Este documento ha sido generado para facilitar la impresión de los contenidos. Los enlaces a otras páginas no serán funcionales.

## Introducción

¿Por qué La Geometría?

La Geometría tiene como objetivo fundamental ayudar al hombre a explorar y controlar racionalmente las estructuras del espacio en el que vive.

Su origen es probablemente tan antiguo como el de la propia Aritmética. El hombre llega a ella a través de la observación de la naturaleza y fundamentalmente del cielo.

La utilizará para construir utensilios, edificar sus casas, fabricar herramientas y armas, etc.

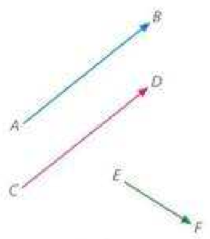
Su desarrollo más espectacular se produce a partir del siglo XVII, en el que Descartes desarrolla el método de representación de puntos en el plano mediante coordenadas. Dicho método es el que intentaremos presentar aquí de forma sencilla con la ayuda de los vectores libres del plano.



## Vector libre en el plano

El segmento orientado que une dos puntos del plano, A y B, se denomina **vector fijo** de extremos A y B y se representa $\vec{AB}$ .

***Un vector fijo , $\vec{AB}$ , es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.***




Todo vector fijo viene determinado por los elementos siguientes:

***1. Módulo del vector. Es la distancia que separa los puntos A y B. Se representa por $|\vec{AB}|$ .***

***2. Dirección del vector. Es la recta que contiene al segmento que lo determina.***

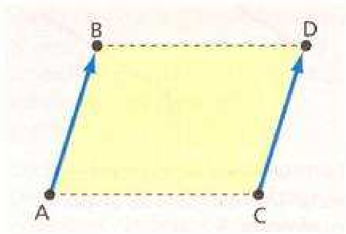
***3. Sentido del vector. Es el que marca la flecha desde su origen a su extremo.***

Los vectores se utilizan para establecer y marcar direcciones y sentidos de recorrido tanto en situaciones que pueden representarse en el plano como en el espacio.

Los vectores fijos tienen un problema. Dos vectores fijos que tengan la misma dirección, módulo y sentido son objetos distintos y eso, no tiene mucho sentido pues los dos podrían servir, por ejemplo, para marcar la misma dirección o camino y pasando a desempeñar su papel al aplicarlos sobre los puntos en los que se necesitase en cada situación.

Al mundo matemático no le interesa que esos dos vectores (y los que como ellos tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo) sen distintos.

***Se dice que dos vectores fijos son equipolentes si tiene la misma dirección, módulo y sentido.***




Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ de la figura son equipolentes. De forma gráfica es fácil distinguirlo porque los 4 puntos son los vértices de un **paralelogramo** (polígono de 4 lados con ellos paralelos dos a dos).

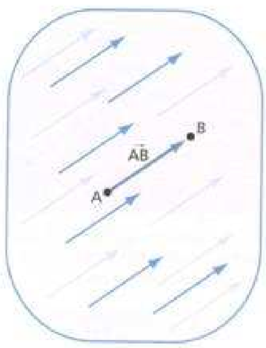
***Se llama vector libre al conjunto de todos los vectores que son equipolentes entre sí.***

***Se denotan con letra minúsculo y la flecha como símbolo de vector ( $\vec{u}$ ).***

***Al conjunto de todos los vectores libres del plano se le denomina $V^2$.***

Así diremos que $\vec{AB} = \vec{u}$ y $\vec{CD} = \vec{u}$ .

También podemos decir que cualquier vector libre puede ser representado mediante un vector fijo que tenga su origen o su extremo en un punto cualquiera del plano.



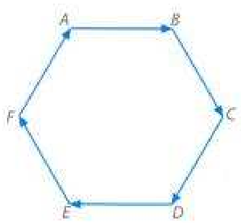

Vector libre $[\vec{AB}]$

**Para saber más:**

[Vector libre]

## Autoevaluación

Compara los vectores que determinan los vértices del hexágono de la ilustración



¿Qué vectores tienen el mismo módulo?

a) Ninguno
b) Todos
c) Dos a dos de ellos
d) Tres a tres de ellos

Comprobar

¿Qué vectores tiene la misma dirección?

a) Ninguno
b) Todos
c) Las parejas que son paralelos entre sí
d) Los dos que unen los puntos AB y DE.

Comprobar

¿Qué vectores tienen el mismo sentido?

a) Ninguno
b) Todos
c) Dos a dos de ellos
d) Tres a tres de ellos

Comprobar

¿Qué vectores son equipolentes entre sí?

a) Todos
b) Ninguno
c) Dos a dos de ellos
d) Tres a tres de ellos

Comprobar



## Operaciones con vectores

Todos los vectores equipolentes entre sí que tienen por origen y extremo el mismo punto del plano se denominan **vector libre nulo** y se representa por $\vec{0}$ o también por $\vec{\mathbf{0}}$. Este vector se caracteriza por no tener dirección, no tener sentido y su módulo es 0.

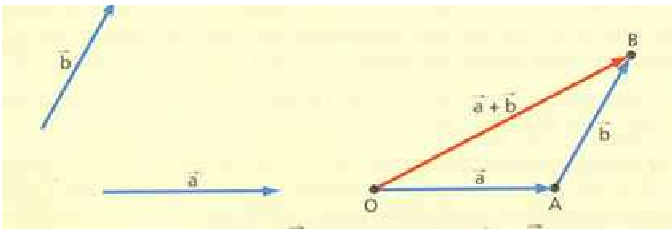
Para un vector libre $\vec{a}$, se llama **vector opuesto** al vector $\vec{a}$, y se representa por $-\vec{a}$, al vector que tiene el mismo módulo que $\vec{a}$, su misma dirección y sentido el opuesto.

Los vectores libres de $V^2$ admiten dos operaciones fundamentales que las definiremos en principio de forma gráfica en este apartado:

**Suma de vectores libres**

***Dados dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del plano, se llama suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al vector libre que se obtiene del siguiente modo:***

*Se toma un punto O del plano y sobre él se aplica el vector $\vec{a}$ . Sobre el extremo del vector $\vec{a}$ (punto A), se aplica el vector $\vec{b}$ , que tendrá por extremo un tercer punto C. El vector suma $\vec{a}+\vec{b}$ es el vector que une los puntos O y B.*

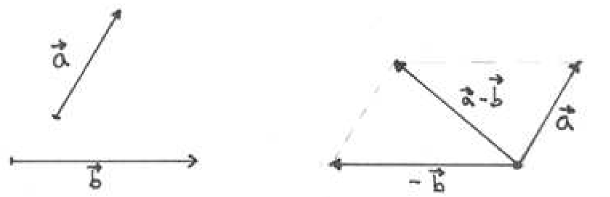



También podemos decir que el vector suma de dos vectores es el vector "diagonal" del paralelogramo de lados los determinados por los dos vectores situados sobre el mismo punto de aplicación.

**La diferencia** ("resta de vectores") es muy sencilla:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

*La relación anterior nos expresa que obtener la diferencia de dos vectores consiste en sumar el primero de ellos con el opuesto del segundo.*



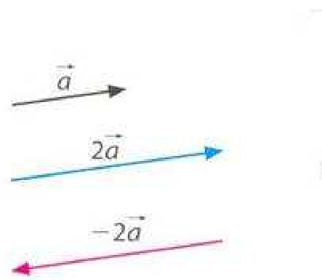

**Producto de un vector por un número**

*Dado un vector libre $\vec{a}$ , no nulo, y un número real no nulo k, se llama producto de un número real por un vector, y lo representamos por $k \cdot \vec{a}$ , al vector que tiene:*

*- módulo el número $|k| \cdot |\vec{a}|$ siendo $|k|$ el valor absoluto del número real k y $|\vec{a}|$ el módulo del vector $\vec{a}$*

*- dirección la misma que la del vector $\vec{a}$*

Podemos observar que la multiplicación de un número por un vector consiste en hacer el vector tantas veces como indica ese número, conservando el sentido si el número es positivo, o cambiando el sentido si el número es negativo.



*- sentido el mismo que $\vec{a}$ , si k > 0 ; el opuesto de $\vec{a}$ , si k < 0*

*Si $\vec{a} = \vec{0}$ o k = 0, entonces $k \cdot \vec{a} = \vec{0}$*

**Para saber más**

[Operaciones con vectores]()

[Operaciones con vectores 2]()



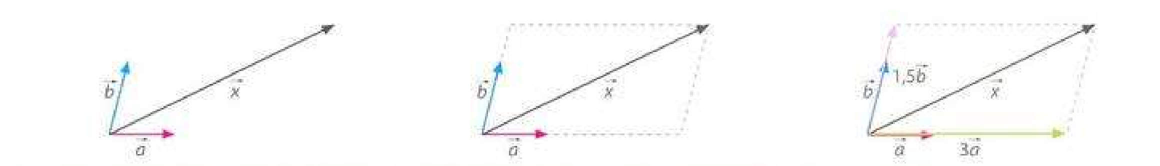
## Coordenadas de un vector

**La aplicación de las dos operaciones anteriores con dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y dos números reales $k_1$ y $k_2$ , constituye un nuevo vector $\vec{x}$ que se denomina combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y lo expresamos $\vec{x} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$**

En el conjunto de vectores libres del plano, $V^2$, se verifica que cualquier vector se puede expresar en combinación lineal de otros dos siempre que éstos **no sean paralelos**.

### Ejemplo

El gráfico siguiente te muestra mediante un ejemplo sencillo cómo el vector $\vec{x}$ se puede expresar mediante una combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$




Se dibujan representantes fijos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{x}$, que tengan un origen común.

Se construye un paralelogramo, dos de cuyos lados comprendan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y cuya diagonal sea $\vec{x}$.

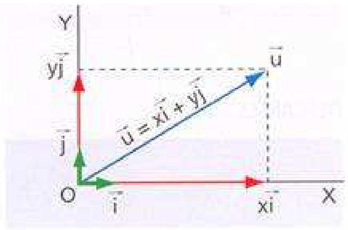
Tomando como unidades los módulos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se miden los lados del paralelogramo. En el ejemplo se obtiene $\vec{x} = 3\vec{a} + 1{,}5\vec{b}$.

El vector $\vec{x}$ de nuestro ejemplo se expresa mediante la combinación lineal $\vec{x} = 3\vec{a} + 1{,}5\vec{b}$

*La base canónica de $V^2$ es la que está formada por dos* Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ , mediante los cuales se puede expresar cualquier otro vector de $V^2$, *vectores perpendiculares y de módulo la unidad, que denominaremos en adelante $\vec{i}$ y $\vec{j}$, y cuya disposición puedes ver en el gráfico adjunto. Se escribe $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.*

reciben el nombre de **base del conjunto de los vectores libres del plano $V^2$.**

En $V^2$ hay infinitas bases de vectores (cualquier par de vectores que no sean paralelos son una base). Para trabajar con los vectores de maneara sencilla, se utiliza una base especial que se llama **base canónica.**




Cualquier vector $\vec{x}$ de $V^2$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$ mediante dos números reales x e y: $\vec{x} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$

*El par ordenado de números reales (x,y), que permiten expresar el vector $\vec{x}$ respecto de los vectores de la base canónica, se denominan coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Se expresa de la forma: $\vec{x} = (x, y)$*

Puedes verlo en el gráfico anterior.

*La base canónica es muy útil porque permite operar los vectores fácilmente en coordenadas:*

*Si* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

*si* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $k \in R \Rightarrow k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1\, k \cdot u_2)$

*Se operan de forma directa coordenada a coordenada*

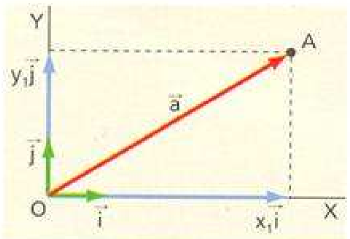
Los puntos del plano se pueden expresar con la ayuda de la base canónica mediante un procedimiento sencillo que nos servirá para representar las situaciones geométricas en el mismo.

Escogemos un punto determinado del plano, que denominaremos O.

Sobre él se sitúan los vectores de la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Tenemos así **una referencia afín del Plano**.

Cualquier otro punto A del plano puede situarse respecto de dicha referencia con la ayuda del vector $\vec{OA}$, **llamado vector de posición del punto A**.



## Ejemplo

*Las coordenadas ($x_1$ , $y_1$) del vector* $\overrightarrow{OA}$ *se denominan* ***coordenadas del punto A*** *respecto de la referencia afín determinada por el punto O y la base canónica*

$\left\{ \vec{i} , \vec{j} \right\}$ *. Lo escribimos A($x_1$ , $y_1$)*

*Es decir:*

$$\overrightarrow{OA} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad A(x_1 , y_1)$$

Este sistema de referencia es el que determina el sistema de ejes cartesianos que tu conoces como sistema básico de representación de puntos en el plano.

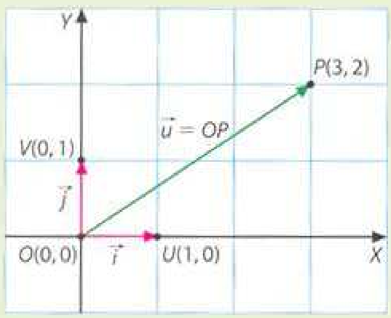
El plano, con este sistema de referencia afín, se denomina **Plano Afín**. Todos los puntos se sitúan desde el punto O (llamado ahora **origen de referencia u origen de coordenadas**) con la ayuda de su vector de posición y de sus coordenadas como vector. También se le denomina **plano cartesiano** por ser el origen del sistema de representación de los ejes cartesianos (eje OX, de abscisas, y eje OY, de ordenadas)

El palno cartesiano se denomina **$R^2$.**

## Ejemplo

Representamos el punto P(3 , 2) del plano con la ayuda de su vector de posición

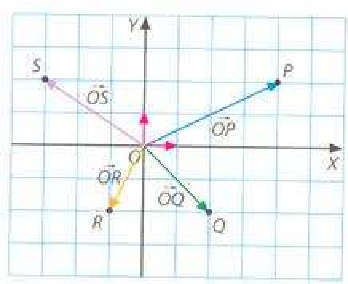
$\overrightarrow{OP} = (3 , 2) = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ , como puedes ver en el gráfico adjunto




## Autoevaluación

1. Dibuja sobre el plano cartesiano los puntos P(4 , 2) , Q(2 , -2) , R(-1 , -2) y S(-3 , 2). Con la ayuda de sus vectores de posición

Respuesta:




Determina qué figura del plano se obtiene si representamos todos los puntos del plano cuyo vector de posición tiene de módulo 2 unidades enteras.

a) Triángulo de lado 2 unidades.
b) Cuadrado de lado 2 unidades.
c) Círculo de radio 2 unidades
d) Rectángulo de altura 2 unidades

Comprobar



# Producto escalar de vectores. Módulo de un vector

Vamos a definir una operación entre vectores libres del plano que es muy útil para la resolución de problemas geométricos de paralelismo y ortogonalidad (perpendicularidad).



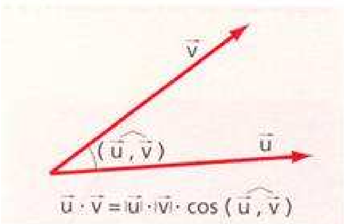
## Producto escalar de vectores

**Sean $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ dos vectores libres del plano y sea $\alpha$ el ángulo determinado por ellos**

**El producto escalar de los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ se designa por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y se define:**

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha & si\quad \vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}\\ 0 & si\quad \vec{u}=\vec{0}\ \ o\ \ \vec{v}=\vec{0}\end{cases}$$

Se trata de una operación externa, el producto escalar de dos vectores es un número real (un escalar)




### Ejemplo

Si $|\vec{u}|=2\,,\ |\vec{v}|=3$ y determinan un ángulo de 45°, su producto escalar es

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 45°=2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

Esta operación verifica unas propiedades fundamentales:

***Propiedades del producto escalar***

***1ª El producto escalar de un vector por sí mismo es un número real positivo o nulo***

$$\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$$

***2ª El producto escalar es conmutativo*** $\vec{i}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{i}$

*3ª Es homogéneo* $k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\cdot\vec{v})$ *(podemos multiplicar un número real por un producto escalar de vectores en el orden que se quiera)*

*4ª El producto escalar es distributivo respecto de la suma de vectores:*

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

El uso más adecuado de esta operación se produce cuando los vectores se expresan en coordenadas respecto de la base canónica $\{\vec{i}\,,\vec{j}\}$

Los vectores de la base verifican $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1 \;\; y \;\; \vec{i}\cdot\vec{j}=0$ (en función de la definición de producto escalar).

Si los vectores $\vec{u}\; y\; \vec{v}$ tienen por coordenadas , $\vec{u}=(u_1,u_2)\;\; y \;\; \vec{v}=(v_1,v_2)$ , se pueden escribir respecto de los vectores $\{\vec{i}\,,\vec{j}\}$ de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=u_1\cdot\vec{i}+u_2\cdot\vec{j}\\ \vec{v}=v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow \;\; \vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1\cdot\vec{i}+u_2\cdot\vec{j})\cdot(v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j})=$$

$$=u_1\cdot v_1\cdot\vec{i}\cdot\vec{i}+u_1\cdot v_2\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+u_2\cdot v_1\cdot\vec{j}\cdot\vec{i}+u_2\cdot v\;\;\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$

***La relación que acabamos de demostrar se denomina forma analítica del producto escalar:***

***Si*** $\vec{u}=(u_1,u_2)\; y\; \vec{v}=(v_1,v_2)$ ***son dos vectores en coordenadas respecto de*** $\{\vec{i}\,,\vec{j}\}$ ***entonces se verifica que*** $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$

### Ejemplo

Sean $\vec{u}=(-3{,}4)$ y $\vec{v}=(2{,}5)$ , su producto escalar será:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3)\cdot 2+4\cdot 5=-6+20=14$$

## Autoevaluación

Determina el producto escalar de dos vectores con módulos 3,5 y 5 respectivamente, sabiendo que determinan un ángulo de 120°.

a) 8
b) 7,5
c) 10,25
d) 8,75

Comprobar

Sean los vectores $\vec{u} = (-1,3)$ y $\vec{v} = (3,2)$. Calcula el valor de $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

a) -22
b) 3
c) 12
d) 25

Comprobar



## Módulo de un vector. Propiedades

Si le aplicamos la definición de producto escalar a un vector $\vec{u}$ y así mismo, tendremos

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$$

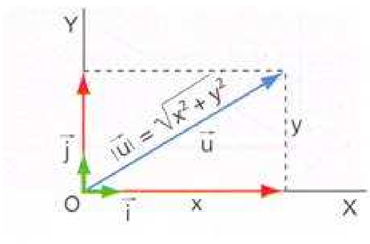
Obtenemos el cuadrado de su módulo. Podemos por tanto afirmar:

***El módulo de un vector es la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector por sí mismo:***

$$|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

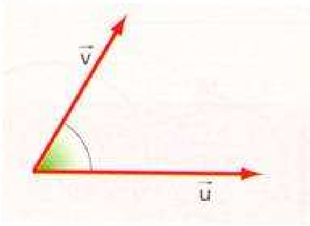
Si expresamos el vector $\vec{u}$ en coordenadas respecto la base canónica

$\vec{u} = (x, y)$ y tenemos en cuenta la forma analítica del producto escalar de vectores:




$$|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = +\sqrt{x^2 + y^2}$$ ***(expresión analítica del módulo de un vector)***

La aplicación más importante de la fórmula anterior la constituye la determinación del ángulo determinado por dos vectores




Si llamamos α al ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ , tendremos que si despejamos de la fórmula de su producto escalar

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Expresando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en coordenadas, $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ , y sustituyendo el producto escalar y los módulos en la fórmula anterior obtenemos

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}}$$ la fórmula que nos permite obtener el ángulo determinado por dos vectores.

## Ejemplo

Calcula el ángulo determinado por los vectores $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(-2,3)$

Si llamamos α a dicho ángulo, aplicando la relación anterior podemos obtener su coseno

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-2+6}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{65}}=0{,}496138$$

Utilizando la calculadora científica con la función $\cos^{-1}$, podremos obtener el ángulo cuyo coseno es 0, 496138:

$\cos^{-1}(0{,}496138)$ = 60,25518063° = = 60° 15´ 18,65´´ es el ángulo determinado por dichos vectores.

Otra aplicación importante del producto escalar de vectores es que nos permite conocer fácilmente cuando dos direcciones son perpendiculares (ortogonales):

Efectivamente, si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, forman un ángulo de 90° por tanto

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 90°=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0=0$$

.

***Podemos resumir que:***

***Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es 0:***

***Si $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$*** $\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

## Ejemplo

Determina un vector perpendicular a $\vec{u} = (-2,3)$

Teniendo en cuenta que un vector perpendicular a $\vec{u}$ debe verificar que su producto escalar con él sea 0, con tomar un vector con las mismas coordenadas que $\vec{u}$, cambiadas de orden y una de ellas de signo, ya lo tendremos:

$$\vec{v} = (3,2) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)\cdot 3 + 3\cdot 2 = 0$$

**Para saber más :**

- De vectores y producto escalar
- De vectores y producto escalar 2

## Autoevaluación

Halla el ángulo determinado por los vectores $\vec{u} = (2,0) \;\; y \;\; \vec{v} = (\sqrt{3},1)$

a) 45°
b) 30°
c) 60°
d) 90°

Comprobar

Determina un vector perpendicular al vector $\vec{u} = (-4,1)$

a) $\vec{v} = (4,-1)$

b) $\vec{v} = (4,1)$

c) $\vec{v} = (-1,-4)$

d) $\vec{v} = (1,4)$

Comprobar

Geometría del plano

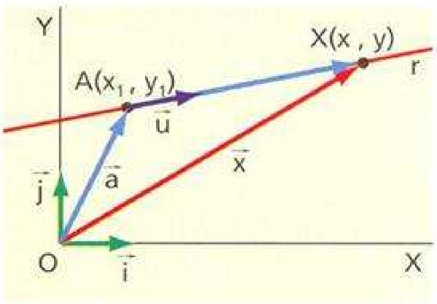
# Rectas en el plano. Ecuaciones

La conjunción entre la Geometría y el Álgebra en matemáticas ha dado lugar a la llamada Geometría Analítica, rama del conocimiento matemático que se encarga del estudio de las figuras geométricas y sus propiedades mediante sus ecuaciones o relaciones algebraicas que satisfacen sus puntos.

Uno de las figuras geométricas más importantes del plano es sin duda **la recta**. En esta sección nos encargaremos de su estudio con la ayuda de sus ecuaciones.

Geometría del plano

## Ecuación vectorial de la recta




Una recta queda determinada en el plano si se conocen dos de sus puntos o bien un punto y un vector que marque su dirección (**vector director)**

Consideremos una recta , r , en el plano determinada por un punto concreto de la misma A($x_1$ , $x_2$) y un vector director concreto $\vec{u} = (u_1, u_2)$ que en adelante escribiremos

$$r \equiv \begin{cases} A(x_1\, ,\, x_2) \\ \vec{u} = (u_1\, ,u_2) \end{cases} .$$

Dar información de la recta r consiste en establecer las condiciones que debe cumplir un punto cualquiera del plano, de coordenadas X(x , y), para pertenecer a dicha recta

La figura nos muestra los pasos a seguir para determinar el punto X.

Determinar el punto X equivale a determinar el vector $\vec{OX}$ que tendrá de coordenadas $\vec{OX} = (x, y)$ .

Como podemos observar, se verifica la relación vectorial $\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$ (1)

Por ser el vector $\vec{AX}$ paralelo al vector director $\vec{u}$ , $\vec{AX}$ será una determinada cantidad de veces el vector $\vec{u}$ :

$\vec{AX} = \lambda \cdot \vec{u} \quad con \quad \lambda \in R$ .

Sustituyendo en (1):

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{u} \quad con \quad \lambda \in R$$

***Relación que recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta r***

Esta ecuación establece que para "movernos en la recta", determinar o caracterizar puntos X del plano que pertenezcan a ella, basta con desplazarnos a partir del punto fijo A que nos han dado de la misma una determinada cantidad de veces su vector director $\vec{u}$ .

El número real $\lambda$ , recibe el nombre de **parámetro** (número libre) de formación de la recta r.

Esta forma de caracterizar la recta es poco operativa. Es importante porque desde ella se puede acceder a las otras formas de caracterizar la recta que nos serán más útiles.

### Ejemplo

La recta $r \equiv \begin{cases} A(2,1) \\ \vec{u} = (-1,3) \end{cases}$ tiene por ecuación vectorial:

$$r \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad r \equiv (x, y) = (2,1) + \lambda \cdot (-1,3)$$

Siendo X(x , y) las coordenadas de un punto cualquiera de r.

El punto P(0 , 7) es un punto de la recta r, se ha obtenido con el valor del parámetro $\lambda = 2$ .

El punto Q(1 , 3) no es un punto de la recta r, no hay valor del parámetro que lo determine con la forma vectorial de r.

### Para saber más

Ecuación vectorial de la recta

### Autoevaluación

Determina si el punto M(5 , -6) pertenece a la recta r del ejemplo anterior

a) Si
b) No

Comprobar

Determina si el punto N(7 , -14) pertenece a la recta del ejemplo anterior

a) Si
b) No

Comprobar



## Ecuaciones paramétricas de la recta

Consideremos nuevamente nuestra recta $r \equiv \begin{cases} A(x_1, x_2) \\ \vec{u} = (u_1, u_2) \end{cases}$

Recuerda su forma vectorial

$$r \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} \quad con \quad \lambda \in R$$

Expresando todos los elementos de la ecuación vectorial en coordenadas

$$r \equiv (x, y) = (x_1, x_2) + \lambda \cdot (u_1, u_2)$$

Operando esta igualdad vectorial coordenada a coordenada e igualando por coordenadas tendremos

***Las ecuaciones paramétricas de la recta r***

$$r \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot u_1 \\ y = x_2 + \lambda \cdot u_2 \end{cases} \quad con \quad \lambda \in R$$

Las ecuaciones paramétricas nos muestran por separado las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un punto X(x , y) del plano para pertenecer a la recta r.

### Ejemplo

La recta $r \equiv \begin{cases} A(2,1) \\ \vec{u} = (-1,3) \end{cases}$ tiene por ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Para formar puntos concretos de r, basta con asignar al parámetro $\lambda$ valores concretos

Con $\lambda$ = 0 obtenemos el propio punto A(2 , 1).

## Autoevaluación

Determina las ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el origen de coordenadas y tenga por vector director (imagen1) $\vec{u} = (3, -2)$

a) x = 1+3 · t , y = 1-2 · t
b) x = 1-2 · t , y = 1+3 · t
c) x = 3 · t , y = -2 · t
d) x = -2 · t , y = 3 · t

Comprobar

Determina si el punto P(0 , -3) pertenece a la recta s dada en ecuaciones paramétricas $s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2 \cdot t \\ y = 2 + t \end{cases}$

a) Si
b) No

Comprobar



## Ecuación continua de la recta.

La ecuación continua o forma continua de la recta es muy fácil de obtener partiendo de las ecuaciones paramétricas de la misma:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot u_1 \\ y = x_2 + \lambda \cdot u_2 \end{cases} \quad con \quad \lambda \in R$$

Si despejamos el parámetro en ambas ecuaciones tendremos.

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_1}{u_1} \\ \lambda = \dfrac{y - x_2}{u_2} \end{cases}$$ igualando ambas relaciones (para el mismo punto $\lambda$ es único)

***Tenemos la ecuación continua de la recta r***

$$r \equiv \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - x_2}{u_2}$$

Esta relación, en la que interviene claramente el punto concreto y la dirección de la recta, nos muestra la condición que debe cumplir un punto X(x , y) del plano para pertenecer a una recta sin necesidad de intervención de parámetros.

## Ejemplo

La recta $r \equiv \begin{cases} A(2,1) \\ \vec{u} = (-1,3) \end{cases}$ tiene por ecuación continua $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{3}$

El punto P(0 , 7) si pertenece a r porque satisface la relación $\dfrac{0-2}{-1} = \dfrac{7-1}{3} \Rightarrow 2 = 2$

El punto Q(1 , 3) no es un punto de la recta r porque no satisfacen esa relación sus coordenadas:

$$\frac{1-2}{-1} \neq \frac{3-1}{3} \Rightarrow 1 \neq \frac{2}{3}$$

## Para saber más

- Ecuación continua de la recta
- Ecuación continua de la recta 2

## Autoevaluación

Determina la ecuación continua de la recta s que pasa por A(2 , -2) y tiene por vector director el vector $\vec{u} = (3,-1)$

a) $s \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1}$

b) $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{-1}$

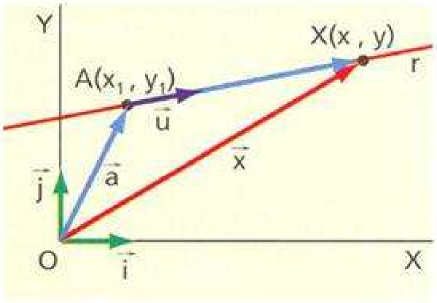
c) $s \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-1}$

d) $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{-1}$

Comprobar

## Ecuación general de la recta.

Una vez que tenemos la recta en forma continua el paso a la forma más importante de establecer la recta es muy sencillo.




Dada nuestra recta r determinada por $r \equiv \begin{cases} A(x_1\,,\,x_2) \\ \vec{u} = (u_1\,,u_2) \end{cases}$ ,

utilizando su ecuación continua $r \equiv \dfrac{x-x_1}{u_1} = \dfrac{y-x_2}{u_2}$ , si

quitamos denominadores y pasamos todas las expresiones algebraicas de la ecuación al primer miembro, tendremos una ecuación de la forma siguiente:

$$r \equiv A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

***Ecuación que se denomina ecuación general de la recta r.***

### Ejemplo

La recta $r \equiv \begin{cases} A(2,1) \\ \vec{u} = (-1,3) \end{cases}$ tiene por ecuación general r ≡ 3x + y - 7 = 0.

En efecto, si despejamos de la ecuación continua de r $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{3}$ , tendremos

$$3 \cdot (x-2) = -1 \cdot (y-1) \;\Rightarrow\; 3x - 6 = -y + 1 \;\Rightarrow\; 3x - 6 + y - 1 = 0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ r ≡ 3x + y - 7 = 0.

El punto P(0 , 7) si pertenece a r porque satisface la ecuación : 3·0+7 - 7 = 0

El punto Q(1 , 3) no es un punto de la recta r porque no satisfacen esa ecuación:

3·1 + 3 - 7 ≠ 0.

***Si r está dada en forma general,*** $r \equiv A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ ***, entonces su vector director es*** $\vec{u} = (-B, A)$ .

Como vemos en esta forma es mucho más cómodo comprobar si un punto del plano pertenece o no a una recta.

Observemos que los coeficientes que multiplican a las variables x e y (coordenadas de un punto genérico X) en la ecuación general de la recta están relacionados con su vector director $\vec{u}$ :Lo puedes entender mejor si lo compruebas en el ejemplo anterior.

Cuando la recta nos la dan determinada por dos puntos concretos del plano, para tener los dos elementos básicos que la determinan (un punto y un vector) utilizaremos como punto de referencia uno de ellos y como vector director, el vector que une dichos puntos:

***El vector que une dos puntos tiene por coordenadas las coordenadas del punto extremo menos las***

***coordenadas de su punto origen.***

### Ejemplo.

Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A(-2 , -1) y B(1 , 0)

Los elementos que tomamos son $r \equiv \begin{cases} A(-2,-1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1-(-2), 0-(-1)) = (3,1) \end{cases}$

Con ese punto y ese vector la ecuación general es r ≡ x - 3y - 1 = 0.

### Para saber más

- Ecuación general de la recta
- Ecuación general de la recta 2

### Autoevaluación

Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto A(0 , -1) y tiene por vector director el vector $\vec{v} = (-1,4)$

a) 4x +2y -1 =0
b) x + 4y +1 = 0
c) 4x + y +1 = 0
d) 4x - y +1 =0

Comprobar

Determina si el punto P(5 , -2) pertenece a la recta r ≡ x + 2y - 1 = 0

a) Si
b) No

Comprobar



## Rectas paralelas y perpendiculares.

Estudiamos a continuación los problemas más importantes y básicos asociados a la utilización de rectas en el plano.

Siempre se resuelven estos problemas utilizando la forma general o ecuación general de la recta.



### Recta paralela a una dada por un punto

El problema es sencillo.

Se trata de determinar la ecuación de una recta s, paralela a otra recta dada r, y pasando por un punto A concreto del plano exterior a la recta r.

Si r es de la forma: r ≡ ax + by + c = 0 y A es el punto de coordenadas A($x_0$ , $y_0$),

La dirección de la recta s, que depende de los coeficientes que tienen x e y, será la misma que la de la recta r y su ecuación por tanto será

s ≡ ax + by +c´ = 0 con tan solo c´ a determinar.

Aplicando que el punto A debe pertenecer a s obtendremos el valor de c´quedando completa la determinación de su ecuación.

## Ejemplo

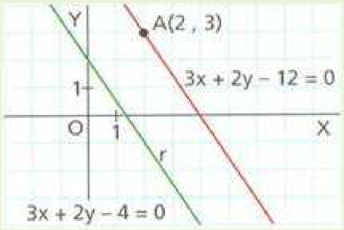
Determinar la ecuación de la recta s paralela a r ≡ 3x + 2y - 4 = 0, pasando por el punto A(2 , 3).

s debe tener ecuación s ≡ 3x +2y + c´ = 0

como A es de s, debe satisfacer su ecuación:

3·2 + 2·3 + c´ = 0 por lo que c´ = - 12

La recta s por tanto tiene por ecuación s≡ 3x + 2y - 12 = 0




***Distinguimos por tanto dos rectas paralelas en el plano de manera muy sencilla:***

***Si r y s están dadas en forma general y son rectas paralelas entonces los coeficientes de x e y en ambas son iguales o proporcionales.***

## Ejemplo

Las rectas r ≡ 2x - y -3 = 0 y s ≡ 6x - 3y + 5 = 0 son dos rectas paralelas en el plano.

Si todos los coeficientes de ambas ecuaciones son equivalentes, entonces las dos ecuaciones lo son y por tanto se trata de la misma recta. Se dice que las dos rectas son coincidentes.

### Para saber más

[Posiciones de rectas]

[Posiciones de rectas 2]

### Autoevaluación

Determina la recta que pasa por el puno A de coordenadas A(0 , -3) y es paralela a la recta r ≡ 3x - 2y + 1 =0.

a) s ≡ 3x - 2y = 0
b) s ≡ 3x - 2y + 5= 0
c) s ≡ 6x - 4y = 0
d) s ≡ 3x - 2y - 6 = 0

Comprobar

Determina la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1 , -1) y B(-3 , 0).

a) r ≡ x - 2y - 3 = 0
b) r ≡ 3x - 5y + 1 = 0
c) r ≡ 7x - 6y - 3 = 0
d) r ≡ 3x - 2y = 0

Comprobar



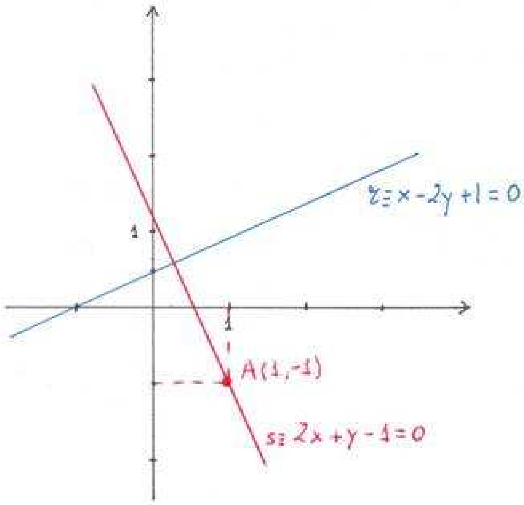
## Recta perpendicular a una dada por un punto.

El problema es de enunciado análogo al anterior pero con la búsqueda de una recta perpendicular a la que nos han dado.

Recuerda que el elemento fundamental es la dirección de la recta. Estudiamos en el apartado dedicado al producto escalar cómo localizar un vector perpendicular a uno dado:

***Si $\vec{u} = (a,b)$ es un determinado vector, entonces $\vec{v} = (-b,a)$ es perpendicular al anterior.***

Esta aplicación nos permitirá encontrar fácilmente la recta perpendicular. Primero obteniendo su vector director, lo que permite concretar dos de los tres coeficientes a determinar en su ecuación. El tercer coeficiente se obtendrá aplicando que el punto que nos han dado pertenece a dicha recta.




## Ejemplo

Determina la ecuación de la recta s que pasando por el punto A(1 , -1) es perpendicular a la recta r de ecuación general r ≡ x - 2y + 1 = 0.

El vector director de la recta r es $\vec{u} = (2,1)$ , aplicando la relación anterior, tendremos que el vector director de la recta s es $\vec{v} = (-1,2)$ .

La recta s tendrá por ecuación:

s ≡ 2x + y +c = 0

Finalmente calculamos c teniendo en cuenta que A es un punto de la recta s y debe satisfacer su ecuación:

2·1 + (-1) + c = 0 , por lo que c = -1 y la recta s es **s ≡ 2x + y - 1 = 0**.

Observa que en el plano dos rectas solo pueden estar situadas, una respecto de la otra, cortándose en un punto o paralelas.

***Las rectas perpendiculares se cortan en un punto.***

***Dicho punto, al igual que con cualquier par de rectas que sean secantes, se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones lineales asociado a sus ecuaciones tal y como aprendiste en la unidad 3 de este curso.***

## Ejemplo

Determina el punto de corte, si existe, de las rectas r ≡ x + y - 1 = 0 y

s ≡ 2x - y - 5 = 0.

Observamos por sus vectores directores que no son paralelas. Se cortan en un punto que obtendremos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-1=0 \\ 2x-y-5=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$$

Procediendo por reducción, sumamos las dos ecuaciones y obtenemos

3x = 6 , por lo tanto x = 2.

Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación (por ejemplo) obtenemos y = -1.

Las rectas r y s se cortan en el punto A(2 , -1).

Observa que r y s no son perpendiculares.

También es muy sencillo hallar **el ángulo determinado por dos rectas** ( no solo cuando son perpendiculares). Dos rectas determinan siempre dos ángulos que son suplementarios (suman 180°), el ángulo que se toma siempre es el menor de los dos, que será agudo o de 90° si son perpendiculares.

Se obtiene con la ayuda de sus vectores directores y el producto escalar, tomado éste en valor absoluto para obtener directamente ese ángulo agudo:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$ ***(ángulo determinado por dos rectas)***

## Para saber más

[Posición relativa de dos rectas en el plano]

[Posición relativa de dos rectas en el plano 2]

Puedes reforzar todo lo que has aprendido en la unidad utilizando el recurso de los ejercicios resueltos de la misma

[Ejercicios resueltos]

## Autoevaluación

Determina la ecuación de la recta que pasando por el origen de coordenadas es perpendicular a la recta r ≡ 3x + y - 4 = 0

a) s ≡ x - y = 0
b) s ≡ 3x - y = 0
c) s ≡ x - 3y = 0
d) s ≡ x + y = 0

Comprobar

Determina el punto de intersección de las rectas r ≡ 2x - y - 3 = 0 y

s ≡ x + y +3 = 0.

a) O(0 , 0)
b) A(0 , -3)
c) A(2 , -2)
d) A(3 , 0)

Comprobar