Este documento ha sido generado para facilitar la impresión de los contenidos. Los enlaces a otras páginas no serán funcionales.

>

Función matemática

El concepto de **función matemática** o simplemente **función**, es sin duda, el más importante y utilizado en Matemáticas y en las demás ramas de la Ciencia. No fue fácil llegar a él y muchas mentes muy brillantes han dedicado enormes esfuerzos durante siglos para que tuviera una definición consistente y precisa.

Desde los tiempos de Galileo, que fue uno de los primeros en usarlo (aunque no en la forma que nosotros lo conocemos actualmente), pasando por el gran Newton y Leibniz, que fue el primero que en 1673 usó la palabra "función" para referirse a la relación de dependencia de dos variables o cantidades, Euler, que le dio su formulación moderna y = f(x), Cauchy, Dirichlet o Gauss, las mejores mentes de la Historia de la Humanidad le dedicaron su atención y sus desvelos.

El estudio de las propiedades de las funciones está presente en todo tipo de fenómenos que acontecen a nuestro alrededor. Así, podemos nombrar fenómenos sociales relacionados con crecimientos demográficos, con aspectos económicos, como la inflación o la evolución de los valores bursátiles, con todo tipo de fenómenos físicos, químicos o naturales, como la variación de la presión atmosférica, la velocidad y la aceleración, la gravitación universal, las leyes del movimiento, la función de onda de una partícula a escala cuántica, la desintegración de sustancias radiactivas o la reproducción de especies vegetales y animales. Casi todo es susceptible de ser tratado a través del planteamiento y estudio de una o varias funciones que gobiernan los mecanismos internos de los procesos en todas las escalas y niveles. Otra cosa bien distinta y mucho más difícil, es determinar cuáles son las funciones que intervienen en cada proceso en concreto. Esta, en suma, es la tarea de los científicos: descubrir la *dinámica rectora* de cada fenómeno y expresarla en términos de una función.

Concepto de función

El origen del concepto de función ha estado siempre unido al estudio de los fenómenos sujetos a cambios. Las referencias más antiguas al concepto de función se encuentran en algunos escritos de astrónomos babilonios. En la Edad Media el estudio de funciones aparece ligado al concepto de movimiento, siendo uno de los primeros en realizarlo Nicolás de Oresme (1323-1392) el cuál representó en unos ejes coordenados gráficos relacionados con el cambio de la velocidad respecto al tiempo.

Tres siglos más tarde, Galileo, en 1630, estudió el movimiento desde un punto de vista cuantitativo, justificándolo experimentalmente y estableciendo a partir de ello, leyes y relaciones entre magnitudes.

A partir de Galileo, el concepto de función fue evolucionando hasta que a comienzos del siglo XIX, en 1837, Dirichlet formuló la definición de **función** como **relación entre dos variables**, que es la que actualmente aceptamos y manejamos.

Vamos a comenzar el estudio de las funciones dando su definición actualmente aceptada, relativamente moderna para la importancia del concepto. Para ello, necesitamos conocer primero lo que es una **aplicación**.

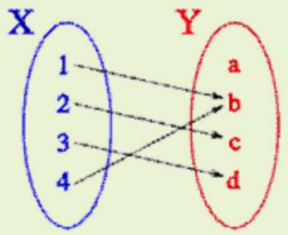
Una aplicación es una ley de asignación entre dos conjuntos, que pueden ser numéricos o no. Usaremos la flecha $\rightarrow$ para indicar el sentido de la aplicación, es decir, cuál es el conjunto origen y cuál el destino. Lo denotaremos:

$$s : X \rightarrow Y$$

Con ello queremos expresar que la aplicación *s* asocia o relaciona los elementos de X (origen) con los elementos de Y (destino).

Ejemplo:

s: X (Y aplicación



En este ejemplo, la aplicación relaciona los elementos de X (números) con los de Y (letras). Las flechas indican los elementos emparejados entre sí:

s : 1 → b   2 → c   3 → d   4 → b

También se puede expresar la aplicación como conjunto de pares: s = {(1,b) (2,c) (3,d) (4,b)} con el criterio de que el primer valor de cada par pertenece al conjunto origen y el segundo valor del par pertenece al conjunto destino.

Los elementos del conjunto de partida X se llaman **orígenes** y los del conjunto de llegada Y se llaman **imágenes**.

Una aplicación debe entenderse como *cualquier ley* que asocie elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto, sin más condiciones. Este concepto debe refinarse hasta llegar al de **función matemática**.

La idea que subyace en el núcleo central del concepto de función, es la de **relación de dependencia** entre magnitudes o variables. Al estudiar un fenómeno cualquiera, se suele observar que las magnitudes o cantidades que intervienen presentan una relación entre ellas, de forma que una de las magnitudes ***depende*** de la otra. La expresión analítica de esa relación de dependencia ***es*** la función.

*Una **funciónmatemática** es una aplicación entre dos conjuntos numéricos de forma que a cada elemento del primer conjunto le corresponde **uno y sólo un** elemento del segundo conjunto:*

f : X → Y

x -> y = f(x)

*Al conjunto **X** se le llama **Dominio** y al conjunto **Y** se le llama **Imagen.***

Se debe cumplir:

***a)** todos los elementos de X están relacionados con elementos de Y*

b)a cada** elemento **x** ∈ **X** le corresponde un **único elemento y** ∈ **Y

*A la variable **x** se le llama **variable independiente**, mientras que a la variable **y** se le denomina **variable dependiente.***

*Si dos elementos **x** e **y** están relacionados por la función f, tenemos que y = f(x)*

*f(x) = y -> diremos que **y** es **la imagen** de **x** o que **x** es **la antiimagen** de **y***

Las imágenes son elementos del conjunto imagen. Las antiimágenes son elementos del dominio

Ejemplo:

Supongamos una función **f** que a cada **x** le hace corresponder **su cuadrado**:

x → f(x) = x^2

....

($f(2) = 2^2 = 4$

($f(3) = 3^2 = 9$

....

entonces:

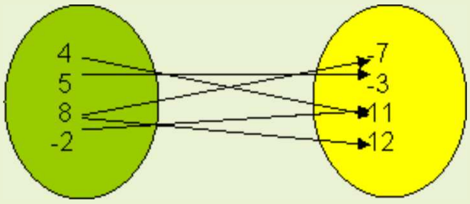
4 es la **imagen** de **2** por la función f <- -> **2** es la **antiimagen** de **4**

9 es la **imagen** de **3** por la función f <- -> **3** es la **antiimagen** de **9**

Ejemplos:

1. La siguiente aplicación NO es función:

X Y

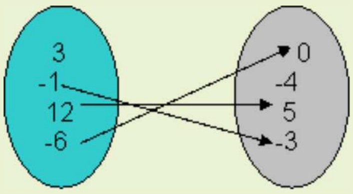


Aplicación que **no** es función

El motivo es que hay un elemento del dominio, el 8, que tiene 2 imágenes distintas: al elemento 8 le correspondería -7 y 12 -> NO es función

2. La siguiente aplicación NO es función:

X Y

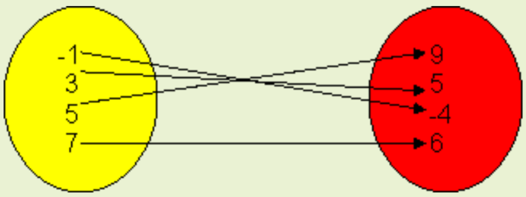


Aplicación que **no** es función

Existe un elemento del dominio, el 3, que no tiene imagen -> NO es una función. Todos los elementos del dominio deben tener una imagen.

3. La siguiente aplicación Si es función

X Y

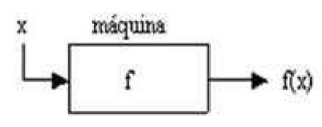


Aplicación que **sí** es función

Esta aplicación SI es una función ya que a cada elemento del dominio X le corresponde un único elemento d en la imagen Y

Fenómeno es todo aquello que podemos observar y en el que suelen intervenir varias variables. Si en un fenómeno en el que intervienen dos variables, una de ellas **depende** de la otra, diremos que hay establecida una *relación funcional* entre ellas.

Podemos comparar una función f(x) con una máquina a la cuál se le introduce un valor **x** y después de una serie de cálculos, ésta devuelve el valor de f(x):



*Una **función,** en suma, es la expresión de la relación de dependencia entre dos variables que, por medio de una regla, asigna a cada valor de la variable independiente **x** un único valor de la variable dependiente **y**. Se expresa mediante la fórmula abstracta:*

$$y = f(x) \text{ donde } \begin{cases} x \to \text{variable independiente} \\ y \to \text{variable dependiente} \\ f \to \text{función} \end{cases} \quad \text{que se lee "y es función de x"}$$

Ejemplo:

Si x -> nº de barras de pan que se compran

y -> el precio que debemos pagar por ellas

está claro que y depende de x: el precio y es función del número de barras x

x -> variable independiente y -> variable dependiente

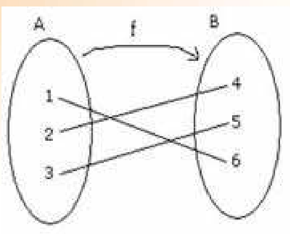
Si una barra de pan cuesta 0'9 € -> y = 0'9·x expresa la dependencia entre x e y

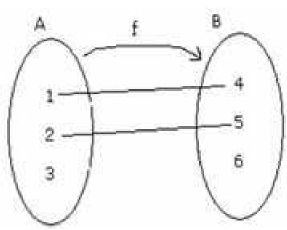
Para saber más

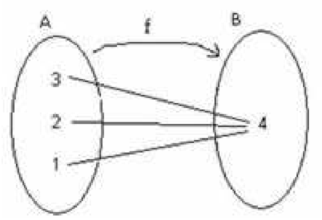
- Introducción a los conceptos asociados a las funciones
- Funciones matemáticas: conceptos básicos
- Conceptos elementales de funciones

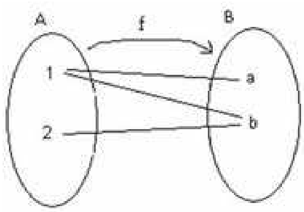
Autoevaluación

Indica cuáles de las siguientes aplicaciones son funciones:

1) 

2) 

3) 

4) 

a) 1, 2 y 3 son funciones; 4 no es una función
b) 1 y 4 son funciones; 2 y 3 no son funciones
c) 1 y 3 son funciones; 2 y 4 no son funciones

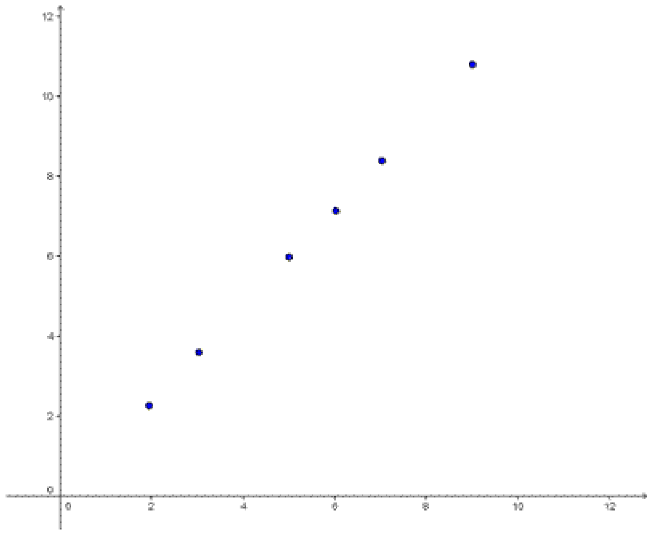
Comprobar

Formas de expresar una función

Fundamentalmente, existen 3 formas de expresar una función: por medio de una **tabla de valores**, una **gráfica** o por una **fórmula** (también llamada **ecuación**). Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, pero podemos avanzar que la fórmula es la mejor forma de expresar la función, ya que con ella podemos obtener las otras dos expresiones mediante una serie de procedimientos establecidos.

Veamos un ejemplo de la vida diaria en el que aparecen las 3 formas de expresar una función: Manolito compra pan todos los días; desea saber el importe de las barras de pan que va a comprar dependiendo del nº de barras adquiridas. Para ello, ha recogido los datos de varios días distintos en los que ha adquirido distinto número de barras y ha formado una **tabla de valores**:

Nº de barras	2	3	5	6	7	9
Precio (en €)	2'40	3'60	6	7'20	8'40	10'8



Puede tener la idea de **representa**r estos datos empíricos en una **gráfica**.

Por último, se da cuenta de que para calcular el precio del pan debe multiplicar 1'20 € (precio de una barra) por el número de barras que compre, obteniendo así una **fórmula** que relaciona el nº de barras con el precio:

$f(x) = 1'2 \cdot x$

Con esta fórmula puede calcular cuánto le va a costar el pan de cualquier día sin más que saber el nº de barras de pan que va a comprar. No sólo eso, puede completar la tabla de valores e incluso dibujar la gráfica.

Tabla de valores

Una **tabla de valores** es una tabla donde aparecen algunos (pocos) valores de la variable independiente **x** y sus correspondientes valores de la variable dependiente **y**. Necesariamente, para poder ser manejable y útil, deben aparecer pocos valores de ambas variables. Toma la forma:

Variable x	x_1	x_2	x_3	....	x_{n-1}	x_n
Variable y	y_1	y_2	y_3	....	y_{n-1}	y_n

El uso de este tipo de tablas para expresar una función es característico de las Ciencias Experimentales, como la Física o la Química, en las que un proceso se estudia primero en el laboratorio y se recogen mediante instrumentos de medida una serie de datos o valores que se tabulan para una posterior interpretación. Con ellos se pretende obtener una ley o función que gobierne el proceso.

Su *gran ventaja* es que es muy sencillo obtenerla, puesto que sólo necesitamos recoger los datos que suministran los aparatos y formar la tabla. Su *gran inconveniente* es que proporcionan muy poca información, ya que sólo se conoce la función para aquellos valores de **x** que aparecen en la tabla y no para los demás. Sin embargo, siempre es el primer paso para la obtención de las leyes físicas.

Ejemplo:

La siguiente tabla indica el espacio recorrido por un móvil en caída libre.

Se observa que al valor **x = 2** segundos le corresponde **y = 19.6** metros; también, que si **x = 5** segundos entonces **y = 122.5** metros**,** pero es imposible conocer cuál es el valor que corresponde a **x = 4** segundos ya que **no aparece** en la tabla.

x (Tiempo	0	1	2	3	5	7
y (Espacio	0	4.9	19.6	44.1	122.5	240

** Gráfica

La **gráfica** de una función es el dibujo, sobre unos ejes coordenados, de todos los pares (x,f(x)) donde x recorre todos los valores del dominio de la función. Como ya quedó claro y = f(x), así que la 2ª coordenada **y** de cada uno de estos puntos no es más que la correspondiente imagen de la 1ª coordenada **x**.

Gráfica -> dibujo de {(x,f(x))/ x $\in$ Dominio f}

Sobre el eje **OX** representamos los valores de la **variable independiente x** y sobre el eje **OY** los valores de **f(x) = y** que es la **variable dependiente**.

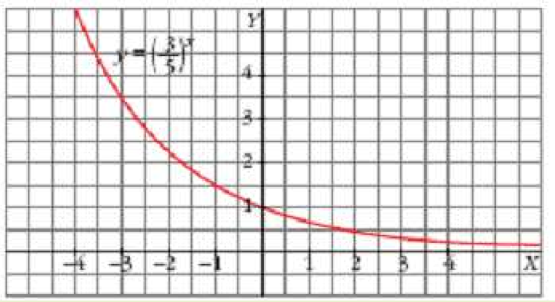
Ejemplo:

Gráfica de f(x) = $\left(\frac{3}{5}\right)^x$

Dominio = $(-\infty, +\infty)$

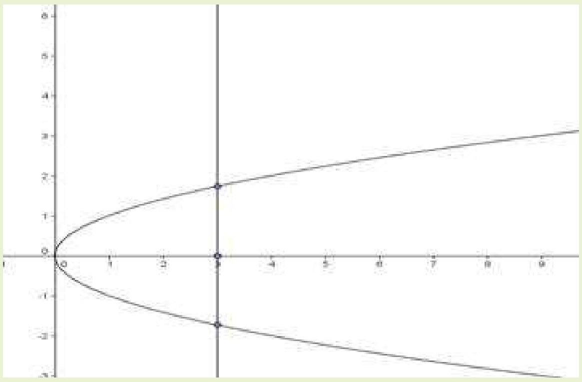
La gráfica pasa por el punto (0,1) como se observa si miramos el plano coordenado, luego: 0 (f(0) = 1. En efecto: $(3/5)^0 = 1$

También se ve que pasa por (1,0'6) ya que f(1) = $(3/5)^1$ = 3/5 = 0'6



Para determinar a partir de la gráfica el valor de **y = f(x)** que corresponde a un valor de **x** concreto, debemos trazar la recta perpendicular al eje OX que pase por ese valor de **x** y el punto en el que esta recta corte a la gráfica es el valor de **f(x)**. Cada recta perpendicular debe cortar en un único punto a la gráfica, ya que en otro caso habría algún valor de x que tendría dos imágenes, lo cual no debe suceder.

Ejemplo:



Esta gráfica **no** es una función

Esta gráfica NO corresponde a una función, ya que cada valor de **x** > 0 tiene **2 imágenes** (cada recta perpendicular al eje OX corta a la gráfica en dos puntos. En el ejemplo, hemos trazado la recta perpendicular que pasa por x = 3 y vemos que corta a la gráfica en 2 puntos distintos.

La gran ventaja de la gráfica como forma de representar a una función es que proporciona una gran cantidad de información de un vistazo: nos dice cuál es el comportamiento global de la función, la tendencia que tiene, etc. Por el contrario, como inconveniente podemos citar que, en general, es muy difícil obtener la gráfica precisa de una función cualquiera. De hecho, se necesita una herramienta matemática poderosísima para ello: el cálculo diferencial, combinado con el cálculo de límites funcionales. Este estudio se escapa del objetivo del presente curso.

Ejemplo:

En la gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, se observa que, cuando x crece hacia $+\infty$ alejándose por la derecha, los valores de la función se acercan a 0. Por el contrario, cuando x se aleja a $-\infty$ por la izquierda, los valores de la función crecen hacia $+\infty$. Todo ello lo hemos deducido *leyendo* la gráfica.

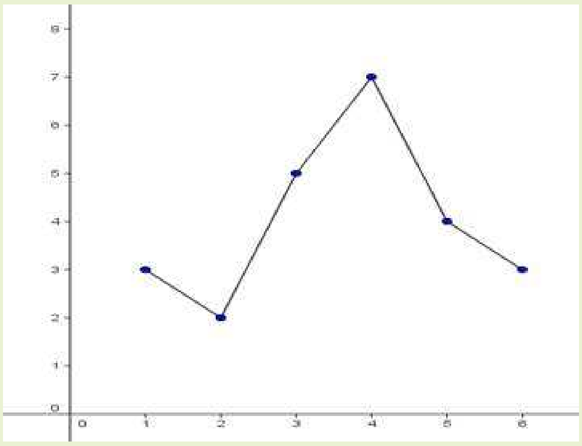
Como primera aproximación al dibujo de una gráfica, podemos utilizar una tabla de valores para marcar cada punto de la tabla, formado por 2 coordenadas **x** e **y**, sobre los ejes y unir entre sí, bien mediante rectas o curvas, los puntos dibujados, como se indica en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Dada la siguiente tabla de valores para la función f(x)

Vamos a construir la gráfica a partir de esta tabla:

Variable x	1	2	3	4	5	6
Variable y = f(x)	3	2	5	7	4	3



Al trazar así la gráfica, podemos hacernos una primera idea de los valores que alcanza la función; así, al valor **x = 1'5** le corresponde

f(x) = y = 2'5 aproximadamente. Esto no garantiza en absoluto que efectivamente f(1'5) =2'5, sólo se trata de una primera aproximación. Desconocemos completamente si la gráfica es así o parecida, ya que disponemos de muy poca información (sólo 6 valores). Con más datos, podríamos construir una gráfica más precisa.

Fórmula

La **fórmula** o **ecuación** de una función es la expresión, en términos de **operaciones algebraicas o no**, de la relación de dependencia entre las dos variables:

x -> variable independiente

y -> variable dependiente

y = f(x)

La fórmula nos dice qué operaciones debemos hacer con cada valor de x para obtener su correspondiente valor y = f(x).

Cuando en la fórmula de la función aparecen solamente operaciones aritméticas (suma, resta, producto, cociente, potencia, raíz) se denomina **función algebraica**. Si además aparecen otro tipo de operaciones no aritméticas (exponencial, logaritmo, trigonométricas, etc.) se denomina **función trascendente**.

***Evaluar** una función en un punto concreto x_0 consiste en **sustituir** x_0 en la fórmula de la función y **realizar** las operaciones indicadas en la fórmula en el orden adecuado, respetando la jerarquía de las operaciones.*

Ejemplo:

$y = f(x) = 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 6$ -> para hallar el valor de y que corresponde a un valor x concreto, debemos elevar al cubo x, multiplicarlo por 3, elevar al cuadrado x, multiplicarlo por 4, multiplicar x por 5 y por último, sumar o restar esas cantidades, incluido el 6 .

Así para x = 2 sustituimos **x** por **2** y operamos:

$f(2) = 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 6 = 24 + 16 - 10 - 6 = 24$

Con mucha diferencia, es la mejor forma de expresar una función. Con ella, podemos fácilmente construir cualquier tabla de valores de f(x) sin más que evaluar repetidamente la función en los puntos de x que aparezcan en la tabla. También, usando el cálculo diferencial, podemos obtener la gráfica precisa de la función a partir de la fórmula. Además, viendo la fórmula, podemos deducir el tipo de dependencia entre ambas variables.

Ejemplo:

Si **$y = f(x) = x^2$** se ve que la dependencia entre **x** e **y** es del tipo cuadrático.

-> al crecer **x**, la variable **y** crecerá más rápidamente, de forma **cuadrática**.

Como ya vimos, existen otro tipo de funciones en las que en su fórmula aparecen operaciones **noalgebraicas**: son las llamadas **funciones trascendentes**. Las podemos agrupar en familias, como:

funciones **exponenciales (f(x) = {a^x** con a > 0 , a ≠ 1}

funciones **logarítmicas** (**f(x) = {$\log_a x$** con a > 0 , a ≠ 1}

funciones **trigonométricas (f(x) = {sen x, cos x, tan x, sec x, cosec x,...}**

funciones **trigonométricas inversas(f(x) = {arcsen x, arccos x, arctan x,...}**

funciones **trigonométricas hiperbólicas(f(x) = {senh x, cosh x, tanh x,...}**

Se utilizan en muy diversas situaciones y para manejarlas es necesario una calculadora científica o un ordenador. En las calculadoras científicas, existen teclas específicas para este tipo de funciones trascendentes, normalmente situadas por encima de las teclas numéricas.

Para saber más

[Página de funciones con teoría nivel superior]

Para construir la gráfica de una función cualquiera dada por su fórmula (ya sea algebraica o trascendente), ya hemos comentado que necesitamos del cálculo diferencial, lo que sobrepasa los objetivos del presente curso. Sin embargo, en Internet existe una gran cantidad de software, libre o bajo licencia, para la representación de gráficas de funciones a partir de su fórmula o ecuación. Como ejemplo, podemos citar winplot, funpawin, Wiris, GeoGebra o el manipulador lógico-simbólico Mathematica (este último de pago). Con cualquier buscador se pueden descargar e instalar, siendo la mayoría muy fáciles de uso y bastante intuitivos.

[Descarga gratuita de winplot]

[Pagina de Wiris con recursos de funciones y gráficas 2D]

[Recursos educativos con Wiris]

[Descarga de GeoGebra]

Autoevaluación

Completa la siguiente tabla de valores para la función $f(x) = x^2 - 5x +6$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = f(x)									

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = f(x)	0	-1	2	-1	5	0	2	-1	5

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = f(x)	30	20	12	6	2	0	0	2	6

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = f(x)	20	20	12	6	0	0	0	12	20

Comprobar

Dada la función: f (x) = $\frac{1}{x^2+1}$ completa la siguiente tabla de valores:

x	-4	-2	-1		2	3	5	10
f (x)				1				

a)

x	-4	-2	-1	0	2	3	5	10
f (x)	1/17	1/5	1/2	1	1/5	1/10	1/26	1/101

b)

x	-4	-2	-1	0	2	3	5	10
f (x)	1/9	1/-4	1	1	2	1/3	5	1/11

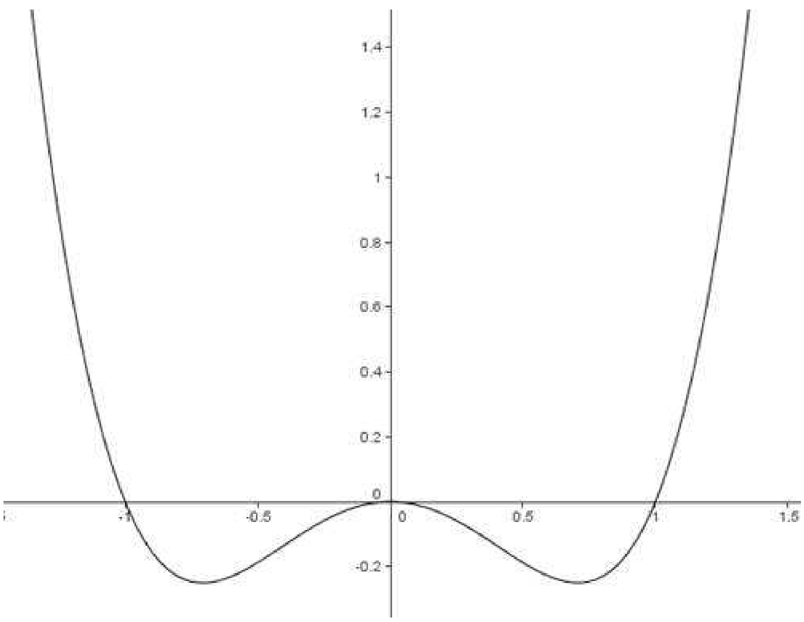
c)

x	-4	-2	-1	0	2	3	5	10
f (x)	-1/9	-1/5	-1/2	1	1/5	1/9	1/26	1/100

Comprobar

Características de las funciones

Las características de las funciones son aquellos elementos comunes a todas ellas que sirven como señas de identidad: todas las funciones poseen dichas características, que son distintas en cada caso concreto. El conjunto de características de una función conforman su estructura y sirven para identificarla y diferenciarla del resto de funciones. Podemos citar como las más importantes el **dominio**, la **imagen**, la **continuidad**, el **crecimiento**, los **extremos** o las **simetrías**. Así, conociendo con exactitud todas las características de una función en concreto, sería muy fácil reconstruir dicha función con un grado muy alto de precisión. Por ejemplo, el dominio y la imagen de una función representan el marco en el que se mueven las variables dependiente e independiente y de alguna forma, son como el *ancho* y el *alto* de la imagen gráfica de la función.



Función f(x) = $x^4 - x^2$ continua, simétrica respecto el eje OY

máximo local en x = 0 y dos mínimos locales en x = $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

La continuidad tiene que ver con la posibilidad de dibujar la gráfica de *un solo trazo* y el crecimiento y los extremos son claves para determinar la forma concreta de la gráfica, donde *aumenta* o *disminuye* y sus *valles* (mínimos) o *crestas* (máximos). Por último, las simetrías aportan valiosa información acerca de la estructura global de la función en relación con la *imagen especular* (simetría del eje OY) o con la *simetría respecto al origen* (simetría central)

La mayoría de estas propiedades se pueden estudiar analíticamente a partir de la fórmula de la función, pero es mucho más sencillo e intuitivo hacerlo mediante el análisis de su gráfica. Por ello, es necesario disponer de algún método que permita obtener la gráfica de una función cualquiera a partir de su fórmula, como por ejemplo, algún software gratuito de representación de funciones.

Dominio

El **dominioD** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente **x**. Hay dos formas principales para determinarlo en una función concreta, que dependen de cómo esté expresada la función:

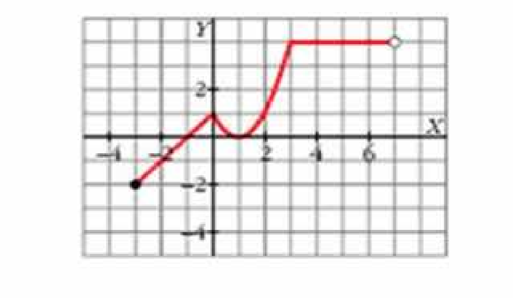
- Si la función está dada por una **gráfica**, el dominio se puede determinar viendo cuál es el intervalo o intervalos de x entre los que existen función:

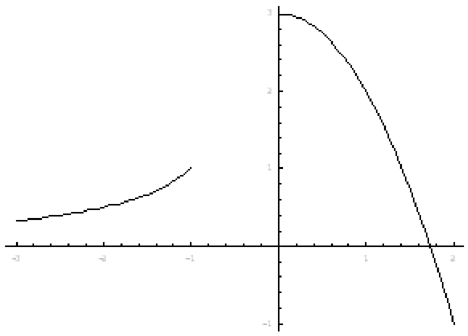
En esta gráfica vemos que la función está definida para valores de x que van

desde x = -3 hasta x = 7 (**D = [-3,7]**

Dominio ([-3,7]

Puede que la función esté definida en intervalos separados o disjuntos; en este caso, el dominio es la unión de los distintos intervalos en los que exista dibujo de gráfica.





En esta gráfica se observa que no hay función para valores de x entre -1 y 0. Por tanto el dominio está formado por la unión de los intervalos

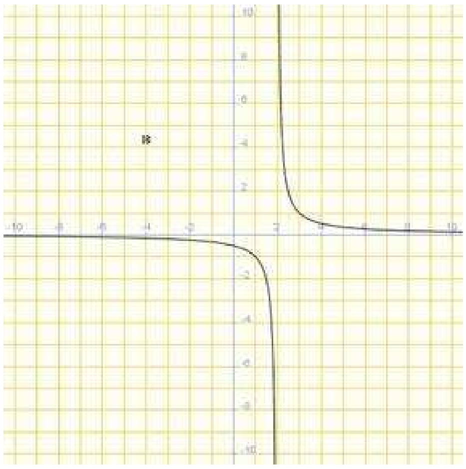
[-3,-1] y [0,2] (D = [-3,-1] $\cup$ [0,2]

Dominio = [-3,-1] $\cup$ [0,2]

En la siguiente gráfica podemos ver que la función existe para todos los valores de x excepto para x = 2:

No podemos decir cuál es el valor de f(2) ya que ya nos acerquemos por la izquierda o por la derecha, los valores de f(x) se alejan a $-\infty$ o + ∞ . Esto nos hace pensar que el dominio de esta función es |R ¬ {2} = = $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

La función representada es f(x) = $\dfrac{1}{x-2}$ que obviamente *no está definida* para x = 2



Gráfica de f(x) = $\dfrac{1}{x-2}$

Podemos resumir diciendo que si encerramos la gráfica de la función en un rectángulo, el **dominio** sería la **base** de ese **rectángulo.**

- Si la función está dada a través de su **fórmula**, se puede calcular el dominioanalíticamente en caso sencillos. Consideraremos siempre que el dominio es el conjunto más grande de valores de x para los cuáles la función existe, es decir, las operaciones que aparecen en la fórmula tienen sentido y están bien definidas. Cuando en una fórmula aparezcan cocientes, hay que asegurar que el denominador no se anule. Si aparece alguna raíz de índice par, hay que asegurar que el radicando es mayor o igual que 0. Si en la fórmula interviene algún logaritmo, se debe imponer que el argumento del logaritmo sea estrictamente mayor que 0.

Al imponer estas restricciones, vamos a **deducir las condiciones** que deben cumplir los valores del dominio y así obtener una **expresión analítica** para el mismo, generalmente en términos de intervalos.

Ejemplos:

Dada la función f(x) = $\dfrac{x^3+4x^2-2}{x^2-9}$ el dominio es el conjunto de valores de x tales que x^2 - 9 ≠ 0 para garantizar que el denominador

no se anule -> x ≠ 3,-3 -> **D =** $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$ **= |R ¬ {-3,3}**

Dada la función f(x) = $\sqrt{5x-3}$ -> debemos imponer que 5x - 3 ≥ 0 para que la raíz cuadrada

tenga sentido -> 5x ≥ 3 -> x ≥ $\frac{3}{5}$ (**D =** $[\frac{3}{5},+\infty)$

Dada la función f(x) = x^2 - 5x + 1 -> estas operaciones siempre se pueden realizar y están bien definidas -> **D = |R =** $(-\infty,+\infty)$

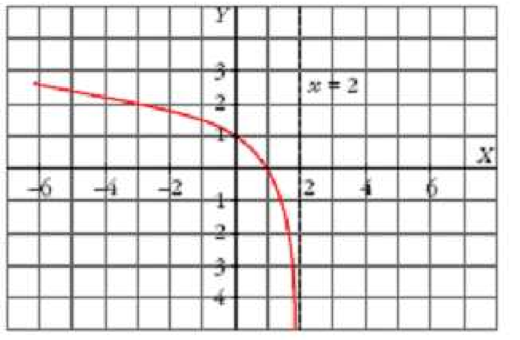
Cuando la fórmula de la función crece en complejidad, la determinación del dominio de forma analítica se complica en exceso hasta llegar incluso a ser imposible de obtener. Este método queda entonces limitado a *funciones sencillas* cuya fórmula sea *asequible.*

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = \log_2 (2 - x)$ halla su dominio.

Se debe cumplir que $2 - x > 0 \rightarrow 2 > x \rightarrow x < 2 \rightarrow D = (-\infty, 2)$.

Su gráfica sería:



Se observa que no hay función para valores de x mayores que 2, lo que está en concordancia con el dominio obtenido analíticamente.

Gráfica de $f(x) = \log_2 (2 - x)$

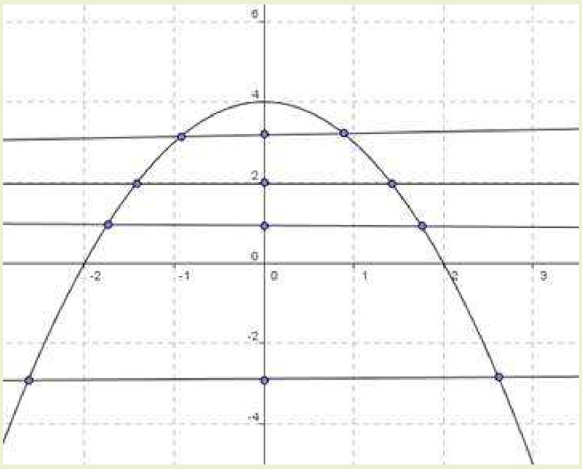
Imagen

La **imagen I** de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente **y**. Lógicamente, depende del tipo de función, de su fórmula y de cuál sea el conjunto dominio **D** de la función**.**

La mejor forma de hallar la imagen de una función es a la vista de su gráfica: la imagen es el intervalo o intervalos medidos sobre el eje OY en los que al trazar rectas horizontales (paralelas al eje OX) cortamos a la gráfica de la función.

Ejemplo:

En esta gráfica, que corresponde a la función $f(x) = 4 - x^2$ se observa que la imagen son todos los puntos del eje vertical OY menores o iguales que 4 -> cualquier recta horizontal a una altura menor que 4 corta a la gráfica en 2 puntos -> $I = (-\infty, 4]$. Para valores de y > 4, trazamos una recta paralela al eje OX y **no** cortamos a la gráfica.

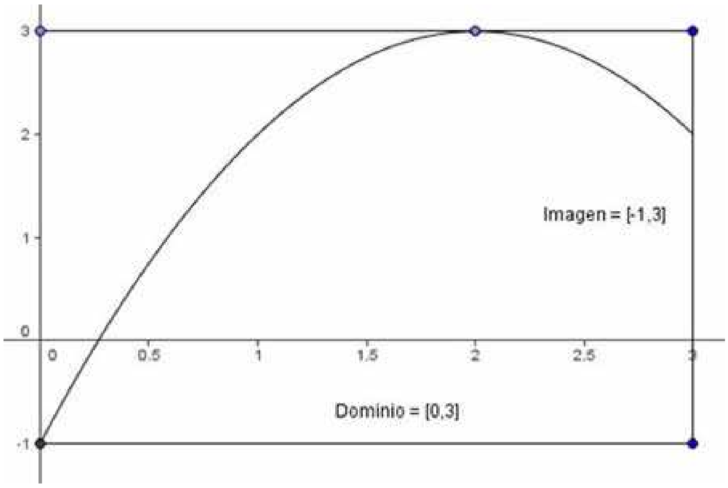


Determinación de la imagen de $f(x) = 4 - x^2$

Si encerramos la gráfica de la función en un rectángulo, la **imagen** sería la **altura del rectángulo:**

Hallar **la imagen** de **forma analítica** a partir de la fórmula es tremendamente difícil, aún en casos sencillos: consiste en resolver las infinitas ecuaciones **f(x) =** $\mathbf{y_0}$ para valores de y_0 que además son desconocidos. Suele ser más rentable dibujar la gráfica a partir de la fórmula y determinar la imagen a la vista de la gráfica.

Sólo en casos extremadamente sencillos se puede conseguir, como en el siguiente ejemplo:



Ejemplo:

Determina la imagen de la función y = f(x) = 2x + 3.

Debemos determinar para qué valores de y existe solución a la ecuación y = 2x + 3. Dado un valor y_0**cualquiera** pero **fijo**, la imagen consiste en resolver la ecuación

$2x + 3 = y_0 \rightarrow 2x = y_0 - 3 \rightarrow x = \frac{y_0 - 3}{2}$ por tanto, existe un **x** cuya imagen es ese $\mathbf{y_0}$ concreto, y esto es cierto ***para cualquier*** y_0 ->

I = |R = $(-\infty, +\infty)$

Ejemplo 2: determina la imagen de la función $f(x) = 3+ x^2$.

En la fórmula de f(x) aparece x^2 sumado con 3. Para cualquier valor de x (ya sea positivo o negativo) se tiene que $x^2 \geq 0$ ->

al sumarle 3, será $3+ x^2 \geq 3$ -> los valores que puede tomar f(x) son siempre ≥ 3 -> I = $[3,+\infty)$

Autoevaluación

Halla el dominio de la siguiente función: $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$

a) D = $(-\infty,0) \cup (3,+\infty)$

b) D = $(-\infty,-3) \cup (0,+\infty)$

c) D = $(-\infty,0)$

Comprobar

Halla la imagen de la función $f(x) = x^2 - 4$

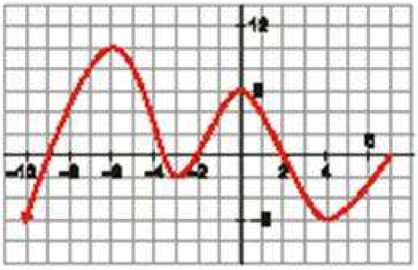
a) I = $[-4,+\infty)$

b) $(-\infty,4)$

c) $(4,+\infty)$

Comprobar

Halla la imagen de la función f(x) dada por su gráfica: (cada cuadrado en el eje OY equivale a 2 unidades)



a) [-10,8]
b) [-4,12]
c) [-6,10]

Comprobar

Continuidad

La definición rigurosa y precisa de continuidad necesita del concepto de límite de funciones, que se escapa del objetivo de este curso. Podemos dar otra definición del concepto de **continuidad**, más sencilla e intuitiva, pero igual de efectiva.

Una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] si su gráfica, para valores de x dentro del intervalo [a,b], se puede dibujar de un solo trazo, sin cortes, ni saltos ni interrupciones.

Como observamos, esta definición de continuidad necesita de la gráfica de la función.

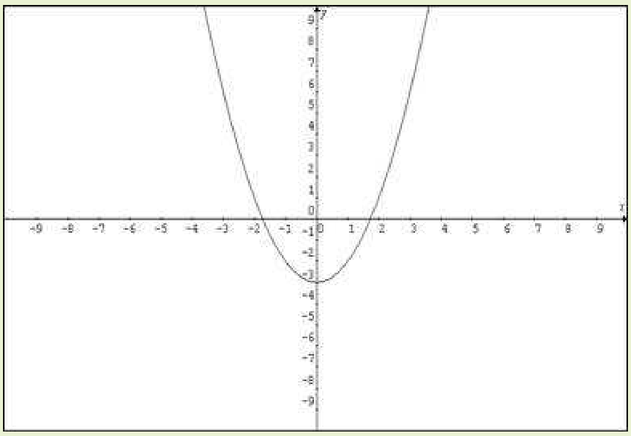
Ejemplos:

1. La siguiente función **es continua**:

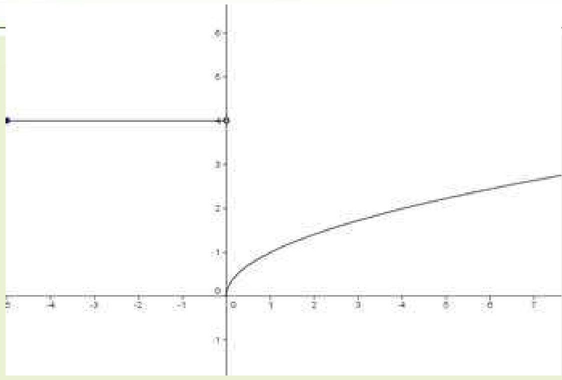
Su gráfica es de un solo trazo, pues no hay cortes ni interrupciones.

Podemos *recorrerla* de forma *continua*.

Gráfica de $f(x) = x^2 - 3$ -> función **continua**



2. La siguiente función **no es continua**:



Esta gráfica no se puede dibujar de un solo trazo, ya que al pasar por x = 0, la función pasa de valer 4 a valer 0 -> no se puede recorrer de forma continua -> no hay continuidad

Función **no continua**

Los puntos en los que una función deja de ser continua se llaman **puntos de discontinuidad**. Existen muchos tipos de discontinuidad: de salto finito, esencial, de salto infinito, evitable, etc. Se clasifican según el comportamiento de la función a izquierda y derecha del punto de discontinuidad. Para una correcta clasificación, se necesita conocer el concepto de límite.

Crecimiento y extremos

La forma que tiene una función está es parte determinada por sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Hallarlos analíticamente supone utilizar el cálculo diferencial, por lo que en su lugar, lo haremos gráficamente.

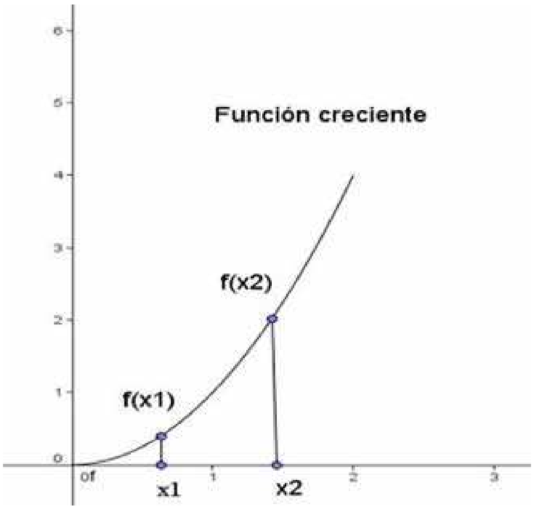
Una función es creciente en un intervalo (a,b) si para cualquier pareja de valores x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1<x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$

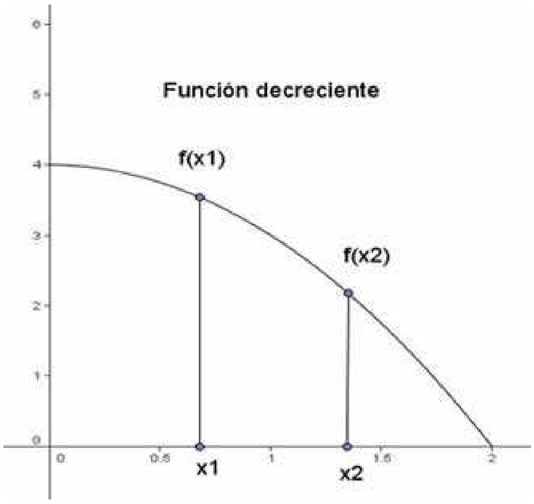
Una función es decreciente en un intervalo (a,b) si para cualquier pareja de valores x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1<x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

(Notar el cambio de desigualdad en la segunda definición)

Estas propiedades tienen una interpretación geométrica clara que afecta a la forma de la gráfica en los distintos intervalos de crecimiento o decrecimiento:

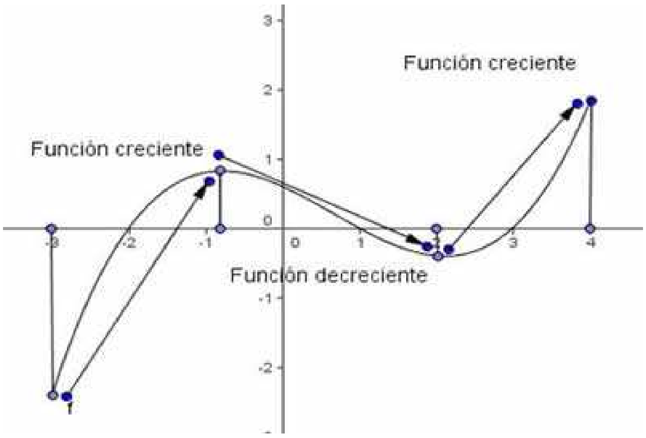
- si una función es **creciente** en un intervalo, su **gráfica** en ese intervalo va **hacia arriba**, cuando recorremos el intervalo de izquierda a derecha
- si una función es **decreciente** en un intervalo, su **gráfica** en ese intervalo va **hacia abajo**, cuando recorremos el intervalo de izquierda a derecha





si x1 <x2 (f(x1) <f(x2) **si x1 < x2 (f(x1) > f(x2)**

Lo normal es que una función tenga zonas o intervalos de crecimiento junto con otras de decrecimiento:



Las zonas de crecimiento o decrecimiento están separadas por los puntos extremos: **máximos** o **mínimos.**

Un punto $\mathbf{x_0}$ es un **máximo** de f(x) si:

$f(x_0)$ **>** f(x) para todos los x de un entorno de x_0.

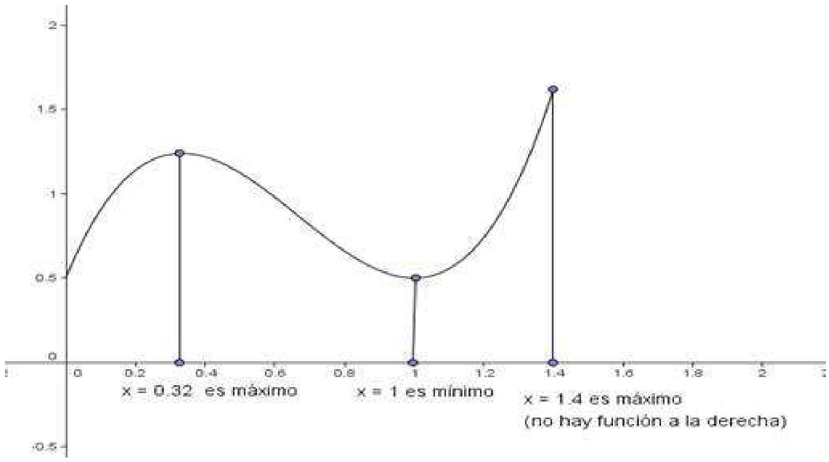
Análogamente, un punto $\mathbf{x_0}$ es un **mínimo** de f(x) si:

$f(x_0)$ **<** f(x) para todos los x de un entorno de x_0.

Debemos recalcar que los **máximos** y **mínimos** son valores de **x** variable independiente, no de la función.

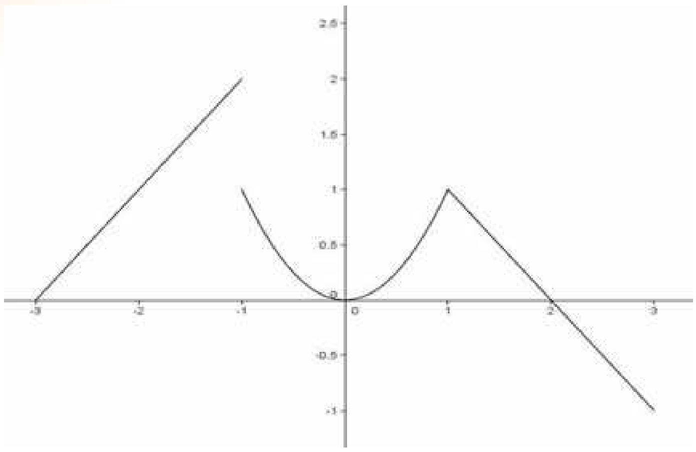
Gráficamente se comprueba que $\mathbf{x_0}$ es **máximo** si f(x) es **creciente a la izquierda** de $\mathbf{x_0}$ y **decreciente a la derecha** de $\mathbf{x_0}$**.**

Análogamente, $\mathbf{x_0}$ es **mínimo** si f(x) es **decreciente a la izquierda** de $\mathbf{x_0}$ y **creciente a la derecha** de $\mathbf{x_0}$**.**



Autoevaluación

Dada la siguiente gráfica, indica el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos o mínimos y si es continua:



a) D = [-3,2] I = [2,-1] Crecimiento -> (-3,-1) y (1,3) Decrecimiento -> (-1,0) y (0,1) Máximo -> x = 2 y x = 1 Mínimo -> x = -3 x = 0 y x = 3 No es continua en x = -1

b) D = [-3,3] I = [-1,2] Crecimiento ((-3,-1) y (0,1) Decrecimiento -> (-1,0) y (1,3) Máximo -> x = -1 Mínimo -> x = 0 y x = -1 Si es continua

c) D = [-3,3] I = [-1,2] Crecimiento -> (-3,-1) y (0,1) Decrecimiento -> (-1,0) y (1,3) Máximo -> x = -1 y x = 1 Mínimo -> x = -3 x = 0 y x = 3 No es continua en x = -1

Comprobar

Simetrías

Que una función tenga alguna simetría es una información valiosa a la hora de representar su gráfica, ya que nos indica una propiedad especial que posee la función y esto hace que podamos conocerla y estudiarla mejor.

Existen dos clases principales de **simetrías**: la simetría **respecto el eje OY** (vertical) o **función par** y la simetría **respecto el origen O** (origen de coordenadas)o **función impar**. Cada una de ellas se traduce en una propiedad específica de la función a la hora de representarla.

Una función es par si se cumple que: f(-x) = f(x) $\forall$ x $\in$ D, es decir, vale lo mismo en un punto x y en su opuesto -x.

Las funciones pares son simétricas respecto del eje vertical OY, esto es, la parte de la gráfica a la izquierda del eje OY es la imagen simétrica de la gráfica a la derecha del eje.

Análogamente podemos definir el concepto de función impar:

*Una función es **impar** si se cumple que: **f(-x) = -f(x)** $\forall$ x $\in$ D. (Notar el cambio de signo en el 2º miembro respecto de la definición anterior).*

*Las **funciones impares** son **simétricas respecto del origen de coordenadas O** ((x,f(x)), (-x,f(-x)) y el origen de coordenadas O **están alineados**.*

Veámoslo con unos ejemplos:

Ejemplo 1:

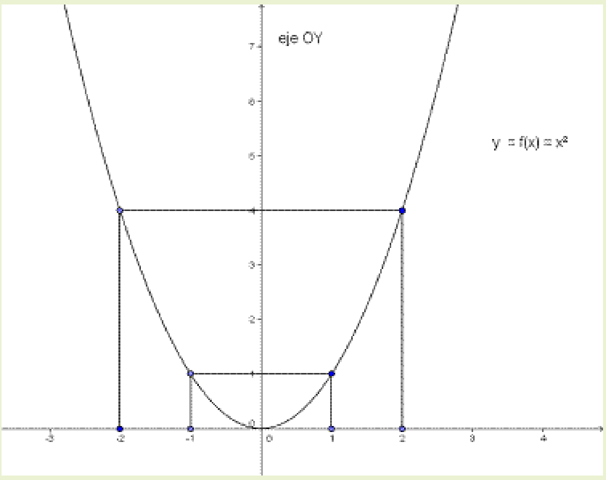
f(x) = x^2 es una **función par** (en efecto, por las propiedades de las potencias de exponente par que vimos en otro tema:

$(-x)^2 = x^2$ (f(-x) = f(x) para todos los valores de x.

$(-5)^2 = 5^2 = 25$

$(-11)^2 = 11^2 = 121$ .. ..

Su gráfica es:



Gráfica de f(x) = x^2

Como se observa en la gráfica, la función vale lo mismo en **x** que en **-x** y las dos partes de la gráfica son imágenes especulares o simétricas una de otra

Ejemplo 2:

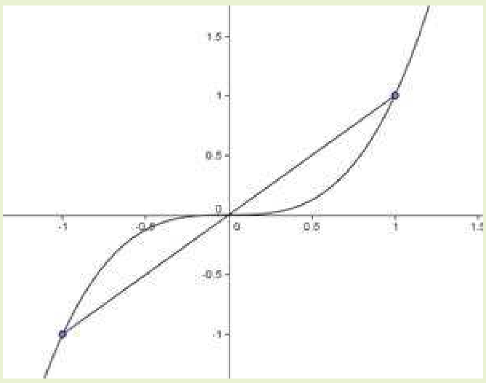
f(x) = x^3 es una **función impar** (por las mismas propiedades de los exponentes de grado impar:

$(-3)^3 = -27 = -3^3$

$(-2)^3 = -8 = -2^3$

($(-x)^3 = -x^3$ (f(-x) = -f(x)

Como se observa sobre la gráfica, (1,f(1)) (-1,f(-1)) y el origen O **están alineados**. Ocurre lo mismo con cualquier otra pareja de puntos de la gráfica.

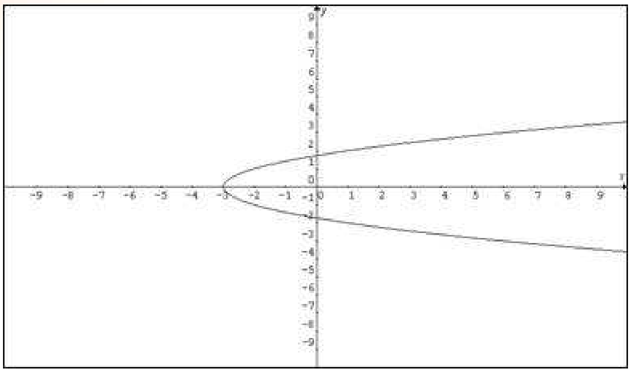


Gráfica de f(x) = x^3

Como se observa en los ejemplos anteriores, cuando trabajamos con funciones potenciales, las **funciones pare**s corresponden con **exponentes pares** y las **funciones impares** con **exponentes impares**. De hecho, el nombre de este tipo de funciones proviene precisamente de las funciones potenciales y sus propiedades se corresponden con las de los exponentes pares o impares de las potencias.

Autoevaluación

Determina si la siguiente función es continua:



a) Si, porque se puede dibujar de un único trazo

b) No, porque su dominio no es $\left(-\infty,+\infty\right)$

c) No, porque esta gráfica no corresponde a ninguna función.

Comprobar

Indica si la siguiente función es par o impar: $f(x) = x^4 + 3x^2$

a) Es impar: el coeficiente 3 es impar

b) Es una función par: $(-x)^4 + 3(-x)^2 = x^4 + 3x^2$ por las propiedades de los exponentes pares

c) Es una función par porque está formada por un número par de términos

Comprobar

Indica si la siguiente función es par o impar: $f(x) = x^3 + x^2$

a) No es ninguna de las dos cosas: por ejemplo à $f(-1) \neq f(1)$ y $f(-1) \neq -f(1)$

b) Es par, porque tiene un número par de términos

c) Es impar, porque tiene un exponente impar.

Comprobar

Funciones

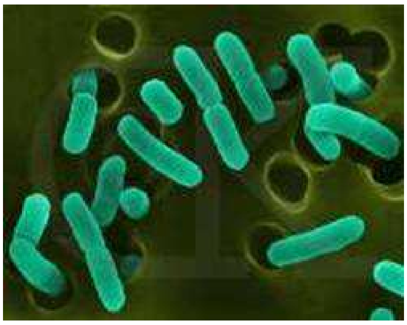
Funciones elementales

El apartado anterior te ha presentado las propiedades y conceptos generales más importantes asociados a las funciones. En este apartado pretendemos que conozcas las funciones concretas más importantes y básicas que se utilizan en el mundo real para la comprensión de distintos fenómenos y en la resolución de problemas, utilizando lo que has aprendido anteriormente.

Existen innumerables tipos de funciones y lógicamente sería imposible tratarlas todas. Cualquier descripción de las funciones debe empezar siempre por las funciones elementales, que no sólo son las más sencillas sino que también son las más importantes, ya que su estudio permite avanzar y profundizar en los conocimientos necesarios para entender todas las demás funciones.

Las funciones más elementales son las polinómicas, es decir, aquellas cuya fórmula es un polinomio. Al ir aumentando el grado del polinomio, aumenta la complejidad. Así, las más sencillas son las funciones polinómicas de grado 1, que reciben el nombre genérico de **rectas**. A continuación, las funciones polinómicas de 2º grado reciben el nombre de **parábolas** y aparecen en muchos procesos físicos describiendo la trayectoria de objetos: por ejemplo, un balón que es golpeado describe un arco de parábola o el lanzamiento de un obús por un cañón recibe el nombre de *tiro parabólico*, porque el obús describe una parábola en su trayectoria. En general, cualquier objeto con una velocidad inicial al que se le deja actuar bajo el efecto de la gravedad tiene una trayectoria parabólica

Un tipo especial de funciones son las racionales, es decir, cocientes de funciones polinómicas. Veremos las más sencillas, cociente de dos funciones polinómicas de 1º grado, que se conocen con el nombre de **hipérbolas.** Por último, nos detendremos en dos tipos especialmente importantes de funciones, las **exponenciales y logarítmicas**, que aparecen en una gran cantidad de procesos físicos y naturales e incluso en el ámbito económico: por citar un ejemplo, el crecimiento del nº de bacterias en un cultivo de laboratorio es del tipo exponencial, suponiendo que las bacterias se reproducen por bipartición.



Funciones polinómicas de 1er grado.

El ejemplo siguiente nos puede servir adecuadamente para introducir el concepto de función polinómica de primer grado.

Ejemplo:

Un fontanero cobra por su trabajo a razón de 6 € por desplazamiento y 15 € por hora de trabajo realizado (no contamos reposición de piezas)

Es lógico pensar que existe una relación entre el tiempo en horas de trabajo que realiza el fontanero y el importe en euros percibido por el mismo.

Llamemos **x** a la magnitud horas de trabajo e **y** a la magnitud dinero percibido por el mismo. Una sencilla tabla de valores nos muestra cómo se produce esa relación

x(h)	1	2	3	4	5
y(€)	21	36	51	66	81

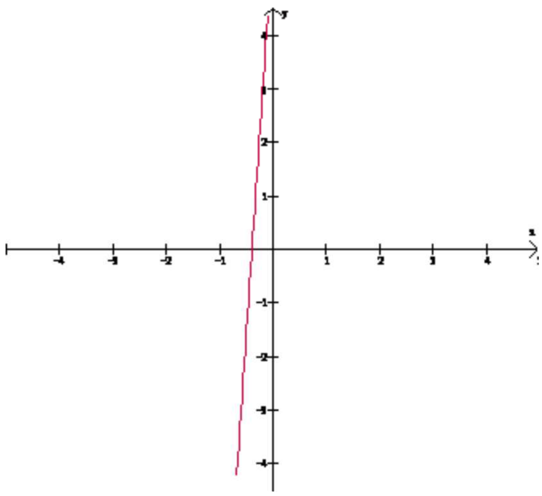
Seguramente tendrás localizada ya la ley matemática que te permite conocer el importe **y** del trabajo realizado por el fontanero en función del tiempo **x** (horas) que ha tardado en realizarlo:

$$y = 15 \cdot x + 6$$

Observa que la relación viene dada por una función que utiliza un polinomio de primer grado en la variable independiente x.

*Una **función polinómica de primer grado** es una función real de variable real definida utilizando un polinomio de primer grado en la variable independiente; por tanto de la forma:*

$$y = a \cdot x + b \quad con \quad a, b \in R \quad y \quad a \neq 0$$



Si llevamos los puntos de la relación (función) de nuestro ejemplo al plano coordenado y unimos dichos puntos, observamos que la relación tiene por **representación gráfica una recta en el plano.**

Todas las funciones polinómicas de 1er grado tienen por representación gráfica una recta, creciente o decreciente tal y como se establece en **las propiedades de la función polinómica de 1er grado:**

Propiedades de la función y = a·x + b

1. Tiene por dominio todos los números reales. Es evidente, puesto que esa fórmula no tiene problemas para ningún número real x.
2. Corta a los ejes de coordenadas en los puntos:

Eje OY: si x = 0 $\Rightarrow$ y = a·0 + b $\Rightarrow$ y = b, siendo el punto (0 , b).

Eje OX: si y = 0 $\Rightarrow$ 0 = a·x + b $\Rightarrow$ $x = -\dfrac{b}{a}$, siendo el punto $\left(-\dfrac{b}{a}, \mathbf{0}\right)$.

3. Es creciente en todo su dominio si a >0.

Es decreciente en todo su dominio si a <0.

4. Su recorrido o imagen son todos los números reales.
5. Es continua en todo su dominio.

Cuando el número a = 0, lógicamente no se trata de una función polinómica de grado 1. En este caso recibe el nombre de función constante y = b.

Cuando **b = 0**, la función polinómica de 1er grado recibe el nombre de **función lineal**, que ya conoces de la unidad 2 por ser la función que establece la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales.

En general, la función **y = a·x + b** recibe el nombre de **función afín**.

Los dos números reales que la determinan tienen su denominación especial:

El número **a** es el responsable de la inclinación y se le denomina **pendiente de la recta.**

El número **b**, como marca la altura a la que pasa la recta por el eje de ordenadas (para x = 0), recibe el nombre de **ordenada en el origen**.

Como ya sabes de la unidad anterior de geometría, dos rectas con la misma pendiente son paralelas.

Ejemplo:

Estudia las propiedades y representa la función y = -2x + 3

Según lo que hemos aprendido, esta recta tiene las siguientes propiedades:

1. Tiene por **dominio** todos los números reales. Su **imagen** también y lo veremos de forma clara con su representación al

final del ejemplo.

2. **Corta a los ejes** en

Eje OY: x = 0 ⇒ y = 3 Por tanto pasa por (0 , 3)

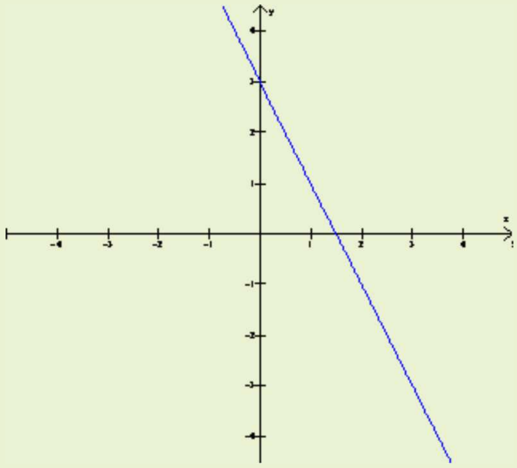
Eje OX: y = 0 ⇒ 0 = -2x + 3 ⇒ $x = \frac{3}{2}$ Pasa por tanto por $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Estos dos puntos de corte son suficientes para representar la recta (si la función es lineal, corta en (0 , 0) y se necesitará cualquier otro punto para hacer su representación).

3. a = -2 es por tanto una función decreciente en todo su dominio.

4. Es continua en todo su dominio.

5. Su representación gráfica, usando los dos puntos de corte con los ejes coordenados (es suficiente con dos puntos para representar una recta) es



Para saber más

[La función afín]

[La función afín [2]]

Autoevaluación

Una compañía de telefonía móvil cobra la llamada de la forma siguiente: 5 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 12 céntimos de euro por cada minuto o fracción de minuto de tiempo de llamada.

Determina la función que establece el importe de la llamada en euros en función de los minutos de duración de la misma.

a) y = 12·x + 5
b) y = 0,12·x + 0,05
c) y = 1,2·x + 0,5
d) y = 12·x + 0,5

Comprobar

Determina el punto de corte con el eje de abscisas (OX) de la función y = 2,7·x - 4,8.

a) (1,77 , 0)
b) (0 , 1,47)
c) (0 , 1,77)
d) (1,47 , 0)

Comprobar

Funciones polinómicas de 2º grado

La función afín es una de las más fáciles de conocer y aplicar, sin embargo muchos fenómenos se expresan a través de otros tipos de funciones reales de variable real.

Observa el ejemplo siguiente.

Ejemplo

El departamento de ventas de una determinada empresa que fabrica un producto, establece que el beneficio obtenido al fabricar n artículos de dicho producto viene dado por la expresión $b = -2n^2 + 60n - 250$.

Una de las cuestiones más importantes que se plantea la empresa es la de **optimizar** la producción, es decir, averiguar qué cantidad de artículos debe fabricar la empresa para que ese beneficio sea máximo.

El conocimiento de esta función permitirá resolver esa cuestión y algunas más.

En la función del ejemplo la relación entre la variable dependiente b y la independiente n, se establece mediante un polinomio de 2º grado en ésta última.

Una función polinómica de segundo grado es una función real de variable real definida utilizando un polinomio de segundo grado en la variable independiente; por tanto de la forma:

$$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \quad con \quad a, b, c \in R \quad y \quad a \neq 0$$

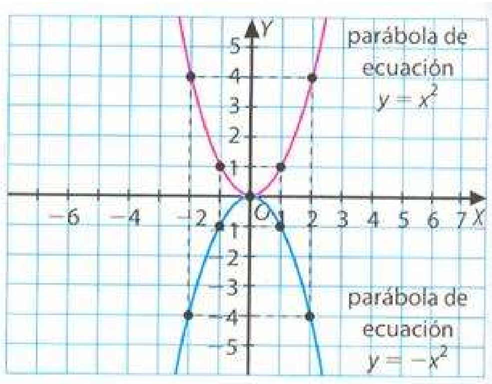
La función polinómica de 2º grado recibe también el nombre de **función cuadrática.**

Su **representación gráfica** característica es una **parábola**, cuyos elementos describiremos en esta sección.

Las funciones cuadráticas más simples son las llamadas parábolas básicas $\mathbf{y = x^2}$ e

$\mathbf{y = -x^2}$.

Las dos son **funciones pares** cuya representación es muy sencilla utilizando unos pocos valores tal y como vemos en el gráfico adjunto.



Las particularidades de la parábola se observan en dicho gráfico:

Cada una tiene un tramo ascendente (creciente) y otro descendente (decreciente).

Las dos tienen un punto especial en el que se produce el cambio ascendente-descendente o viceversa, ese punto recibe el nombre de **vértice de la parábola** (V).

Las dos tienen una recta vertical respecto de la cual sus ramas son simétricas, en los dos casos esa recta es el eje de ordenadas y recibe el nombre de **eje de simetría de la parábola**.

El vértice es el **punto mínimo** en una de ellas y el **punto máximo** en la otra.

Todas las funciones cuadráticas tienen los elementos que hemos citado anteriormente y que constituyen sus señas de identidad o propiedades.

Propiedades de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$

1. Su dominio son todos los números reales.
2. Corta a los ejes de coordenadas en:

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = c \Rightarrow$ corta en el punto (0 , c)

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$. Como ya sabes, esta ecuación puede tener dos, una o ninguna solución por tanto la parábola puede cortar al eje OX en dos puntos, un punto o en ningún punto dependiendo de las soluciones de dicha ecuación.

3. El Vértice (V)

se encuentra localizando su abscisa que está en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

La ordenada se obtiene sustituyendo ese valor de x_0 en la fórmula de la misma.

Si a >0 V es el punto mínimo de la parábola

Si a <0 V es el punto máximo de la parábola

4. Eje de simetría de la parábola es la recta vertical que pasa por el vértice (V)

Esta es la recta respecto de la cual la parábola es simétrica (cada punto de la misma tiene otro simétrico en ella respecto de esta recta).

Su ecuación es $x = -\frac{b}{2a}$

5. Recorrido o imagen de la función cuadrática.

Si llamamos $V(x_0 , y_0)$ a las coordenadas del vértice de la parábola, el recorrido es:

Si V es mínimo $(y_0 , +\infty)$

Si V es máximo $(-\infty , y_0)$

Para realizar el gráfico de la función, junto con los elementos que nos ha dado el estudio de sus propiedades, podemos ayudarnos de una pequeña tabla de valores adecuadamente escogidos.

Ejemplo:

Estudia y representa la función **$y = x^2 - 2x - 3$**

Seguimos el orden establecido en la descripción de sus propiedades

1. Su **Dominio** son todos los números reales.

2. **Puntos de corte** con los ejes de coordenadas.

Eje OY: x = 0 → y= -3 Corta en el punto (0 , -3).

Eje OX: y = 0 → $x^2 - 2x - 3 = 0$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Obtenemos dos soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$.

Corta al eje OX en los puntos (-1 , 0) y (3 , 0)

3. El **vértice** se encuentra en abscisa

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

La ordenada se encuentra sustituyendo este valor en la fórmula de la función:

$y_0 = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = -4$

Como a = 1 >0 , V es **mínimo** y tiene por coordenadas V(1 , -4)

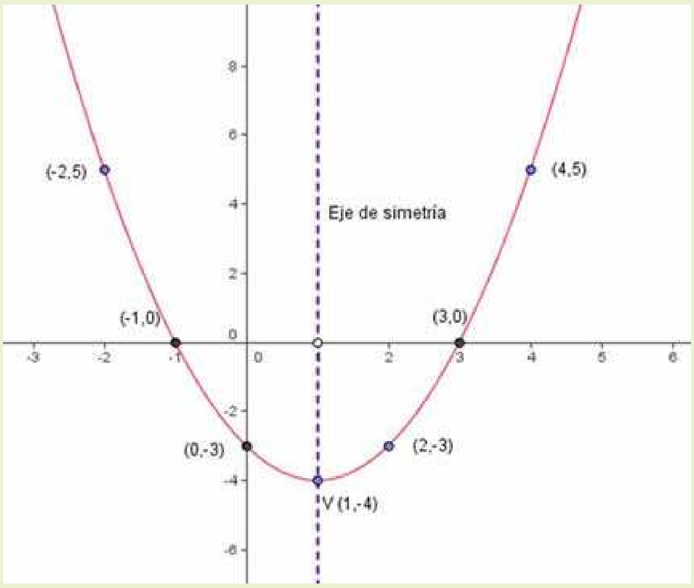
4. El **eje de simetría** es la recta x = 1

5. **recorrido o imagen** de esta parábola es el intervalo

$(-4 , +\infty)$

6. Su **gráfica** la construimos situando en el sistema de ejes cartesianos los elementos que hemos obtenido en el estudio de sus propiedades. Además, podemos utilizar una pequeña tabla de valores, escogidos con sentido común:

Como la parábola es simétrica respecto de su eje, **todos los**



Gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$

valores de la variable x que equidisten del eje de simetría tendrán la misma imagen y, por ello es suficiente con dar algún valor teniendo en cuenta este hecho:

x	y
0	-3
2	-3
-2	5
4	5

Cuando la parábola tiene un solo punto de corte con el eje de abscisas, éste además coincide con su Vértice.

Así ocurre por ejemplo con la función y = $3x^2 + 6x + 3$, pasa por el punto (-1 , 0) y además este punto es el vértice mínimo de esta parábola:

$x_0 = -\frac{6}{2 \cdot 3} = -1$ y sustituyendo en la fórmula $y_0 = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 8 - 1) + 3 = 0$

Para saber más

La función cuadrática

La función cuadrática [2]

Autoevaluación

Determina el vértice de la función y = $-x^2 - 2x + 3$

a) V(2 , -4)
b) V(-2 , 4)
c) V(-1 , 4)
d) V(-1 , -4)

Comprobar

La altura alcanzada por un balón que es lanzado hacia arriba viene dada por la función f(t) = $-5t^2 + 15t$, donde f se mide en metros y t en segundos.

Determina la altura a la que se encuentra a los 3 segundos.

a) 0 m
b) 2 m
c) 1,5 m
d) 3 m

Comprobar

Con los datos del ejercicio 2, determina el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima y dicha altura.

a) 1 sg y 10 m
b) 1,5 sg y 10 m
c) 1 sg y 11,25 m
d) 1,5 sg y 11,25 m

Comprobar

Funciones racionales de 1º grado: hipérbolas.

En la unidad nº 2 de proporcionalidad de magnitudes has estudiado la relación existente entre dos magnitudes inversamente proporcionales.

Recuerda que si X e Y son dos magnitudes inversamente proporcionales con constante de proporcionalidad inversa K, entonces cualquier par de valores asociados a ambas, x e y, verifican que $x \cdot y = k$, o bien si despejamos una de ellas en función de la otra, tendremos la expresión de una función real de variable real $y = \frac{k}{x}$ que recibe el nombre de función de proporcionalidad inversa y cuya gráfica se denomina **hipérbola**.

En esta sección nos dedicaremos al conocimiento de las funciones cuya gráfica es una hipérbola y que tienen su representante básico en la función de proporcionalidad inversa. Todas provienen del cociente de dos polinomios de primer grado.

Se llama función racional de 1er grado a toda función real de variable real definida mediante el cociente de dos polinomios de 1er grado en la variable independiente x:

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad con\ a,b,c,d \in R$$

La gráfica de este tipo de funciones recibe el nombre de hipérbola. Se caracteriza por tener dos rectas asíntotas perpendiculares entre sí, una horizontal y otra vertical, que se denominan **asíntotas de la hipérbola**.

La función $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ puede ser descompuesta con la ayuda de la división polinómica en función de otra racional con el numerador constante como veremos más adelante.

Por ello dividiremos nuestro estudio en dos partes correspondientes a las formas más sencillas de este tipo de funciones

Hipérbola de tipo y = k/(x - a)

Es la función racional con numerador constante y denominador tipo factor polinómico simple (x-a).

Propiedades de la función $y = \frac{k}{x-a}$

1. Su dominio son todos los números reales excepto x = a

$$D = R - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

2. Los puntos de corte con los ejes son:

Eje OY: x = 0 $\Rightarrow \quad y = \frac{k}{-a} = -\frac{k}{a} \quad \Rightarrow$ *Corta en el punto* $\left(0, -\frac{k}{a}\right)$

Eje OX: y = 0 $\Rightarrow \quad \frac{k}{x-a} = 0 \quad \Rightarrow$ *no tiene solución* $\Rightarrow$ *No corta al eje OX.*

3. Ejes o asíntotas de la hipérbola, son las rectas vertical y horizontal a las que se "pegará" la función sin tocarlas nunca.

La asíntota vertical es la recta x = a, que viene determinada por el punto que está fuera de Dominio.

La asíntota horizontal en este caso es el eje de abscisas, y = 0, puesto que la función no lo corta.

4. En cuanto a su monotonía (crecimiento y decrecimiento), se comporta igual que la función de *proporcionalidad inversa dependiendo del signo de k:*

Si k >0 la función es decreciente en todo su dominio.

Si k <0 la función es creciente en todo su dominio

*Para comprender mejor este apartado puedes utilizar una tabla de valores. Observarás fácilmente si crece o decrece en cada uno de los dos casos (k*mayorque*0 o k*menorque*0).*

5. Con el gráfico hecho verás claramente el recorrido de la función. El único número real y que no forma parte del recorrido viene determinado por la asíntota horizontal.

El recorrido de la función es: $\mathbf{Re}\,corrido = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Ejemplo

Estudia y representa la función

$$y = \frac{3}{x-2}$$.

Como tenemos en sus propiedades, esta función tiene:

1. Como **dominio** tiene:

$$D = R - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

.

2. Corta a los ejes en los puntos

Eje OY:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{-2} \Rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow \frac{3}{x-2} = 0 \Rightarrow$

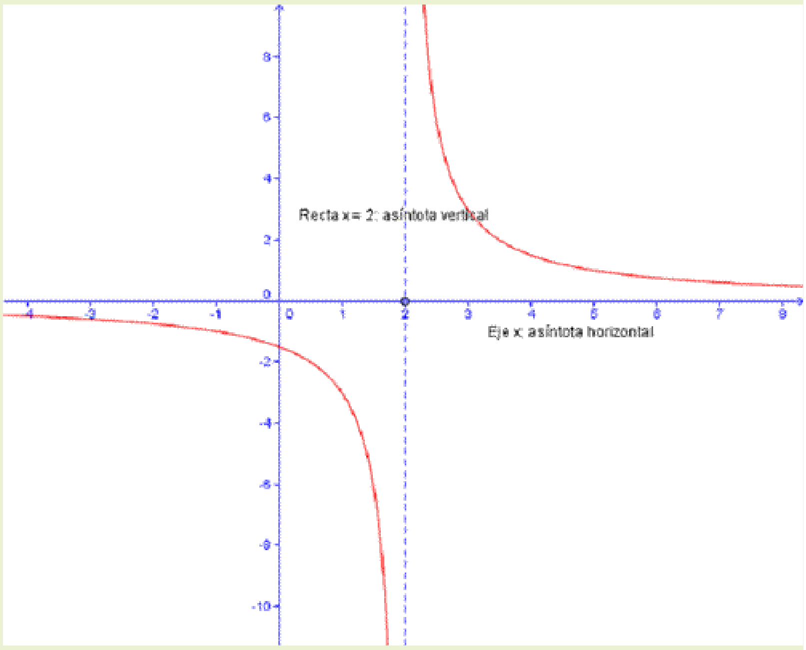
no tiene solución real. No corta al eje OX

3. Sus **ejes o asíntotas** son

Asíntota vertical **x = 2**.

Asíntota horizontal **y = 0** (eje OX).

4. Esta función es **decreciente** en todo su dominio por tener k = 3 >0.



Gráfica de $y = \frac{3}{x-2}$

5. Su **recorrido** es $\mathbf{Re}\,c = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Finalmente, con la ayuda de algunos puntos auxiliares obtenemos su gráfica.

Ejemplo

Estudia y representa la función

$$y = \frac{-2}{x+1}$$.

Como tenemos en sus propiedades, esta función tiene:

1. Como **dominio** tiene:

$$D = R - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$.

2. Corta a los ejes en los puntos

Eje OY:

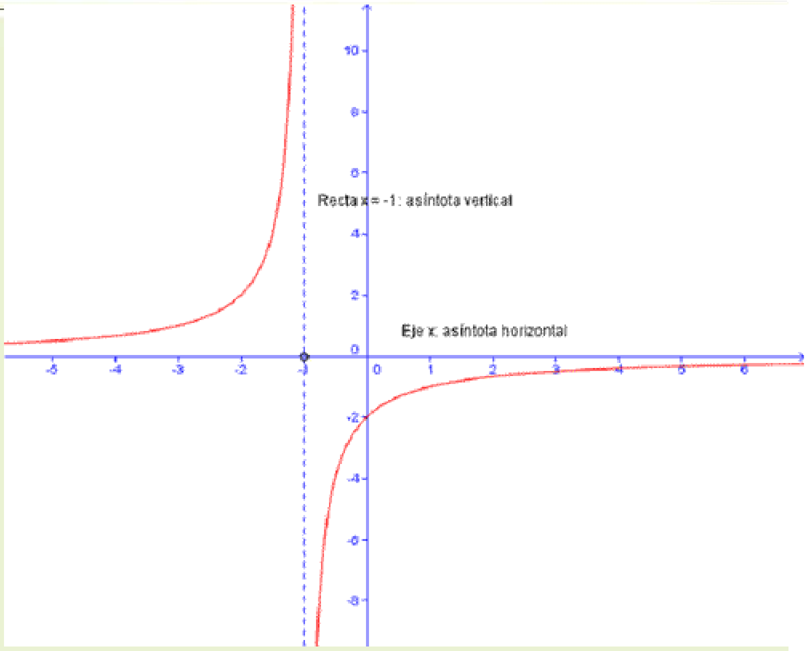
$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow (0, -2)$$

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1} = 0 \Rightarrow$ no tiene solución real. No corta al eje OX

3. Sus **ejes o asíntotas** son

Asíntota vertical **x = -1**.

Asíntota horizontal **y = 0** (eje OX).



Gráfica de $y = \frac{-2}{x+1}$

4. Esta función es **creciente** en todo su dominio por tener k = -2 <0.

5. Su **recorrido** es $\mathrm{Rec} = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Finalmente, con la ayuda de algunos puntos auxiliares obtenemos su gráfica.

Autoevaluación

Determina los puntos de corte con los ejes de la función $y = \frac{-3}{x-3}$

a) (-1 , 0) y (3 , 0)
b) (0 , 1)
c) (0 , 1) y (3 , 0)
d) (0 , 1)

Comprobar

Determina las asíntotas de la función $y = \frac{1}{x+4}$

a) x = 4 , y = 0
b) x = 0 , y = 4
c) x = - 4 , y = 0
d) x = 0 , y = -4

Comprobar

Hipérbola de tipo y = b + k/(x - a)

Estas hipérbolas cumplen las mismas propiedades que las anteriores con una pequeña diferencia, su **asíntota horizontal** queda desplazada de el eje OX a la recta marcada por la constante b: **y = b**.

También vemos en el resumen de sus propiedades que en este caso si hay punto de corte con el eje OX

Propiedades de la función $y = b + \dfrac{k}{x-a}$

1. Su dominio son todos los números reales excepto x = a

$$D = R - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

2. Los puntos de corte con los ejes son:

Eje OY: x = 0 $\Rightarrow \quad y = b + \dfrac{k}{-a} = c \quad \Rightarrow$ *Corta en el punto* $(0, c)$

Eje OX: y = 0 $\Rightarrow \quad b + \dfrac{k}{x-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a - \dfrac{k}{b} = m \quad \Rightarrow \quad (m, 0)$

3. Ejes o asíntotas de la hipérbola, son las rectas vertical y horizontal a las que se "pegará" la función sin tocarlas nunca.

La asíntota vertical es la recta x = a, que viene determinada por el punto que está fuera de Dominio.

La asíntota horizontal en este caso es el eje de abscisas, y = b.

4. En cuanto a su monotonía (crecimiento y decrecimiento), se comporta igual que la función de proporcionalidad inversa dependiendo del signo de k:

Si k >0 la función es decreciente en todo su dominio.

Si k <0 la función es creciente en todo su dominio

*Para comprender mejor este apartado puedes utilizar una tabla de valores. Observarás fácilmente si crece o decrece en cada uno de los dos casos (k*mayorque*0 o k*menorque*0).*

5. Con el gráfico hecho verás claramente el recorrido de la función. El único número real y que no forma parte del recorrido viene determinado por la asíntota horizontal.

El recorrido de la función es: $\text{Recorrido} = R - \{b\} = (-\infty, b) \cup (b, +\infty)$

Ejemplo:

Estudio y representa la función $y = 1 + \frac{2}{x+3}$

1. Su **dominio** es $D = R - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

2. Los **puntos de corte con los ejes**

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(0, \frac{5}{3}\right)$

Eje OX:

$$y = 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x+3} = -1 \Rightarrow \frac{x+3}{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 3 = -2 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow (-5, 0)$$

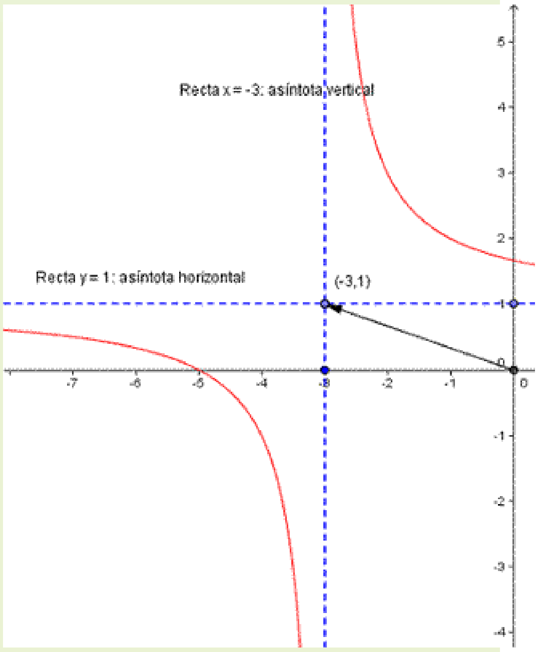
3. Sus **asíntotas** son las rectas

Asíntota vertical: x = -3. Asíntota horizontal: y = 1

4. Esta función tiene **k = 2 >0**, por tanto es una hipérbola **decreciente** en todo su dominio.

5. Su **recorrido** es $\text{Rec} = R - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

También podemos ayudarnos de algunos puntos concretos para realizar mejor su representación gráfica



Gráfica de $y = 1 + \frac{2}{x+3}$

El estudio de estos dos casos, nos permite conocer cualquier tipo de función racional de primer grado, $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

*La **división polinómica** muestra fácilmente como cualquier función de este tipo puede expresarse de la forma* $y = b + \frac{k}{x-a}$

Comprendido este hecho, queda completo nuestro estudio de la hipérbola como función real de variable real

El ejemplo siguiente nos recuerda como se hace dicha descomposición, cuyo fundamento es la **prueba de la división**

Ejemplo:

Hacemos la descomposición de la función $y = \frac{2x+1}{x+1}$

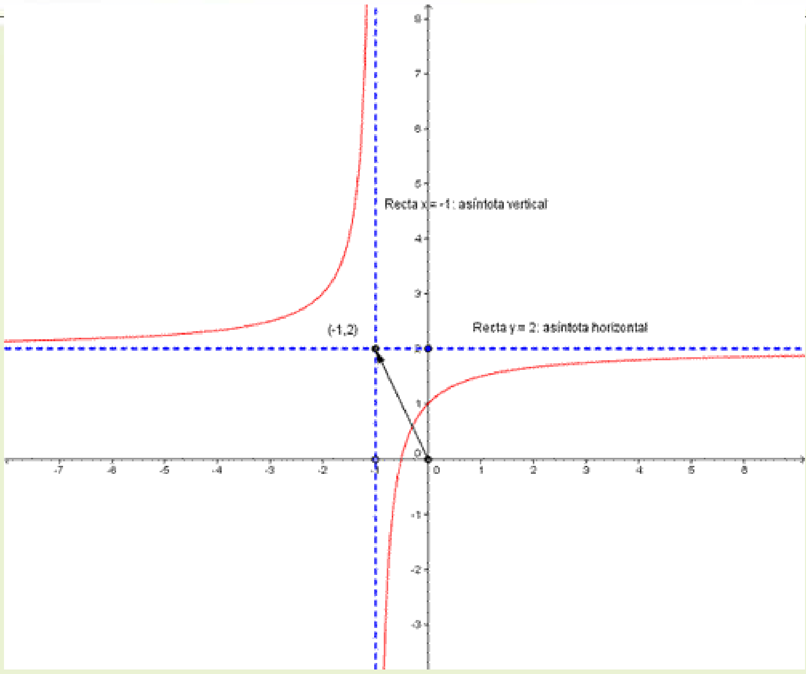
Realizamos la división polinómica (es posible al tener los dos polinomios el mismo grado)

$$\begin{array}{rr|l} 2x & +1 & x+1 \\ \cline{3-3} -2x & -2 & 2 \\ \cline{1-2} & -1 & \end{array}$$

La prueba de la división nos permite expresar

$$y = \frac{2x+1}{x+1} = 2 + \frac{-1}{x+1},$$

función que ya hemos aprendido a estudiar anteriormente.



Gráfica de $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Para saber más

La hipérbola

Autoevaluación

Halla el valor de la constante que determina el crecimiento o decrecimiento de la función $y = \frac{3x-1}{4x+3}$

a) $k = -\frac{13}{4}$

b) $k = \frac{11}{4}$

c) $k = -\frac{5}{4}$

d) $k = -\frac{3}{4}$

Comprobar

Determina las asíntotas de la función $y = \frac{15x-3}{3x-1}$

a) $x = \frac{1}{3}$, $y = 0$

b) $x = \frac{1}{3}$, $y = 5$

c) $x = -\frac{1}{3}$, $y = 0$

d) $x = -\frac{1}{3}$, $y = 5$

Comprobar

Funciones exponencial y logarítmica

Existen poblaciones en la naturaleza cuyo crecimiento no puede ser expresado de forma proporcional al tiempo. Este crecimiento se produce tan rápido (o tan lento) que depende de cálculos exponenciales en función de un número concreto y por supuesto del tiempo.

El tipo de funciones que rige este tipo de crecimiento se denominan **"funciones exponenciales"** cuyo estudio realizamos en este apartado.

Así mismo, algunos fenómenos requieren del uso de expresiones logarítmicas para su representación y conocimiento, dependen de **"funciones logarítmicas"** cuyo estudio y propiedades analizaremos aquí por estar muy relacionados con las exponenciales.

Por último debes saber que este tipo de cálculos (y por tanto sus funciones asociadas) también forman parte del mundo financiero: el capital obtenido al invertir cualquier cantidad a un determinado interés viene expresado por una función exponencial como veremos más adelante.

Para entender mejor esta sección, debes recordar las propiedades del cálculo con potencias y también las que rigen el uso de logaritmos que aprendiste en la unidad número 1.

La función exponencial

Comenzamos con el estudio y propiedades de la función exponencial básica.

Sea $a \in R$ y $a > 0$, se define la función exponencial de base a de la forma siguiente

y = f(x) = a^x con $a \neq 1$.

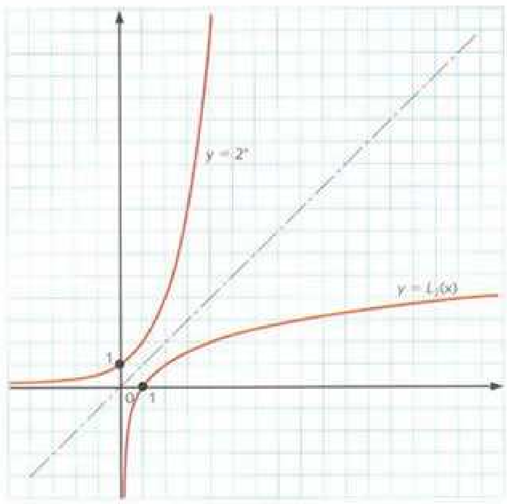
Son funciones en las que la variable independiente x se presenta en el exponente de una potencia de base constante a.

El caso a = 1 es irrelevante porque la función correspondiente sería constante y = 1.

La gráfica de este tipo de funciones es muy sencilla. Con una tabla de valores se observa rápidamente su comportamiento.

Crece o decrece dependiendo del número **a** tal y como se observa en el gráfico adjunto correspondiente a la representación de

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = 2^x$



Gráficas de $y = 2^x$ e $y = \log_{1/2} x$

Propiedades de la función exponencial $y = a^x$.

1. Su dominio es D = R

2. Su recorrido es $\mathbf{Re}c = (0, +\infty)$ puesto que $a^x > 0 \quad \forall x \in R$

3. Corta al eje OY en el punto (0 , 1) puesto que $a^0 = 1$ sea cual sea el número a.

No corta al eje OX, la ecuación $a^x = 0$ no tiene solución real.

De hecho, la recta y = 0 (eje OX) es una asíntota horizontal para esta función.

4. En cuanto a su monotonía verifica:

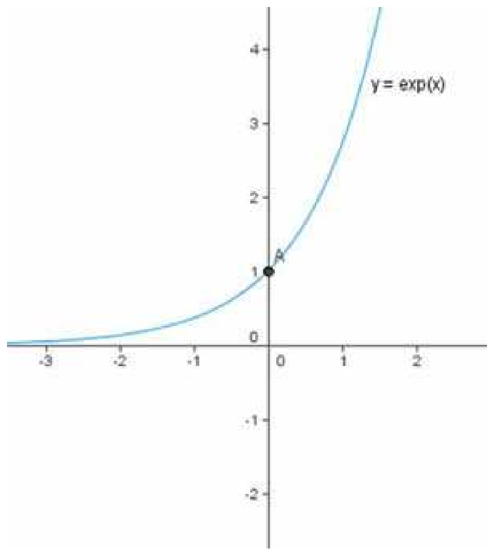
Si a >1 la función es creciente en todo su dominio.

Si a <1 la función es decreciente en todo su dominio

5. Su gráfica es continua en todo su dominio.

Una de las funciones más importantes en el mundo de las matemáticas es la función exponencial de base el **número e** $(e \approx 2{,}718281\ldots)$,

y = e



Gráfica de $y = e^x$

La función exponencial más general es de la forma $f(x) = k \cdot a^x$ en la que el número real k representa las condiciones físicas iniciales del problema sujeto a estudio.

Ejemplo:

Una determinada bacteria se reproduce por bipartición cada minuto. En un cultivo de laboratorio introducimos 15 bacterias.

Determina la función que establece el número de bacterias que tendrá el cultivo en función del tiempo transcurrido en minutos y calcula cuántas bacterias habrá a los 10 minutos.

La reproducción depende de potencias de base 2 (bipartición), en función del tiempo en minutos, con una constante inicial (tiempo t = 0)

La función será $f(t) = 15 \cdot 2^t$ con t en minutos y f(t) el número de bacterias que tendrá el cultivo alcanzado ese tiempo.

Para t = 10 minutos habrá $f(10) = 15 \cdot 2^{10} = 15360$ bacterias.

Para saber más

La función exponencial

Autoevaluación

La fórmula $C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$ nos da el capital, C, producido al cabo de t años por un capital inicial, C_0, a un interés compuesto del i %. ¿Qué capital habrá producido un depósito de 5000 € en un banco a un interés compuesto del 3,5 % durante 5 años?

a) 5789,45 €
b) 6879,56 €
c) 6458,75 €
d) 5938,43 €

Comprobar

Una determinada sustancia radiactiva se desintegra perdiendo la mitad de su masa cada 15 minutos. Calcula la sustancia que quedará transcurrida una hora si inicialmente había 320 g de dicha sustancia.

a) 10 g
b) 20 g
c) 30 g
d) 40 g

Comprobar

La función logarítmica

La resolución de problemas con funciones exponenciales requiere en algunas ocasiones de la necesidad de despejar la incógnita del exponente de dicha expresión exponencial.

Por ejemplo, la solución de la ecuación $2^x = 9$ no tiene solución directa (9 no es potencia entera o racional de base 2). La resolución exige el uso de logaritmos como ya sabes: $x = \log_2 9 \approx 3{,}169925...$

Se precisa del conocimiento de las funciones que utilizan expresiones logarítmicas, que tienen una relación muy importante con las funciones exponenciales como veremos más adelante.

Sea a un número real positivo (a >0), se define la función logaritmo en base a como la función real de variable real que a cada número real x le hace corresponder su logaritmo en dicha base a.

Por tanto su fórmula será: $y = \log_a x$ o bien $y = L_a x$

Es importante que recuerdes las propiedades de los logaritmos que aprendiste en la unidad 1, en ellas se fundamentan las propiedades de esta función.

Propiedades de la función $y = \log_a x$

1. El logaritmo no está definido para 0 ni para números negativos.

Su dominio es $D = (0, +\infty)$

2. De la propiedad anterior se deduce que no corta al eje OY (x = 0).

Corta al eje OX en el punto (1 , 0) puesto que $\log_a 1 = 0$ para cualquier número real a >0.

3. Su recorrido es $\mathrm{Rec} = R = (-\infty, +\infty)$

4. En cuanto a su monotonía verifica:

Si a >1 la función es creciente en todo su dominio.

Si a <1 la función es decreciente en todo su dominio

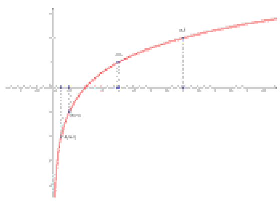
5. Su gráfica es continua en todo su dominio.

La gráfica de la función se construye mejor utilizando una tabla de valores:

Representamos la función $y = \log_2 x$, con la ayuda de las propiedades anteriores y de la siguiente tabla de valores que utiliza números potencias de base 2 para que su cálculo de imagen sea directo

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

Gráfica de $y = \log_2 x$



Pulsa sobre la imagen para ampliarla

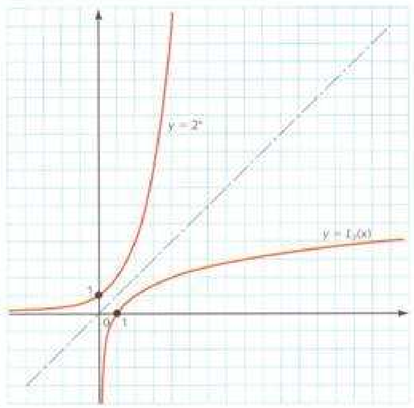
Las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$ tienen una relación muy importante:

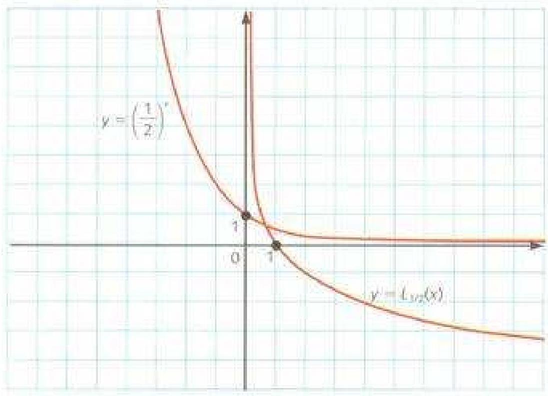
*son **funciones inversas**, esto significa que al aplicarlas consecutivamente a un número real x obtenemos dicho número, independientemente del orden en que lo hagamos:*

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^x = x$$

Esta relación gráficamente significa que sus representaciones son **simétricas respecto de la bisectriz del 1er- 3er cuadrante (recta y = x)** como muestran los gráficos adjuntos:





Gráficas de $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$

Gráficas de $y = (1/2)^x$ e $y = \log_{1/2} x$

La relación anterior es la que se aplica para despejar la incógnita del exponente en aquellos problemas en los que sea necesario.

Ejemplo:

¿Cuánto tiempo tarda una célula que se divide en 2 cada hora en llegar al millón de células?

La función que establece el número de células que habrá en función del tiempo x en horas es $y = 1 \cdot 2^x$

Queremos calcular el valor de x para el que y = 1000000

$1000000 = 2^x$

Utilizando la relación con la función $y = \log_2 x$, tendremos que

$x = \log_2 1000000$.

La calculadora no tiene logaritmos en base 2, por tanto debemos utilizar la fórmula del cambio de base:

$$\log_2 1000000 = \frac{\log 1000000}{\log 2} = \frac{6}{0{,}30103} = 19{,}93 \ \textit{horas}$$

Aproximadamente 19 horas y 55 minutos.

Para saber más

La función logarítmica

Autoevaluación

El capital producido al invertir 1000 € a un interés anual de un 4% viene dado por la expresión $C = 1000 \cdot (1+0{,}04)^t$, siendo t el tiempo expresado en años. Determina los años que deben transcurrir para que el capital sea de 1480,24 €.

a) 8 años
b) 20 años
c) 10 años
d) 15 años

Comprobar

Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad que queda al cabo de de t horas en el organismo viene dada por la función $y = 10 \cdot 0{,}8^t$.. Determina el tiempo que debe transcurrir desde la ingesta del medicamento para que la dosis inicial se reduzca a la mitad.

a) 3 horas y 6 minutos
b) 7 horas y 24 minutos
c) 10 horas y 30 minutos
d) 4 horas y 15 minutos

Comprobar