos cálculos posteriores.

Parece obvio que al principio $F_1 > F_2$ (de hecho, $F_1 >> F_2$), así que la nave va perdiendo velocidad. Sin embargo, a medida que se aleja de M_1 la fuerza F_1 decrece mientras que F_2 aumenta. Tras un largo camino, se llegará a la situación b), un punto P en que $F_1 = F_2$ y se tiene el equilibrio gravitatorio. Naturalmente, la velocidad v_0 de la nave al salir de la superficie de M_1 debe ser lo bastante grande para, al menos, llegar hasta el punto P.

En una conocida novela de Julio Verne, De la Tierra a la Luna, se plantea la situación de un cohete lanzado desde la Tierra hacia la Luna, que va perdiendo velocidad a medida que asciende hasta que llega a detenerse justo en el punto en que se equilibran las atracciones gravitatorias terrestre y lunar. La nave se "queda quieta", colgada entre Tierra y Luna y sin moverse hacia una u otra, ya que está en reposo y sin fuerza neta que la acelere hacia algún lado. Incidentalmente, esta dramática situación físico-literaria es resuelta por los viajeros a bordo con una aplicación igualmente dramática de la ley de conservación del momento lineal.

Volviendo a nuestro problema: si m llega al punto P de equilibrio con velocidad cero, se quedaría en reposo y en equilibrio ahí, como imaginó Verne. Así que, si va a seguir viaje hacia M_2, es porque en P aún tiene alguna velocidad v' residual hacia M_2. A partir de ahí, la fuerza F_2 se vuelve dominante y m comienza a acelerar hacia M_2 de forma creciente, hasta llegar a su superficie con una velocidad final v. Un poco de reflexión, sin necesidad de cálculos, debería bastar para entender que $v > v_0$, algo que tiene que ver con que $M_2 = 2M_1$.

a) Los cálculos formales para hallar la posición de P son sencillos y se basan en aplicación directa de la ley de Newton para atracción entre masas puntuales (o esféricas, lo que viene a ser igual). La conocida expresión

$$F = G\frac{mm'}{d^2}$$

se aplica en nuestro caso para pedir que $F_1 = F_2$ en el punto P. Llamamos, como se ve en la figura, x a la distancia entre P y el centro de M_1; consiguientemente, D−x es la distancia entre P y el centro de M_2. Así, tendrá que ser

$$F_1 = F_2 \quad\Rightarrow\quad G\frac{M_1 m}{x^2} = G\frac{M_2 m}{(D-x)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{M_1}{x^2} = \frac{2M_1}{(D-x)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(D-x)^2} \quad\Rightarrow\quad x\sqrt{2} = D - x$$

de modo que
$$x = \frac{D}{\sqrt{2}+1} = \frac{4{,}83.10^{10}}{\sqrt{2}+1} = \mathbf{2{,}00.10^{10}\ m}$$

el punto P está a 2,00.10^{10} m del centro de M_1 y a 2,83.10^{10} m del centro de M_2.

b) La energía mecánica de un objeto de masa m dentro del campo gravitatorio creado por una masa M es la conocida suma de energía cinética de m y potencial del par m−M,

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

en la que se supone, por cierto, que M no tiene energía cinética (generalmente, el sistema de referencia está en M, así que esto sería correcto). En nuestro problema, sin embargo, intervienen los dos planetas M_1 y M_2 y la nave m. Esto complica las cosas notablemente, ya que tendríamos que pensar en las energías potenciales de **todos los pares de objetos**, es decir, de los pares $m-M_1$, $m-M_2$ e incluso del par M_1-M_2. Estas energías potenciales se escribirían

$$E_p^{m-M_1} = -G\frac{M_1 m}{r_1}; \quad E_p^{m-M_2} = -G\frac{M_2 m}{r_2}; \quad E_p^{M_1-M_2} = -G\frac{M_1 M_2}{D}$$

donde r_1 es la distancia entre m y el centro de M_1 y r_2 la distancia entre m y el centro de M_2. La energía potencial del par M_1-M_2 es evidentemente constante, ya que la distancia D entre los dos planetas es invariable; por esa razón desaparecerá de los cálculos. La energía mecánica de nuestra situación se escribirá, entonces

$$E = E_c + E_p^{m-M_1} + E_p^{m-M_2} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_1 m}{r_1} - G\frac{M_2 m}{r_2}$$

Nótese que no se incluyen términos de energía cinética para M_1 y M_2, que se suponen en reposo, ni la energía potencial del par M_1 y M_2, que se simplificaría en todo caso posteriormente, como ya se ha dicho más arriba. Ahora podemos escribir la conservación de energía mecánica entre a), la situación inicial al salir de M_1, y c), la situación final al llegar a la superficie de M_2:

$$E^{a)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} - G\frac{M_2 m}{D-R_1} = E^{c)} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_1 m}{D-R_2} - G\frac{M_2 m}{R_2}$$

expresión que, en principio, nos permitiría hacer las cuentas, puesto que todo se conoce ahí salvo la velocidad final v. Sin embargo, fijémonos en los denominadores $D-R_1$ y $D-R_2$: como D es mucho mayor (de hecho, cerca de 10^4 veces mayor) que R_1 o R_2, sucede que $D-R_1 \approx D$ y $D-R_2 \approx D$. Así que podemos reescribir nuestra igualdad como

$$E^{a)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} - G\frac{M_2 m}{D} = E^{c)} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_1 m}{D} - G\frac{M_2 m}{R_2}$$

y ahora, de nuevo por la misma razón $D >>> R_1$, el término de energía potencial $-G\frac{M_2 m}{D}$ del primer miembro es mucho más pequeño (de hecho, unas 5000 veces) que el término $-G\frac{M_1 m}{R_1}$, así que podemos despreciar aquel frente a éste. Lo mismo sucede con los términos de energía potencial $-G\frac{M_2 m}{R_2}$ y $-G\frac{M_1 m}{D}$ del segundo miembro, donde se puede despreciar $-G\frac{M_1 m}{D}$. Así, reescribimos de nuevo nuestra conservación de energía de manera definitiva:

$$E^{a)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} = E^{c)} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_2 m}{R_2}$$

para despejar la energía cinética con que llega la nave a M_2:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} + G\frac{M_2 m}{R_2} = \frac{1}{2}mv_0^2 + G\frac{M_1 m}{R_1}$$

donde se ha usado $M_2 = 2M_1$, $R_1 = R_2$. Operando con los datos del enunciado:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} + G\frac{M_2 m}{R_2} = \frac{1}{2}mv_0^2 + G\frac{M_1 m}{R_1} = \frac{1}{2}5.10^3(2.10^4)^2 + 6,67.10^{-11}\frac{4.10^{24}.5.10^3}{6.10^6} = \mathbf{1,22.10^{12}\ J} = \mathbf{1,22\ TJ}$$

JUNIO 06

A1.– Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es $-4{,}5.10^9$ J y su velocidad es 7610 m s^{-1}. Calcule:

a) **El módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.**

b) **El periodo de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37.10^6$ m

a) Hay diferentes modos de enfocar este ejercicio. Probablemente, lo más obvio sería ir a buscar la masa m del satélite y el radio r de la órbita, a partir de los datos de energía mecánica y velocidad. El radio de la órbita es inmediato, ya que la velocidad orbital

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

está directamente relacionada. Despejando, será

$$r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{7610^2} = 6887{,}44 \text{ km}$$

y la masa m puede obtenerse de la energía mecánica. En efecto, sabemos que la energía cinética del satélite es igual a la energía mecánica, con el signo contrario:

$$E_c = -E = -\frac{1}{2}E_p$$

relaciones que **son válidas en una órbita circular**. Así que sabemos que la energía cinética del satélite es $4{,}5.10^9$ J, y eso nos permite escribir

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2E_c}{v^2} = \frac{2.4{,}5.10^9}{7610^2} = 155{,}41 \text{ kg}$$

Así que ahora no hay dificultad en los valores de p y L:

$$p = mv = 155{,}41 \text{ kg} .7610 \text{ m/s} = \mathbf{1{,}18.10^6 \ kgms^{-1}}$$

$$L = mvr = 155{,}41 \text{ kg} . 7610 \text{ m/s} . 6887{,}44.10^3 \text{ m} = \mathbf{8{,}15.10^{12} \ kgm^2 s^{-1}}$$

b) El periodo de la órbita puede obtenerse del radio y la velocidad,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi.6887{,}44.10^3 \text{ m}}{7610 \text{ m/s}} = 5686{,}6 \text{ s} = \mathbf{1\ h\ 34\ min\ 46{,}6\ s}$$

y la altura sobre la Tierra es una obviedad desde que conocemos r:

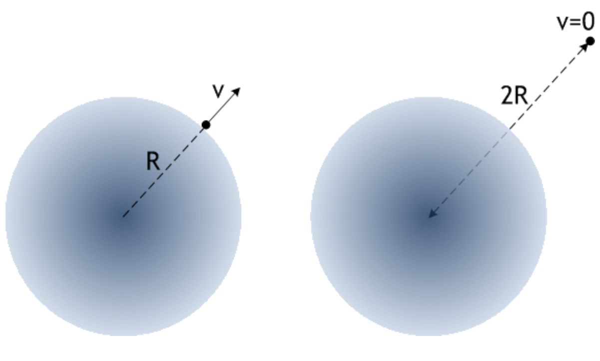
$$h = r - R = 6887{,}44 - 6370 = \mathbf{517{,}44\ km}$$

SEPTIEMBRE 06

C1.– a) Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad v. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de v necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra.

b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior, ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6370$ km



a) Las fuerzas gravitatorias son conservativas. Por lo tanto, **la energía mecánica del objeto lanzado se conserva**, y en ello se basa la respuesta al problema: todo lo que hemos de hacer es escribir que la energía mecánica, suma de cinética y potencial, es la misma en el momento en que el objeto es lanzado con velocidad v desde la superficie de la Tierra, a la izquierda de la figura, y en el momento en que, agotada la velocidad, se detiene a una altura R sobre la superficie (es decir, a distancia r = 2R del centro de la Tierra), a la derecha en la figura. Esta igualdad queda:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2R}$$

ya que al final no hay energía cinética. Basta entonces despejar v:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{Mm}{2R} + G\frac{Mm}{R} = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}) = G\frac{Mm}{2R} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{G\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{R}}}$$

b) Para escapar del campo gravitatorio terrestre se precisa una energía mecánica mínima de 0 J, E≥ 0 J. Si la energía mecánica es 0 J, bastará para alejar el objeto hasta una distancia infinita, aunque con velocidad final cero; si la energía mecánica es mayor que 0 J se alcanzará un alejamiento infinito y aún quedará energía cinética residual. Veamos, pues, cuánta energía mecánica tiene nuestro objeto si se lanza desde la superficie terrestre con una velocidad doble a la anterior:

$$E = \frac{1}{2}m(2v)^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m\,4G\frac{M}{R} - G\frac{Mm}{R} = 2G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R} = G\frac{Mm}{R}$$

una cantidad positiva. En consecuencia, **escapará del campo gravitatorio**. Esto era evidente, ya que la velocidad de lanzamiento es $2\sqrt{G\frac{M}{R}}$, y sabemos que la velocidad de escape (la velocidad mínima para salir del campo) desde la superficie de la Tierra es $v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$, una velocidad menor que aquella. Con la velocidad de escape v_e la energía mecánica es justamente 0 J; con la velocidad 2v que estamos empleando la energía mecánica es mayor que 0 J.

MODELO 07

C1.– Un objeto de 5 kg de masa posee una energía potencial gravitatoria E_p = –2.10^8 J cuando se encuentra a cierta distancia de la Tierra.

a) Si el objeto a esa distancia estuviera describiendo una órbita circular, ¿cuál sería su velocidad?

b) Si la velocidad del objeto a esa distancia fuese de 9 km/s, ¿cuál sería su energía mecánica? ¿Podría el objeto estar describiendo una órbita elíptica en este caso?

a) Si el objeto describe una órbita circular su distancia al centro de la Tierra es constante, el radio r de la órbita. Consecuentemente, también lo será la energía potencial gravitatoria

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -2.10^8 \text{ J} \qquad (1)$$

De otra parte, un objeto en órbita circular tiene una velocidad $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$ (2)

de forma que, combinando (1) y (2)

$$v^2 = G\frac{M}{r} \qquad \Rightarrow \qquad E_p = -G\frac{M}{r}m = -v^2 m \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{-\frac{E_p}{m}} = \sqrt{-\frac{-2.10^8}{5}} = \mathbf{6{,}32.10^3\ m/s}$$

tenemos la velocidad orbital que nos piden.

b) Si la velocidad del objeto es de 9 km/s, la conclusión inmediata es que no está en trayectoria circular: en efecto, esa trayectoria requiere el cumplimiento exacto de (2), y eso no sucedería con esta velocidad demasiado alta. Podemos calcular la energía mecánica del objeto sumando las energías cinética y potencial, sabiendo que la última es –2.10^8 J:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}5.9000^2 - 2.10^8 = \mathbf{2{,}5.10^6\ J} = \mathbf{2{,}5\ MJ}$$

y obtenemos un resultado positivo, E > 0. Esto es muy relevante acerca de su posible trayectoria: como sabemos, las órbitas cerradas, circulares o elípticas, requieren que el objeto esté **ligado** a la Tierra, es decir, que tenga **energía mecánica negativa**. Una energía mecánica nula o positiva significa que la trayectoria es parabólica o hiperbólica, que sería nuestro caso. En conclusión, la respuesta es **no puede estar en una órbita elíptica a esa distancia de la Tierra y con esa velocidad**.

Queda para el alumno comprobar que la velocidad máxima que podría llevar el objeto en ese lugar para poder desarrollar una órbita elíptica sería de 8944,27 m/s.

JUNIO 07

C1.– Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre, calcule:

a) la relación entre las densidades medias $\rho_{Luna}/\rho_{Tierra}$.

b) la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(v_e)_{Luna}/(v_e)_{Tierra}$.

a) La aceleración de caída libre gravitatoria en la superficie de un planeta (es decir, en puntos muy próximos a esa superficie) es la intensidad de campo en la superficie:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Además, esta masa M puede escribirse en función de la densidad media del planeta,

$$M = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

así que finalmente la gravedad superficial puede ponerse como función de la densidad y el radio del planeta:

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R$$

Aplicando esta expresión a Tierra y Luna, tenemos

$$g_T = \frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T \qquad ; \qquad g_L = \frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L$$

y, dividiendo ambas miembro a miembro, junto con $g_L = \frac{1}{6}g_T$ y $R_L = 0{,}27R_T$, queda

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L}{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T} = \frac{\rho_L R_L}{\rho_T R_T} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{R_T}{R_L}\frac{g_L}{g_T} = \frac{R_T}{0{,}27R_T}\frac{\frac{1}{6}g_T}{g_T} = \frac{1}{0{,}27.6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}62}} = \mathbf{0{,}62}$$

b) Podemos escribir la velocidad de escape de un planeta en función de su densidad media y de su radio, de forma parecida al modo en que lo hemos hecho con la intensidad de campo en su superficie. En efecto,

$$v_e = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho R^2}$$

de modo que las velocidades de escape de la Tierra y de la Luna son, respectivamente,

$$v_e^T = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T^2} \qquad ; \qquad v_e^L = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L^2}$$

y, dividiendo miembro a miembro, el cociente pedido:

$$\frac{v_e^L}{v_e^T} = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T^2}} = \sqrt{\frac{\rho_L R_L^2}{\rho_T R_T^2}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}62}\frac{(0{,}27R_T)^2}{R_T}} = 0{,}27\sqrt{\frac{1}{1{,}62}} = \mathbf{0{,}21}$$

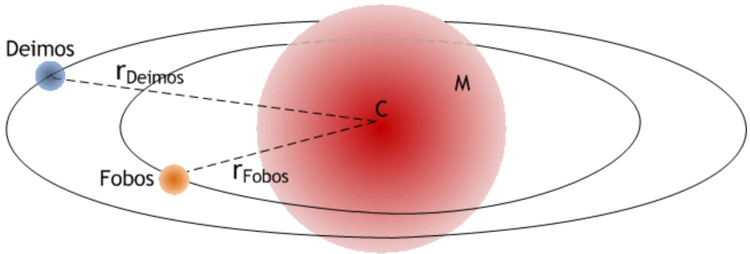
B1.– Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9380 km de radio respecto al centro del planeta, y un periodo de revolución de 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23460 km de radio. Determine:

a) La masa de Marte.
b) El período de revolución del satélite Deimos.
c) La energía mecánica del satélite Deimos.
d) El módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de Fobos = $1{,}1.10^{16}$ kg; Masa de Deimos = $2{,}4.10^{15}$ kg

a) Podemos obtener la masa de Marte a partir de la tercera ley de Kepler, la de los periodos de revolución, aplicada a Fobos, de cuya órbita conocemos radio y periodo. En efecto, para una trayectoria circular esa ley es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$



donde M es la masa central que retiene al satélite, Marte en nuestro caso. Entrando ahí con los valores de r y T para Fobos, despejamos

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11}.(7{,}65.3600)^2}(9380.10^3)^3 = \mathbf{6{,}44.10^{23}\ kg}$$

b) De nuevo la ley de los periodos, poniendo en juego las órbitas de Fobos y Deimos: **los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios** (órbitas circulares) **de las órbitas**. Esto es:

$$T^2_{Fobos} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3_{Fobos} \qquad ; \qquad T^2_{Deimos} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3_{Deimos}$$

y, dividiendo miembro a miembro,
$$\frac{T^2_{Fobos}}{T^2_{Deimos}} = \frac{r^3_{Fobos}}{r^3_{Deimos}} \quad \Rightarrow \quad T_{Deimos} = T_{Fobos}\sqrt{\frac{r^3_{Deimos}}{r^3_{Fobos}}} = 7{,}65\sqrt{\frac{23460^3}{9380^3}} = \mathbf{30{,}26\ h}$$

c) La energía mecánica de Deimos es suma de su energía cinética y potencial. Como sabemos, **esa energía mecánica es constante** y, para una órbita supuestamente circular, se calcula con facilidad

$$E = -G\frac{Mm}{2r} = -6{,}67.10^{-11}\frac{6{,}44.10^{23}.2{,}4.10^{15}}{2.23460.10^3} = \mathbf{-2{,}20.10^{21}\ J}$$

d) Finalmente, el módulo del momento angular se escribe:

$$\mathbf{L} = m\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{r} \qquad \Rightarrow \qquad L = mvr$$

de modo que se requiere el cálculo de la velocidad v de Deimos, para traerla a esta expresión. Se obtiene con facilidad conocido el radio y el periodo orbitales, puesto que

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

así que finalmente escribimos

$$L = m\frac{2\pi r}{T}r = \frac{2\pi r^2 m}{T} = \frac{2\pi(23460.10^3)^2.2{,}4.10^{15}}{30{,}26.3600} = \mathbf{7{,}62.10^{25}\ kg\,m^2s^{-1}}$$

SEPTIEMBRE 07

C1.– a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media?;

b) ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?

Datos: Radio de la Tierra, R_T = 6371 km; Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra g = 9,8 m s^{-2}

(Véase JUNIO **03 C1**, esencialmente idéntico)

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R es la conocida expresión:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Para abordar la cuestión debemos obtener expresiones para la masa M_P y el radio R_P del planeta, en función respectivamente de la masa M_T y el radio R_T de la Tierra. De entrada, sabemos R_T = 2 R_P, directamente en el enunciado. En cuanto a la masa, podemos escribir

$$M_P = \rho_P\, V_P = \rho_P\, \frac{4}{3}\pi R_P^3 = \rho_T \frac{4}{3}\pi (\frac{R_T}{2})^3 = \frac{1}{8}\,\rho_T \frac{4}{3}\pi R_T^3 = \frac{1}{8} M_T$$

donde se ha usado que la densidad de ambos planetas es la misma. Podemos entonces hacer el cálculo de g_P:

$$g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} = G\,\frac{\frac{1}{8}M_T}{(\frac{R_T}{2})^2} = G\frac{\frac{M_T}{8}}{\frac{R_T^2}{4}} = \frac{1}{2}\,G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{2}\,9,8 = \mathbf{4,9\ m/s^2} \qquad (1)$$

b) Podemos deducir el periodo de la tercera ley de Kepler. Se escribiría, llamando todavía M_P a la masa del planeta y R_P a su radio:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_P}\, r^3 = \frac{4\pi^2}{G\,M_P}\,(R_P + h)^3$$

donde h = 400 km es la altura del satélite sobre la superficie del planeta. Ahora, para poder operar usando los datos proporcionados en el enunciado, debemos referirnos sólo al radio de la Tierra, R_T = 6371 km, pero no tenemos datos acerca de la masa de la Tierra y, por tanto, tampoco del planeta. Sin embargo, el producto GM_P puede obtenerse de (1) con facilidad (una estrategia que hemos empleado en varios problemas anteriores):

$$GM_P = 4,9\ R_P^2$$

y esto sí nos permite terminar los cálculos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M_P}\,(R_P+h)^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{4,9R_P^2}\,(R_P+h)^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{4,9(\frac{R_T}{2})^2}\,(\frac{R_T}{2}+h)^3} = \sqrt{\frac{16\pi^2}{4,9.(6371.10^3)^2}(\frac{6371.10^3}{2}+4.10^5)^3} = \mathbf{6049,63\ s}$$

es decir, un periodo de **1 h 40 min 50 s**.

SEPTIEMBRE 07

A1.– Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre el mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).

a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita?

b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra = 5,96.10^{24} kg; Radio de la Tierra = 6371 km

Sobre satélites geoestacionarios, véase SEPTIEMBRE **00 C1**, también tiene interés SEPTIEMBRE **02 A1**

Sol.– a) 42203,3 km; b) Desde el reposo en la superficie terrestre, 1,15.10^9 J

MODELO **08**

B1.– Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad de la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) Calcule la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.
b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.
c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.
d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario? Justifique la respuesta.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra = $5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra = $6{,}37.10^6$ m

a) La velocidad de escape (mínima) del campo gravitatorio terrestre **desde un determinado lugar** es la velocidad que debe tener un objeto, **en ese lugar**, para conseguir una **energía mecánica mínima de 0 J**, que le permitiría eventualmente alejarse de la Tierra de modo indefinido. Recordemos que, convencionalmente, se llama velocidad de escape a la mínima velocidad necesaria para "escaparse" del campo gravitatorio. Así pues, necesitaríamos que la energía cinética del objeto (positiva) fuese, como mínimo, igual a la energía potencial gravitatoria (en valor absoluto) en el lugar en que se produce la discusión

$$E = \frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{Mm}{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_e = \sqrt{2\frac{GM}{r}} \qquad (1)$$

Así, por ejemplo, la velocidad de escape **desde la superficie de la Tierra** se escribe $v_{e,\text{Superficie}} = \sqrt{2\frac{GM}{R}}$, tal como aparece en frecuentes ejercicios. R es el radio de la Tierra, y el valor de esta velocidad es

$$v_{e,\text{Superficie}} = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\,\frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{6{,}37.10^6}} = 11190{,}7 \text{ m/s} = 11{,}19 \text{ km/s}$$

algo más de 11 km/s. Nótese que la posición desde la que "escapamos" aparece en (1) en la variable r, distancia al centro de la Tierra, que queda como R para la superficie terrestre. Si nos encontramos a una distancia r tal que la velocidad de escape sea la mitad que la velocidad de escape desde la superficie, entonces debe ser

$$v_e^{\text{órbita}} = \sqrt{2\frac{GM}{r}} = \frac{1}{2} v_e^{\text{superficie}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\frac{GM}{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{1}{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R}} \qquad \Rightarrow \qquad r = 4R$$

es decir, el radio de la órbita es cuatro veces mayor que el radio terrestre. La fuerza de atracción entre Tierra y satélite, de acuerdo a la ley de Gravitación, resulta

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{16R^2} = \frac{9{,}8}{16} m = \frac{9{,}8}{16} 200 = \mathbf{122{,}5\ N}$$

donde se ha hecho uso del valor de g en la superficie terrestre, $g = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

b) El potencial gravitatorio creado por la Tierra en un punto situado a distancia r de su centro es $V = -G\frac{M}{r}$ J/kg, es decir, el mismo que crearía una masa puntual M situada en el centro de la Tierra. A la distancia r = 4R el valor de V resulta ser

$$V = -G\frac{M}{r} = -6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}98.10^{24}}{4.6{,}37.10^6} = \mathbf{-1{,}57.10^7\ J/kg}$$

c) La energía mecánica del satélite en su órbita es la constante

$$E = E_c + E_p = -G\frac{Mm}{2r}$$

suma de las energías potencial y gravitatoria, y es además la mitad de la energía potencial, que podemos hallar con sencillez a partir del potencial calculado en el apartado anterior,

$$E_p = mV = 200(-1{,}57.10^7) = -3{,}13.10^9 \text{ J} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{1}{2}E_p = \mathbf{-1{,}57.10^9\ J}$$

d) Si fuese un satélite geoestacionario, su periodo orbital sería de 24 h: bastará calcularlo y comprobar si coincide con este valor. Con los datos disponibles, lo más práctico parece usar directamente la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{64R^3}{9{,}8R^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{64R}{9{,}8}} = 2\pi\sqrt{\frac{64.6{,}37.10^6}{9{,}8}} = 40525{,}33 \text{ s} = \mathbf{11\ h\ 15\ min\ 25\ s}$$

de modo que le falta altura para ser geoestacionario. De hecho, el radio de una órbita geoestacionaria es de unos 42200 km (véase **SEPTIEMBRE 00 C1**) y en nuestro caso r = 4R = 4.6370 = 25480 km. Eso sí, nuestro satélite está cerca de girar con la mitad de la velocidad angular de la Tierra, de modo que cada día pasa dos veces por la misma vertical sobre la superficie terrestre.

JUNIO 08

C2.– Una sonda de masa 5000 kg se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de $1,5R_T$. Determine:

a) **el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra;**
b) **la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.**

Datos: **Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m² kg⁻²;** **Masa de la Tierra, $M_T = 5,98.10^{24}$ kg;** **Radio de la Tierra, $R_T = 6,37.10^6$ m**

Para el apartado a), véase **SEPTIEMBRE 08 C1**, inmediatamente a continuación. Para el apartado b), véase **JUNIO 00 A1**.

Sol.– a) $3,09.10^{14}$ kg m² s⁻¹; b) $1,04.10^{11}$ J

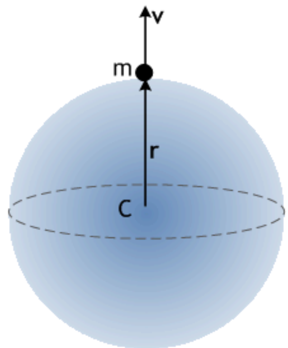
SEPTIEMBRE 08

C1.– Calcule el módulo del momento angular de un objeto de 1000 kg respecto al centro de la Tierra en los siguientes casos:

a) **Se lanza desde el polo norte perpendicularmente a la superficie de la Tierra con una velocidad de 10 km/s**
b) **Realiza una órbita circular alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 km de su superficie.**

Datos: **Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m² kg⁻²;** **Masa de la Tierra, $M_T = 5,98.10^{24}$ kg** **Radio de la Tierra, $R_T = 6,37.10^6$ m**

a) La figura superior representa el lanzamiento desde el polo norte. Se muestran los vectores posición **r** y velocidad **v** del objeto, ostensiblemente paralelos.



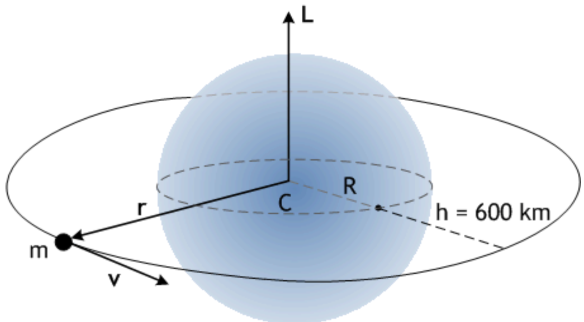
Ahora bien, el momento angular de un móvil está dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$$

así que, siendo **r** y **v** paralelos, es inmediato que **L** = **0**, sin que importe la masa del objeto o el módulo de la velocidad con que se lanza. Naturalmente, el módulo de **L** es

$$|\mathbf{L}| = 0 \ \mathbf{kg\ m^2\ s^{-1}}$$

b) Ahora la situación es notablemente diferente: los vectores **r** y **v** están en el plano de la órbita, son **perpendiculares** (gracias a que la órbita es circular), y su producto vectorial no se anulará. De hecho, el vector **L** será perpendicular al plano orbital y permanecerá constante, como hemos visto en muchos ejercicios anteriores. Su módulo será



$$|\mathbf{L}| = L = mvr$$

donde conocemos m = 1000 kg y r = R + h = $6,97.10^6$ m. La velocidad es la conocida expresión para una órbita de estas características,

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

y ya podemos calcular el módulo de **L** que nos piden:

$$L = mvr = m\sqrt{G\frac{M}{r}}\,r = m\sqrt{GMr} = 1000\sqrt{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}.6,97.10^{6}} = \mathbf{5,27.10^{13}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

MODELO 09

C1.– a) Enuncie la tercera ley de Kepler y demuéstrela en el caso de órbitas circulares.

b) Aplique dicha ley para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio medio de $1,49.10^8$ km.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m² kg⁻²

Sol.– a) Véase la teoría; b) M = $1,97.10^{30}$ kg

JUNIO 09

C1.– Un satélite artificial de 500 kg que describe una órbita circular alrededor de la Tierra se mueve con una velocidad de 6,5 km/s. Calcule:

a) La energía mecánica del satélite.

b) La altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra.

Datos: **Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg**
Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37.10^6$ m

Sol.– a) $-1{,}06.10^{10}$ J; b) 3070,6 km

JUNIO 09

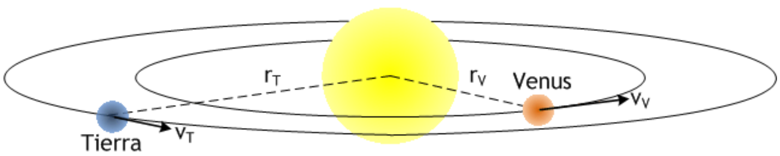
B1.– Suponiendo que los planetas Venus y la Tierra describen órbitas circulares alrededor del Sol, calcule:

a) El periodo de revolución de Venus.

b) Las velocidades orbitales de Venus y de la Tierra.

Datos: **Distancia de la Tierra al Sol = $1{,}49.10^{11}$ m; Distancia de Venus al Sol = $1{,}08.10^{11}$ m**
Periodo de revolución de la Tierra = 365 días

La práctica totalidad de los planetas del sistema solar giran alrededor del Sol en un plano común, de modo que podemos imaginar las órbitas circulares de Venus y la Tierra como se muestran en la figura, con sus radios respectivos r_V y r_T.



a) Podemos hacer un uso sencillo de la ley de los periodos de Kepler: los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas (cuando son circulares, como es el caso). De ahí,

$$\frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{r_V^3}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_V^2}{365^2} = \frac{(1{,}08.10^{11})^3}{(1{,}49.10^{11})^3} \quad \Rightarrow \quad T_V = 365\sqrt{\frac{1{,}08^3}{1{,}49^3}} = \mathbf{225\ días}$$

el periodo de Venus, medido en días terrestres.

b) Las velocidades orbitales pueden deducirse, en ambos casos, de sus periodos y radios orbitales respectivos, En efecto, el periodo de un planeta en su órbita circular puede escribirse

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

así que, para la Tierra, quedará $T_T = \dfrac{2\pi r_T}{v_T} \quad \Rightarrow \quad v_T = \dfrac{2\pi r_T}{T_T} = \dfrac{2\,\pi.1{,}49.10^{11}\ \text{m}}{365.24.3600\ \text{s}} = \mathbf{29686{,}5\ m/s = 29{,}69\ km/s}$

y para Venus, $T_T = \dfrac{2\pi r_T}{v_T} \quad \Rightarrow \quad v_V = \dfrac{2\pi r_V}{T_V} = \dfrac{2\,\pi.1{,}08.10^{11}\ \text{m}}{225.24.3600\ \text{s}} = \mathbf{34906{,}6\ m/s = 34{,}91\ km/s}$

Nótese que, de acuerdo con la teoría, la velocidad de un planeta es mayor en una órbita de menor tamaño: Venus se mueve con mayor velocidad que la Tierra.

SEPTIEMBRE 09

C1.– Razone si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) El valor de la velocidad de escape de un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra depende de la masa del objeto.

b) En el movimiento elíptico de un planeta en torno al Sol la velocidad del planeta en el perihelio (posición más próxima al Sol) es mayor que la velocidad en el afelio (posición más alejada del Sol).

a) **Falso**. La velocidad de escape es $v_e = \sqrt{2G\dfrac{M}{R}}$

donde M es la masa de la Tierra y R su radio: la masa m del objeto no aparece en esta expresión.

b) **Cierto**. De acuerdo con la ley de las áreas de Kepler o, lo que significa lo mismo, con la invariancia del momento angular del planeta, debe cumplirse que

$$m v_A r_A = m v_P r_P \quad \Rightarrow \quad v_A r_A = v_P r_P$$

donde m es la masa del planeta, r_A y r_P las distancias al Sol en el afelio y en el perihelio, respectivamente; v_A y v_P las velocidades respectivas en afelio y perihelio. De esta igualdad se sigue que si $r_A > r_P$, como de hecho es el caso, entonces $v_P > v_A$.

MODELO 10

A–P1.– Desde un punto de la superficie terrestre se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 100 kg que llega hasta una altura de 300 km. Determine:

a) **La velocidad de lanzamiento.**
b) **La energía potencial del objeto a esa altura.**

Si, estando a la altura de 300 km, queremos convertir el objeto en satélite de forma que se ponga en órbita circular alrededor de la Tierra:

c) **¿Qué energía adicional habrá que comunicarle?**
d) **¿Cuál será la velocidad y el periodo del satélite en esa órbita?**

Datos: **Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};** **Masa de la Tierra, $M_T = 5,98.10^{24}$ kg**
Radio de la Tierra, $R_T = 6370$ km

a) Una altura de 300 km es lo suficientemente grande como para no emplear la aproximación de Tierra plana, en la que se supone g = 9,8 m/s^2, constante e independiente de la altura sobre la superficie terrestre. De hecho, la gravedad a esa altura ha decrecido hasta

$$g = G\frac{M}{r^2} = 6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}}{(6670.10^3)^2} = 8,97 \text{ m/s}^2$$

una diferencia que se acerca a 1 m/s^2 menos que en la superficie, del orden de un 10%: en absoluto despreciable. (véase **SEPTIEMBRE 01 C1**, para una discusión detallada). Por consiguiente, escribiremos la energía mecánica del objeto como

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

y, como sabemos, esa cantidad E es un invariante, ya que las fuerzas gravitatorias son conservativas. Por lo tanto, esta suma valdrá lo mismo en la superficie que en el punto más alto de la trayectoria vertical. Llamando v_0 a la velocidad con que se produce el lanzamiento, y teniendo en cuenta que la velocidad final, a 300 km sobre la suerficie, es cero, tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 - G\frac{Mm}{R+h} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_0^2 = GM(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) = GM\frac{h}{R(R+h)} \qquad (1)$$

donde sólo resta operar:

$$v_0 = \sqrt{2GM\frac{h}{R(R+h)}} = \sqrt{2.6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}\frac{3.10^5}{6,37.10^6.6,67.10^6}} = \mathbf{2,37.10^3\ m/s}$$

para tener la velocidad del lanzamiento, cerca de cinco veces menor que la velocidad de escape, pero aún así una velocidad considerable.

b) La energía potencial del objeto a esa altura es **negativa**, vaya esto por delante, porque así son las energías potenciales gravitatorias. Su valor es

$$E_p^{\text{altura h}} = -G\frac{Mm}{R+h} = -6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}.100}{6,67.10^6} = \mathbf{-5,98.10^9\ J} \qquad (2)$$

y es, en todo caso, mayor que la energía potencial en la superficie de la Tierra, que sería **más negativa**. Podemos, a pesar de ello, manejar cantidades positivas si colocamos el nivel cero de la energía potencial sobre la superficie de la Tierra, en lugar de situarlo a distancia infinita, como implica manejar la expresión $E_p = -GMm/r$. Para desplazar el cero de la energía potencial a la superficie de la Tierra debemos redefinir la energía potencial como

$$\Delta E_p^{\text{altura h}} = -G\frac{Mm}{r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) = GMm\frac{h}{R(R+h)}$$

donde r es la distancia del punto de interés al centro de la Tierra y R el radio de la misma. Nótese que lo que calculamos no es otra cosa que la diferencia entre la energía potencial en un punto cualquiera y la energía potencial en la superficie; el incremento de energía potencial al subir hasta la altura h. Nótese también que, comparando con (1), el resultado que obtendremos no es otra cosa que la energía cinética que tenía el objeto al salir

$$\Delta E_p^{\text{altura h}} = GMm\frac{h}{R(R+h)} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}100.(2,37.10^3)^2 = \mathbf{2,81.10^8\ J} \qquad (3)$$

que no hace sino reflejar la conversión de energía cinética en potencial gravitatoria al subir hasta detenerse a la altura de 300 km. Los resultados recogidos en (2) y (3) son equivalentes; difieren en la colocación del cero para la energía potencial.

c) Llegado a la altura de 300 km, en reposo, el objeto comenzará de inmediato la caída hacia la superficie terrestre. Para que eso no suceda y se mantenga en órbita a esa distancia, se necesitaría la pertinente velocidad orbital (habría que encender algún motor en el objeto, o impulsarlo de alguna manera), cuyo valor conocemos bien

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

de modo que habrá que comunicar al objeto una energía cinética adicional de valor

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{2r}$$

que es la conocida energía cinética orbital. Sabemos, además, que su valor en una órbita circular es la mitad, cambiada de signo, de la energía potencial que ya tenemos calculada en (2). Se concluye, pues, que sería

$$E_c = -\frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2}(-5,98.10^9) = \mathbf{2,99.10^9\ J}$$

d) La velocidad sería, como ya hemos hecho notar, $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

pero también podemos deducirla directamente de la energía cinética:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2.2,99.10^9}{100}} = \mathbf{7,73.10^3\ m/s}$$

y el periodo, conocidos radio orbital y velocidad, es inmediato:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi.6,67.10^6}{7,73.10^3} = 36161,97\ s = \mathbf{10h\ 2min\ 42s}$$

MODELO 10

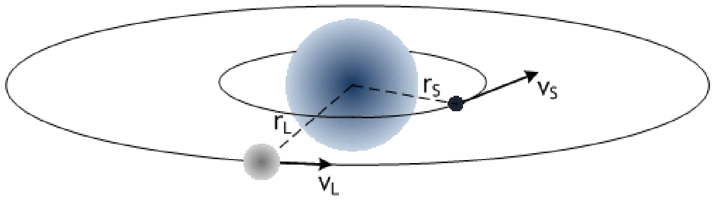
B–C1.– a) ¿Cuál es el periodo de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar?

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad del satélite y la velocidad de la Luna en sus respectivas órbitas?

Dato: Periodo de la órbita Lunar, T_L = 27,32 días

a) El satélite gira alrededor de la Tierra con un radio orbital

$$r_S = \frac{1}{4}r_L$$



igual a la cuarta parte del radio orbital de la Luna, r_L. De acuerdo con la ley de los periodos de Kepler, podemos poner

$$\frac{T_L^2}{T_S^2} = \frac{r_L^3}{r_S^3}$$

donde T_L = 27,32 días es el periodo lunar y T_S el periodo del satélite. Entrando con estos valores en la ley, queda:

$$\frac{T_L^2}{T_S^2} = \frac{r_L^3}{r_S^3} \quad\Rightarrow\quad \frac{T_L^2}{T_S^2} = \frac{(4r_S)^3}{r_S^3} = 64 \quad\Rightarrow\quad T_S = \frac{T_L}{8} = \frac{27,32}{8} = \mathbf{3,42\ días}$$

b) En cuanto a la relación entre las velocidades, recordemos que la velocidad de un objeto en órbita circular alrededor de la Tierra es

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

donde M es la masa de la Tierra y r el radio orbital. Escribiendo entonces las velocidades v_L y v_S de la Luna y del satélite en función de sus radios orbitales respectivos, y dividiendo miembro a miembro, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} v_L = \sqrt{G\frac{M}{r_L}} \\ v_S = \sqrt{G\frac{M}{r_S}} \end{array}\right\rangle \quad\Rightarrow\quad \frac{v_S}{v_L} = \frac{\sqrt{\frac{1}{r_S}}}{\sqrt{\frac{1}{r_L}}} = \sqrt{\frac{r_L}{r_S}} = \sqrt{4} = 2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v_S = 2v_L}$$

la relación que nos piden: el satélite tiene velocidad doble que la Luna.