Introducción

Vamos a comenzar la **Unidad 3**. En ella trataremos los polinomios, las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones, que son las herramientas fundamentales del lenguaje algebraico.

Trataremos los monomios y polinomios, que son posiblemente los dos tipos de expresiones algebraicas más importantes, trataremos los distintos tipos de ecuaciones que son parte fundamental de quehacer matemático a cualquier nivel y como ampliación al concepto de ecuación, veremos los sistemas de 2 y 3 ecuaciones lineales con el mismo numero de incógnitas

Monomios

Un monomio es una expresión algebraica formada por un único término:

a·xn --> $\begin{cases} a: \text{número} \rightarrow \text{coeficiente} \\ x: \text{parte literal} \rightarrow \text{variable o indeterminada} \\ n: \text{exponente} \rightarrow \text{grado del monomio} \end{cases}$

Valor numérico

El valor numérico de un monomio en un punto x0 es el número que se obtiene al sustituir la variable *x* por el valor concreto *x0* y hacer las operaciones en el orden adecuado

Ejemplo: valor numérico de $4x^5$ en $x_0 = -3$ --> $4\cdot(-3)^5 = 4\cdot(-243) = -972$

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal y el mismo grado (sólo se diferencian en el coeficiente que los acompaña):

$3x^6$ y $-4x^6$ son **semejantes** $2x^7$ y $2x^9$ **no** son **semejantes**

Podemos considerar a los **números** como **monomios de grado cero**: **5 = 5·1 = 5·x^0**
(por las propiedades de las potencias, $x^0 = 1$)

Operaciones

Con los monomios se pueden realizar operaciones algebraicas, bajo ciertas condiciones:

- **Suma y resta**: para sumar o restar monomios deben ser semejantes. Se suman o resta los coeficientes de cada monomio como resultado de sacar factor común la parte literal:

$$4x^2 + 6x^2 - \frac{2}{5}x^2 = \left(4+6-\frac{2}{5}\right)x^2 = \frac{48}{5}x^2$$

- **Producto**: para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes entre sí y se suman los grados (no es necesario que sean semejantes):

$$5x^5 \cdot (-3x^6) = -15x^{11}$$

- **Cociente**: para dividir dos monomios se dividen los coeficientes entre sí y se restan los grados:

$$(45x^7) : (5x^4) = \frac{45x^7}{5x^4} = 9x^3$$

- **Potencia**: la potencia de un monomio se obtiene elevando el coeficiente al exponente y multiplicando el grado del monomio por el exponente de la potencia:

$$\left(-2x^5\right)^4 = (-2)^4 x^{5\cdot 4} = 16x^{20}$$

Para saber más sobre operaciones con monomios:

Monomio y elementos
http://es.wikipedia.org/wiki/Monomio

Monomios. Operaciones
http://www.kalipedia.com/matematicas-algebra/tema/monomios-operaciones.html?x=20070926klpmatalg_16.Kes

Expresiones algebraicas. Monomios
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Polinomios/monomios.htm

Autoevaluación

Calcula las operaciones con monomios:

1. $2x^2$	7. $10x^5$
2. $5x$	8. $11x^3$
3. $3x$	9. $-3x^4$
4. $15x^7$	10. $12x^8$
5. $10x^2$	11. $4x^3$
6. $-2x^2$	12. $5x$

$3x+2x =$ Selecciona...

$4x+x =$ Selecciona...

$5x^3 +6x^3 =$ Selecciona...

$5x^4 - 8x^4 =$ Selecciona...

$9x-6x =$ Selecciona...

$3x^2 -5x^2 =$ Selecciona...

$2x^2 * 5x^3 =$ Selecciona...

$3x^6 * 4x^2 =$ Selecciona...

$5x^3 * 3x^4 =$ Selecciona...

$12x^4 : 3x =$ Selecciona...

$20x^8 : 2x^6 =$ Selecciona...

$16x^7 : 8x^5 =$ Selecciona...

Comprobar

Polinomios

Un polinomio es una suma algebraica de monomios de distinto grado. Se suelen expresar con los términos ordenados de mayor a menor grado:

$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ...+ a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n$

Dentro de cada polinomio podemos considerar los siguientes elementos:

grado: el mayor de los exponentes de los distintos monomios (n

coeficiente director o principal: el coeficiente del monomio de mayor grado (a_0

término independiente: el monomio de grado 0 (a_n

$$P(x) = -5x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x - 1 \dashrightarrow \begin{cases} grado = 4 \\ coef.director = -5 \\ térm.indep. = -1 \end{cases}$$

Un polinomio es **completo** cuando tiene todos los términos desde el de mayor grado hasta el término independiente. Si le falta algún término se dice **incompleto.**

Valor numérico

Dado un valor fijo ***a***, el **valor numérico** del polinomio P(x) en ***x = a*** es el número que se obtiene al sustituir la variable ***x*** por el valor concreto ***a*** y hacer las operaciones en el orden adecuado:

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \text{ en } x = 3 \dashrightarrow P(3) = 2\cdot3^3 + 4\cdot3^2 - 5\cdot3 + 6 = 54 + 36 - 15 + 6 = 81$$

Operaciones

Al igual que con los monomios, se pueden operar con polinomios, de forma muy parecida:

- **Suma y resta**: para sumar o restar dos polinomios se suman o restan entre sí los coeficientes de los monomios semejantes:

$$\begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & +5x^2 & -5x & +9 \\ + & -2x^3 & -x^2 & & +1 \\ \hline & 2x^3 & +4x^2 & -5x & +10 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} & x^4 & -3x^3 & & +2x & +3 \\ - & 3x^4 & +6x^3 & -x^2 & +5x & -7 \\ \hline & -2x^4 & -9x^3 & +x^2 & -3x & +10 \end{array}$$

- **Producto**: para multiplicar dos polinomios se multiplican todos y cada uno de los monomios del primero por todos y cada uno de los monomios del segundo, agrupando a continuación los monomios semejantes:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 3x^4 & -2x^3 & & +2x & -7 \\ \cdot & & & & x^2 & +3x & +2 \\ \hline & & 6x^4 & -4x^3 & & +4x & -14 \\ & 9x^5 & -6x^4 & & +6x^2 & -21x & \\ 3x^6 & -2x^5 & & +2x^3 & -7x^2 & & \\ \hline 3x^6 & +7x^5 & & -2x^3 & -x^2 & -17x & -14 \end{array}$$

- **Cociente**: para dividir dos polinomios, el grado del dividendo debe ser mayor o igual que el grado del divisor. Colocamos el polinomio dividendo completo, de forma que si falta algún término se coloca un 0 en su lugar. Se dividen los términos principales de ambos polinomios, obteniéndose el primer monomio del cociente. Se multiplica ese monomio por el divisor y se resta del dividendo, con lo que el grado del dividendo disminuye. Se repite el proceso mientras que el grado del dividendo sea mayor o igual que el del divisor. Al final, obtenemos el polinomio **cociente** y el **resto**, que deberá tener grado menor que el divisor.

Ejemplo

dividir $(5x^3 + 7x^2 - 3)$ entre $(x^2 + 2x - 1)$

Dividendo --> $D(x) = 5x^3 + 7x^2 - 3$ divisor --> $d(x) = x^2 + 2x - 1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 5x^3 & +7x^2 & +0x & -3 & x^2+2x-1 \\ \cline{5-5} -5x^3 & -10x^2 & +5x & & 5x-3 \\ \cline{1-4} & -3x^2 & +5x & -3 & \\ & +3x^2 & +6x & -3 & \\ \cline{1-4} & & 11x & -6 & \end{array}$$

Resto --> $r(x) = 11x - 6$ Cociente -->$c(x) = 5x - 3$

En la división, se cumple el Algoritmo de Euclides: D(x) = d(x) · c(x) + r(x) y además el grado del resto < grado del divisor.

Para saber más :

- Teoría sobre polinomios, operaciones y factorización
- Operaciones resueltas sobre polinomios
- Teoría y ejemplos de polinomios

Autoevaluación

Calcula las operaciones con polinomios:

$(3x^3 - 5x^2 + 6x + 5) +(2x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 3) =$ Selecciona...
A= $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x +8$
B= $5x^5 - 10x^3 + 2x^2 + x$
C= $3x^3 + 4x^2 - 8x +1$

$(-4x^3 + 5x^2 - 2) - (-x^3 - 4x^2 + 9x - 1) =$ Selecciona...
A= $-3x^3 + x^2 + 9x - 1$
B= $-3x^3 + 9x^2 - 9x - 1$
C= $-5x^3 + 2x^2 - 7x +1$

$(2x^3 - 5x^2 + x + 3) - (x^2 + 3x - 2) =$ Selecciona...
A= $2x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 34x^2 - 3x - 18$
B= $3x^5 - 6x^4 + 34x^2 - 8x + 1$
C= $-4x^5 - 3x^4 - 16x^3 - 18x + 2$

$(x^4 - 2x^2 + x + 9) : (x^2 + x - 6) =$ Selecciona...
A= $c(x) = 2x^2 - 3x + 2$ $r(x) = - 4x + 19$
B= $c(x) = x^2 - x + 5$ $r(x) = - 10x + 39$
C= $c(x) = x^2 + x - 4$ $r(x) = 5x + 11$

Comprobar

Método de Ruffini

Es un método abreviado para dividir polinomios en el caso de que el divisor sea de grado 1, es decir, cuando el divisor sea de la forma -->x - a) o --->x + a), siendo *a* cualquier nº real.

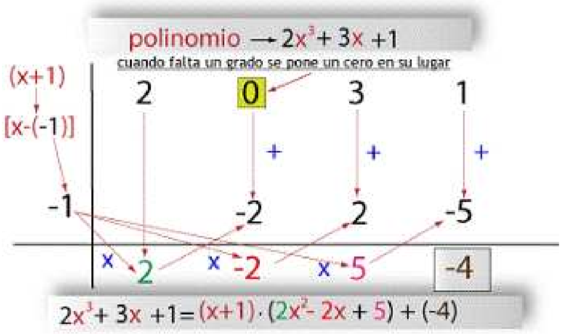
El método consta de una serie de pasos, que debemos seguir por orden:

- se colocan los coeficientes del polinomio dividendo competo, colocando 0 en los monomios que falten
- a la izquierda se coloca el valor de a que aparece *restando* en el divisor:

si es (x - a) ---> a si es (x + a) = (x -(-a)) ---> -a

- bajamos el primer coeficiente del polinomio dividendo, lo multiplicamos por el valor a la izquierda ---> a o -a) y se lo sumamos al siguiente coeficiente
- repetimos el proceso hasta llegar al último coeficiente del dividendo
- el último nº obtenido es el resto de la división y los demás, son los coeficientes del polinomio cociente, en orden creciente.

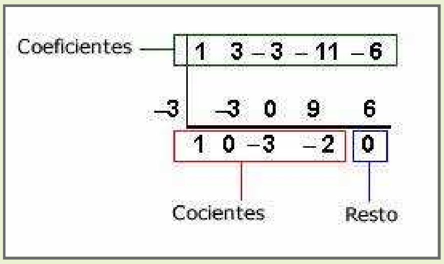
En el **ejemplo** tienes desarrollada la división de $2x^3 + 3x + 1$ entre x + 1:



Ejemplos

Ejemplo 1:

Dividir por Ruffini D(x) = $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ entre d(x) = x + 3 (en este caso a = - 3)



1. Colocamos los coeficientes de P(x) y el valor de a como se muestra
2. Bajamos el primer coeficiente de la izquierda(el 1)
3. Lo multiplicamos por el -3 y el resultado lo colocamos bajo el siguiente coeficiente para sumarlos, dando cero.
4. Lo volvemos a multiplicar por -3 y el resultado lo colocamos bajo el siguiente para sumar, dando -3 . Repetimos el proceso hasta acabar con el resto de coeficientes.
5. El ultimo resultado(en este caso cero) es el resto de la división
6. El cociente es $1x^3 + 0x^2 -3x -2 = x^3 -3x - 2$

Ejemplo 2

Dividir el polinomio D(x) = $4x^4 - 9x^2 + 7x + 18$ entre d(x) = x - 2, siguiendo la regla de Ruffini.

Solución:

Se disponen los coeficientes de D(x) y el término independiente de d(x) de la manera siguiente:

Coeficientes		4	0	-9	7	18
	2		8	16	14	42
Cociente		4	8	7	21	60
						Resto

El resto de la división es el último número de la línea de resultados, el que se sitúa debajo del último coeficiente. Y el cociente es un polin omio ordenado y completo cuyos coeficientes son todos los resultados excepto el último, que ya hemos dicho que es el resto. Este polinomio cociente siempre es un grado menor que el dividendo.

En la división anterior, el polinomio cociente es c(x) = $4x^3 + 8x^2 + 7x + 21$, y el resto sería 60.

Para saber más :

[Regla de Rufini: Animación](#)

Autoevaluación

Divide por el método de Ruffini:

$(-3x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6) : (x - 2) =$ Selecciona...

A= $c(x) = -3x^3 - 7x^2 - 9x - 21$ $r(x) = -36$

B= $c(x) = -3x^4 + 5x^2 - 11x + 6$ $r(x) = 14$

C= $c(x) = 3x^3 - 4x^2 - x - 21$ $r(x) = -5$

$(2x^3 - 5x^2 + x + 3) : (x + 3) =$ Selecciona...

A= $c(x) = 3x^2 - x - 17$ $r(x) = 99$

B= $c(x) = -2x^2 + 6x + 4$ $r(x) = 34$

C= $c(x) = 2x^2 - 11x + 34$ $r(x) = -99$

$(x^4 + 3x^3 - 2x - 5) : (x - 3) =$ Selecciona...

$c(x) = x^2 + 9x + 12$ $r(x) = -9$

$c(x) = x^3 + 6x^2 + 18x + 52$ $r(x) = 151$

$c(x) = -x^3 + 2x^2 - 4x + 52$ $r(x) = 4$

Comprobar

Factorización de polinomios

Raíces de un polinomio

Diremos que *a* es una raíz de un polinomio P(x) si el valor numérico del polinomio P(x) en x = a es cero:

$$a \text{ es raíz de } P(x) \iff P(a) = 0$$

Ejemplo

3 es raíz de $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 12$ ya que $P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 12 = 27 - 45 + 6 + 12 = 0$

2 no es raíz de P(x) porque $P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 12 = 8 - 20 + 4 + 12 = 4 \neq 0$

Teorema del Resto

El valor numérico de un polinomio P(x) en x = a es igual al resto de la división de P(x) entre (x - a).

$P(a) = R$ = resto de la división de $P(x) : (x - a)$

Demostración: $P(x) = (x - a) \cdot c(x) + R$ < grado $(x - a) = 1$ (grado $R = 0$)

$P(a) = (a - a) \cdot c(a) + R = 0 \cdot c(a) + R = 0 + R = R$

Factorizar un polinomio

Vamos a usar lo anterior para proceder a la factorización de un polinomio, es decir, **descomponer** el polinomio como **producto de factores** (de ahí el nombre de **factorización**) de menor grado.

Factorizar un polinomio es descomponerlo como producto de factores más sencillos (de menor grado), concretamente de grado 1 o 2:

$$P(x) = a \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_1x + c_1) \cdot \ldots \text{ (} a \text{ es el coeficiente director)}$$

Vamos a usar conjuntamente las raíces de un polinomio y el Teorema del Resto para factorizar un polinomio:

si a es *raíz* de P(x) (P(a) = 0 = resto de dividir P(x) entre (x - a) (la división de P(x)

entre (x - a) es exacta (P(x) = (x - a) · C(x) (1ª factorización)

repetimos el proceso con C(x) buscando una nueva raíz --> C(x) = (x - b) · D(x) y así, retrocediendo:

P(x) = (x - a) · (x - b) · D(x) = ...

Este proceso se reitera hasta encontrar todas las raíces de P(x); es posible que algunos factores de P(x) sean de grado 2 y que no tengan raíces (**factores irreducibles**. Éstos se deben colocar en la factorización tal cual, ya que al no tener raíces reales, no se pueden descomponer (reducir).

Acabamos de ver que cada raíz ***a*** de un polinomio produce un factor de la descomposición:

si ***a*** es raíz de P(x) -->(x - *a*) es factor de P(x) (cada raíz produce un factor)

Todo este método se basa en encontrar las raíces de un polinomio P(x) cualquiera, lo que no es tarea sencilla y en la práctica puede que sea imposible. Podemos ayudarnos del siguiente teorema:

Teorema

Las raíces enteras de un polinomio deben dividir al término independiente del polinomio

Este teorema nos da una indicación de por donde podemos empezar a buscar las raíces enteras: entre los números que dividan al término independiente del polinomio P(x). Además, al llegar tras sucesivas factorizaciones a un polinomio de grado 2, podemos aplicar la fórmula de la ecuación de 2º grado para determinar directamente sus raíces o bien comprobar que no tiene y que es por tanto irreducible:

Ejemplo

factoriza $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$

posibles raíces --> $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ (comenzamos por las más pequeñas)

se comprueba que 1 y 2 son raíces, usando el método de Ruffini (el resto de la división es 0 en ambos casos (el valor numérico del polinomio es 1 y 2 es 0 (1 y 2 son **raíces**):

	1	-2	-7	20	-12	
1		1	-1	-8	12	
	1	-1	-8	12	0	→ 1 es raíz → (x – 1) es factor
2		2	2	-12		
	1	1	-6	0		→ 2 es raíz → (x – 2) es factor

Tras hacer las dos primeras factorizaciones:

$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + x - 6)$

Aplicamos la ecuación de 2º grado a $x^2 + x - 6 = 0$ para hallar sus raíces:

$x^2 + x - 6 = 0$ ---> $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ factores (x - 2) y (x + 3)

Por último: $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 3)$

(notar que el factor (x + 3) = (x - (-3)))

Este método se fundamenta en el hecho de que hemos podido encontrar raíces enteras del polinomio. Cuando el polinomio no tiene raíces enteras, no se puede aplicar y como consecuencia, no podríamos factorizar el polinomio con este método. El caso general de factorizar un polinomio cualquiera (con coeficientes reales) es un problema abierto, es decir, sin solución a día de hoy. Existen métodos iterativos, como el método de las tangentes de Newton, que permiten ***aproximar*** el valor de una raíz de un polinomio con tanta precisión como se desee, pero no proporcionan el ***valor exacto*** de la raíz.

Para saber más

Teoría sobre factorización, con un applet para ejercicios

Autoevaluación

Factoriza los siguientes polinomios, hallando previamente sus raíces enteras:

$P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

a) $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^2$
b) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 1)^2$
c) $(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Comprobar

$P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

a) $(x + 1)^2 \cdot (x - 3)$
b) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 1)$
c) $(x - 1) \cdot (x + 2)^2$

Comprobar

Ecuaciones. Tipos de ecuaciones

En este apartado vamos a tratar con las ecuaciones, que son herramientas fundamentales en cualquier rama de la Ciencia o de la Técnica. Existe un gran número de tipos de ecuaciones distintas y sería imposible tratarlas todas. Comenzaremos por las más sencillas, que nos pueden servir como guía y modelo para las demás.

Una ecuación es una igualdad en la que aparece alguna cantidad o magnitud desconocida, llamada incógnita. Las ecuaciones se nombran indicando el *número de incógnitas* que aparecen y el mayor de los exponentes a los que aparecen elevadas, llamado *grado de la ecuación.* Las incógnitas se nombran usando letras: x, y, z, ...

A veces, las ecuaciones se nombran a partir de la relación que presentan las incógnitas con las operaciones a las que están sometidas: ecuaciones irracionales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, etc. En este apartado vamos a tratar con ecuaciones que tienen una única incógnita.

Una solución de una ecuación es un valor de la incógnita que verifica la igualdad. Las ecuaciones que tienen alguna solución se llaman compatibles y si no tienen ninguna solución se llaman incompatibles.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus soluciones o demostrar que no tiene ninguna.

Veremos a continuación los siguientes apartados:

- Ecuaciones de 1º grado (lineales) y de 2º grado
- Ecuaciones irracionales, ecuaciones logarítmicas y ecuaciones exponenciales

Ecuaciones de 1º grado (lineales) y de 2º grado

Para resolver una **ecuación lineal o de 1º grado**, seguiremos los siguientes pasos:

- eliminar los denominadores, multiplicando todos los términos por el m.c.m. de los denominadores y simplificando
- quitar los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva
- agrupar las incógnitas y los términos independientes en lados distintos de la igualdad
- despejar el valor de la incógnita; pueden darse 3 casos:

$k \cdot x = m$ con $k \neq 0$ ---> solución única

$$x = \frac{m}{k}$$

$0 \cdot x = 0$ ---> existen ∞ soluciones

$0 \cdot x = m$ con $m \neq 0$ ---> no hay solución

Ejemplo:

$$\frac{x-1}{3} + 4x = \frac{2x-5}{2} + 6 \quad \text{--->} \quad \frac{6\cdot(x-1)}{3} + 6\cdot 4x = \frac{6\cdot(2x-5)}{2} + 6\cdot 6 \quad \text{--->}$$

$$2\cdot(x-1) + 24x = 3\cdot(2x-5) + 36 \quad \text{--->}$$

$$2x - 2 + 24x = 6x - 15 + 36 \quad \text{--->} \quad 2x + 24x - 6x = -15 + 36 + 2 \quad \text{--->} \quad 20x = 23 \quad \text{--->}$$

$$\text{--->} \quad x = \frac{28}{23}$$

Conviene destacar que si delante de algún paréntesis aparece un coeficiente multiplicando, es recomendable introducir el coeficiente en el paréntesis antes de reducir a común denominador.

Ejemplo

$$\frac{2\cdot(x-1)}{3} + \frac{x-1}{2} = 3 - 3x \quad \text{--->} \quad \frac{(2x-2)}{3} + \frac{x-1}{2} = 3 - 3x \quad \text{--->} \quad \frac{6\cdot(2x-2)}{3} + \frac{6\cdot(x-1)}{2} = 6\cdot 3 - 6\cdot 3x$$

$$\text{--->} \quad 2\cdot(2x-2) + 3\cdot(x-1) = 18 - 18x \quad \text{--->} \quad 4x - 4 + 3x - 3 = 18 - 18x \quad \text{--->} \quad 25x = 25 \quad \text{--->}$$

$$\text{--->} \quad x = 1$$

El siguiente tipo de ecuaciones en complejidad son las ecuaciones de 2º grado, que surgen al aumentar el grado de la ecuación de 1 a 2. Lógicamente, la dificultad aumenta con el grado de la ecuación.

Las **ecuaciones de 2º grado** son las que se pueden reducir, tras agrupar los términos semejantes, a una expresión del tipo:

$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ a, b, c ---> **coeficientes--->a $\neq$ 0)**

La solución general de este tipo de ecuaciones viene dada por la conocida fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

La existencia de soluciones está determinada por el valor $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$ llamado **discriminantede la ecuación,** ya que cuando exista la raíz cuadrada, existirán soluciones:

si $\Delta > 0$ ---> existen **2 soluciones distintas**

$$x \prec \begin{matrix} \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{matrix}$$

si $\Delta = 0$ ---> existe una única solución

$x = \frac{-b}{2a}$ **solución doble**

si Δ SIGNO MENOR 0 ---> **no hay solución ---> ecuación incompatible**

Ejemplo

$$-2x^2+5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{-4}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{-4}=\frac{-5\pm 7}{-4}$$

---> $x \prec \begin{matrix} -1/2 \\ 3 \end{matrix}$ las soluciones de la ecuación son -1/2 y 3.

Hay ecuaciones de 2º grado que **no tienen** solución:

$$x^2+4x+9=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-36}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-20}}{2}$$

pero no existe $\sqrt{-20}$ y por tanto **no hay solución.**

La fórmula es válida aún cuando alguno de los coeficientes de la ecuación sea 0, en cuyo caso la **ecuación** se dice **incompleta**. Pero en este caso, las ecuaciones de 2º grado incompletas se pueden resolver más fácilmente, **despejando** la variable **x** o **extrayendo factor común**, dependiendo de cuál sea el caso.

Ejemplos

$x^2+5x=0 \Rightarrow x\cdot(x+5)=0 \Rightarrow$ para que un producto sea nulo, uno de los dos factores debe ser nulo ---> x =0 o x + 5 = 0 ---> las soluciones son **x = 0** y **x = -5**

Otro tipo de ecuación incompleta: $3\cdot x^2+45=0 \Rightarrow x^2=\frac{-45}{3}=-15 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-15}$ que no existe como número real, por tanto **no hay solución**.

Autoevaluación:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\frac{-2\cdot(1+4x)}{2}-\frac{4x+1}{12}=5-\frac{3+x}{6}$$

a) x = $\frac{-67}{50}$

b) x = $\frac{-3}{5}$

c) x = -2

Comprobar

7(x + 4) - 3x2 = 3(x - 1) - x

a)

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{397}}{-6}$

b) No tiene solución

c)

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{39}}{-2}$

Comprobar

(x - 5)2 = 5(2x + 5)

a) x = 0 x = -20

b) x = 0 x = 20

c) X= $\pm\sqrt{20}$

Comprobar

x2 + 6x - 13 = 2(5 + 3x)

a) x = 0 x = 2

b) x = 3 x = 5

c) X= $\pm\sqrt{23}$

Comprobar

Ecuaciones irracionales, exponenciales y logarítmicas

Vamos a tratar las ecuaciones irracionales, logarítmicas y exponenciales, que son tipos especiales de ecuaciones. Su particularidad es que, en la mayoría de los casos, no se pueden resolver por métodos algebraicos, a no ser que estén preparadas para ello. Sin embargo, en los casos en los que sí se pueden resolver, proporcionan buenos ejemplos de los mecanismos y estrategias adecuadas para resolver cualquier tipo de ecuación.

Las **ecuaciones irracionales** son aquellas en las que la incógnita ***x*** aparece bajo algún signo radical. Para resolverlas, se aísla en un lado de la igualdad ese término radical y se elevan ambos términos de la ecuación al mismo exponente que el índice del radical. Si el resultado es una ecuación conocida, se resuelve y se comprueba cuál de las soluciones de la nueva ecuación es solución de la ecuación original. En otro caso, habría que utilizar un método iterativo aproximado para encontrar una aproximación a la / las soluciones.

El tipo más común de ecuación irracional son las ecuaciones irracionales cuadráticas (índice 2):

Ejemplo

$$\sqrt{2x+6} + 3x = 2\cdot(2x+1) - 3 \quad \text{--->} \quad \sqrt{2x+6} = 4x + 2 - 3 - 3x \quad \text{--->}$$

$$\sqrt{2x+6} = x - 1 \quad \text{--->} \quad \left(\sqrt{2x-6}\right)^2 = (x-1)^2 \quad \text{--->} \quad 2x - 6 = x^2 - 2x + 1 \quad \text{--->} \quad -x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\text{--->} \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2} = \prec \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix}$$

Comprobamos que x = 5 es solución de la ecuación original pero x = -1 no lo es. Luego, la única solución es x = 5.

Las **ecuaciones logarítmicas** son ecuaciones en las que la incógnita ***x*** aparece dentro del argumento de algún logaritmo. Para resolverlas, debemos usar repetida y adecuadamente las propiedades de los logaritmos para llegar a despejar el valor de la incógnita. Podremos resolver aquellas que, tras aplicar las propiedades de los logaritmos, se puedan convertir en alguna ecuación conocida: de 1º grado, 2º grado, etc.

Ejemplo

$\ln(x+2)+\ln(x-3)=0$ ---> $\ln[(x+2)\cdot(x-3)]=\ln 1$ --->recordar que ln1 = 0) --->

$\ln(x^2-x-6)=\ln 1$ ---> igualando los argumentos de los logaritmos --->

$$x^2-x-6=1 \rightarrow x^2-x-7=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+28}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$$

Por último, comprobaremos si alguna de los valores obtenidos es solución de la ecuación original. Recordemos que el logaritmo (*cualquier logaritmo*) sólo tiene sentido cuando el argumento de dicho logaritmo es estrictamente mayor que 0.

Si la ecuación no está preparada, es muy difícil que se pueda resolver por métodos algebraicos y como siempre, habrá que recurrir a los métodos iterativos que aproximen el valor de las soluciones.

En las **ecuaciones exponenciales**, la incógnita ***x*** aparece en el exponente de alguna potencia cuya base es conocida. Al igual que con las ecuaciones logarítmicas, es muy difícil resolverlas por métodos algebraicos, a no ser que estén preparadas para ello. Se aplican las propiedades de las potencias y de los logaritmos para poder resolverlas.

Ejemplo

$$e^{2x+5}=7 \rightarrow \ln(e^{2x+5})=\ln 7 \rightarrow 2x+5=\ln 7 \rightarrow x=\frac{\ln 7-5}{2}$$

(Recordemos que, según vimos en el Tema 1, el logaritmo es la operación que permite despejar el exponente desconocido de una potencia conocida. Para ello, debemos usar el logaritmo de la misma base que la de la potencia ---> ln = log $_e$)

A veces, mediante un cambio de variable adecuado, estas ecuaciones se pueden convertir en un tipo de ecuación conocido, que se puede resolver. Se comprueba más tarde cuál o cuales de los valores obtenidos verifican la ecuación original:

Ejemplo

$10^{6x+2}-10^{3x+1}=5$ ---> haciendo que t = 10^{3x+1} se tiene que t^2 = --->$10^{3x+1})^2 = 10^{6x+2}$ ---> $t^2 - t = 5$

ecuación de 2º grado ---> $t^2-t-5=0 \rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{1+20}}{2}$ y ahora se deshace el cambio de variable ---> si t = 10^{3x+1}

entonces despejando x = $\frac{\log_{10} t-1}{3}=\frac{\log_{10}\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}-1}{3}$

Naturalmente, para poder realizar este proceso, las ecuaciones deben estar preparadas para ello.

Para saber más

Ecuaciones logarítmicas

Autoevaluación

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\sqrt{x+1}+3=x+2$$

a)

x = $\frac{7}{2}$

b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{19}}{5}$

c) x = 3

Comprobar

2(elevado a lo k sigue4x+6) - 5-22x+3 = -6

a) $X= \dfrac{\log_2 3 - 6}{4}$

b) $X= \dfrac{\log_2 3 - 3}{2}$

c) X=0

Comprobar

ln (2x + 4) + ln (x - 1) = 0

a) x = 2

b) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{44}}{4}$

c) x = -7

Comprobar

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de 2 o más ecuaciones de grado 1 (*lineales*) con 2 o más incógnitas que se considera conjuntamente y que debe ser resuelto a la vez. Los sistemas se nombran indicando el número de ecuaciones que lo componen y cuántas incógnitas distintas puede haber en cada ecuación.

Resolver un sistema es encontrar el valor que deben tener las incógnitas para que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema simultáneamente, o en su caso, demostrar que no hay tal solución.

Un sistema de ecuaciones puede ser, atendiendo al tipo de solución:

$$\begin{array}{l} COMPATIBLE \rightarrow \text{si tiene alguna solución} \prec \begin{array}{l} \text{DETERMINADO} \rightarrow \text{solución única} \\ \text{INDETERMINADO} \rightarrow \infty \text{ soluciones} \end{array} \\ INCOMPATIBLE \rightarrow \text{si no tiene solución} \end{array}$$

A lo largo del siguiente apartado veremos:

- Sistemas de 2 ecuaciones y 2 incógnitas
- Sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Método de reducción de Gauss
    - Método de Gauss

Sistemas de 2 ecuaciones y 2 incógnitas

Un sistema lineal de 2 ecuaciones y 2 incógnitas es un conjunto de 2 ecuaciones en las que en cada una de ellas hay 2 magnitudes desconocidas, llamadas incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ x+3y=9 \end{array}\right\} \quad \textbf{x , y son las incógnitas}$$

los nº que multiplican a las incógnitas se llaman coeficientes

los nº a la derecha en las ecuaciones se llaman términos independientes

Existen varios métodos para resolver un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

1. método de **reducción**: hay que multiplicar las ecuaciones por números adecuados para que la misma incógnita aparezca con coeficientes opuestos; después, se suman ambas ecuaciones y al sumar, una de las incógnitas desaparece; se resuelve la ecuación con 1 incógnita y con ese valor se despeja el valor de la otra.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ x+3y=9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-3)} \left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ -3x-9y=-27 \end{array}\right\}$$

sumamos ambas ecuaciones---> $\left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ -13y=-26 \end{array}\right\}$ ---> $\begin{array}{c} 3x-4y=1 \\ y=2 \end{array}$ ---> $\begin{array}{c} 3x-8=1 \\ y=2 \end{array}$ ---> $\begin{array}{c} 3x=9 \\ y=2 \end{array}$ ---> $\begin{array}{c} x=3 \\ y=2 \end{array}$

2. método de **igualación**: se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones, quedando una ecuación con una incógnita. Se resuelve y con el valor obtenido se calcula la otra incógnita.

Ejemplo

$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ x+3y=9 \end{array}\right\}$ ---> $\begin{array}{c} x=\dfrac{1+4y}{3} \\ x=9-3y \end{array}$ ---> $\dfrac{1+4y}{3}=9-3y$ --->

$1+4y=27-9y$ ---> $13y=26$ ---> $y=2$ ---> $x=9-6=3$ --->

Solución final ---> $\begin{array}{c} x=3 \\ y=2 \end{array}$

3. método de **sustitución**: se despeja una incógnita en una ecuación y esa expresión se sustituye en la otra ecuación; se resuelve la ecuación obtenida y con ese valor se despeja la otra incógnita

Ejemplo

$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ x+3y=9 \end{array}\right\}$ ---> $\left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ x=9-3y \end{array}\right\}$ ---> $\left.\begin{array}{r} 3\cdot(9-3y)-4y=1 \\ x=9-3y \end{array}\right\}$ ---> $\left.\begin{array}{r} 27-13y=1 \\ x=9-3y \end{array}\right\}$ --->

$\left.\begin{array}{r} -13y=-26 \\ x=9-3y \end{array}\right\}$ ---> $\left.\begin{array}{r} y=2 \\ x=9-3y \end{array}\right\}$ Solución final ---> $\left.\begin{array}{r} y=2 \\ x=3 \end{array}\right\}$

Autoevaluación

Resuelve los sistemas de ecuaciones, eligiendo alguno de los métodos que conoces:

$$\left.\begin{array}{r} y = 5\cdot(x+2) \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$$

a) x =0 y = 5
b) x = -1 y = 5
c) x = -2 y = -1

Comprobar

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y = 3 \\ 2x + 9y = 11 \end{array}\right\}$$

a)
x = 4 y = $\frac{1}{3}$

b) x = 2 y = -1
c)
x= $\frac{2}{7}$ y= $\frac{-3}{7}$

Comprobar

$$\left.\begin{array}{r} \frac{3x}{4} - y = 6 \\ 2x + \frac{y}{3} = 7 \end{array}\right\}$$

a) x = 4 y = -3
b) x = -3 y = 2
c) x = 0 y =21

Comprobar

Sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Método de reducción de Gauss

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución:

Ejemplo ---> x - 4y +z = 5 -2x + 8y - 2z = -10

Análogamente, dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución. Podemos realizar una serie de operaciones con las ecuaciones de un sistema y obtener un sistema equivalente con el original; esas operaciones se llaman operaciones elementales y son:

· cambiar de orden 2 ecuaciones de un mismo sistema

· multiplicar todos los términos de una ecuación por el mismo número distinto de 0

· sumar o restar a una ecuación otra ecuación multiplicada por un número

La aplicación reiterada de estas operaciones elementales produce sistemas equivalentes con el original que tienen, por tanto, la misma solución.

Es posible que al realizar operaciones elementales entre las ecuaciones de un sistema obtengamos una ecuación del tipo:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots\ldots + 0\cdot x_n = 0$$

Esta ecuación se llama **ecuación trivial** ya que no proporciona ninguna información acerca del valor que deben tener las incógnitas del sistema --->cualquier conjunto de valores verifica esa ecuación). Por tanto, siempre que obtengamos una ecuación trivial la podemos eliminar de nuestro sistema con lo que resulta un sistema equivalente.

En ocasiones podemos obtener una ecuación del tipo:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots\ldots + 0 \cdot x_n = b \text{ con } b \neq 0$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación degenerada** porque no existe ningún conjunto de valores que la satisfaga. Por tanto el sistema no tendrá solución y será un sistema incompatible.

Método de Gauss

Un sistema de ecuaciones lineales es escalonado cuando en cada ecuación hay una incógnita menos que en la anterior. En particular, los sistemas 3 x 3 --->3 ecuaciones y 3 incógnitas) escalonados tienen solución inmediata.

Ejemplo

$$\left.\begin{aligned} x-3y+4z&=9\\ 2y+z&=1\\ 2z&=6 \end{aligned}\right\} \quad \text{ahora despejamos z en la 3ª ecuación y retrocedemos:} \quad \left.\begin{aligned} z&=3\\ y&=-1\\ x&=-6 \end{aligned}\right\}$$

El **método de Gauss** consiste en transformar, mediante operaciones elementales con las ecuaciones del sistema, un sistema de ecuaciones en otro **equivalente y escalonado**, cuya solución sea inmediata. Se llama método de **reducción** porque se reduce en cada paso, el número de incógnitas en las ecuaciones del sistema.

Ejemplo

E_1 ---> 1º ecuación E_2 ---> 2º ecuación E_3 ---> 3 º ecuación

$$\left.\begin{aligned} x-2y+4z&=8\\ 2x-y-3z&=2\\ -x+3y+2z&=-3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\\ &E_2-2\cdot E_1\\ &E_3+E_1 \end{aligned} \quad \text{--->} \quad \left.\begin{aligned} x-2y+4z&=8\\ 3y-11z&=-14\\ y+6z&=5 \end{aligned}\right\} \quad \text{--->}$$

$$\text{--->} \quad 3\cdot E_3 - E_2 \quad \text{--->}$$

$$\text{--->} \quad \left.\begin{aligned} x-2y+4z&=8\\ 3y-11z&=-14\\ 29z&=29 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x+2+4=8 &\rightarrow x=2\\ 3y-11=-14 &\rightarrow y=-1\\ &\rightarrow z=1 \end{aligned}$$

En ocasiones es interesante estudiar el cambio de orden en las ecuaciones del sistema, ya que es posible que el método no permita escalonarlo en el orden dado, o bien porque sea más fácil aplicar el método con las ecuaciones en otro orden:

$$\left.\begin{aligned} y+2z&=4\\ x-y-3z&=-5\\ x-2y\quad&=6 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x+2y-5z&=-1\\ 2x-3y-z&=-9\\ x+y+z&=6 \end{aligned}\right\}$$

El propio método de Gauss permite determinar el tipo de sistema una vez que hemos conseguido escalonar el sistema original:

a) si al aplicar el método obtenemos una ecuación degenerada del tipo 0 = b con b $\neq$ 0, el sistema no tiene solución ---> es **incompatible**: **S.I.**

b) las ecuaciones triviales del tipo 0 = 0 se pueden eliminar; si el nº de ecuaciones no triviales es menor que el nº de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones ---> es **compatible indeterminado**: **S.C.I**. El número de grados de libertad es la diferencia entre n (nº de incógnitas) y el nº de ecuaciones no triviales

c) en otro caso, cuando n coincide con las ecuaciones no triviales, el sistema tiene solución única ---> es **compatible determinado**: **S.C.D.**

Podemos también aplicar el método de reducción de Gauss para eliminar una de las incógnitas del sistema de dos de las ecuaciones y resolver después el sistema 2 x 2 obtenido por alguno de los métodos ya conocidos:

Ejemplo

multiplicar las ecuaciones por números adecuados y sumarlas entre sí para que una de las incógnitas se **elimine** de 2 de las ecuaciones, con lo que nos quedará un subsistema dentro del sistema original con 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

E_1 ---> 1º ecuación E_2 ---> 2º ecuación E_3 ---> 3 º ecuación

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+4z=8 \\ 2x-y-3z=2 \\ -x+3y+2z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ E_2-2\cdot E_1 \\ E_3+E_1 \end{array} \quad ---> \quad \left.\begin{array}{r} x-2y+4z=8 \\ 3y-11z=-14 \\ y+6z=5 \end{array}\right\} \quad --->$$

resolvemos el subsistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3y-11z=-14 \\ y+6z=5 \end{array}\right\} \quad \text{Solución: } y = -1 \; z = 1$$

Ahora, con los valores de **y** y de **z** obtenidos, despejamos el valor de **x**:

$$x-2y+4z=-8 \;\rightarrow\; x+2+4=8 \;\rightarrow\; x=8-2-4 \;\rightarrow\; x=2$$

La **solución del sistema** es: x = 2 y = - 1 z = 1

Existen otros métodos para resolver sistemas de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, como el método de la matriz inversa o el método de Kramer, que se basan en la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales que sea cuadrado, es decir, que tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Además, en la actualidad hay una gran cantidad de software matemático disponible para discutir y resolver un sistema de ecuaciones lineales de *m* ecuaciones con *n* incógnitas, siendo m = n y también m $\neq$ n

Para saber más

- Teoría general sobre sistemas de ecuaciones lineales, incluyendo el método de Gauss
- Archivo en pdf (6.66Mb) muy completo sobre teoría de sistemas de ecuaciones lineales y los distintos métodos para resolverlos

Autoevaluación

Resuelve los sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y-2z=-2 \\ -2x-y+z=0 \\ x-2y+4z=-3 \end{array}\right\}$$

a) x = -1 y = 3 z = 1
b) x = 2 y = z = -2
c) x = 0 y = 3 z = -3

Comprobar

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=0 \\ -6x-y+4z=2 \\ 2y-4z=-6 \end{array}\right\}$$

a)

x = $\frac{-1}{5}$ y = 10 z = $\frac{2}{5}$

b) x = -2 y = 1 z = -3

c)

x = $\frac{1}{3}$ y = -2 z = $\frac{1}{2}$

Comprobar