Introducción

Continuamente hacemos uso de las magnitudes físicas cuando nos referimos a diversas situaciones como medida de distancias (longitud) , expresiones temporales (tiempo), estado de calor o frío (temperatura) , etc.

El procedimiento utilizado para relacionar dos cantidades relativas a la misma magnitud es su **proporción o razón**, que consiste en ver cuántas veces una contiene a la otra.

Por ejemplo, para saber cómo se relacionan la estatura de Juan con la de Pedro es suficiente con establecer su razón:

Si Juan mide 1,85 cm y Pedro mide 1,75 cm, esta proporción es $\frac{1{,}85}{1{,}75} = 1{,}057$

La proporción nos muestra que la altura de Juan es 1,057 veces la altura de Pedro.

La unidad que verás a continuación te mostrará que el uso de razones o proporciones ayuda a resolver problemas derivados de situaciones en las que intervienen varias magnitudes relacionadas de manera especial.

Para saber más

Razón o proporción

Magnitudes directamente proporcionales

La **proporcionalidad numérica** aparece en numerosos problemas derivados de situaciones reales. El conocimiento de las relaciones entre las magnitudes puede por tanto aportarnos estrategias adecuadas para resolver problemas que encontramos a menudo en la vida real.

Por ejemplo:

cuando vamos al mercado a comprar manzanas una sencilla tabla nos puede mostrar cómo varía el precio a pagar por las manzanas en función de los kilogramos comprados:

Número de kg	1	2	3	4	5
Precio (€)	1,75	3,5	5,25	7	8,75

Como podemos observar, cuando duplicamos, triplicamos, etc una de las dos magnitudes, la otra también queda duplicada, triplicada, etc.

Esta relación entre las dos magnitudes permite decir de ellas que **son magnitudes directamente proporcionales.**

La primera definición de magnitudes directamente proporcionales puede redactarse de la forma siguiente:

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la cantidad correspondiente de la otra queda también multiplicada por ese mismo número.

Siguiendo con nuestro ejemplo de las manzanas, observa que el cociente entre el precio pagado y el número de kg comprados siempre tiene el mismo valor

$$\frac{1{,}75}{1} = \frac{3{,}5}{2} = \frac{5{,}25}{3} = \frac{7}{4} = \frac{8{,}75}{5} = 1{,}75$$

Ese valor constante (1,75 €) corresponde al precio de la unidad de compra que en este caso es el kilogramo y recibe el nombre de **constante o razón de proporcionalidad directa**. La constante es k = 1,75.

La definición de magnitudes directamente proporcionales también puede establecerse así:

Dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre sus respectivos valores asociados permanece constante.

Ese valor constante recibe el nombre de constante o razón de proporcionalidad directa.

Ejemplo

El precio ingresado en una librería por las ventas de una determinada novela y el número de ejemplares vendidos son magnitudes directamente proporcionales:

La constante o razón de proporcionalidad directa es $k = \dfrac{92{,}5}{5} = 18{,}5$ y representa el ingreso correspondiente a la unidad (una novela)

Novelas vendidas	5	12	20	31
Precio ingresado (€)	92,5	222	370	573,5

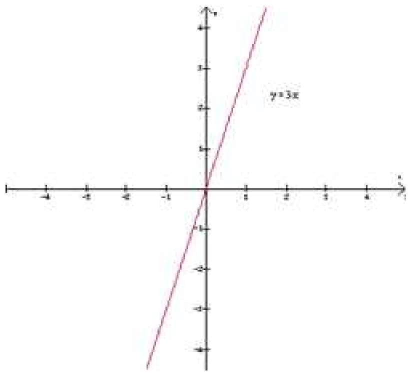
En general, si **X** e **Y** son dos magnitudes directamente proporcionales con constante de proporcionalidad directa **k**, el conocimiento del valor (x) de la primera de ellas, permite calcular el valor (y) asociado de la segunda magnitud mediante la expresión

$y = k \cdot x$ puesto que para cada par de valores x e y asociados de ambas magnitudes se verifica que $\dfrac{y}{x} = k$.

Esta expresión algebraica que permite establecer una magnitud en función de la otra recibe el nombre de función lineal

En el ejemplo anterior, el dinero ingresado (y) en función de la cantidad (x) de novelas vendidas es $y = 18'5 \cdot x$, expresión que nos permite acceder rápidamente al ingreso correspondiente a una venta determinada.

La relación entre las magnitudes se dice que es lineal porque la **gráfica** asociada es **una recta** que pasa por el origen de coordenadas tal y como nos muestra la correspondiente a una función lineal muy sencilla como es y = 3x



Gráfica de la función lineal

Para saber más

La función lineal

Autoevaluación

Establece qué magnitudes son directamente proporcionales entre las siguientes:

a) El precio de las entradas al cine de un grupo de amigos y la cantidad de ellos que pasarán a ver la película.
b) El peso y la estatura de las personas.
c) La cantidad de fotografías que puede revelar una máquina de revelado y el tiempo dedicado a ello.
d) El tiempo que se tarda en realizar un determinado trabajo y el número de operarios que intervienen en el mismo.

Comprobar

2

Completa la tabla siguiente sabiendo que las magnitudes X e Y de la misma son directamente proporcionales

X	2	3	5	7
Y		21		

a) 13, 32 y 45
b) 14 , 35 y 49
c) 10 , 35 y 50
d) 14 , 30 y 47

Comprobar

Magnitudes inversamente proporcionales

En clara diferencia con los ejemplos del apartado anterior, puede ocurrir que haya relación entre las dos magnitudes pero no amplificándose una de ellas en la misma proporción que la otra, sino disminuyendo una de ellas en la misma proporción que aumenta la otra.

Para ver esta relación, analicemos el ejemplo siguiente.

La siguiente tabla nos muestra el tiempo (en horas) que se tarda en pintar la cerca de una propiedad en función del número de pintores que intervienen en el trabajo:

Observa que al duplicar el número de pintores, el tiempo queda reducido a la mitad. Si triplicamos el número de pintores, el tiempo queda reducido a la tercera parte, y así sucesivamente.

Nº pintores	4	8	12	16
Tiempo (h)	12	6	4	3

Esta relación entre dos magnitudes permite decir de ellas que son **magnitudes inversamente proporcionales.**

Podemos definir la relación de la manera siguiente

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por dicho número.

La misma tabla del ejemplo nos muestra la propiedad que satisfacen los pares de valores asociados a ambas magnitudes

$$4 \cdot 12 = 8 \cdot 6 = 12 \cdot 4 = 16 \cdot 3 \quad = \quad 48$$

El producto de dichos pares permanece constante.

Esta característica nos permite establecer una definición de magnitudes inversamente proporcionales más adecuada

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto entre sus respectivos valores asociados permanece constante.

Ese valor constante recibe el nombre de constante o razón de proporcionalidad inversa.

La constante o razón de proporcionalidad inversa , k , representa el valor que le corresponde a una magnitud para la unidad de la otra. En nuestro ejemplo, k = 48 es el tiempo en horas que tarda en realizar el trabajo 1 pintor.

Constante de proporcionalidad inversa

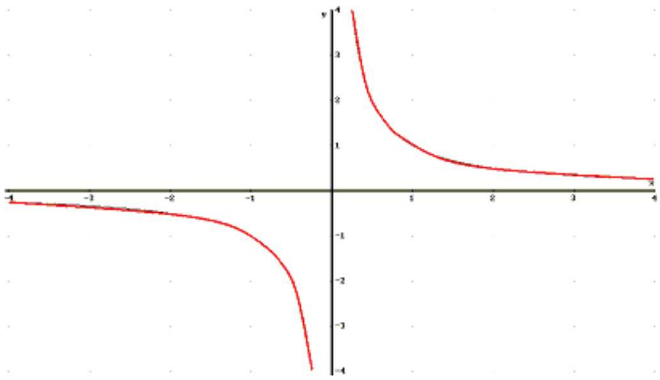
*En general, si **X** e **Y** son dos magnitudes inversamente proporcionales con constante de proporcionalidad inversa **k**, el conocimiento del valor (x) de la primera de ellas, permite calcular el valor (y) asociado de la segunda magnitud mediante la expresión*

$y = \frac{k}{x}$ *puesto que para cada par de valores x e y asociados de ambas magnitudes se verifica que*

$x \cdot y = k$.

La relación funcional $y = \frac{k}{x}$ recibe el nombre de **función de proporcionalidad inversa.**

La gráfica de dicha relación es una hipérbola, generalización de la gráfica de la función de proporcionalidad inversa básica $y = \frac{1}{x}$ que es :



Gráfica de la función de proporcionalidad inversa

Otro ejemplo:

Un gran estanque de un parque tiene numerosos caños idénticos (arrojan el mismo caudal de agua por unidad de tiempo) para llenarse. La tabla siguiente nos muestra el tiempo (en horas) que tarda en llenarse el estanque en función de la cantidad de caños que se utilicen para ello:

Las dos magnitudes son inversamente proporcionales.

La razón o constante de proporcionalidad inversa es 22 y representa en este ejemplo el tiempo que tarda un caño en llenar el estanque.

Nº de caños	1	2	4	8	10
Tiempo (h)	22	11	5´5	2´75	2´2

Para saber más:

La función de proporcionalidad inversa

Autoevaluación

Completa la tabla siguiente sabiendo que las magnitudes X e Y de la misma son inversamente proporcionales

X	2	3	4	5
Y		20		

a) 30 , 15 y 12
b) 28 , 14 y 10
c) 28 , 15 y 12
d) 30 , 15 y 14

Comprobar

Para rellenar un tonel de vino, se precisan 24 botellas de 1´5 litros. ¿Qué cantidad de botellas de 4 litros se precisan para llenarlo?.

a) 6 botellas
b) 8 botellas
c) 12 botellas
d) 9 botellas

Comprobar

Situaciones en las que intervienen dos magnitudes

Cuando son dos las variables o magnitudes relacionadas en un problema, la aplicación de las relaciones de proporcionalidad son muy sencillas mediante un procedimiento denominado **regla de tres simple** (cuando intervienen dos magnitudes) o **compuesta** (cuando intervienen tres magnitudes).

La regla de tres simple es la sencilla aplicación de la relación entre dos magnitudes en función de la misma.

Con los dos ejemplos siguientes puedes entenderlo perfectamente

Ejemplo 1

María come 4 bocaditos de nata en 9 minutos, ¿Cuántos bocaditos comerá en 45 minutos si suponemos que sigue comiendo al mismo ritmo?.

La relación entre el número de bocaditos y el tiempo empleado en comerlos es *directa*. Podemos averiguar ese tiempo con el uso de la constante de proporcionalidad directa tal y como vimos en el primer apartado de la unidad.

La ordenación de la información como sigue, constituye el procedimiento llamado regla de tres simple directa:

Si llamamos x a la cantidad de bocaditos indeterminada y lo situamos asociado a su valor conocido respecto de la otra magnitud junto con los otros datos conocidos, veremos

bocaditos tiempo

4 9

x 45

Como el cociente de valores asociados permanece constante, se verifica que los productos cruzados deben ser iguales y por tanto

$$\frac{4}{x} = \frac{9}{45} \Rightarrow 4 \cdot 45 = 9 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 45}{9} = \frac{180}{9} = 20$$

Obteniendo así la cantidad de bocaditos pedida.

Ejemplo 2

Un ciclista tarda en recorrer una determinada distancia 4 horas circulando a una velocidad media de 32 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer esa misma distancia si circula a una velocidad media de 40 km/h?

La relación entre la velocidad y el tiempo en este ejemplo es *inversa*. Ese tiempo se puede averiguar utilizando la constante de proporcionalidad inversa ordenando la información mediante el procedimiento denominado regla de tres simple inversa

Llamando x al tiempo en horas empleado circulando a 40 km/h, podemos ordenar la información como en el ejemplo anterior:

velocidad tiempo

32 4

40 x

Ahora se verifica que los productos de los pares asociados a ambas magnitudes deben ser constantes

$$32 \cdot 4 = 40 \cdot x \Rightarrow x = \frac{32 \cdot 4}{40} = 3'2$$ horas.

El razonamiento también puede hacerse tomando la razón inversa y procediendo como si fueran directas:

$$\frac{40}{32} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{32 \cdot 4}{40} = 3'2$$ horas.

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, una de ellas es directamente proporcional a la inversa de la otra.

Situaciones en las que intervienen tres magnitudes

En algunas situaciones reales suelen intervenir tres magnitudes con distinto tipo de relación (directa o inversa) entre ellas tomadas de dos en dos. Los procedimientos son parecidos a los del apartado anterior y se les llama **reglas de tres compuestas**.

En todos los casos se procede de la misma forma. Tan solo es importante tener en cuenta que cuando una de las relaciones entre dos de las tres magnitudes sea inversa, en el procedimiento se tomará la razón inversa y se operará como cuando sean directas las relaciones entre ellas.

Los dos ejemplos siguientes nos muestran estas situaciones

Ejemplo 1

Cuatro máquinas (idénticas) de revelado de fotografías revelan 240 fotografías en 3 horas. ¿Cuántas fotografías revelarán 5 máquinas idénticas a las anteriores en 2 horas?

Las tres magnitudes que intervienen son el número de máquinas de revelado, el tiempo en horas de revelado y la cantidad de fotografías. Si las relacionamos dos a dos, observamos que las relaciones son directas.

Ordenamos la información de la misma forma que lo hacemos con dos magnitudes:

Máquinas Tiempo Fotografías

4............... 3 240

5............... 2 x

Se verifica $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{240}{x} \Rightarrow x = \frac{240 \cdot 5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = 200$ fotografías

Al ser las relaciones directas, debe verificarse que el producto de las respectivas fracciones debe ser equivalente a la razón correspondiente de la tercera magnitud de la que queremos calcular el valor solicitado.

Ejemplo 2

Seis máquinas han asfaltado 12 km de carretera en 4 días. ¿Cuántas máquinas se necesitarán para asfaltar 54 km de carretera en 6 días?

Aquí son tres también las magnitudes que intervienen. Los kilómetros y los días están relacionados de forma directa, pero los días y la cantidad de máquinas están relacionados de forma inversa. Ordenamos la información:

Km Días Máquinas

12 .... 4 6

54 .... 6 x

Se verifica que $\frac{12}{54}\cdot\frac{6}{4}=\frac{6}{x} \Rightarrow x=\frac{54\cdot 4\cdot 6}{12\cdot 6}=18$ máquinas son necesarias.

Observa que se ha tomado la fracción inversa de la magnitud que tiene relación inversa con el número de máquinas y se ha procedido como en el caso de relaciones directas entre las tres (caso anterior).

.

Para saber más:

Reglas de tres

Autoevaluación

Para recorrer El Camino de Santiago, un peregrino hace 90 km en 3 días, caminando 6 horas diarias. Si mantiene ese ritmo, ¿cuántos kilómetros hará en 4 días si camina 5 horas diarias?.

a) 80 km
b) 100 km
c) 90 km
d) 105 km

Comprobar

Los 12 grifos de un depósito de 15 m3 tardan 10 horas en llenarlo. Para llenar otro depósito de 5 m3 se dispone de 4 grifos idénticos a los anteriores. Halla el tiempo necesario para llenar este último depósito.

a) 10 horas
b) 12 horas
c) 9 horas
d) 15 horas

Comprobar

Uso de porcentajes

Los usos más frecuentes de porcentajes se refieren a establecer el nuevo precio de un determinado artículo tanto si se rebaja como si se aumenta en un determinado porcentaje, o bien para determinar el precio original de dicho artículo si se conoce el precio rebajado o aumentado y el porcentaje en el que lo ha sido.

La comprensión de las dos situaciones básicas se hace mejor con ejemplos reales

Ejemplo 1

En una tienda de ropa para jóvenes, estoy viendo un abrigo cuyo coste es de 140 €.

Pasado mañana comenzarán las rebajas y el encargado me comunica que costará un 16 % menos. Me interesa saber el precio que tendrá rebajado.

Una sencilla regla de tres directa me puede indicar la cantidad con la que va a ser rebajado el abrigo:

Porcentaje Dinero (€)

100................ 140

16.....................x

Por tanto $\frac{100}{16}=\frac{140}{x} \Rightarrow x=22'4\,€$ será rebajado y costará 117´6 €.

Pero es más fácil si reducimos a la unidad y calculamos el tanto por uno:

El 16 % es $\frac{16}{100} = 0'16$, lo que significa que de cada euro la rebaja es de 0´16 € por lo que pagaré 1 - 0´16 = 0´84 € por cada euro de coste inicial no rebajado.

Eso supone un precio final de $140 \cdot 0'84 = 117'6$ € .

Ejemplo 2

Procediendo al contrario. En esa misma tienda y en época de rebajas, me comunican que todos los artículos tienen un 16 % de rebaja. He comprado una camisa por 30 € y me interesa saber su precio original.

Podemos plantearlo también con una sencilla regla de tres directa.

No obstante procederemos también reduciendo a la unidad.

Si llamamos x a ese precio original, por cada uno de esos euros he pagado

1 - 0´16 = 0´84 € , por tanto se verifica que $x \cdot 0'84 = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{0'84} = 35'71$ €

Tiene como precio anterior a la rebaja marcada.

Autoevaluación

Mi equipo de fútbol ha ganado esta temporada el 75 % de los 44 partidos que jugó.

¿Cuántos partidos ha ganado?

a) 30
b) 32
c) 33
d) 28

Comprobar

Un disco compacto que cuesta 18 € ha sido rebajado un 15 %. ¿Cuál es su nuevo precio?. ¿Qué precio hubiera tenido si, en vez de rebajarlo, se incrementara en ese mismo porcentaje?

a) 15´7 € y 20 €
b) 15´3 e y 21 €
c) 15 € y 21 €
d) 15´3 € y 20´7 €

Comprobar

Repartos proporcionales

Los repartos proporcionales son muy utilizados en situaciones reales de repartos de beneficios.

Pueden ser directos o inversos. Su mecanismo es una sencilla aplicación de las relaciones de proporcionalidad.

Repartos directamente proporcionales

Repartir una cantidad M en partes directamente proporcionales a unas determinadas cantidades a , b , c , ...es hallar unos valores desconocidos x , y , z , ...tales que

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = ... = \frac{M}{a+b+c+...}$$

Con el siguiente ejemplo lo entenderás perfectamente

Ejemplo 1

En una empresa se quieren repartir los 5640 € de beneficios de un mes en partes directamente proporcionales a los años de antigüedad en el puesto de trabajo de sus tres empleados que son 20 , 15 y 12 años respectivamente.

Según la definición, si llamamos x , y , z € a los beneficios correspondientes a los años 20 , 15 y 12 respectivamente, se debe verificar que

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{5640}{20+15+12} = 120$$

Es decir, 120 € es el beneficio correspondiente a la unidad de tiempo (1 año) y por tanto tendremos que:

A 20 años le corresponden 20·120 = 2400 €

A 15 años le corresponden 15·120 = 1800 €

A 12 años le corresponden 12·120 = 1440 €

Repartos inversamente proporcionales

Repartir una cantidad M en partes inversamente proporcionales a unas determinadas cantidades a , b , c , ...es hallar unos valores desconocidos x , y , z , ...tales que

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = ... = \frac{M}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+.....}$$

Con el siguiente ejemplo lo entenderás perfectamente

Ejemplo 2

Un abuelo decide repartir 90 € en partes inversamente proporcionales a las edades de sus tres nietos que son 3 , 4 y 6 años. ¿Qué cantidad de dinero corresponderá a cada nieto?

Teniendo en cuenta la definición, si llamamos x , y , z a la cantidad en € que le corresponde a 3 , 4 y 6 años respectivamente, se debe verificar que

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} = \frac{90}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{90}{\frac{9}{12}} = \frac{90}{\frac{3}{4}} = 120\ €$$

Tenemos que 120 € es el importe que le corresponde a la unidad de tiempo en este reparto inverso. Por tanto a cada uno le corresponde:

Al de 3 años $120 \cdot \frac{1}{3} = 40\ €$

Al de 4 años $120 \cdot \frac{1}{4} = 30€$

Al de 6 años $120 \cdot \frac{1}{6} = 20$ €

Para saber más:

- Repartos proporcionales 2
- Repartos proporcionales 4

Autoevaluación

Juan , Carlos y Luis deben repartirse un premio de lotería de 7200 € en partes directamente proporcionales al dinero aportado por cada uno de ellos en la apuesta, que ha sido de 3, 6 y 9 euros respectivamente. ¿Qué parte del premio corresponde a cada uno?.

a) 1500 , 2000 y 3700 € respectivamente
b) 1500 , 1700 y 4000 e respectivamente
c) 1200 , 2400 y 3600 e respectivamente.

Comprobar

El dueño de un empresa decide repartir 5400 € en partes inversamente proporcionales a los sueldos de sus tres empleados que son 1500 , 1250 y 1100 euros respectivamente. Averigua la cantidad que le corresponde a cada uno.

a) 1425 , 1956 y 2081 € respectivamente
b) 1495´5 , 1780´75 y 2052´75 € respectivamente.
c) 1515´30 , 1818´37 y 2066´33 € respectivamente
d) 1541´28 , 1802´42 y 2063´32 € respectivamente

Comprobar