

1. INTRODUCCIÓN

Las expresiones para la intensidad de campo  $E$  y el potencial  $V$  creados por una carga  $Q$  puntual son ya conocidos, y se reducen a

$$E = K \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (\text{en módulo, } E = K \frac{|Q|}{r^2} = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}) \quad (1)$$

$$V = K \frac{Q}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

donde  $r$  es la distancia de la carga al punto campo, y  $\mathbf{u}_r$  es el vector unitario de la carga hacia  $P$ . Además, la carga  $Q$  se utiliza siempre con su signo, salvo en la expresión del módulo de  $E$ , donde debe emplearse su valor absoluto.

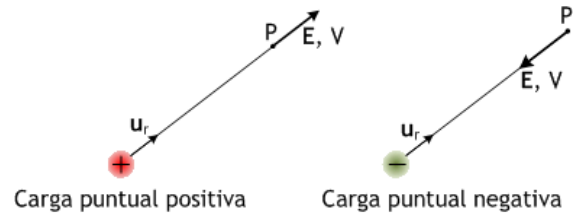


Figura 1: El campo creado por una carga puntual

De modo semejante, las expresiones para la intensidad de campo  $g$  y el potencial gravitatorio  $V$  creados por una masa puntual  $M$  resultan

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (\text{en módulo, } g = G \frac{M}{r^2}) \quad (3)$$

$$V = -G \frac{M}{r} \quad (4)$$

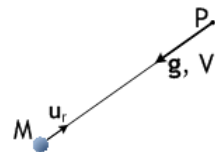


Figura 2: El campo creado por una masa puntual

Los campos eléctrico o gravitatorio creados por varias cargas o masas puntuales se entienden y calculan sin gran dificultad empleando el conocido **Principio de superposición**, según el cual las intensidades de campo, y los potenciales, tienen carácter aditivo. Simplemente, se suman.

Así, imaginando un supuesto de tres cargas creadoras,  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ , como las que aparecen en la figura 3, la intensidad de campo eléctrico  $E$  y el potencial  $V$  en un punto  $P$  se escriben

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \Sigma \mathbf{E}_i \quad (\text{¡una suma vectorial!})$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \Sigma V_i \quad (\text{una suma de escalares})$$

y de modo semejante para un supuesto de campo gravitatorio creado por varias masas puntuales.

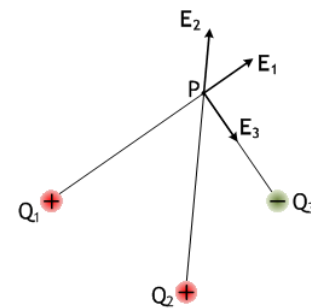


Figura 3: El campo creado por varias cargas puntuales

Las situaciones de esta índole han sido tratadas en detalle en la primera parte de este tema, de modo que aquí se trata de recordarlas únicamente como punto de partida para abordar otras disposiciones de masa o carga más complejas. Nos referimos concretamente a las que denominamos **distribuciones continuas** de masa o carga, una expresión que incluye situaciones de notable simetría como hilos, planos, esferas, etc., y también otras distribuciones más irregulares (por tanto, más difíciles de tratar). Ya que estamos en un curso de iniciación, la buena noticia es que nos dedicaremos exclusivamente a las distribuciones continuas más sencillas.

2. ¿HASTA DÓNDE LLEGA EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN?

Empecemos con un supuesto gravitatorio: imaginemos un hilo masivo (no importa si es rectilíneo) como el que hemos dibujado en la siguiente figura. Cuando tratamos con distribuciones **lineales** de masa, empleamos a menudo el concepto de **densidad lineal**,  $\lambda$ , que se refiere a la **cantidad de masa por unidad de longitud** de hilo, medida en kg/m en unidades SI. Así, una densidad lineal de 2 kg/m significa sencillamente que el hilo tiene 2 kg de masa por cada m de longitud.

Por supuesto, este hilo crea un campo gravitatorio en el espacio que le rodea (y también más lejos, pero se nota menos). La cuestión es cómo podemos llegar a conocer la intensidad de campo  $g$  en un punto  $P$  cualquiera del espacio.

La respuesta es, con toda generalidad, de nuevo el **Principio de Superposición**: los campos, y también los potenciales, se suman. Para que esta idea pueda llevarse a la práctica, necesitamos reducir de algún modo la masa con-

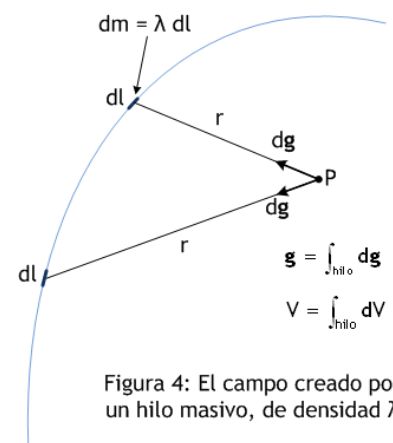


Figura 4: El campo creado por un hilo masivo, de densidad  $\lambda$

tinua del hilo a un conjunto de masas puntuales; para ello, el hilo se imagina **dividido en elementos infinitesimales dl**, cada uno de los cuales tiene una masa también infinitesimal de valor  $dm = \lambda dl$ . En la figura 4 hemos representado dos de esos elementos como muestra.

De este modo, cada elemento  $dm$  es entendido como **una masa puntual (infinitesimal)**. Nosotros sabemos hallar el campo y el potencial que esa masa puntual  $dm$  crean en cualquier punto: de hecho, es lo único que sabemos hacer. Así, un elemento  $dm$  de la figura crea, en un punto cualquiera P, un campo gravitatorio  $d\mathbf{g}$  radial, dirigido hacia el elemento  $dl$  correspondiente y de módulo infinitesimal que es, de acuerdo con (3)

$$d\mathbf{g} = G \frac{dm}{r^2} = G \frac{\lambda dl}{r^2} \quad (5)$$

Ahora, resta comprender que debemos considerar **todos** los elementos  $dl$  en que se dividió el hilo (y, puesto que  $dl$  es un trozo de hilo cuyo tamaño tiende a cero, el número de elementos tiende a infinito). Así, lo que hubiese sido una suma de algunos vectores en el caso de varias masas puntuales, se convierte ahora en una integral

$$\mathbf{g} = \int_{\text{hilo}} d\mathbf{g} \quad (6)$$

extendida a todo el hilo. Obsérvese que el cálculo así planteado nos daría el campo en un punto P, y que la integral debería resolverse de nuevo para hallar el campo en otro punto diferente del espacio. Naturalmente, la dificultad de llevar a cabo la integral (6) tiene una relación directa con la forma y tamaño del hilo: es más sencillo hacerla, por ejemplo, para un hilo rectilíneo e indefinido, de densidad  $\lambda$  constante.

Planteamos una suma parecida – es decir, otra integral – para obtener el potencial gravitatorio V en el punto P. Uno de los elementos de hilo crea un potencial infinitesimal en el punto P que escribimos siguiendo (4)

$$dV = -G \frac{dm}{r} = -G \frac{\lambda dl}{r} \quad (7)$$

y el potencial en P, aplicando el **Principio de Superposición**, se suma – se integra – a lo largo de todos los elementos  $dl$  del hilo, para quedar

$$V = \int_{\text{hilo}} dV = \int_{\text{hilo}} -G \frac{\lambda dl}{r} \quad (8)$$

De modo semejante, podemos abordar situaciones que impliquen distribuciones superficiales o volumétricas de masa o carga, pensando siempre en términos de considerar las distribuciones continuas como un conjunto (infinito) de elementos infinitesimales, cada uno de los cuales se comporta como una masa (o carga) puntual.

Como es lógico, el concepto de densidad debe ser adaptado a los requerimientos de cada situación. Básicamente, debemos distinguir entre densidades lineales ( $\lambda$ ), densidades superficiales ( $\sigma$ ) y densidades volúmicas ( $\rho$ ), de masa o de carga, según proceda. La tabla que sigue muestra las diferentes densidades y sus unidades más comunes:

Densidades	Masa	Carga
Lineal, $\lambda$	kg/m	C/m
Superficial, $\sigma$	kg/m <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>
Volúmica, $\rho$	kg/m <sup>3</sup> = 10 <sup>-3</sup> g/cm <sup>3</sup>	C/m <sup>3</sup>

Así, si nos planteamos el cálculo del campo gravitatorio creado en un punto P por una distribución superficial de masa, supondríamos a ésta formada por elementos infinitesimales de área  $dS$ , cada uno con una masa también infinitesimal y escrita como  $dm = \sigma dS$ .

Cada uno de esos elementos crea en el punto P un campo infinitesimal  $d\mathbf{g}$  como el que muestra la figura: el campo final en el punto P es la suma – la integral – de esas contribuciones de cada elemento  $dS$ . Finalmente, pues, acabamos escribiendo

$$\mathbf{g} = \iint_{\text{Sup}} d\mathbf{g} \quad (9)$$

$$V = \iint_{\text{Sup}} dV \quad (10)$$

expresiones en todo semejantes a (6) y (8), con la diferencia de que ahora los elementos  $dm$  se escriben de otro modo ( $d\mathbf{m} = \sigma dS$  en lugar de  $d\mathbf{m} = \lambda dl$ ), y las integrales se extienden a una superficie y no a un hilo.

Y así sucede también en un supuesto de distribución tridimensional de masa o carga, cuyo detalle nos vamos a ahorrar. Siempre es finalmente el **Principio de Superposición**: los campos y los potenciales se suman (sencillamente,

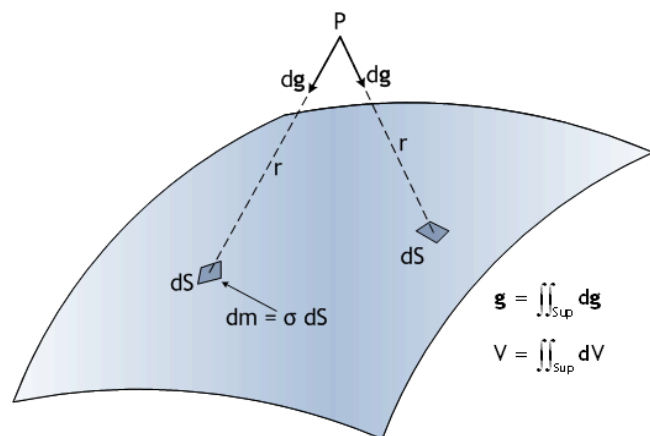


Figura 5: El campo creado por una superficie masiva, de densidad  $\sigma$

cuando se trata de unas pocas cargas o masas puntuales; de forma más complicada, a base de integrales, cuando hay distribuciones continuas).

Lo que destacamos es, entonces, que el **problema de cálculo del campo creado por cualquier distribución de cargas o masas está siempre teóricamente resuelto**, sobre la base de aplicar de un modo u otro el repetidamente mencionado **Principio de Superposición**.

Ahora bien, al enfrentarnos a casos concretos, encontraremos las dificultades matemáticas que aparecerán al intentar resolver integrales como (6), (8), (9) o (10). Según los casos, pueden resultar más o menos difíciles; a menudo, pueden ser extraordinariamente complejas. Todo ello depende, obviamente, del aspecto concreto que tengan nuestros hilos, superficies, volúmenes, etc..., creadores de campo. La situación, pues, puede resumirse así: **sabemos lo que tenemos que hacer, pero muchas veces no sabemos cómo hacerlo**.

### 3. LAS PROPUESTAS DEL TEOREMA DE GAUSS

De manera que, si se le dice a un alumno de 2º de Bachillerato: calcule el campo creado en cada caso por las siguientes distribuciones continuas de masa

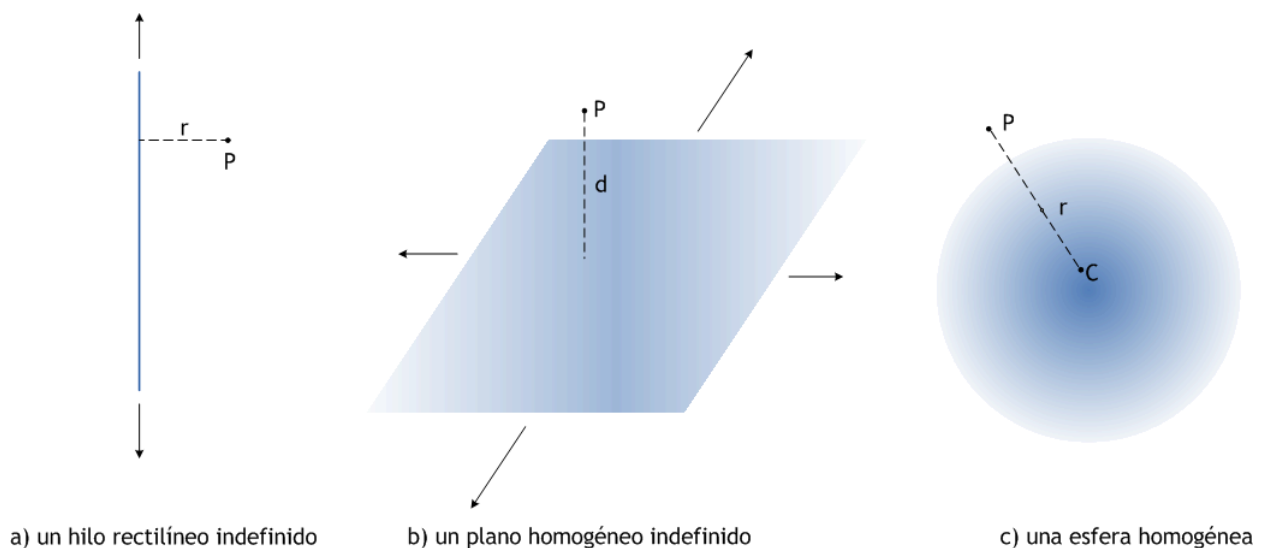


Figura 6: Calcular la intensidad de campo gravitatorio  $g$  y el potencial  $V$  en el punto  $P$ , en cada uno de los casos

en los puntos  $P$  que se señalan, respectivamente a una distancia  $r$  del hilo, o  $d$  del plano, o  $r$  del centro  $C$  de la esfera, quedará seguramente conmocionado: ¿cómo voy a hacer unas integrales que ni siquiera sé cómo empezar a escribir?

Casos como estos son en realidad sencillos y pueden ser integrados con facilidad por alguien con más experiencia, pero siguen muy probablemente fuera del alcance de un alumno en este nivel. Disponer de una herramienta que pudiera permitirnos resolver casos sencillos, como los de esta figura 6, sin necesidad de recurrir al Principio de Superposición puro y duro sería sin duda de agradecer.

Pues bien, ese es exactamente el papel que desempeñará el Teorema de Gauss, núcleo central de esta segunda parte del tema dedicado a los campos  $E$  y  $g$ . Aunque el significado de este teorema tiene más alcance que esto, nosotros lo emplearemos como **herramienta para obtener con sencillez y elegancia, sin implicar integraciones complejas, los campos  $E$  o  $g$  en situaciones de distribuciones de masa o carga que presenten cierta simetría**.

Las palabras clave son, como tendremos ocasión de comprobar, simetría y sencillez. Y el premio es la obtención de resultados para  $E$  o  $g$  esquivando la aplicación directa del método general descrito en el apartado anterior.

### 4. ¿QUÉ ES NECESARIO SABER PARA HABLAR DE GAUSS?

El enunciado del Teorema de Gauss para el campo eléctrico viene a decir algo como: **“el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad neta de carga contenida en el volumen encerrado por la superficie”**. Escrito en términos matemáticos, la cosa parece aún peor

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (11)$$

Por supuesto, ese galimatías requiere mucha explicación, y aún más la expresión (11), que hemos dulcificado al máximo. Términos como “flujo de campo eléctrico” o “superficie cerrada”, precisan ser explicados o como mínimo aclarados; sólo entonces puede uno volverse al enunciado anterior y comprender su contenido.

En consecuencia, debemos empezar por hacer una lista de conocimientos previos necesarios para abordar nuestro asunto. No es una lista larga:

- 1) Revisión del concepto de superficie
- 2) Definición de flujo de campo a través de una superficie

y cuando la completemos el enunciado escrito una líneas más arriba empezará a aclararse. Además, todo lo que se discuta acerca de los dos puntos de esa lista será de gran utilidad en el futuro (por ejemplo, en algún tema siguiente, cuando toque hablar de campo **magnético** e **inducción**).

## 5. REVISIÓN DEL CONCEPTO DE SUPERFICIE

Para la mayor parte de usos prácticos, el concepto de **área** o **superficie** – a menudo sinónimos – es familiar para cualquier alumno de Bachillerato. Se trata de una magnitud **escalar**, siempre positiva, medida en  $m^2$  en SI de unidades, o en cualquier otra de las muchas conocidas, como  $cm^2$  para superficies pequeñas o ha (hectárea =  $10000 m^2$ ) para superficies grandes, como las de una finca.

La forma que puede tener una superficie es sumamente variada: incluye casos muy sencillos, como las superficies **planas** de diversos **contornos**, que se muestran en la figura 7, y también superficies **curvas** de distinta complejidad, como las que aparecen en la figura 8.

Una cuestión interesante se refiere al carácter abierto o cerrado de una superficie: si es **abierta**, como la superficie a) de la figura 8, terminarás cayendo si caminas sobre ella sin cambiar de dirección: tiene límites. Además, una superficie abierta tiene un **contorno**. Todas las superficies planas de la figura 7 son abiertas.

Una superficie esférica es **cerrada**, de modo que carece de límites, siendo como es finita. Puedes caminar sobre ella sin cambiar de dirección indefinidamente, y no la abandonarás: simplemente, volverás al punto de partida. Obsérvese que una superficie cerrada carece de contorno, lo que tendrá cierto interés más adelante.

Por supuesto, existen muchos otros ejemplos de superficies cerradas: regulares, como una superficie cilíndrica (con tapas) o la superficie de cualquier prisma (con tapas), y también irregulares, como la superficie de una patata. Todas ellas son cerradas y carecen de contorno.

Ya sabíamos todo esto. Pero vamos a ir algo más lejos: en adelante, **las superficies van a tener carácter vectorial**. Cuando se le dice esto a alguien por primera vez, suele preguntarse a qué viene complicar las cosas de esa manera. Ese es, evidentemente, el punto de vista que alguien que **cre**e que las superficies son escalares y que acabamos de tener una mala ocurrencia. Pero no es así: en realidad, una superficie **es un vector**, y lo que sucede es que nos ocultan esta dramática verdad cuando somos pequeños. Lamentablemente, terminamos por crecer y enfrentarnos a la crudeza de la vida en forma de teoremas como el de Gauss.

La cuestión, entonces, se reduce a saber **cómo es el vector** que representa a una superficie determinada. Empezamos con lo fácil:

**Superficies planas:** Para asignar el vector **S** que representa a una superficie plana **S** debemos empezar escogiendo un sentido de recorrido de su contorno, entre las dos posibilidades existentes (a favor o en contra del sentido de las agujas del reloj).

Entonces, el vector **S** es **perpendicular al plano** de la superficie, su sentido es el **de avance de un destornillador** girando en el sentido de recorrido del contorno elegido. Su módulo, por fin, es  $|S| = S$  (o sea, el escalar de toda la vida).

En la figura 9 recogemos la aplicación de esta sencilla regla a alguna de las superficies planas que hemos visto más arriba. Debe notarse que siempre existen dos opciones para **S**, pero esa aparente indefinición queda resuelta en el momento en que se escoge un sentido de recorrido del contorno.

Y ya está. Cualquier superficie plana puede tratarse de esta manera. Es normal aplicar el vector **S** en el centro de la superficie, aunque este detalle tiene menor importancia. Podemos pensar ya en cosas algo más difíciles.



Figura 7: Superficies planas de distintos contornos: cuadrada, circular e irregular

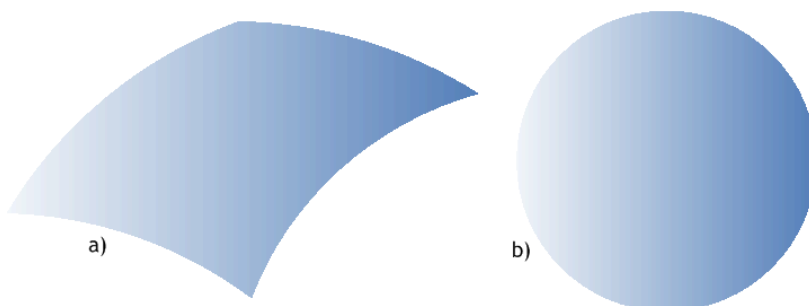


Figura 8: Ejemplos de superficies curvas: a) abierta; b) esférica (cerrada)

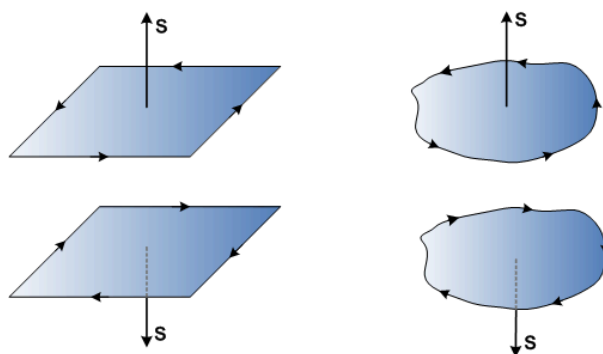


Figura 9: El vector superficie para superficies planas

**Superficies curvas:** No queremos oír nada de superficies curvas. Sabemos asignar un vector a una superficie plana, y no estamos dispuestos a hacer otra cosa, así que cogemos la superficie curva y la dividiremos en pequeñas porciones que puedan considerarse planas.

Para que esta idea pueda funcionar se requiere que las porciones en que dividamos la superficie sean realmente **muy pequeñas**; de hecho, **infinitesimales**: como es fácil de comprender, cuanto menor el tamaño de nuestras porciones de superficie, más correcta será la suposición de que sean planas. Podemos, por ejemplo, dibujar una retícula como la que puede verse en la figura 10, a base de dos familias de curvas ortogonales muy próximas entre sí, de manera tal que la superficie queda parcelada en elementos  $dS$  de tamaño infinitesimal, cada uno de los cuales puede tomarse como una minúscula superficie plana. Así, resulta fácil comprender cómo vamos a asignar un vector  $dS$  a cada uno de los elementos de superficie, siguiendo el algoritmo para superficie planas del apartado anterior.

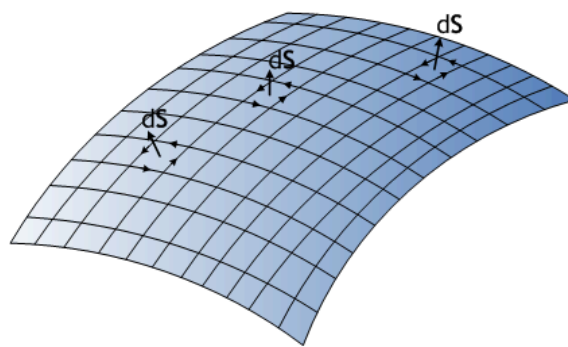


Figura 10: Elementos de área en un superficie curva

En la figura 10 mostramos algunos de los vectores  $dS$  que deberíamos considerar. Obsérvese que se ha escogido un sentido de recorrido del contorno de cada  $dS$ , y que **es el mismo para todos ellos**; eso es algo imprescindible y parece de sentido común. Nótese también que, siguiendo la curvatura de la superficie, la dirección de diversos vectores  $dS$  es diferente en distintos lugares.

Ahora estamos muy cerca del final: el vector  $S$  que asignaremos a nuestra superficie curva es la **suma de los vectores  $dS$  correspondientes a todos los elementos en que fue dividida la superficie en cuestión**. Evidentemente, esta suma es una integral, ya que el tamaño infinitesimal de los elementos  $dS$  implica que el número de elementos tienda a infinito. Qué le vamos a hacer.

En consecuencia, escribiremos una expresión como

$$S = \iint_{\text{Sup}} dS \quad (12)$$

para definir el vector superficie  $S$  que estamos buscando. Se lee: “**el vector superficie  $S$  asignado a la superficie de la figura es la suma – la integral – de los vectores  $dS$  correspondientes a los diferentes elementos de área en que fue dividida la superficie**”. No hay que olvidar ninguno, así que hacemos notar que la integral se extiende a toda la superficie. El doble signo de integración no tiene – al menos, de momento – otra misión que la de recordar que la integral se lleva a cabo sobre una superficie, y no hay razón para cogerle miedo ni particular antipatía. Una vez que se haya realizado la integral de (12), sin que discutamos lo fácil o difícil que sea eso, el resultado será un vector finito (no infinitesimal), como el que imaginamos en la figura 11.

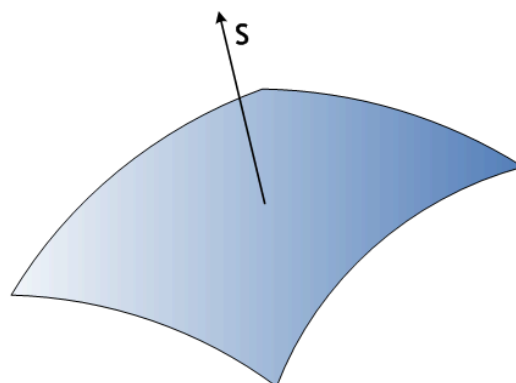


Figura 11: el vector  $S$  resultante para una superficie curva

Y estaría hecho: conceptualmente, no parece muy complicado. Por supuesto, hay detalles que no discutimos aquí, pero lo básico es esto.

¿Quién se está preguntando ya qué pasa con las **superficies cerradas**, como la superficie esférica que aparecía en la figura 8? Si intentamos imaginar, intuitivamente, cómo ha de ser el vector  $S$  para la superficie esférica, ¿qué podríamos responder? Un poco de reflexión muestra que la única respuesta posible es  $S = \mathbf{0}$ , un vector nulo.

Con más rigor: consideremos la superficie esférica dividida en elementos infinitesimales planos  $dS$ , por medio de una retícula semejante a la utilizada en la figura 10. Observemos la pareja de elementos que se representa en la figura 12, situados en los extremos de un diámetro cualquiera de la esfera: es evidente que la suma de los dos vectores  $dS$  correspondientes es nula. Y **todos** los elementos que debemos tomar en cuenta, sobre la superficie completa de la esfera, pueden agruparse por parejas de este modo. En consecuencia, el vector  $S$  resultante para la superficie esférica será  $\mathbf{0}$ , el vector cero.

Escrito en lenguaje formal matemático, esto queda como

$$S = \oiint_{S, \text{esférica}} dS = \mathbf{0} \quad (13)$$

donde el símbolo  $\oiint$  se lee “**integral realizada sobre la superficie cerrada**”. El círculo que aparece sobre la integral doble alude a una suma realizada sobre una superficie cerrada.

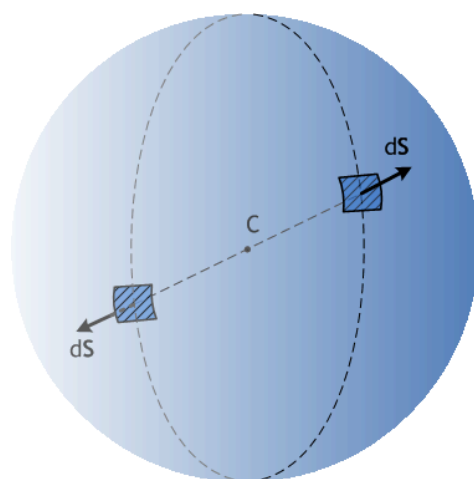


Figura 12: Elementos de área opuestos sobre la superficie de una esfera

El resultado (13) se generaliza a todas las superficies cerradas, desde una superficie tan regular como la esférica hasta una patata repleta de entrantes y salientes. Cuando se aplica a objetos como cilindros, conos, prismas,... hay que incluir siempre la superficie de las tapas, de otro modo no se trataría de superficies cerradas.

## 6. DEFINICIÓN DE FLUJO DE CAMPO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE

Recordemos el concepto de **línea de campo**, también llamada **línea de fuerza** en campos de fuerzas como el eléctrico o el gravitatorio: se trata de una línea dibujada de manera que sea **tangente al vector campo en cada punto**. Un diagrama de líneas de campo nos proporciona una idea muy visual de la dirección y sentido del campo en cualquier punto de la zona representada: baste recordar al respecto que las líneas de campo no pueden cortarse, de manera que es sencillo imaginar cómo serían las líneas que no se recogen en el diagrama y dibujar el vector campo en cualquier punto por el que no pase una línea dibujada.

Recordaremos ahora una cuestión capital: **la intensidad de campo es mayor en las zonas de más alta densidad de líneas de campo**. La figura muestra valores de  $E$  mayores en la zona izquierda, donde las líneas de campo están más apretadas, y vectores  $E$  de módulo menor en la derecha, donde las líneas son divergentes.

Así, un diagrama de líneas de campo aporta información no sólo acerca de la dirección y sentido del campo, que ha de ser tangente a las líneas, sino también sobre el módulo, en función de la densidad de líneas de campo.

Podemos ir más lejos en esta última idea, afinando más su contenido. En adelante, usaremos el siguiente convenio: cuando se dispone una **superficie de  $1 \text{ m}^2$**  centrada en un punto  $P$  y colocada **perpendicularmente al campo**, el vector campo en el punto citado  $P$  tiene como módulo una cantidad igual (o proporcional, al menos) al **número de líneas de campo que atraviesan la citada superficie**. De este modo, y para que resulte fácil de entender: el módulo de  $E$  en el punto  $P$  de la figura 14 es  $6 \text{ N/C}$ , ya que son seis las líneas de campo que atraviesan la superficie **unitaria** dispuesta de forma **perpendicular** al campo en  $P$ . Obsérvese que los vectores  $E$  y  $S$  son, con esta disposición de la superficie, paralelos.

Y así, como el que no quiere la cosa, estamos hablando de **flujo de campo a través de una superficie**, aunque sea en un caso muy sencillo y particular. El concepto de flujo es, en realidad, muy simple: **se trata del número de líneas de campo que cortan (o atraviesan) una superficie**. Por ejemplo, en la figura 14 el flujo de campo eléctrico  $E$  a través de la superficie representada tendría el valor  $\Phi = 6$  (las unidades son  $\text{N m}^2 \text{ C}^{-1}$ , como veremos).

Obviamente, lo que acabamos de ver no es representativo del modo en que debe obtenerse un flujo: **se calcula**, no se cuentan líneas sobre un sencillo dibujo. Pero la idea es esencialmente correcta, y sólo nos falta aclarar **cómo se calcula un flujo de campo**.

Para seguir nuestra discusión, imaginemos que giramos la superficie de la figura 14, de modo que ya no queda colocada perpendicularmente a  $E$ : los vectores  $E$  y  $S$  forman ahora un ángulo que depende de cuánto hayamos girado la superficie. Lo más relevante es que el flujo — el número de líneas de campo que atraviesa a  $S$  — ha bajado de 6 a 3 (¡todavía estamos contando líneas!), por la sencilla razón de que, aunque  $S = 1 \text{ m}^2$  es la misma, ofrece menos “blanco” a las líneas que han de atravesarla.

De este modo, la orientación de la superficie juega un papel fundamental en el flujo de campo a su través. De hecho, si siguiésemos girando nuestra superficie  $S = 1 \text{ m}^2$  hasta que  $E$  y  $S$  formen un ángulo de  $90^\circ$ , **el flujo será cero**: ninguna línea de campo cortará nuestra superficie si la colocamos paralela al campo, de modo tal que las líneas resbalen sobre ella y no lleguen a atravesarla.

Y así, podemos listar los tres factores que, de manera intuitiva, parecen tener algún papel en el cálculo del flujo a través de la superficie  $S$ , en las figuras 14 y 15:

- 1) la **intensidad** del campo  $E$  en el centro de la superficie (que nos habla de la **densidad** de líneas de campo en ese sitio);
- 2) el **tamaño** de la superficie: si fuese de  $2 \text{ m}^2$ , en vez de  $1 \text{ m}^2$ , el flujo sería mayor;
- 3) la **orientación** relativa entre el campo y la superficie, expresada por el ángulo  $\varphi$  entre los vectores  $E$  y  $S$ .

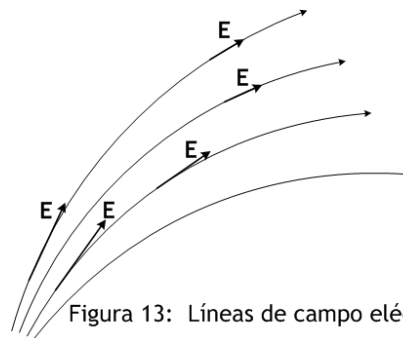


Figura 13: Líneas de campo eléctrico

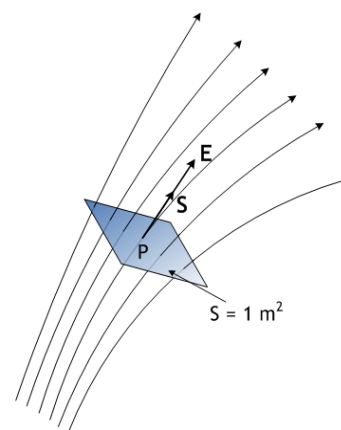


Figura 14: El flujo de campo a través de una superficie de  $1 \text{ m}^2$ , perpendicular a  $E$

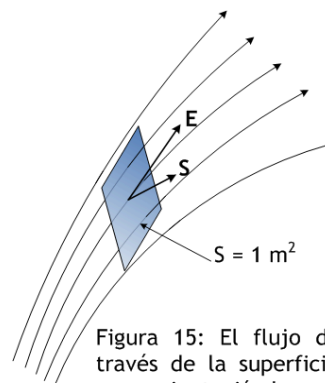


Figura 15: El flujo de campo a través de la superficie de  $1 \text{ m}^2$ , cuya orientación ha cambiado

La conjunción adecuada de esos tres factores nos lleva a escribir el flujo, en el sencillo caso que nos ocupa, según un producto escalar

$$\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = E \cdot S \cdot \cos \varphi \quad (14)$$

entre los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{S}$ . Un poco de reflexión mostrará como esa sencilla expresión toma en consideración los valores de  $E$  y de  $S$ , en tanto representan la densidad de líneas de campo y el tamaño de la superficie empleada, respectivamente. En cuanto al  $\cos \varphi$ , toma su máximo valor,  $\cos \varphi = 1$ , en el caso de la figura 14; y sería  $\cos \varphi = 0$  en el supuesto de que girásemos la superficie  $90^\circ$ , haciendo nulo el flujo a su través.

Con todo, lo que hemos hecho es discutir el flujo en una situación particularmente simple, y aún haciendo bastantes trampas. Para acercarnos a una idea más realista, consideremos el flujo a través de una superficie **cualquiera**, en un campo cualquiera, como representa la figura 16. Se trata de una superficie curva, de tamaño arbitrario, y el campo  $\mathbf{E}$  tiene valores muy diferentes en distintos puntos de la superficie.

Para calcular el flujo a su través, dividiremos la superficie en elementos infinitesimales  $dS$ , que podrán considerarse planos y que se representarán, cada uno de ellos, con el correspondiente vector perpendicular  $d\mathbf{S}$ . Aplicaremos la expresión (14) a cada uno de ellos para tener

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (15)$$

el flujo infinitesimal a su través: por supuesto, en esa expresión  $\mathbf{E}$  es el campo en el centro del elemento  $d\mathbf{S}$  correspondiente; en la figura se muestran tres ejemplos.

Así, faltaría únicamente sumar los flujos infinitesimales  $d\Phi$  a través de **todos** los elementos  $dS$  en que se dividió la superficie. **El flujo a través de la superficie finita quedaría, pues, como**

$$\Phi_E = \iint d\Phi = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (16)$$

una integral extendida a la superficie sobre la que se calcula el flujo. El cálculo de esta integral resuelve con toda generalidad el problema de flujo de **cualquier** campo vectorial a través de una superficie arbitraria. Así, las expresiones

$$\Phi_g = \iint d\Phi = \iint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} \quad (17)$$

$$\Phi_B = \iint d\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (18)$$

proporcionan respectivamente el flujo de campo gravitatorio  $\mathbf{g}$  o de campo magnético  $\mathbf{B}$  a través de una superficie arbitraria, a la que se extendería la integral (17) o (18).

La dificultad que implican las integrales (16) a (18) depende obviamente de las circunstancias concretas de cada problema, tanto en lo que se refiere a la dificultad del campo como a la de la superficie, o de ambas a la vez. Podemos encontrar desde casos de gran sencillez (los que trataremos aquí) hasta otros de dificultad prácticamente insalvable.

Sin embargo, el empleo de ecuaciones cuya notación comienza a tener un cierto grado de complejidad matemática no debe hacernos olvidar en ningún momento el significado físico de las magnitudes que aparecen en ellas; las matemáticas no están para ocultar la física. Así, recordemos en todo momento la definición que se hizo más arriba: **el flujo de campo a través de una superficie es el número de líneas de campo que cortan dicha superficie**. Otra cosa es el modo en que se calcula, expresado en fórmulas como (16), (17) y (18).

## 7. ALGUNAS CUESTIONES DE INTERÉS EN EL FLUJO DE CAMPOS VECTORIALES A TRAVÉS DE SUPERFICIES

Nos ocuparemos ahora de algunos detalles que refinarán nuestra comprensión del concepto de flujo. Fundamentalmente, se trata de tres tópicos, relativos respectivamente al **tema de las unidades**, a las **caras de una superficie** y el sentido del flujo y al flujo a través de **superficies cerradas**.

### 7.1. EL TEMA DE LAS UNIDADES

¿En qué unidades se mide el flujo de campo a través de una superficie? La respuesta es inmediata, a partir de las expresiones (16) a (18): las unidades de la intensidad de campo correspondiente **por** la unidad SI de área,  $m^2$ . De este modo, quedará

$$\Phi_E \leftrightarrow \frac{N}{C} \cdot m^2 = \frac{V}{m} \cdot m^2 = V \cdot m \quad (19)$$

$$\Phi_g \leftrightarrow \frac{N}{kg} \cdot m^2 \quad (20)$$

$$\Phi_B \leftrightarrow T \cdot m^2 = \text{weber} \quad (21)$$

donde se incluye el caso del flujo de campo magnético, aunque sus unidades no estén claras, por el momento.

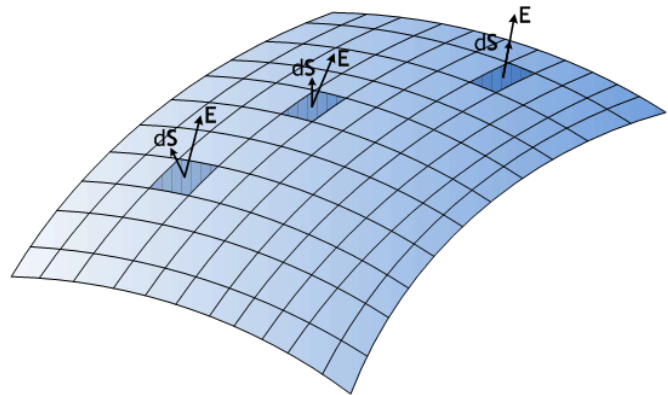


Figura 16: El flujo (infinitesimal) a través de elementos de superficie  $dS$

### 7.2. EL ANVERSO Y EL REVERSO DE UNA SUPERFICIE

Una superficie tiene, como la hoja de un árbol o un folio de papel, dos caras: anverso y reverso. Cuando existe flujo de campo a través de ella, puede discurrir en cualquiera de los dos sentidos posibles: las líneas de campo (1) y (2) de la figura 17, comparadas con la línea de campo (3), ilustran bien lo que tratamos de decir.

En el ejemplo que mostramos, puede verse que se ha tomado un sentido de **recorrido del contorno** de la superficie contrario a las agujas del reloj, compatible con un vector superficie  $S$  como el que se muestra. Las líneas de campo (1) y (2) se contarían como **flujo positivo**, en tanto que (3) se contaría como **flujo negativo**.

Por supuesto, estas ideas están contenidas en las expresiones integrales (16) a (18), pero conviene hacerlas notar. La observación de la figura 17 debe ayudar a dejar clara la diferencia entre flujos positivos y negativos a través de una superficie.

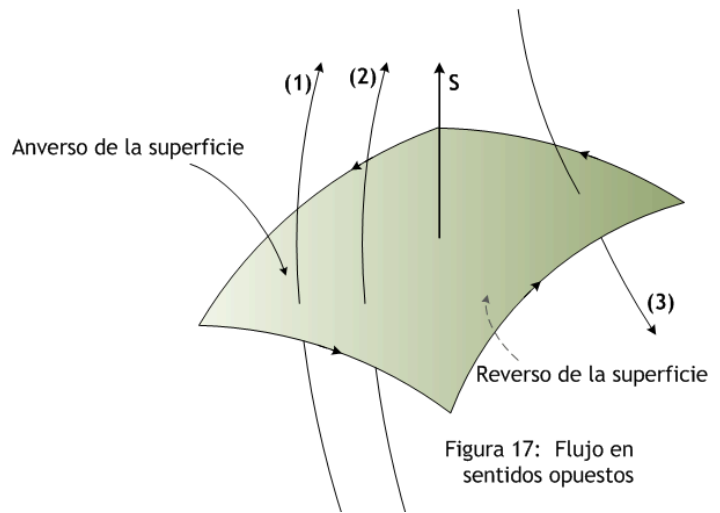


Figura 17: Flujo en sentidos opuestos

### 7.3. LAS SUPERFICIES CERRADAS

El supuesto más interesante al hablar de flujo de campo a través de una superficie se plantea cuando la superficie en cuestión es **cerrada**. El caso paradigmático es el de la superficie esférica: la figura 18 muestra una línea de campo atravesando una superficie de este tipo. Como puede apreciarse, al atravesar la superficie esférica en A la línea entra por el anverso de la superficie (la "cara de fuera"), y al salir por B lo hace en sentido contrario, desde el reverso (la "cara de dentro").

En el punto A hablamos de flujo **entrante**, que tomaremos siempre con **signo negativo**. Cuando la línea de campo sale por B, después de circular en el interior de la superficie esférica, produce flujo **saliente**, que tomaremos siempre con **signo positivo**. Es fácil comprender que el flujo neto producido por la línea de campo de la figura es  $\Phi = 0$ , ya que la misma línea **entra (-1)** y después **sale (+1)**.

Así sucederá con cualquier línea que atravesase, tal como lo hace la de la figura 18, a cualquier superficie cerrada. Se sigue de esto que **la única posibilidad de que exista flujo no nulo a través de una superficie cerrada cualquiera es que las líneas de campo nazcan o mueran en el volumen encerrado por la superficie**, tal como se puede ver en los ejemplos recogidos en la figura 19.

En a) mostramos flujo de campo gravitatorio entrante dentro de una superficie esférica que encierra en su interior una masa puntual: **las líneas de campo gravitatorio tienen sumideros allí donde hay masas**. En b) lo que aparece es flujo eléctrico saliente a través de una superficie esférica que contiene en su interior una carga puntual positiva  $+Q$ : **las líneas de campo eléctrico tienen sus fuentes allí donde exista carga positiva, del mismo modo que tienen sumideros allí donde aparezca carga negativa**.

De esta manera, en la discusión del flujo de campo a través de una superficie cerrada aparece desde un principio, como un aspecto esencial del problema, la existencia o no de creadores de campo (cargas o masas) en el volumen delimitado por la superficie cerrada en cuestión. Estas afirmaciones tan sencillas contienen ya aspectos esenciales del teorema de Gauss.

Un detalle más, acerca de la notación. El flujo de campo a través de una superficie cerrada se escribe

$$\Phi_E = \oiint E \cdot dS \quad ; \quad \Phi_g = \oiint g \cdot dS \quad (22)$$

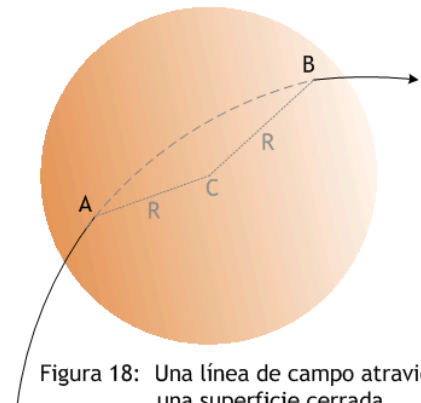


Figura 18: Una línea de campo atraviesa una superficie cerrada

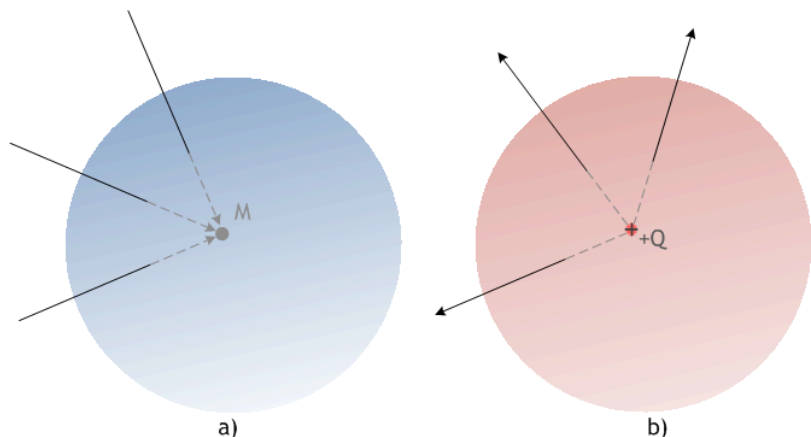


Figura 19: Ejemplos de flujo  
a) gravitatorio entrante hacia una masa puntual  $M$   
b) eléctrico saliente desde una carga puntual  $+Q$



donde el símbolo  $\oiint$  se lee, como ya se hizo notar anteriormente, “integral extendida a la superficie cerrada”. En adelante lo usaremos con profusión.

## 8. EL TEOREMA DE GAUSS

El enunciado del teorema de Gauss para el campo electrostático es como sigue:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (23)$$

y se lee: el flujo de campo  $\mathbf{E}$  a través de una superficie cerrada  $S$  es proporcional a la carga eléctrica neta  $q$  contenida en el volumen encerrado por la superficie. De hecho, como se ve, el flujo es igual a esa carga dividida por  $\epsilon_0$ , si es que estamos trabajando en el vacío (en otros medios, hay que sustituir la permitividad del vacío  $\epsilon_0$  por la correspondiente permitividad  $\epsilon$ ).

Después de leer los apartados anteriores, este enunciado debe parecernos bastante razonable. Por ejemplo, en el caso trivial de una superficie cerrada sin cargas dentro, el teorema de Gauss se convierte en

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{0}{\epsilon_0} = 0 \quad (24)$$

de acuerdo con la idea de que el flujo resultante debe ser nulo, puesto que cada línea de campo, al entrar y salir de la superficie cerrada, produce flujo de signo contrario que se anula.

Por supuesto, (23) expresa que, si nuestra superficie contiene carga positiva, entonces el flujo neto debe ser positivo: **flujo saliente** (líneas de campo que nacen dentro de la superficie y la atraviesan saliendo). Por el contrario, si nuestra superficie cerrada contiene carga  $q$  negativa, entonces el flujo del primer miembro de (23) será negativo: **flujo entrante** (líneas de campo que entran desde fuera y mueren dentro, en los sumideros de carga negativa).

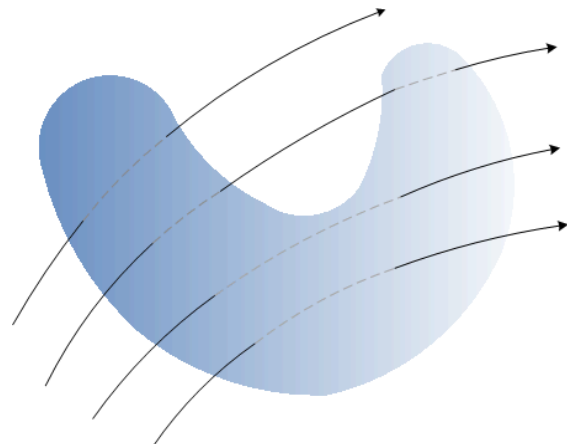


Figura 20: El flujo nulo a través de una superficie cerrada cuando su interior tiene  $Q = 0$

La traducción del teorema de Gauss para el campo gravitatorio se consigue sustituyendo el producto  $Kq$  por  $-GM$ , sin olvidar el necesario signo  $-$ : esto, con más detalle, significa que cambiaremos el segundo miembro de (23) según

$$\frac{q}{\epsilon_0} = 4\pi Kq \quad \Rightarrow \quad (Kq \rightarrow -Gm) \quad \Rightarrow \quad -4\pi Gm$$

de manera que el enunciado del teorema acaba siendo

$$\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi Gm \quad (25)$$

y se lee: el flujo de campo  $\mathbf{g}$  a través de una superficie cerrada  $S$  es proporcional a la masa  $m$  contenida en el volumen encerrado por la superficie. De hecho, como se ve, el flujo es igual a esa masa multiplicada por  $-4\pi G$  (independientemente del medio;  $G$  es una auténtica constante universal).

El teorema de Gauss tiene validez plena siempre, con independencia de cuál sea la configuración de cargas o masas creadoras del campo  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{g}$  que aparecen, respectivamente, en (23) o (25). Cosa distinta es discutir la utilidad práctica del teorema y el uso que se pueda hacer de él: este es un buen momento para releer el apartado 3. **Las propuestas del Teorema de Gauss**, donde quedaron expuestas nuestras intenciones al respecto; vamos a usarlo para obtener con relativa facilidad las expresiones de la intensidad de campo, eléctrico o gravitatorio, creado por **distribuciones continuas de carga o masa**.

Como se verá en los casos concretos que discutimos en los apartados siguientes, la condición que exigiremos – sin ella, el teorema de Gauss no bastaría – es que nuestras distribuciones de carga o masa presenten **alta simetría**, de modo tal que nos ocuparemos de hilos rectilíneos masivos o cargados, esferas masivas o cargadas, planos, etc.. En cada caso, imaginaremos una **superficie cerrada**, a la que llamaremos **superficie gaussiana**, sobre la que aplicar el teorema de Gauss, y veremos que eso nos permitirá conocer  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{g}$ .

Así que la palabra clave es **simetría**; hasta el punto de que podemos clasificar los casos que siguen en función de la simetría que presente la distribución de carga o masa creadora: trataremos casos de **simetría esférica**, de **simetría plana** y de **simetría cilíndrica**.

## Ejemplos de aplicación del Teorema de Gauss

En todos los ejemplos que vamos a discutir se sigue el mismo procedimiento de trabajo, que consta de los siguientes pasos:

- Identificación de la simetría** introducida en el problema por la distribución creadora. En términos prácticos, hablaremos de simetrías esférica, cilíndrica y plana.
- Descripción de la **dirección y sentido** de la intensidad de campo  $E$  (o  $g$ ) en cualquier punto, basándose en la simetría del problema. Este punto es esencial y determina la posibilidad real de resolver el problema con el uso exclusivo del teorema de Gauss.
- Definición de una superficie cerrada, que llamaremos superficie gaussiana**, a la que se aplicará el teorema.
- Obtención del resultado**, que será el módulo  $E$  (o  $g$ ) del campo buscado. Nótese que obtendremos módulos, ya que las direcciones serán previamente conocidas a partir de la simetría del problema (paso b).

Si falla este plan de trabajo, el teorema de Gauss (que será igualmente cierto) no sería bastante para calcular las intensidades de campo creadas por distribuciones de masa o carga **carentes de simetría**. No discutiremos qué hacer en tales casos, que exceden el nivel de este curso.

### 8.1.- CAMPO CREADO POR UNA ESFERA MASIVA MACIZA, DE DENSIDAD HOMOGÉNEA

Pensamos en una esfera maciza de radio  $R$ , cuya masa  $M$  está repartida uniformemente, de manera que la densidad sería homogénea y su valor sería

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (26)$$

Aunque con evidentes simplificaciones, estamos hablando de lo que bien podría ser un planeta, así que nuestra discusión tiene un interés que va más allá de un simple ejemplo de aplicación del teorema.

Nuestro objetivo es encontrar la intensidad de campo gravitatorio  $g$  creado por esta distribución **continua** de masa en un punto cualquiera, tanto del exterior como del propio interior de la esfera. En este sentido, hay que comenzar diciendo que los resultados son diferentes para puntos del exterior y del interior de la esfera, de modo que debemos hacer una discusión por separado.

#### A) CAMPO CREADO POR LA ESFERA MASIVA HOMOGÉNEA, EN PUNTOS DEL EXTERIOR DE LA ESFERA.

Seguimos el procedimiento descrito al principio de este apartado, paso por paso: eso servirá para mostrar cómo resolver otros supuestos.

Consideremos un punto  $P$  fuera de la esfera, a una distancia  $r$  del centro de la misma. El paso a) se resuelve al hacer notar que una distribución esférica de masa introduce **obviamente simetría esférica** en el problema, de modo que cuando sea necesario definir una superficie gaussiana, se tratará de una superficie esférica.

Paso b): el campo gravitatorio  $g$  en  $P$ , por razones de simetría, será **radial y hacia dentro**, mirando al centro de la masa esférica. En la figura 21 puede verse cómo lo imaginamos, así como el campo  $g$  en algunos otros puntos que también distan  $r$  del centro de la esfera masiva. Es importante comprender que nuestras afirmaciones acerca de la dirección y el sentido de  $g$  no deben requerir más justificación que la apelación a la simetría.

En el paso c) definimos la superficie gaussiana sobre la que operaremos: en nuestro caso, se trata de **una superficie esférica concéntrica con la esfera masiva creadora del campo, de radio  $r$** ; en la figura aparece dibujada con línea de puntos. Ahora aplicamos el teorema de Gauss (25) a la superficie gaussiana en cuestión:

$$\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi Gm \quad (25)$$

donde  $m$  es la masa encerrada dentro de la superficie gaussiana. No hay muchas dudas acerca del valor de este segundo miembro, ya que la figura 21 muestra claramente que la masa encerrada es **toda la masa  $M$  de la esfera creadora del campo**, toda ella en el interior de la superficie gaussiana.

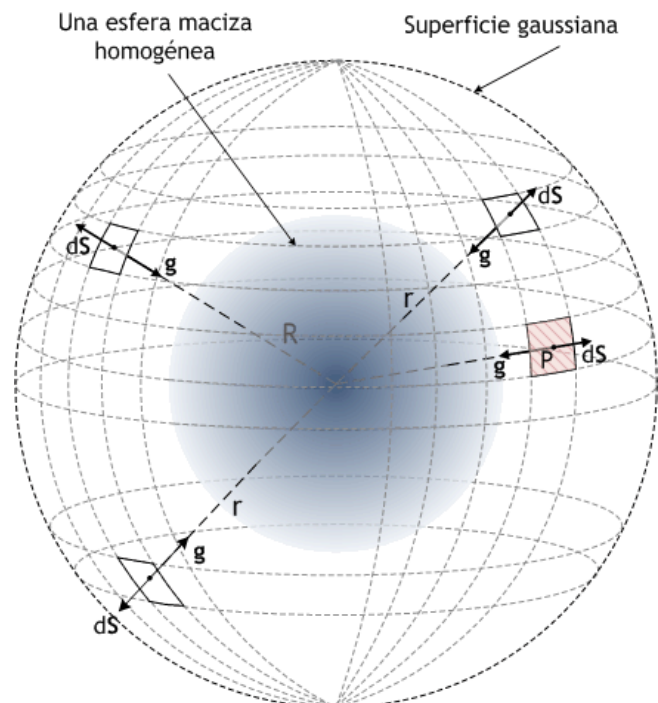


Figura 21: El campo gravitatorio creado por una esfera maciza homogénea

En cuanto al primer miembro, hacemos notar dos cosas: primero, que el **módulo de g es el mismo en toda la superficie gaussiana**, ya que todos sus puntos están a la misma distancia  $r$  del centro de la esfera masiva creadora del campo, y la simetría esférica así lo exige. Segundo, que los vectores  $dS$  y  $g$  tienen sentidos opuestos en toda la superficie gaussiana, tal como muestra la figura. Así que la integral del primer miembro acaba siendo bastante obvia:

$$\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \oiint -g \cdot d\mathbf{S} = -g \oiint dS = -g 4\pi r^2$$

producto escalar de vectores de sentido opuesto      el módulo de  $g$  es constante en la superficie: puede salir de la integral      la integral resultante es el área de la superficie esférica, de valor  $4\pi r^2$

así que (25) queda, en nuestro caso

$$-g 4\pi r^2 = -4\pi GM \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi GM}{4\pi r^2} = G \frac{M}{r^2} \quad (27)$$

que resulta ser el campo gravitatorio que crearía una masa puntual  $M$  situada en el centro de la esfera masiva. Para los puntos del exterior de la esfera, ésta se comporta como una masa puntual.

#### B) CAMPO CREADO POR LA ESFERA MASIVA HOMOGÉNEA, EN PUNTOS DEL INTERIOR DE LA ESFERA.

Nos ocupamos ahora de un punto  $P$  del interior ( $r < R$ ) de la esfera: ¿cómo será la intensidad de campo gravitatorio en un punto como  $P$  de la figura 22?

Para responder a esto, volvemos a usar el teorema de Gauss. La distribución creadora de campo, que es la esfera masiva de masa  $M$  y radio  $R$ , sigue siendo obviamente un caso de **simetría esférica**. El vector  $g$  en el punto  $P$  será, por razones de simetría, **radial y hacia dentro** (el sentido puede dar algo que pensar, pero finalmente la gravedad siempre es **atractiva**). En la figura se recogen los vectores intensidad de campo en algunos puntos que, como  $P$ , están a distancia  $r$  del centro de la esfera masiva.

La superficie gaussiana que emplearemos, adecuada a la simetría del problema, será una **superficie esférica de radio  $r$** , que es, como ya hemos dicho, la **distancia de  $P$  al centro de la esfera**. La figura muestra algunos elementos de área  $dS$  de esa superficie gaussiana, representada de nuevo con línea de puntos.

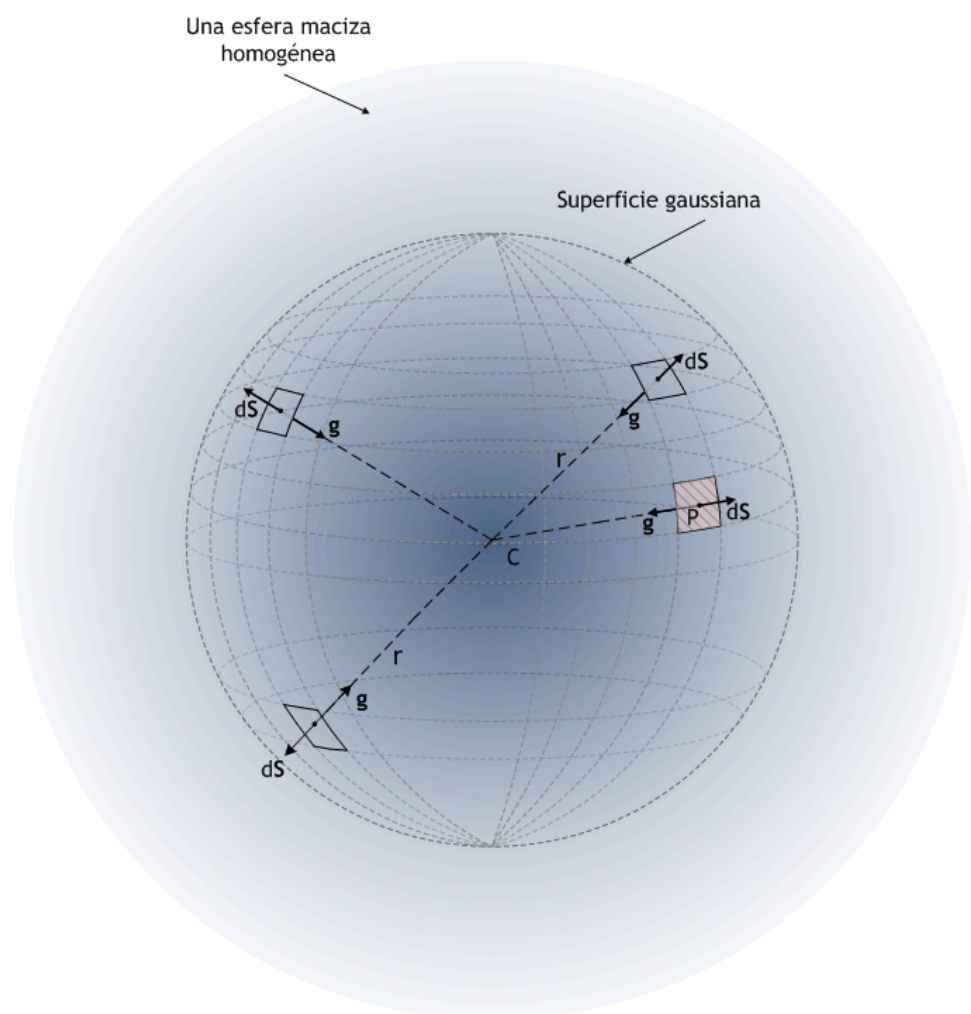


Figura 22: El campo gravitatorio creado en el interior de una esfera maciza homogénea

La aplicación de 
$$\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi Gm \quad (25)$$

a nuestra situación es muy similar a lo que acabamos de hacer fuera de la esfera masiva. En concreto, la discusión de la integral del flujo del primer miembro es literalmente idéntica, de modo que no la repetiremos y nos remitimos al resultado ya obtenido.

La diferencia aparece en el segundo miembro de (25), y se refiere a la masa  $m$  encerrada **dentro** de la superficie gaussiana, **que ya no es la masa  $M$  total de la esfera masiva**. Ahora debemos considerar **exclusivamente** la masa que queda desde el borde de la superficie gaussiana de radio  $r$  **hacia dentro**, es decir, la masa de un **volumen esférico** de radio  $r$ . No es difícil de calcular, ya que sería

$$m = \rho V = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3}$$

de modo que (25) queda finalmente

$$-g 4\pi r^2 = -4\pi G m = -4\pi G M \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow g = G \frac{M}{R^3} r \quad (28)$$

y así vemos que la intensidad de campo **dentro de la esfera** sigue una ley **linealmente creciente** desde el centro de la esfera, donde  $g = 0$ , hasta el borde mismo de la esfera masiva, donde la función (28) deja de ser válida y debe ser sustituida por (27), que se usa en los puntos exteriores a la esfera masiva.

Señalemos enseguida que la conclusión “esto funciona como si fuese una masa puntual  $M$ ” sólo sirve fuera de la esfera, y de ningún modo en los puntos del interior: la función (28) no corresponde al campo creado por una masa puntual.

La frontera entre las dos zonas que hemos considerado es el borde mismo de la esfera masiva, donde  $r = R$ . ¿Cuál de las dos funciones, (27) o (28), nos proporciona el valor del campo en un punto de la superficie misma de la esfera? La respuesta a esta pregunta es simple: **cualquiera de las dos**. En efecto, si se calcula el valor de  $g$  obtenido de (27) para  $r = R$ , queda

$$g_{r=R} = G \frac{M}{R^2}$$

y, si se hace lo propio con (28) para  $r = R$ , resulta

$$g_{r=R} = G \frac{M}{R^3} R = G \frac{M}{R^2}$$

exactamente igual. Este perfecto “empalme” entre las funciones que describen el campo fuera y dentro de la esfera masiva es muy destacable; compárese con el campo eléctrico creado por una esfera **conductora** cargada (ver apuntes sobre **Campo en la materia: Conductores**) y podrá apreciarse que un campo puede “saltar” muy bruscamente desde un valor a otro muy diferente.

A propósito de esto, es muy interesante observar la figura 23. Ahí se recoge una gráfica que muestra cómo varía el módulo de  $g$  con la distancia al centro de la esfera masiva (¡puede ser un planeta, como la Tierra!). Obsérvese que el campo **crece linealmente** desde el valor  $g = 0$  en el centro del planeta, hasta alcanzar el valor máximo en la superficie; a partir de ahí **decrece** con el cuadrado de la distancia al centro del planeta, como sucedería con una masa puntual. Por fin podemos decir que hemos demostrado que un planeta se comporta, visto desde fuera, como una masa puntual: hasta ahora, lo habíamos dado por supuesto.

De modo que el campo gravitatorio de, digamos, la Tierra toma su valor máximo en la superficie del planeta, y es menor si te alejas de ella, bien sea hacia fuera (decrece cuadráticamente, más deprisa) o hacia dentro (decrece de forma más lenta, linealmente). Para el caso de la Tierra, con  $M \approx 6.10^{24}$  kg y  $R = 6,37.10^6$  m, se tiene el conocido valor  $g = 9,8$  N/kg ( $N/kg = m/s^2$ , como sabemos).

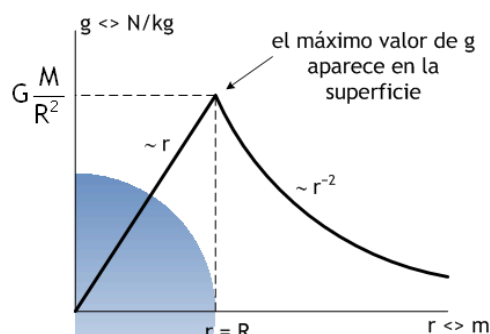


Figura 23: El campo gravitatorio creado por una esfera masiva, como un planeta, dentro y fuera de la misma.

## 8.2.- CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA ESFERA NO CONDUCTORA CARGADA UNIFORMEMENTE

Un ejercicio de repetición del caso gravitatorio 8.1 que acabamos de discutir. Cuando una esfera **no conductora** está cargada – es decir, cuando tiene defecto de electrones (carga positiva) o exceso de ellos (carga negativa) – generalmente la carga  $Q$  total se **reparte uniformemente** en su interior; en todo caso, nosotros supondremos que así sucede. Podemos entonces hablar de una densidad de carga  $\rho$ , medida en  $C/m^3$ , semejante a la que hemos usado para una esfera masiva, y que se escribiría dividiendo la carga total  $Q$  entre el volumen total de la esfera. Si el radio de ésta es  $R$ , queda

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Los resultados de aplicar el teorema de Gauss son los mismos que obtuvimos en 8.1, convenientemente traducidos, y quedan como sigue (es ejercicio para el alumno su demostración):

A) CAMPO ELÉCTRICO EN EL EXTERIOR DE LA ESFERA NO CONDUCTORA CARGADA

El mismo que crearía una carga puntual  $Q$  igual a la de la esfera, y situada en el centro de la misma. En puntos exteriores a la esfera ( $r \geq R$ ), el campo es **radial** y hacia **fuera** (si  $Q$  es **positiva**) o hacia **dentro** (si  $Q$  es **negativa**); en cualquiera de los dos casos, el módulo es

$$E = K \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R) \quad (29)$$

B) CAMPO ELÉCTRICO EN EL INTERIOR DE LA ESFERA NO CONDUCTORA CARGADA

El campo en el interior ( $r \leq R$ ) es igualmente **radial**, con sentido dependiente del signo de la carga. Su módulo crece linealmente desde el centro de la esfera, donde toma el valor cero, hasta un valor máximo en la superficie, según

$$E = K \frac{Q}{R^3} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (r \leq R) \quad (30)$$

De nuevo el campo en la superficie, para  $r = R$ , es el máximo valor que alcanza el campo eléctrico creado por la esfera cargada. Ese valor resulta ser

$$E_{r=R} = K \frac{Q}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (31)$$

y puede obtenerse indistintamente llevando  $r = R$  a (29) o a (30). Una gráfica idéntica a la que aparece en la figura 23 refleja el comportamiento del campo eléctrico creado por la esfera no conductora cargada, dentro y fuera de la misma.

8.3.- CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UN HILO RECTILÍNEO INDEFINIDO CARGADO UNIFORMEMENTE

Nuestro siguiente problema será una distribución **lineal** de carga, en forma de hilo rectilíneo de longitud indefinida y cargado de forma uniforme. La manera en que nos referiremos a la carga del hilo se basa en el concepto **densidad lineal de carga**  $\lambda$  C/m, que se refiere a la cantidad de carga que tiene 1 m de longitud de hilo; por supuesto,  $\lambda$  puede ser tanto positiva como negativa. En la discusión que sigue supondremos que se trata de carga positiva; un simple cambio de sentido para  $E$  bastaría para resolver el caso de  $\lambda$  negativa.

Así que tenemos el hilo, como aparece en la figura 24. El objetivo es conocer el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E$  en un punto arbitrario, como  $P$ , que está a una distancia  $r$  del hilo. Empezamos por definir la simetría del problema: es **cilíndrica**, basada en la lógica que introduce el hilo.

El segundo paso es imaginar, basándonos en esa simetría, la dirección que llevará  $E$  en un punto cualquiera, como  $P$ : lo imaginamos **perpendicular al hilo, en sentido repulsivo** (ese sentido se cambiaría si  $\lambda$  fuese negativa). Hemos dibujado el vector  $E$  en algunos puntos, que ilustran lo anterior.

Nuestra superficie gaussiana, en coherencia con lo anterior, será una **superficie cilíndrica** (¡tapas incluidas!), que tiene el hilo como eje. Su altura,  $L$ , es arbitraria; su radio es  $r$ , la distancia de  $P$  al hilo.

Finalmente, debemos aplicar el teorema de Gauss a la superficie elegida,

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (23)$$

La figura muestra que, en la **superficie lateral** del cilindro, los vectores elemento de superficie  $d\mathbf{S}$  y las correspondientes intensidades de campo  $E$  son paralelos; puede verse un par de ejemplos de ello. Otro hecho fundamental es que  $E$ , por razones de simetría, **tiene el mismo módulo en todos los puntos de la pared lateral de la superficie gaussiana**, ya que todos están a **distancia  $r$  del hilo**, y la simetría del problema lo impone. En cuanto a las tapas del cilindro, los vectores  $E$  y  $d\mathbf{S}$  son perpendiculares, como muestra igualmente la figura. Nótese que esto implica  $E \cdot d\mathbf{S} = 0$  en las tapas del cilindro, así que no hay flujo de campo eléctrico a través de las mismas, y por tanto todo el flujo aparecerá a través de la superficie lateral del cilindro.

Con toda esta información, podemos aplicar el teorema: obsérvese que rompemos la integral del flujo a través de la superficie cerrada que forma el cilindro completo en dos integrales, que se refieren a la superficie lateral y a las tapas del mismo; naturalmente, esto es consecuencia del diferente comportamiento que acabamos de mostrar. El primer miembro queda, pues:

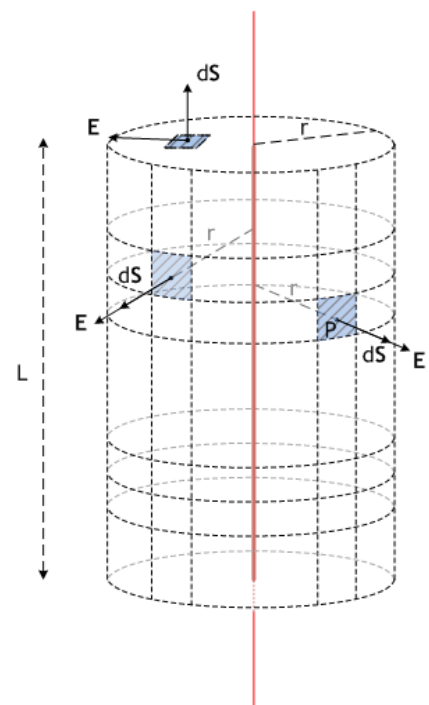


Figura 24: El campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo indefinido y uniformemente cargado

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{Tapas}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \iint_{S_L} dS = E 2\pi r L$$

$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$  en las tapas; la integral correspondiente es nula. En la superficie lateral,  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{S}$  son paralelos y queda el producto de sus módulos

el módulo de  $\mathbf{E}$  es constante en la superficie lateral del cilindro: puede salir de la integral

la integral resultante es el área de la superficie lateral del cilindro, de valor  $2\pi r L$

y el segundo miembro precisa que sepamos cuánta carga queda encerrada dentro de la superficie gaussiana: ya que se trataría de la carga existente en un trozo de longitud  $L$  de hilo, sería  $q = \lambda L$ . En consecuencia, la aplicación del teorema arroja

$$E 2\pi r L = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ N/C} \quad (32)$$

un valor de  $E$ , módulo de  $\mathbf{E}$ , que decrece linealmente con la distancia al hilo. Obsérvese que la intensidad de campo depende, aparte del medio, exclusivamente de la densidad lineal de carga  $\lambda$  del hilo y de la distancia  $r$  al mismo: a distancia **doblo**, la intensidad de campo se hace la **mitad**, en interesante contraste con el decrecimiento **cuadrático** que hemos encontrado en los problemas de simetría esférica (cargas puntuales, exterior de esferas cargadas). La figura 25 recoge el comportamiento de  $E$  con la distancia al hilo; se trata, obviamente, de una rama de hipérbola. Nótese también que, cuando  $r \rightarrow 0$ , la expresión (32) implica que el campo  $E \rightarrow \infty$ ; algo que resulta inaceptable: por tanto, la expresión (32) sólo puede usarse para  $r > 0$ , y **no es de aplicación en los puntos del hilo**.

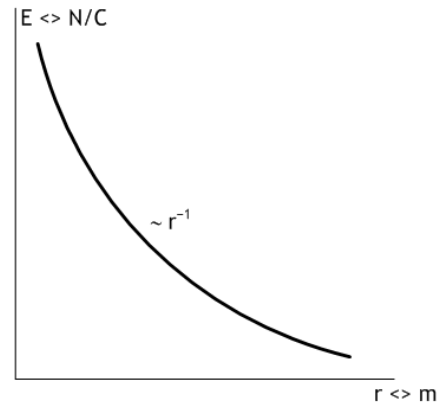


Figura 25: El campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo indefinido cargado uniformemente. La distancia al hilo es  $r$ .

#### 8.4. – CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UN HILO MASIVO RECTILÍNEO E INDEFINIDO

El equivalente gravitatorio del hilo rectilíneo indefinido con carga uniforme es un hilo masivo igualmente rectilíneo e indefinido, con densidad constante  $\lambda$  kg/m. Queda para el alumno aplicar demostrar que el campo gravitatorio se comporta como muestra la figura 26: en cualquier punto aparece perpendicular al hilo, apuntando hacia él, y su módulo cae linealmente con la distancia  $r$  al hilo, de acuerdo a la expresión

$$g = \frac{2G\lambda}{r} \text{ N/kg} \quad (33)$$

que sólo depende de la densidad lineal de masa del hilo y de la distancia al mismo, ya que  $G$  es una constante universal y el medio no supone diferencia alguna. De nuevo, eso sí, la ecuación (33) no puede aplicarse en los puntos del hilo, para  $r = 0$ , donde nos llevaría a resultados inaceptables. La representación gráfica de la variación del campo con la distancia al hilo es la misma que aparece en la figura 25, cambiando adecuadamente el eje de ordenadas para que quede  $g \llcorner N/kg$ .

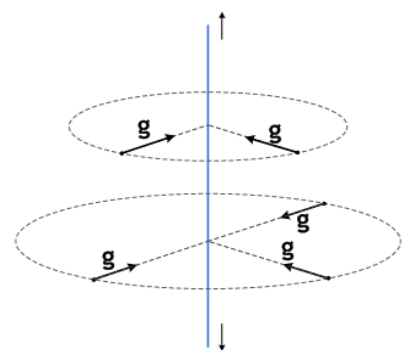


Figura 26: El campo gravitatorio creado por un hilo masivo rectilíneo indefinido

Con frecuencia abordamos problemas de movimiento de cuerpos en las inmediaciones de la superficie terrestre, en los que asumimos que la Tierra se comporta como un plano. Es momento de abordar cómo sería el campo creado por un objeto físico que tuviese tales características: hablamos de un plano  $\Pi$  que se extiende ilimitadamente, con una densidad de masa superficial  $\sigma$  (en  $\text{kg}/\text{m}^2$ ) homogénea, tal como se recoge en la figura 27.

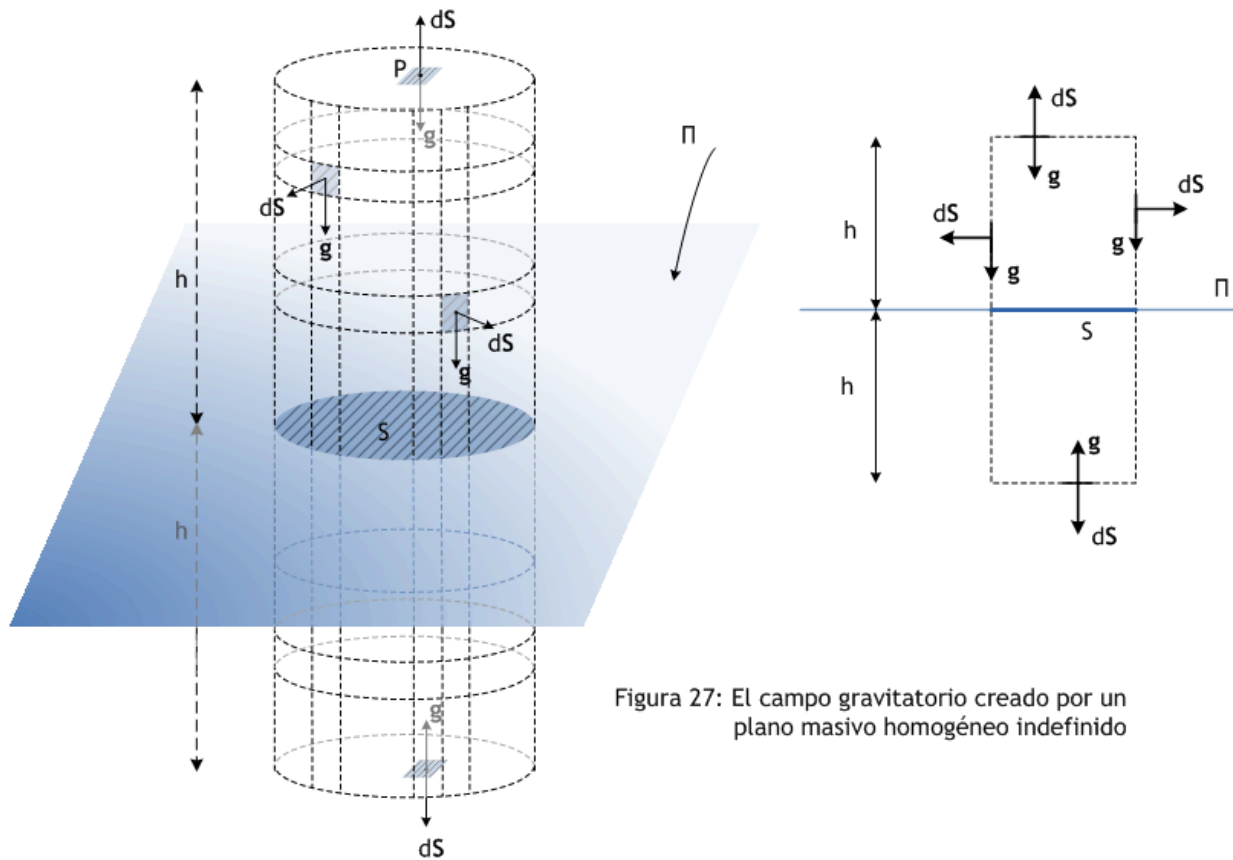


Figura 27: El campo gravitatorio creado por un plano masivo homogéneo indefinido

Como siempre, estamos buscando la intensidad de campo en un punto arbitrario P, que hemos situado a una altura  $h$  sobre el plano. La simetría que impone la masa creadora de campo es obviamente **plana**.

¿Cómo imaginamos la intensidad de campo en P? Basándonos, como siempre, en la simetría del problema, resulta adecuado imaginar  $\mathbf{g}$  en dirección **perpendicular** al plano  $\Pi$ , apuntando hacia el plano: como acostumbramos, hemos representado  $\mathbf{g}$  en algunos puntos de la figura. A la derecha, se recoge el punto de vista frontal, que puede ser útil para una mejor comprensión.

Es muy posible que tengamos una intuición acerca de una caída del módulo de  $\mathbf{g}$  al alejarnos del plano: sería incorrecta, como revelarán los resultados finales. No obstante, hasta que llegemos a ellos, mantendremos una prudente actitud acerca de nuestras intuiciones.

Una superficie gaussiana conveniente puede ser **cilíndrica**, aunque serviría igual un prisma recto con las bases paralelas al plano, tal como aparecen las de la superficie cilíndrica en la figura. Obsérvese que, para respetar nuestra intuición acerca de la dependencia de  $\mathbf{g}$  con la distancia al plano (incorrecta, como ya hemos apuntado), hemos imaginado la superficie gaussiana con sus dos tapas a la misma distancia  $h$  del plano, una por encima y otra por debajo. Nótese entonces que, de este modo, aseguramos en todo caso que  $\mathbf{g}$  tendrá el mismo módulo en las **dos tapas** del cilindro, ya que todos sus puntos están a la misma distancia  $h$  del plano, y la simetría del problema no entendería cómo puntos situados a la misma distancia del plano infinito pueden tener distinta intensidad de campo. Además, debemos señalar que el área  $S$  de las tapas es arbitraria (por tanto, no debería aparecer en nuestros resultados).

Por lo demás, parece claro que los vectores  $d\mathbf{S}$  correspondientes a elementos de superficie en la **superficie lateral** cilíndrica son **perpendiculares** al vector  $\mathbf{g}$  dibujado en su centro; en cambio, los vectores  $d\mathbf{S}$  y  $\mathbf{g}$  son estrictamente **antiparalelos** en las tapas de la superficie cilíndrica. Comprender todo esto requiere estudiar detenidamente la figura, y a ella nos remitimos.

Por fin, aplicamos el teorema de Gauss a esta superficie cilíndrica

$$\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi Gm \quad (25)$$

La integral del flujo del primer miembro se resuelve fácilmente:

$$\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_L} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{Tapas}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{Tapas}} -g \cdot dS = -g \iint_{\text{Tapas}} dS = -g 2S$$

$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = 0$  en la superficie lateral; la integral correspondiente es nula. En las tapas,  $\mathbf{g}$  y  $d\mathbf{S}$  son antiparalelos y queda el producto de sus módulos, con signo  $-$  ( $\cos 180^\circ = -1$ )

el módulo de  $\mathbf{g}$  es constante en las tapas del cilindro: puede salir de la integral

la integral resultante es el área de cada tapa es  $S$ , el área de las dos tapas es  $2S$

En cuanto al segundo miembro, la masa  $m$  encerrada dentro de la superficie gaussiana es la que corresponde a una superficie  $S$  del plano (sombreada en la figura), que valdría  $m = \sigma \cdot S$  (densidad de área superficial, medida en  $\text{kg}/\text{m}^2$ , por el número de  $\text{m}^2$  que tenga  $S$ ). Así, la aplicación de (25) queda

$$\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G m \quad \Rightarrow \quad -g 2S = -4\pi G \sigma S \quad \Rightarrow \quad g = 4\pi G \sigma \quad (\text{N/kg}) \quad (33)$$

y nos encontramos con un resultado muy interesante: lo más destacable es que  $g$  no depende de la distancia  $h$  al plano (de hecho,  $h$  no apareció en ningún momento en los cálculos), y es función **exclusivamente** de la densidad  $\sigma$ ; nuestra intuición acerca de que  $g$  disminuiría al alejarnos del plano resultó ser falsa. La conclusión es que estamos ante un **campo uniforme**, que toma un valor  $g$  idéntico (perpendicular al plano, mirando hacia él y de módulo  $g = 4\pi G \sigma$ ) en **todos los puntos**, independientemente de su posición. Para hablar con más precisión, tendríamos en realidad **dos** campos uniformes, uno por encima y otro por debajo del plano.

En la **aproximación de Tierra plana**, cuando nos encontramos muy cerca de la superficie terrestre (es decir, cuando se cumple la conocida condición  $h \ll R$ , donde  $R$  es el radio terrestre), podemos aceptar que la intensidad de campo está dada por (33), y que la Tierra se comporta como un plano indefinido. Es en tales condiciones que tiene sentido aceptar como buena aproximación que la intensidad de campo  $g$ , que solemos llamar **aceleración de la gravedad**, tiene el valor constante  $9,8 \text{ N/kg}$  ( $= \text{m}/\text{s}^2$ ), y está dirigida verticalmente y hacia abajo. En la figura 28 mostramos el campo  $g = \text{cte}$  en puntos situados a distintas alturas sobre la superficie terrestre.

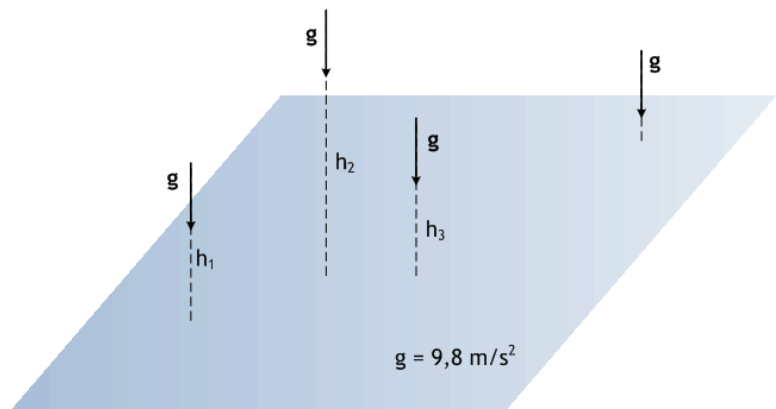


Figura 28: La intensidad de campo gravitatorio constante en la proximidades de la superficie terrestre

¿Cuál tendría que ser la densidad de masa superficial  $\sigma$  de una hipotética Tierra plana, para que  $g = 9,8 \text{ m}/\text{s}^2$  en sus inmediaciones?

La respuesta a esto se obtiene fácilmente de (33), donde todo sería conocido salvo  $\sigma$ :

$$g = 4\pi G \sigma \quad \Rightarrow \quad 9,8 = 4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{9,8}{4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,17 \cdot 10^{10} \text{ kg} / \text{m}^2$$

¡más de diez mil millones de toneladas por metro cuadrado! Desde luego, una distribución plana indefinida no parece muy eficiente creando campos intensos. Una esfera masiva, por ejemplo, lo hace mucho mejor: consideremos la Tierra, aproximadamente una esfera de radio  $R = 6370 \text{ km}$  y con una densidad media de  $5,5 \text{ g}/\text{cm}^3$ , capaz de crear en su superficie el campo  $g = 9,8 \text{ m}/\text{s}^2$ . La desproporción abismal entre las densidades necesarias en un caso y otro debería ilustrar el papel fundamental de la geometría de las distribuciones creadoras de campo.

## 8.6.- CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UN PLANO INDEFINIDO CON DENSIDAD DE CARGA $\sigma$ UNIFORME

Un plano indefinido cargado, con densidad superficial de carga  $\sigma \text{ C}/\text{m}^2$  uniforme, constituye el equivalente en el campo eléctrico del apartado anterior. Naturalmente, el signo de la densidad de carga  $\sigma$  es relevante, pues determina el sentido de  $\mathbf{E}$ , atractivo (cuando  $\sigma$  es negativa) o repulsivo (cuando  $\sigma$  es positiva).

Es trabajo para el alumno aplicar el teorema de Gauss a esta distribución de carga y demostrar que la intensidad de campo resulta en cualquier caso perpendicular al plano, independiente de la distancia al mismo, y con módulo que traducimos a partir de (33)

$$g = 4\pi G \sigma \quad \xrightarrow{4\pi G \rightarrow 4\pi K} \quad \Rightarrow \quad E = 4\pi K \sigma = 4\pi \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ N} / \text{C} \quad (34)$$

Nótese que el medio cobra importancia, ya que la permitividad  $\epsilon_0$  del vacío debe ser sustituida, cuando proceda, por la permitividad  $\epsilon$  del medio correspondiente. En la figura 29 mostramos los campos **uniformes** creados por sendos planos indefinidos y cargados de forma homogénea con densidades de carga positiva y negativa.



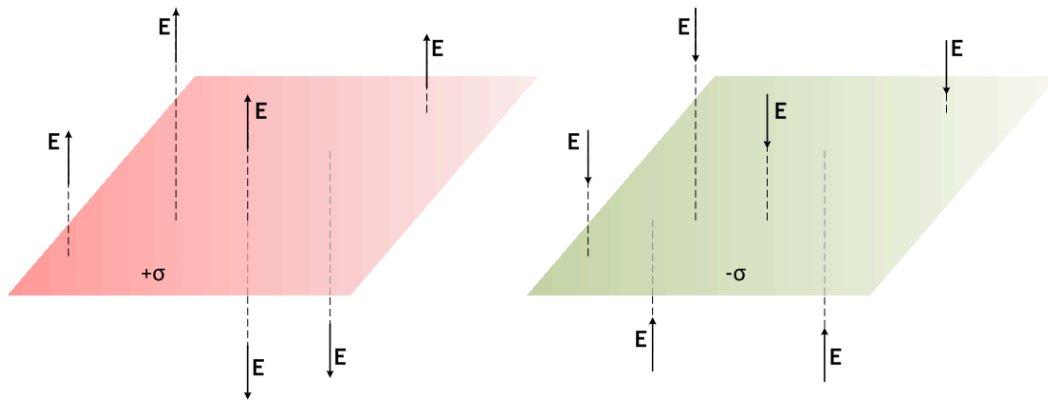


Figura 29: El campo uniforme creado por planos indefinidos con densidad de carga uniforme

Las aplicaciones del Teorema de Gauss que se han discutido en los apartados anteriores agotan los supuestos básicos que se pueden encontrar, ligados a las posibles simetrías. En última instancia, se trata de simetrías **esférica**, **cilíndrica** y **plana**. Naturalmente, se plantean ejercicios de cálculo de  $E$  o  $g$  de mayor complicación o complejidad, pero han de presentar alguna de estas simetrías si es que se pueden resolver por medio del teorema. Al hacerlo, conviene tener presente de forma constante el **principio de superposición** (¡los campos se suman!); de hecho, la combinación del teorema de Gauss y el principio de superposición proporciona una notable capacidad de resolución de situaciones concretas.

## 9. LÍNEAS DE CAMPO

Para acabar con estas notas, hablemos de nuevo de líneas de campo. Una línea de campo  $E$  o  $g$  (o de campo magnético  $B$ ) ha de ser tangente al vector intensidad de campo en cada punto, como sabemos ya sobradamente. Todos los casos que hemos discutido en los epígrafes 8.1 al 8.6 suponen diversos diagramas de líneas de campo, que completarán y ayudarán a visualizar los campos que hemos encontrado; por ello, se incluyen a continuación.

### CAMPO CREADO POR UNA ESFERA MASIVA MACIZA, DE DENSIDAD HOMOGÉNEA

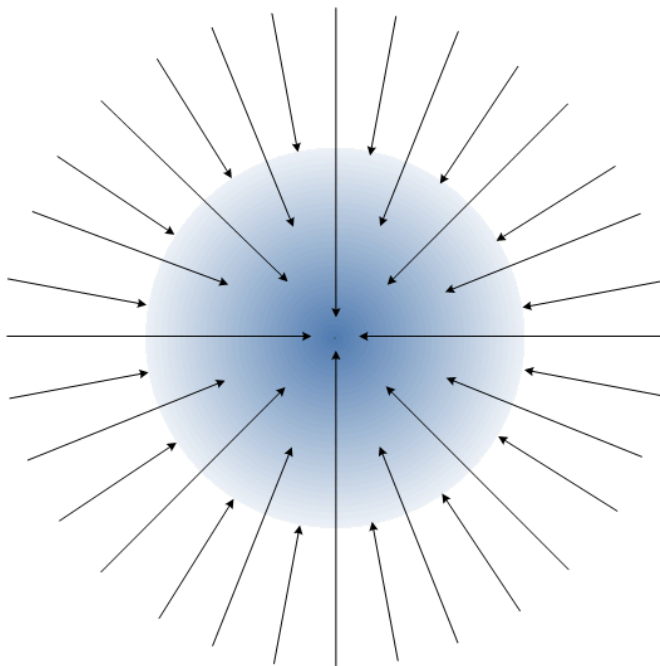
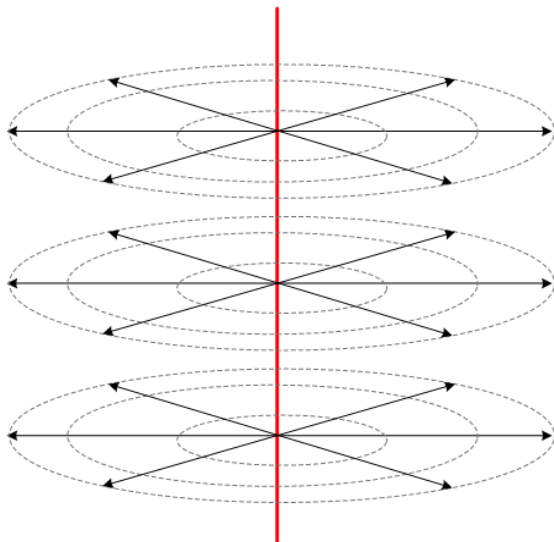


Figura 30: Líneas de fuerza del campo creado por una esfera masiva homogénea

Las líneas de campo son radiales, apuntando al centro de la esfera. Visto desde fuera, el comportamiento es indistinguible del que mostraría una masa puntual idéntica y situada en el centro de la esfera masiva. Sin embargo, las líneas de campo acaban en **todo el volumen de la esfera**, no solamente en su centro: la figura recoge la progresiva disminución de líneas de campo, dentro de la esfera, a medida que nos acercamos a su centro. Naturalmente, este comportamiento refleja el hecho de que las líneas de campo de  $g$  mueren allí donde hay masa: si la masa está distribuida uniformemente en el interior de la esfera, las líneas de campo acaban de forma uniforme en todo el interior de la esfera.

Este diagrama de líneas de campo sirve, tal como está, para representar también el campo eléctrico creado por una esfera no conductora con carga  $Q$  negativa repartida uniformemente en su interior. Para representar el caso en que la carga  $Q$  fuese positiva, bastaría invertir el sentido de las líneas de campo, que deberían ser radiales y hacia fuera.

### CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UN HILO RECTILÍNEO INDEFINIDO CARGADO UNIFORMEMENTE

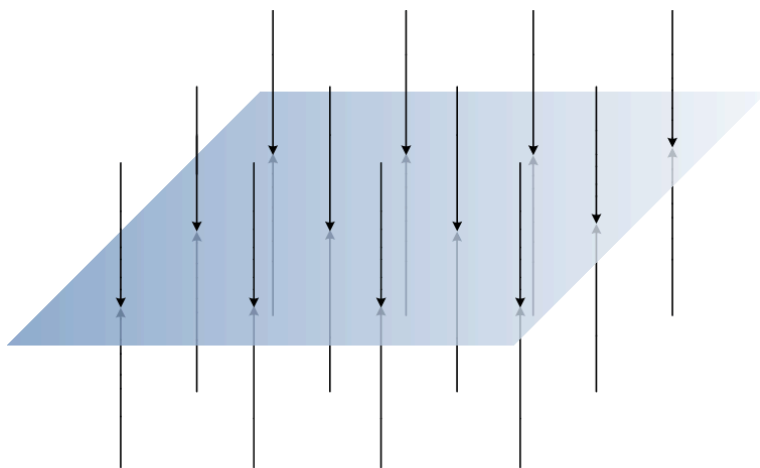


Se representa el caso en que la densidad lineal de carga del hilo es positiva. Las líneas de campo nacen en el hilo y se alejan perpendicularmente de él, de modo que podemos visualizarlas en planos perpendiculares al hilo, como líneas radiales de circunferencias centradas en el hilo.

El caso con densidad de carga negativa se diferencia en el sentido de las líneas de campo, que se dirigirán a morir en el hilo en lugar de nacer en el mismo. Lo mismo sucedería en el supuesto de campo gravitatorio creado por un hilo masivo rectilíneo e indefinido.

Figura 31: Líneas de campo de un hilo rectilíneo indefinido y uniformemente cargado

### CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UN PLANO MASIVO HOMOGÉNEO INDEFINIDO



Las líneas de fuerza son perpendiculares al plano y **equidistantes entre sí**, como corresponde a un campo uniforme o, más exactamente, a dos campos uniformes, uno a cada lado del plano. Obsérvese que la densidad de líneas de campo, que está relacionada con el módulo de  $g$ , es la misma en todas partes, de nuevo en relación con la uniformidad del campo.

Los diagramas de líneas de campo eléctrico correspondientes a planos indefinidos con densidades de carga positiva o negativa son idénticos al de la figura, salvando el hecho de que las líneas de campo han de nacer o morir en el plano según que la densidad de carga sea positiva o negativa.

Figura 32: Las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por un plano indefinido y homogéneo