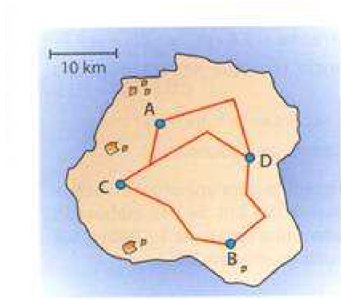
Introducción

Se entiende por **trigonometría**, según su origen griego, la ciencia que tiene por objetivo la medida de los lados y los ángulos de los triángulos.

Aunque la medida de los ángulos era conocida ya en Egipto y en Mesopotamia, tierra en la que nació el sistema sexagesimal, la trigonometría como ciencia tiene su origen en Grecia en siglo II a. C.

Como verás en el primer desarrollo de los contenidos, la trigonometría está muy relacionada con la semejanza de figuras, fundamentalmente triángulos. Y una de sus aplicaciones mas importantes es el trazado de planos.



Nosotros la estudiaremos en esta unidad referida a los problemas asociados a triángulos rectángulos.

Comenzarás también a utilizar la calculadora científica con algunas de sus funciones más importantes.

Te conviene familiarizarte con el uso de la calculadora. Para ello debes utilizar el manual de instrucciones correspondiente.

Ángulos. Medida de ángulos

Obviando el concepto de ángulo, la presente unidad trata de establecer las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo como base fundamental para resolver numerosos problemas asociados a diversas situaciones reales como trazado de planos , calculo de distancias, orientación, navegación, astronomía, balística, etc.

Para poder tratar las relaciones en los triángulos, es imprescindible recordar los sistemas de **medida de ángulos**.

Es importante tener en cuenta que, independientemente del sistema de medida utilizado, todos los ángulos admiten representación en la circunferencia.

Para unificar criterios, se utiliza universalmente una circunferencia especial para representar los ángulos. Se llama circunferencia goniométrica o trigonométrica y es la circunferencia con centro en el sistema de ejes coordenados y radio la unidad. En ella, un ángulo se representa con una semirrecta fija en el semieje de abscisas positivo y, la otra semirrecta, girando la medida correspondiente del ángulo en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (sentido de giro que en trigonometría se considera positivo, siendo el negativo el giro en el mismo sentido que el de las agujas del reloj).

Los sistemas de medida de ángulos más usuales son:

- Sistema sexagesimal
- Sistema centesimal
- Sistema de medida de ángulos en radianes.

Las calculadoras científicas pueden operar ángulos y cálculos con ellos en los tres sistemas.

Sistemas de medidas

Tal y como vimos en el apartado anterior, los sistemas de medidas más usuales son los siguientes. Vamos a ver uno por uno a continuación.

Sistema sexageximal de medida de ángulos

La unidad estándar en sexagesimal es el grado. La circunferencia se divide en 360 grados. Las divisiones sucesivas del grado dan lugar a los minutos de arco (1/60 de grado, es decir, 1 grado equivale a 60 minutos) y segundos de arco (1/60 de minuto, es decir, un minuto equivale a 60 segundos).

Lo escribimos así:

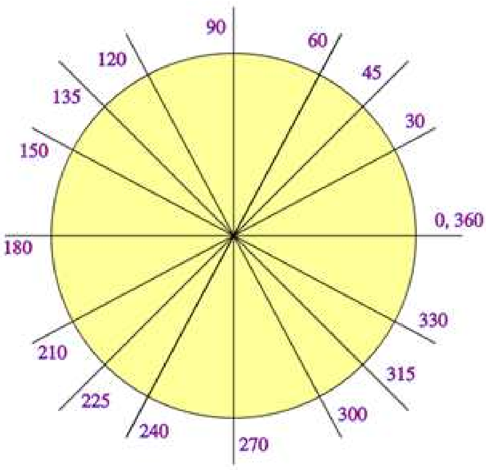
circunferencia: 360°

1° = 60´

1´ = 60´´

La circunferencia queda dividida en 4 cuadrantes: 0° a 90° (1^{er} cuadrante), 90° a 180° (2º cuadrante), 180° a 270° (3^{er} cuadrante) y 270° a 360° (4º cuadrante).

La figura adjunta te muestra dichos cuadrantes con los ángulos más importantes de cada uno de ellos:



Sistema centesimal de medida de ángulos

La unidad estándar en centesimal es el grado centesimal (g). La circunferencia se divide en 400 grados centesimales. Las divisiones sucesivas del grado centesimal dan lugar a los minutos centesimales (m) de arco (1/100 de g, es decir, 1 g equivale a 100 minutos centesimales) y segundos centesimales (s) de arco (1/100 de minuto centesimal, es decir, un minuto centesimal equivale a 60 segundos centesimales).

Lo escribimos así:

circunferencia: 400 g

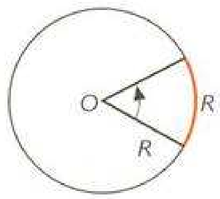
1g = 100 m

1 m = 100 s

Sistema de medida de ángulos en radianes

El radián se define como el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

Es decir, el radián es el ángulo que en la circunferencia abarca un arco de longitud equivalente a la del radio de la misma.



Ángulo de un radián

La equivalencia con el sistema sexagesimal es muy sencilla de obtener:

Si tomamos para dibujar los ángulos la circunferencia de radio la unidad (goniométrica), tendremos que a la longitud total de la misma, como ángulo en radianes, que es 2π unidades de longitud, le corresponde un arco, en sexagesimal, de 360° (la vuelta completa).

Tenemos por tanto que 360° = 2π radianes.

Aquí puedes ver una tabla con la transformación en radianes de los ángulos del sistema sexagesimal más importantes de cada cuadrante de la circunferencia:

S. Sex.	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
S. Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Para saber más

Visita los siguientes enlaces para ampliar tus conocimientos sobre la materia.

- Medida de ángulos
- Medición de ángulos

Autoevaluación

Establece en radianes el ángulo de 660°

a) $\frac{7\pi}{3}$

b) $\frac{13\pi}{3}$

c) $\frac{20\pi}{3}$

d) $\frac{11\pi}{3}$

Comprobar

Establece en sistema sexagesimal el ángulo de -8PI/3 radianes

a) 400°
b) 420°
c) 480°
d) 490°

Comprobar

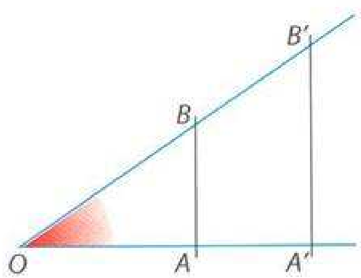
Establece en sistema centesimal el ángulo de 5PI/2 radianes

a) 400 g
b) 500 g
c) 600 g
d) 800 g

Comprobar

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

El Teorema de Tales establece que la proporción entre cualesquiera dos lados de un triángulo rectángulo permanece constante siempre que el ángulo agudo de referencia en el triángulo no cambie. Esto significa que con triángulos agudos de distinto tamaño pero con ángulos iguales, dichas proporciones permanecen constantes:

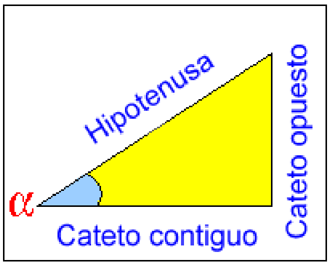


$$\frac{AB}{OA}=\frac{A'B'}{OA'} \quad , \quad \frac{AB}{OB}=\frac{A'B'}{OB'} \quad y \quad \frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$$

Esto nos induce a pensar que dichas proporciones solo dependen del ángulo y que por tanto constituyen números reales

asociados al ángulo, que pasaremos a denominar razones trigonométricas del ángulo agudo.

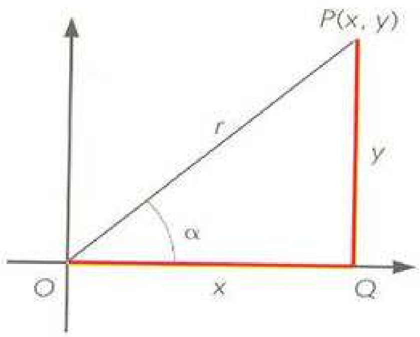
Considerando el ángulo agudo α, y llamando a los lados del triángulo, cateto contiguo, cateto opuesto e hipotenusa respectivamente, como vemos en la figura adjunta, definimos las razones trigonométricas del ángulo α **seno (sen) , coseno (cos) y tangente (tg),** de la forma:



$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} \qquad tg\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$$

Si tomamos las medidas de los lados del triángulo rectángulo OPQ (como indica la figura), las razones trigonométricas de α serán:

$$sen\,\alpha = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$



Según las definiciones que acabamos de hacer, **el primer procedimiento** que tenemos para calcular las razones de un ángulo agudo puede se el siguiente:

"Construimos un triángulo rectángulo con el ángulo deseado. A continuación medimos las longitudes de sus lados y con dichas medidas obtendremos una aproximación de las razones trigonométricas de dicho ángulo utilizando las definiciones anteriores."

Este método es un poco rústico al depender de nuestros sistemas de medida, transportador de ángulos y regla graduada convencional, que transmiten suficiente error al procedimiento.

En la actualidad, una buena aproximación de las razones trigonométricas de un ángulo la podemos obtener con la ayuda de **la calculadora científica** que permite además obtenerlas con el ángulo dado en cualquiera de los sistemas de medidas que vimos en el apartado primero de la unidad.

Hay procedimientos geométricos sencillos, que utilizan el **Teorema de Pitágoras** para calcular las razones de algunos ángulos fundamentales (30° , 45° y 60°) de manera exacta y que puedes ver en el siguiente recurso recurso

Cálculo de las razones de 30°, 45° y 60°

Con un razonamiento muy sencillo podemos ver las relaciones que existen entre las tres razones trigonométricas fundamentales de un ángulo

α cualquiera:

Según las definiciones establecidas en el triángulo rectángulo anterior, si sumamos los cuadrados del seno y del coseno tendremos:

$(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$ puesto que al ser un triángulo rectángulo sus lados satisfacen la relación $x^2 + y^2 = r^2$.

Además $\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = tg\,\alpha$

Estas dos relaciones constituyen las propiedades fundamentales de las razones trigonométricas de un ángulo agudo y las escribimos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Observa que hemos escrito $sen^2\alpha$ en lugar de $(sen\,\alpha)^2$.

En adelante, las potencias de las razones trigonométricas se escribirán con el exponente entre la abreviatura de la razón y el ángulo.

Los ángulos agudos más importantes (correspondientes al primer cuadrante de la circunferencia) tiene razones que has podido conocer en el recurso número 1 de la unidad. La tabla siguiente te recuerda dichas razones:

Ángulo	sen	cos	tg
0° (0 rad)	0	1	0
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	-

Tabla 1

Observa que 90° no tiene tangente.

Efectivamente, si aplicamos las relaciones anteriores $tg\,90° = \frac{sen\,90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0}$, cálculo que como bien sabes no se puede realizar.

También se ha tenido en cuenta para las razones de 0° y de 90° la extensión del concepto de razón trigonométrica a cualquier ángulo tal y como aprenderás en el apartado siguiente de la unidad.

Para saber más

Visita los siguientes enlaces para ampliar tus conocimientos sobre la materia.

Autoevaluación

Con la ayuda de la calculadora científica, halla las razones trigonométricas del ángulo α = 48° 36´15´´

a) sen α= 0,66234 ;cos α = 0,23587 ; tg α= 2,65124
b) sen α= 0,44589 ;cos α = 0,69965; tg α= 1,22568
c) sen α= 0,75015 ;cos α = 0,66125 ; tg α= 1,13444
d) sen α= 0,58974 ;cos α = 0,64783; tg α= 0,99874

Comprobar

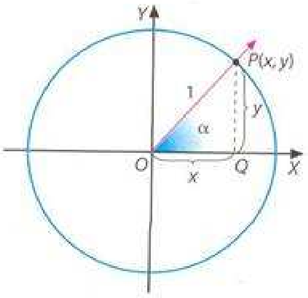
Utiliza la calculadora en modo de medida de ángulos en radianes y obtén una aproximación por truncamiento para el seno de 45° (recuerda cuantos radianes son 45° para introducirlos a la calculadora)

a) 0,707
b) 0,708
c) 0,711
d) 0,705

Comprobar

Extensión a cualquier ángulo

Si utilizamos la circunferencia goniométrica para representar los ángulos, podemos observar gráficamente qué son el seno y el coseno de un ángulo agudo (1er cuadrante)



Vemos que sen α corresponde con la ordenada (y) del punto P(x , y) que determina el ángulo α con la circunferencia: $sen\,\alpha = \frac{y}{1} = y$

También vemos que cos α se corresponde con la abscisa (x) del punto P(x , y) que determina el ángulo α con la circunferencia: $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$

(recuerda que la hipotenusa del triángulo rectángulo OPQ es 1)

De esa misma forma nos referiremos a las razones trigonométricas de cualquier ángulo independientemente del cuadrante en el que se encuentre:

El seno de un ángulo es la ordenada del punto de corte de la circunferencia goniométrica con la semirrecta que describe dicho ángulo en la misma.

El coseno de un ángulo es la abscisa del punto de corte de la circunferencia goniométrica con la semirrecta que describe dicho ángulo en la misma.

La tangente quedará definida de la misma forma que quedó establecida en el apartado anterior como cociente de seno y coseno:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

De esta forma ya se entiende los valores de las razones trigonométricas correspondientes a los ángulos especiales del primer cuadrante, 0° y 90°,que aparecían en la tabla 1.

De la extensión que acabamos de hacer se obtienen dos conclusiones muy importantes para las razones trigonométricas.

La primera de ellas es que las razones de un ángulo pueden ser positivas o negativas en función de la localización del punto determinado por el ángulo en la circunferencia, quedando el signo como muestra la tabla siguiente:

	1^{er}C	2º C	3^{er} C	4º C
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-

Tabla 2

La segunda conclusión importante es que tanto el seno como el coseno de un ángulo cualquiera se encuentran acotados con valores comprendidos entre -1 y 1, que escribimos así:

Sea cual sea el ángulo α, se verifica que:

$$-1 \leq sen\,\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

La tangente no está acotada por -1 y 1, prueba de ello es que $tg\,60° = \sqrt{3} > 1$

Las dos propiedades fundamentales que vimos para ángulos agudos son válidas para cualquier ángulo:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \textbf{(1)}$$

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \quad \textbf{(2)}$$

Una primera aplicación de lo que hemos aprendido hasta ahora consiste en la obtención de las razones trigonométricas de un ángulo conociendo una de ellas y el cuadrante en el que se encuentra localizado. Observa el ejemplo siguiente

Ejemplo

Sabiendo que $sen\,\alpha = \frac{3}{5}$ *y que 90° < α < 180° , calcular el resto de sus razones trigonométricas.*

La información de acotación del ángulo nos dice que es del segundo cuadrante, información fundamental para determinar el signo de sus razones.

Se trata de manejar adecuadamente las dos relaciones fundamentales. Como tenemos el valor del seno, sustituyendo en (1) podemos obtener el valor del coseno

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como α es del segundo cuadrante, su coseno es negativo, permitiéndonos elegir la raíz correcta:

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

Finalmente, utilizando (2) se obtiene el valor de su tangente:

$$tg\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Existen para cada ángulo otras tres razones trigonométricas que se definen a partir de las tres fundamentales y son:

Cosecante del ángulo α: $\cos ec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$

Secante del ángulo α: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

Cotangente del ángulo α: $\cot g\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$

Autoevaluación

Determina las razones de los ángulos 180° , 270° y 360°

	Sen	Cos	tg
180			
270			
360			

Word bank: -1, 0, 1,-

Comprobar

Sabiendo que cos α = -0´45 y que 180° < α < 270° , calcula el resto de sus razones trigonométricas.

cos α = tg α =

Comprobar

Relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos

En el apartado anterior hemos aprendido a obtener las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera de la circunferencia (0° a 360°). No solo tienen razones dichos ángulos, también se pueden obtener las razones de ángulos mayores de 360° recurriendo a un procedimiento denominado **reducción a la primera vuelta.**

El razonamiento es sencillo. Por ejemplo, al representar el ángulo de 780° observamos que describe 2 vueltas completas y de la 3ª vuelta tan solo 60°:

720° = 2 - 360° + 60°.

Esto quiere decir que el punto que determina el ángulo de 780° en la circunferencia goniométrica es el mismo que determina 60°. Podemos deducir de ello que las razones de 780° son las mismas que las de 60°:

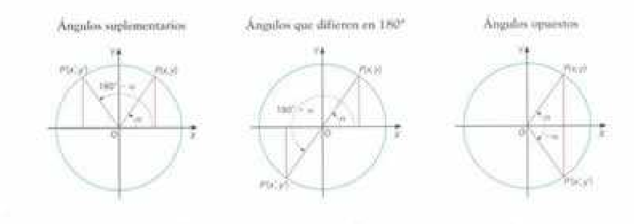
$$sen\,780° = sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 780° = \cos 60° = \frac{1}{2} \quad , \quad tg\,780° = tg\,60° = \sqrt{3}$$

Las razones trigonométricas son periódicas pues se repiten de 360° en 360°. Podemos conocer las razones de cualquier ángulo reduciendo a la primera vuelta.

También se pueden calcular las razones de muchos ángulos de la primera vuelta recurriendo a la relación con algún otro ángulo. En realidad, conociendo las razones de los ángulos agudos se podrían calcular las razones del resto de los ángulos.

El gráfico adjunto muestra las relaciones más importantes entre algunos ángulos: ángulos suplementarios (los que suman 180°), ángulos que difieren 180° y ángulos opuestos.

La relación entre las razones trigonométricas de dichos ángulos en cada caso se basa en la igualdad de los triángulos rectángulos determinados por cada ángulo en la circunferencia goniométrica (triángulos rojos en la figura) :



Pulsa sobre la imagen para ampliarla

$$sen(180° - \alpha) = sen\,\alpha \qquad sen(180° + \alpha) = -sen\,\alpha \qquad sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$tg(180° - \alpha) = -tg\alpha \qquad tg(180° + \alpha) = tg\alpha \qquad tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

El ejemplo siguiente nos muestra como pueden utilizarse estas relaciones para calcular las razones de los ángulos en función de las razones conocidas de ángulos agudos.

Ejemplo

Cálculo de las razones de 225°

225° es un ángulo que se diferencia 180° de 45°.

Sus razones se pueden calcular con las de 45° tal y como nos muestra el gráfico en la parte de ángulos que difieren 180°:

$$sen225° = -sen45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos 225° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad tg225° = tg45° = 1$$

Cálculo de las razones de 300°

El ángulo de 300° nos sitúa en la circunferencia en el mismo punto que -60°

Por tanto sus razones se pueden calcular recurriendo a las relaciones entre las razones de ángulos opuestos:

$$sen300° = sen(-60°) = -sen60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300° = \cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$tg300° = tg(-60°) = -tg60° = -\sqrt{3}$$

Recuerda finalmente que la calculadora científica te permite calcular cualquier razón trigonométrica de un ángulo, estando éste en el sistema de medida de ángulos que necesites.

Para saber más

Visita los siguientes enlaces para ampliar tus conocimientos sobre la materia.

Propiedades de las razones

Autoevaluación

Calcular las razones trigonométricas de -1380°

a)

$$sen(-1380^{o}) = -\frac{1}{2}\,,\ \cos(-1380^{o}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ tg(-1380^{o}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

b)

$$sen(-1380^{o}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \cos(-1380^{o}) = \frac{1}{2}\,,\ tg(-1380^{o}) = \sqrt{3}$$

c)

$$sen(-1380^{o}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \cos(-1380^{o}) = -\frac{1}{2}\,,\ tg(-1380^{o}) = -\sqrt{3}$$

Comprobar

Calcular las razones trigonométricas de radianes.

a)

$$sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\,,\ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ tg\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b)

$$sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\,,\ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ tg\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

c)

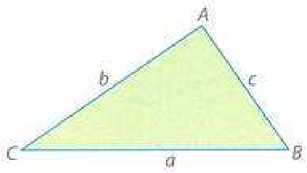
1

$$sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\,,\ tg\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

Comprobar

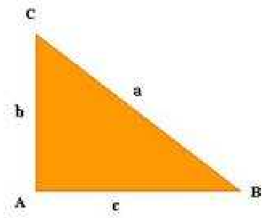
Resolución de triángulos: triángulos rectángulos

Resolver un triángulo ABC es determinar las longitudes de sus tres lados a , b y c y la medida de sus tres ángulos $\hat{A}, \hat{B}\, y\, \hat{C}$ **, relacionados siempre como indica la figura.**



La resolución de triángulos tiene numerosas aplicaciones en **geometría** y en topografía.

En este apartado nos centramos en la resolución de triángulos rectángulos en los que un ángulo siempre es conocido, $\hat{A} = 90°$, y sus lados están relacionados según establece el Teorema de Pitágoras: $a^2=b^2+c^2$



Con las dos premisas anteriores es muy sencillo conocer todos los elementos de un triángulo rectángulo dados algunos de ellos.

Casos concretos

En la resolución de los triángulos rectángulos, distinguimos dos casos concretos:

1 Triángulo rectángulo con dos lados conocidos

Se utiliza el Teorema de Pitágoras para conocer el tercer lado.

Situándonos respecto de cualquiera de los dos ángulos agudos ($\hat{B}$ o $\hat{C}$), calculamos una de sus razones trigonométricas. La calculadora nos permitirá obtener una aproximación de dicho ángulo. Por último, el otro ángulo agudo se obtendrá teniendo en cuenta que es complementario con el anterior (*los dos suman 90°*).

Ejemplo

Resolver el triángulo rectángulo de lados a = 4,5 cm y b = 2,5 cm.

Con el Teorema de Pitágoras $4{,}5^2 = 2{,}5^2 + c^2$ *por tanto* $c^2 = 14$ *y* $c = 3{,}74$ *cm.*

Tomado como referencia el ángulo B (ver figura general del triángulo rectángulo) tendremos

$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{2{,}5}{3{,}74} = 0{,}66845 \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = 33{,}76° \quad \Rightarrow \quad 33°45'38{,}69''$$

Obtenido el ángulo B, el ángulo C se calcula teniendo en cuenta que es complementario del ángulo B:

$$\hat{C} = 90° - \hat{B} = 90° - 33{,}76° = 56{,}24° = 56°14'24''$$

2 Triángulo rectángulo con un lado y un ángulo agudo conocido

Con la razón trigonométrica adecuada y el lado conocido, se puede calcular el otro lado que interviene en la razón utilizada (utiliza como referencia de lados y ángulos la figura anterior)

El tercer lado se halla con el teorema de Pitágoras o con otra de las razones del ángulo que nos han dado.

Finalmente, el ángulo agudo que queda se obtiene teniendo en cuenta que es complementario del que nos han dado como dato.

Ejemplo

Resuelve el triángulo rectángulo en el que $a = 4\ cm$ y $\hat{B} = 59°45'$

Con la hipotenusa (a) conocida y el ángulo en el vértice B podemos calcular el lado b con la ayuda de la razón trigonométrica seno o bien el lado c con la ayuda del coseno.

El lado b se obtiene: $sen\,59°45' = \frac{b}{a} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 4 \cdot sen\,59°45'$

Utilizando la calculadora, sen 59°45´=0,8638. Sustituyendo en la expresión del lado b: $b = 4 \cdot 0{,}8638 = 3{,}4552\ cm$

El lado c puede calcularse con el coseno o con el Teorema de Pitágoras pues ya tenemos los otros dos lados:

Utilizando el coseno: $\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 4 \cdot \cos 59°45'$

Con la calculadora cos 59°45´ = 0,5037 , obtenemos $c = 4 \cdot 0{,}5037 = 2{,}0148\ cm$

El ángulo C es complementario del ángulo B: $\hat{C} = 90° - 59°45' = 30°15'$

En algunas ocasiones puede ser útil conocer el **teorema de la altura** para resolver un triángulo rectángulo.

Para comprender mejor los procedimientos de resolución de triángulos puedes utilizar el siguiente recurso de problemas resueltos

Ejercicios resueltos

Para saber más

Visita los siguientes enlaces para ampliar tus conocimientos sobre la materia.

- **Teorema del consenso**
- **Resolución de triángulos**

Autoevaluación

La sombra que proyecta la torre de una iglesia mide 35 m cuano los rayos del Sol inciden formando un ángulo de 43° con la horizontal. ¿Cuánto mide de alto la torre de la iglesia?

a) 48,5 m
b) 37,78 m
c) 32,63 m
d) 31,28 m

Comprobar

Calcula el área de un rectángulo cuya diagonal mide 5 cm y el ángulo que determina ésta con la base es de 40°?

a) 11,341 cm2
b) 13,487 cm2
c) 15,325 cm2
d) 12,294 cm2

Comprobar