Introducción

La Probabilidad es la rama de la Matemática que se encarga del estudio de todos aquellos procesos en los que interviene el azar. Por definición el azar es aquello que no se puede predecir, con lo que queda claro la enorme dificultad de la tarea que se pretende. Debemos olvidarnos en esta unidad del concepto de *certeza*, que es inherente al propio saber matemático. A partir de aquí, no podemos estar seguros de nada: todo es aproximado o más concretamente, probabilístico. Esta situación nueva es buena, ya que contrarresta la idea muy arraigada de que las Matemáticas son ciencias exactas. Al menos en esta rama, los resultados obtenidos son exactos sólo en términos probabilísticos, no en términos absolutos.

Cuando decimos que la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$, **no queremos** decir que *exactamente* 1 de cada 2 veces vaya a salir cara al lanzar la moneda. Esta afirmación debe entenderse en como una idealización, es decir, que en promedio, si se repitiera **muchas veces** el mismo experimento (teóricamente, si se repitiera infinitas veces), la proporción de caras sería la mitad, y lo mismo para las cruces.

Hay que tener claro desde el principio lo que dice la probabilidad y sobre todo lo que *no dice*: **nopodemos** predecir el resultado concreto de una experiencia, si ésta es aleatoria, pero **podemos** predecir el comportamiento **asintótico** (cuando el número de realizaciones tiende a infinito) de un experimento, bajo ciertas condiciones. Si los matemáticos pudieran predecir exactamente el resultado del lanzamiento de un dado, no harían matemáticas, porque estarían jugando en los casinos.

Nadie puede predecir el futuro y mucho menos los presuntos adivinos: si no se puede asegurar el resultado al lanzar una moneda, que es una situación sencilla y controlada, cuánto menos se podrá predecir la vida misma.

Probabillidad

Experimentos aleatorios

Al comenzar el estudio de la Teoría de la Probabilidad, debemos enmarcarlo en un contexto en el que se desarrollen convenientemente los procesos involucrados en el estudio. Este marco son los experimentos aleatorios, es decir, realizaciones de procesos con una diversidad de posibles resultados, que hace **imposible** la predicción a priori de cuál va a ser el resultado obtenido en un caso concreto.

Experimento aleatorio: es un experimento en el que no se puede predecir el resultado con antelación a la realización del mismo, ni aunque se repitan exactamente las mismas condiciones. Es lo contrario de experimento determinista, en el que si se repiten las mismas condiciones, se repite el resultado.

Ejemplo

- *Experimento aleatorio* -> lanzar un dado, lanzar una moneda, sacar una bola de una urna, jugar a la lotería,....
- *Experimento determinista* -> experimento en un laboratorio, dejar caer un objeto

Un experimento aleatorio tiene varios posibles resultados. Conviene clasificarlos para sistematizar su estudio.

Probabillidad

Espacio muestral. Sucesos

Vamos a ver las definiciones necesarias y algunos ejemplos aclaratorios para comenzar el estudio de los experimentos aleatorios.

Espacio muestral E: conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio

Ejemplo

Lanzar un dado cúbico -> {1,2,3,4,5,6}

lanzar una moneda -> {cara -> c, cruz -> x} lotería primitiva -> {1, 2, 3, 4 ,........, 48, 49}

Cada elemento del espacio muestral se llama **suceso elemental**: cada uno de los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio.

Suceso: cada subconjunto no vacío del espacio muestral E; está formado por sucesos elementales (uno o varios). Se designan con letras mayúsculas: A, B, C, ...La letra E está reservada para el espacio muestral, que también se puede considerar como un suceso.

Ejemplo

Si el experimento consiste en lanzar un dado cúbico -> E = {1,2,3,4,5,6} si A = {salir par} se puede describir como A = {2,4,6}

Cada suceso se puede describir a través de los elementos que lo forman o por una propiedad que cumplan esos elementos.

Dado un suceso A de un experimento aleatorio, diremos que A **sucede u ocurre** cuando al realizar el experimento, el resultado obtenido es un suceso elemental que está en A. En otro caso, diremos que A no ha sucedido o que no ha ocurrido:

En el experimento que consiste en lanzar un dado

E -> {1,2,3,4,5,6} consideremos el suceso A = {2,4,5,6}

si realizamos el exp. y obtenemos un 6 -> A ha sucedido

si realizamos el exp. y obtenemos un 1 -> A no ha sucedido

En todo experimento aleatorio existen 2 sucesos especiales:

- **suceso seguro**: **E** -> contiene a todos los sucesos elementales y por tanto siempre ocurre
- **suceso imposible** : $\varnothing$ -> no contiene ningún suceso elemental y por tanto, nunca ocurre

Autoevaluación

Se considera el experimento del juego de la ruleta. Describe los siguientes sucesos:

E = espacio muestral A = {obtener un nº par} B = {obtener un nº primo}

C = {obtener un múltiplo de 5} D = {gana la casa}

a) E = {0,1,...,36} A = {0,2,4,6,...36} B = {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31}

C = {0,5,10,15,20,25,30,35} D = {0}

b) E = {1,2,3,...,49} A = {2,4,6} B = {1,2,3,7,9,13,19,43} C = {5,10,20,30,40}

D = {} = $\varnothing$

c) E = {0,1,...,36} A = {0,2,4,6,...36} B = {1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}

C = {0,5,10,15,25,30,35} D = {36}

Comprobar

Operaciones con sucesos

Con los sucesos de un espacio muestral también se pueden hacer operaciones. Desde un punto de

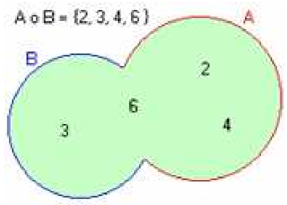
vista formal, los sucesos no son más que conjuntos cuyos elementos son los sucesos elementales del experimento aleatorio, es decir, los posibles resultados de dicho experimento.

Por tanto, las operaciones con sucesos no son más que las respectivas operaciones entre conjuntos, que definen el **álgebra de sucesos**.

Las operaciones básicas con sucesos de un espacio muestral son la **unión**, la **intersección**, la **diferencia** y el **complementario de un suceso**. Las tres primeras involucran a 2 o más sucesos y la última sólo a uno de ellos.

- **Unión:** $A \cup B$ (el suceso formado por los sucesos elementales de A junto con los de B sin elementos repetidos.

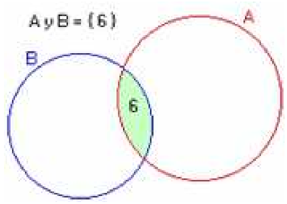
A = {2,4,6} B = {3,6} -> $A \cup B$ = {2,3,4,6}



$A \cup B$ ocurre cuando **sucede A o sucede B o suceden ambos**

- **Intersección:** $A \cap B$ -> el suceso formado por los sucesos elementales que están a la vez en A y en B.

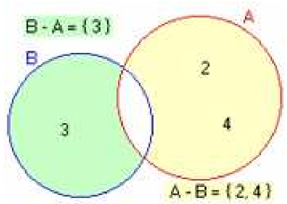
A = {2,4,6} B = {3,6} -> $A \cap B$ = {6}



$A \cap B$ ocurre cuando suceden **simultáneamente** A y B

- **Diferencia:** A \ B -> formado por los sucesos de A que no están en B

A = {2,4,6} B = {3,6} -> A \ B = {2,4} B \ A = {3}



Si $A \cap B$ = $\varnothing$ -> A \ B = A (si no tienen elementos en común, de A no podemos quitar nada)

Todo suceso A se puede descomponer como:

A = (A \ B) $\cup$ -> $A \cap B$ -> siendo B cualquier suceso

A \ B ocurre cuando **ocurre A y a la vez no ocurre B**

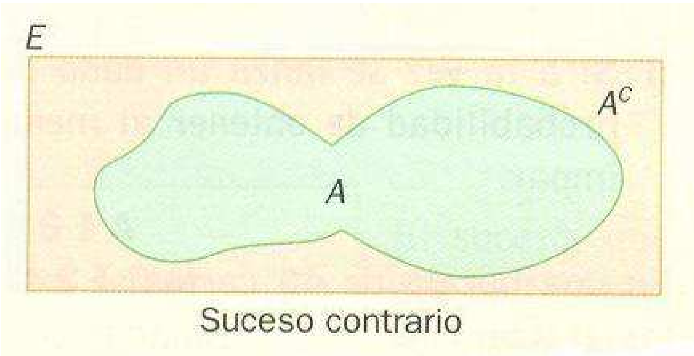
- **Contrario o complementario:** $\overline{A}$ equivale a la negación del suceso A no A = ¬ A = $\overline{A}$

Es el suceso que contiene a todos los sucesos elementales que **no están** en A (es lo *contrario* de A)

E = {1,2,3,4,5,6} A = {2,3,4,5} -> $\overline{A}$ = {1,6}

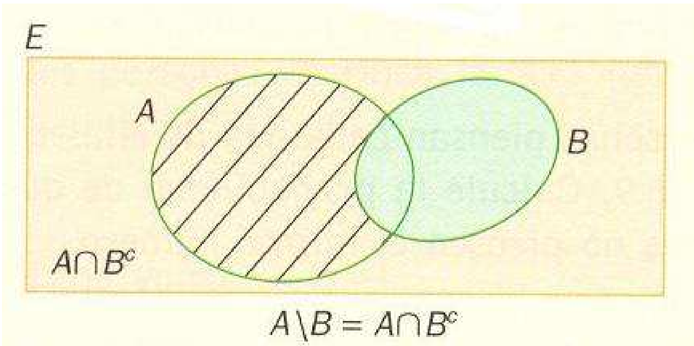
$\overline{A}$ = E \ A E = A $\cup$ $\overline{A}$ $\varnothing$ = A $\cap$ $\overline{A}$

$\overline{E}$ = $\varnothing$ $\overline{\varnothing}$ = E



Suceso contrario

Podemos expresar la diferencia de sucesos A \ B como una intersección de A con el contrario de B: $A \cap \overline{B}$ = $A \cap B^c$



$A \setminus B = A \cap B^c$

Leyes de Morgan

Las Leyes de Morgan indican cómo hacer los complementarios de la unión y la intersección de dos o más sucesos. En cierta forma, son simétricas una de otra y esto las hace fácilmente recordables.

Dados A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral E, se cumple que:

$\overline{(A \cup B)}$ = $\overline{A}$ $\cap$ $\overline{B}$ $\overline{(A \cap B)}$ = $\overline{A}$ $\cup$ $\overline{B}$

el complementario de la unión es la intersección de los complementarios

el complementario de la intersección es la unión de los complementarios

Vamos a demostrar, por ejemplo, la primera de ellas; lo vamos a hacer por doble inclusión, es decir, veremos que todos los elementos del conjunto $\overline{(A \cup B)}$ están en

$\overline{A} \cap \overline{B}$ y viceversa, con lo cual quedará demostrado que son iguales.

Demostración

Si $x \in \overline{(A \cup B)}$ -> $x \notin A \cup B$ -> $x \notin A$ y $x \notin B$ ya que si estuviera en alguno de ellos, estaría en la unión de ambos y no lo está -> $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B}$ ->

$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Recíprocamente:

si $x \; \overline{A} \cap \overline{B}$ -> $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B}$ -> $x \notin A$ y $x \notin B$ -> x no puede estar en la unión de A y B porque no está en ninguno de ellos -> $x \notin A \cup B$ -> $x \in \overline{(A \cup B)}$

Análogamente se puede demostrar la otra ley.

Autoevaluación

Se considera el experimento del elegir un número entre el 1 y el 15. Consideremos los siguientes sucesos:

A = {el nº elegido es par} B = {el nº elegido es múltiplo de 3}

C = {el nº elegido es mayor que 7 y menor que 14} D = {el nº elegido es primo}

Expresa cada suceso con los sucesos elementales que lo forman.

Realiza las siguientes operaciones con estos sucesos:

$A \cup B$; $A \cap B$; A^c; $A \cup C$; $A \cap D$; $(A \cup D)^c$; $B \cup C$; $(B \cap D)^c$; $(A \cap B)$; $\cup D$; $C \cap D$; $D^c \cup C$; ($Ac = \overline{A}$).

Solución:

A = {}

B = { }

C = { }

D = { }

$\cup$ B = { }

$A \cap B$ = { }

A^c = { }

$A \cup C$ = { }

$A \cap D$ = { }

$(A \cup D)^c$ = { }

$B \cup C = \{\ \}$

$(B \cap D)^c = \{\ \}$

$(A \cap B) \cup D = \{\ \}$

$C \cap D = \{\ \}$

$D^c \cap C = \{\ \}$

Comprobar

La *traducción* del lenguaje coloquial a las operaciones entre sucesos es la siguiente:

A ó B -> $A \cup B$ **-> A unión B**

A y B -> $A \cap B$ **-> A intersección B**

ni A ni B -> $\overline{A} \cap \overline{B}$ **->no A yno B**

A pero no B -> A $\cap\ \overline{B}$ **-> A y no B**

sólo uno de los dos -> $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ **-> A y no B ó B y no A**

Sucesos compatibles e incompatibles

Al trabajar con dos sucesos, existen dos posibilidades: que puedan suceder simultáneamente o que no. Esto permite clasificarlos en **compatibles** e **incompatibles**.

Sucesos compatibles: dos sucesos son compatibles si tienen algún elemento en común, es decir: $A \cap B \neq \varnothing$

Dos sucesos compatibles pueden suceder a la vez, ya que tienen, al menos, un elemento común.

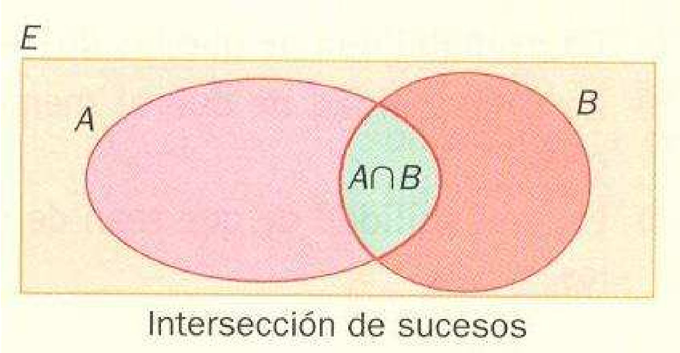
Ejemplo

Al lanzar un dado cúbico, consideramos

A = {salir par} B = {salir mayor que 3} -> $A \cap B$ = {4,6}

A y B son **compatibles**: si al realizar el experimento se obtiene 4 o 6 -> han ocurrido a la vez A y B.

Dos sucesos **compatibles** tienen elementos en común y por tanto, su intersección es no vacía:



Sucesos incompatibles son aquellos que no tienen ningún elemento en común, y por tanto, no pueden ocurrir a la vez (su realización simultánea es imposible):

$A \cap B = \varnothing$ -> no pueden ocurrir simultáneamente

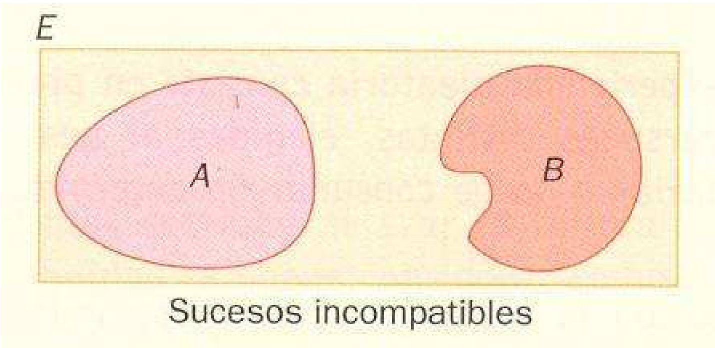
Ejemplo

Al lanzar un dado cúbico, consideramos

A = {salir par} B = {múltiplo de 5} -> $A \cap B = \varnothing$

A y B nunca pueden suceder a la vez: en este experimento, no hay ningún suceso que sea a la vez par y múltiplo de 5 -> **son incompatibles.**

Dos sucesos **incompatibles** no tienen intersección y por tanto no tienen elementos en común:



Probabilidad

Históricamente, la probabilidad surgió como una discusión entre matemáticos, originada por el caballero de Mèré, sobre la forma de repartir las ganancias en un juego de dados que había sido interrumpido de forma abrupta. De la correspondencia entre Fermat y Pascal nació esta nueva disciplina, que posteriormente tomó forma rigurosa con los trabajos de Bayes, de Moivre, Laplace y los hermanos Bernoulli.

Consideremos un experimento aleatorio y E su espacio muestral asociado: el conjunto de todos los posibles resultados individuales.

Queremos asignar un cierto número a cada suceso del espacio muestral E que indique las posibilidades que existen a priori para que se realice el suceso. Ese número se llama **probabilidad del suceso.**

Un experimento aleatorio se caracteriza porque si repetimos la misma experiencia *n* veces y anotamos el nº de veces que ocurre el suceso A (f_i, entonces el cociente:

$\frac{f_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{valor fijo} = P(A)$ llamado **probabilidad del suceso A**

$$\begin{cases} f_i \rightarrow \textit{frecuencia relativa de } A \\ n \rightarrow n^o \textit{ veces que se repite el experimento} \end{cases} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{f_i}{n} = \text{P(A)}$$

Existen 2 formas principales de asignar probabilidades: la regla de **Laplace** o **probabilidad clásica** y la probabilidad **axiomática** o de **Kolmogorov**

Probabilidad clásica o de Laplace

Antes de Laplace, la teoría de probabilidades se relacionaba casi exclusivamente con los juegos de azar. En su obra "Teoría Analítica de Probabilidades", Pierre Simon de Laplace introduce una gran cantidad de nuevas ideas y técnicas, entre ellas, su famosa fórmula para calcular probabilidades. Laplace aplicó métodos probabilísticos a un gran número de problemas científicos y situaciones: la mecánica estadística, la teoría de los errores, las tablas de matemática actuarial, etc.

Cuando en un experimento, los sucesos elementales son equiprobables (todos tienen la misma probabilidad), entonces dado A un suceso cualquiera:

$$\text{P(A)} = \frac{n^o \text{ casos favorables a A}}{n^o \text{ casos posibles}} = \frac{\text{cardinal (A)}}{\text{cardinal (E)}}$$

Para calcular la probabilidad de un suceso A, basta con contar cuántos sucesos elementales componen el suceso A (cardinal de A) y dividirlo por el nº de sucesos elementales total (cardinal de E).

Ejemplo

A = {salir mayor que 3} = {4,5,6} E = {1,2,3,4,5,6}

$$\text{P(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$$

De la propia definición de P (A) se deduce que: $0 \leq P(A) \leq 1$ ya que es un cociente entre dos números positivos donde el numerador es menor o igual que el denominador: **cardinal (A)** $\leq$ **cardinal (E)**

Además: **P (E) = 1** porque **P (E)** = $\dfrac{\text{cardinal(E)}}{\text{cardinal(E)}}$ **= 1**

P ($\varnothing$ **) = 0** porque **P (** $\varnothing$ **)** = $\dfrac{\text{cardinal}(\varnothing)}{\text{cardinal(E)}} = \dfrac{0}{\text{cardinal(E)}} = 0$

Para saber más sobre la definición clásica de probabilidad

Ley de Laplace con gráficos explicativos

En el siguiente recurso puedes ver cuál fue el origen histórico de la probabilidad, con los dos problemas que la originaron

Autoevaluación

Se considera el experimento de elegir una carta de una baraja española. Sean los siguientes sucesos:

A = {salir una sota} B = {salir un oro} C = {salir > 6}

Calcula las probabilidades: P (A), P (B), P(C), P(A $\cup$ B), P(A $\cap$ B), P(A $\cup$ C),

a) 0'2, 0'5, 1, 0'6, 0, 0'4
b) 0'1, 0'25, 0'4, 0'325, 0'025, 0'4
c) 0'2, 0'05, 0'4, 0'45, 0'15, 0'6

Comprobar

Probabilidad axiomática o de Kolmogorov

La forma de asignar probabilidades según el método de Laplace es muy sencilla y resuelve una enorme cantidad de situaciones de forma fácil y cómoda, lo que explica su gran éxito. Pero tiene un grave inconveniente insalvable: exige que los sucesos elementales del espacio muestral sean equiprobables. Cuando en un problema, por sus propias características, no se cumple la hipótesis de equiprobabilidad, no se puede aplicar el método de Laplace. Fueron muchos los intentos de dar una definición consistente y precisa al concepto de probabilidad para que sirviera en todas las situaciones. Esta situación se prolongó durante casi 3 siglos, hasta que finalmente, en 1933, el ruso Andrey Kolmogorov construyó una teoría axiomática de la probabilidad que resolvió el problema.

Dado un experimento aleatorio, definimos una función de probabilidad sobre ese experimento que cumple las siguientes condiciones o axiomas:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) P (E) = 1

c) si A_1, A_2, ..., A_n son *n* sucesos incompatibles entre sí, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Hay que hacer notar que de la definición axiomática de probabilidad no se deduce la forma de asignar probabilidades***: no nos dicecómo asignar probabilidades*** a un suceso en un caso concreto

La definición axiomática de la probabilidad tiene algunas consecuencias:

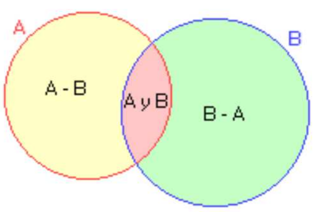
- **P ($\varnothing$) = 0** -> E = E $\cup$ $\varnothing$ y son obviamente incompatibles; por tanto:

P (E) = P(E) + P ($\varnothing$) -> **P ($\varnothing$) = 0**

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ -> E = A $\cup$ $\overline{A}$ y son incompatibles por definición,

luego: P (E) = **1 = P(A) + P(** $\overline{A}$) -> $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.-> como vemos en la figura:



En A $\cup$ B sólo está contenido **una vez** A $\cap$ B; pero si sumamos P(A) + P(B) estamos considerando **2 veces** la parte A $\cap$ B (una vez en cada uno de ellos); por tanto debemos quitar una vez la probabilidad de A $\cap$ B para obtener correctamente la probabilidad de la unión.

La suma de las probabilidades de los sucesos elementales es 1.

Como los sucesos elementales son incompatibles entre sí y su unión es, por definición, el espacio muestral E, podemos aplicar el segundo y último axiomas de la probabilidad y tenemos:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

siendo $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ el conjunto de todos los sucesos elementales. Esto permite calcular sus probabilidades si conocemos alguna relación entre ellas, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Un dado cúbico está trucado de forma que la probabilidad de cada cara es proporcional al valor de dicha cara. Calcula la probabilidad de cada suceso elemental

E = {1,2,3,4,5,6} los sucesos elementales son: {1} {2} {3} {4} {5} {6}

Por la condición del enunciado:

P(1) = x , P(2) = 2x , P(3) = 3x , P(4) = 4x , P(5) = 5x , P(6) = 6x

y entre todos suman 1 -> x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 -> 21x = 1 -> x = $\frac{1}{21}$

Luego: P(1) = $\frac{1}{21}$, P(2) = $\frac{2}{21}$, P(3) = $\frac{3}{21}$, P(4) = $\frac{4}{21}$, P(5) = $\frac{5}{21}$, P(6) = $\frac{6}{21}$

Para saber más sobre probabilidad

Conceptos y ejercicios probabilidad

Autoevaluación

Se ha trucado una moneda para que la probabilidad de que salga cara sea el triple que la que salga cruz. Calcula la probabilidad de obtener cara y cruz al lanzar una vez la moneda.

a) P(cara) = 0'8 P(cruz) = 0'2
b) P(cara) = 0'6 P(cruz) = 0'4
c) P(cara) = 0'75 P(cruz) = 0'25

Comprobar

Experimentos simples y compuestos

La probabilidad simple hace referencia a **experimentos simples**, es decir, formado por una única experiencia y a un único suceso de su espacio muestral.

Ejemplo

El experimento consiste en extraer una bola de una bolsa que tiene 5 bolas rojas, 6 blancas y 12 amarillas ->sólo hay **una** experiencia que es la de extraer **una única** bola

E = {5 bolas rojas, 6 blancas, 12 amarillas}

Sea A = {la bola extraída es amarilla} -> P(A) = $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{12}{23}$

Los experimentos compuestos son aquellos en los que los sucesos elementales se componen de resultados de varios sucesos simples: lanzar 2 monedas, sacar 2 bolas de una urna con o sin reemplazamiento, etc....

En un experimento compuesto, los sucesos elementales están formados por todas las posibles combinaciones de los respectivos sucesos simples elementales. Una regla muy sencilla para determinar que se han considerado todos es que el nº de sucesos elementales de un experimento compuesto es el producto de los respectivos cardinales de cada uno de los experimentos simples que lo formen.

Ejemplo 1

Se lanza una moneda y se elige un bola de una urna que tiene bolas rojas, blancas y verdes ->

moneda: E_1 = {c,x} cardinal(E_1) = 2

urna: E_2 = {r,b,v} cardinal(E_2) = 3

E = {cr,cb,cv,xr,xb,xv} cardinal(E) = 6 = 2· 3

Ejemplo 2

Lanzamos 2 monedas simultáneamente

1º lanzamiento		2º lanzamiento
c	$\rightarrow$	$c \rightarrow \{c, c\}$
	$\rightarrow$	$x \rightarrow \{c, x\}$
x	$\rightarrow$	$c \rightarrow \{x, c\}$
	$\rightarrow$	$x \rightarrow \{x, x\}$

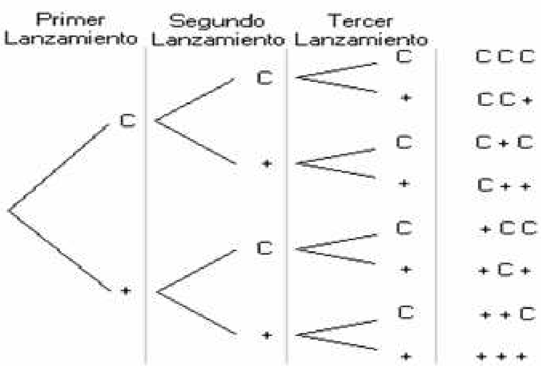
E = {cc, cx, xc, xx} cardinal (E) = 4 = 2 ·2

Una de las herramientas más útiles en experimentos compuestos es el **diagrama de árbol**, que pretender expresar gráficamente todas las distintas posibilidades de un experimento compuesto mediante una serie de flechas (las ramas del árbol), que representan las distintas posibilidades en cada fase de realización del experimento. Además, si asignamos la probabilidad a cada rama en cada realización del experimento, se puede aplicar la regla del producto y la regla de la suma de probabilidades para obtener las probabilidades de los sucesos elementales:

- **Regla del producto**: la probabilidad de cada suceso elemental es el producto de las probabilidades de cada rama del árbol que nos lleva hasta ese suceso.
- **Regla del producto**: la probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales que lo forman.

Ejemplo

Lanzamiento consecutivo de 3 monedas; a la derecha del diagrama se forman los sucesos elementales de espacio muestral E = {ccc,ccx,cxc,cxx,xcc,xcx,xxc,xxx}



Ejemplo

Cada rama tiene probabilidad $\frac{1}{2}$, si la moneda está equilibrada; por tanto la probabilidad de cada suceso elemental es

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (hay que recorrer 3 ramas para llegar a cada suceso elemental.

Ahora es muy fácil averiguar la probabilidad de un suceso A cualquiera sin más que sumar las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman:

A = {obtener dos caras} = {ccx,cxc,xcc}= $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

B = {al menos 2 cruces} = {cxx,xcx,xxc,xxx,} = $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

La misma técnica se usaría si las probabilidades de cada rama fueran distintas.

Dependencia e independencia de sucesos

Un caso interesante en la teoría de la Probabilidad es el que corresponde con la relación entre dos o más sucesos del mismo experimento y sus relaciones de dependencia o independencia. Son conceptos profundos, incluso con connotaciones filosóficas, que trascienden el área de estudio de la propia Probabilidad. En este apartado vamos a definir los conceptos de dependencia e independencia entre 2 sucesos y las fórmulas que debemos usar en cada caso.

Sucesos dependientes. Probabilidad condicionada

A menudo, la ocurrencia de un suceso condiciona o influye en la ocurrencia de otro suceso. Si el suceso A condiciona al suceso B, diremos que:

"B ***está condicionado por*** A o que B ***depende de*** A"

Esta influencia modifica la probabilidad de que ocurra B y tenemos que definir una nueva fórmula para la probabilidad de B: **probabilidad condicionada**

Dados A y B dos sucesos de un espacio muestral de forma que B depende de A, definimos la probabilidad condicionada de B al suceso A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ **(si P(A) > 0)**

En determinados experimentos, se sabe, por las propias condiciones del experimento, que algunos sucesos influyen o modifican a otros. Éstos se ven condicionados por los anteriores, cambiando así su probabilidad. Un ejemplo típico son todos aquellos experimentos en los que haya una *secuencia temporal* entre sucesos, es decir, un suceso B siga en el tiempo a otro suceso A. Puede darse el caso de que el primero (A) influya o condicione al segundo (B) , en cuyo caso diremos que ***A influye a B*** o que ***B depende de A***

A menudo, la probabilidad condicionada de un suceso B a otro A se puede averiguar aplicando la lógica y la regla de Laplace del cálculo de probabilidades, como vemos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: (extracciones consecutivas sin devolución)

De una urna opaca que contiene 12 bolas blancas y 8 bolas verdes, extraemos consecutivamente y sin devolución **2 bolas**

P (2ª bola sea verde | 1ª bola ha sido blanca) = $\frac{8}{19}$ en lugar de $\frac{8}{20}$ -> ya que el hecho de que no haya devolución cambia las condiciones al extraer la 2ª bola (sólo quedan 19 bolas, de las cuáles 8 son verdes.

Análogamente:

P (2ª bola sea verde | 1ª bola ha sido verde) = $\frac{7}{19}$ en lugar de $\frac{8}{20}$ -> sólo quedan 7 bolas verdes de 19 posibles, ya que **ya sabemos** que la 1ª bola ha sido verde (quedan 7 bolas verdes en lugar de 8) y no se ha devuelto a la urna (quedan 19 bolas en lugar de 20).

Ejemplo 2

El experimento consiste en extraer 3 cartas de una baraja española

P (3ª sea de oros | la 1ª y la 2ª han sido de oros) = $\frac{8}{38}$ -> de nuevo, la información de que disponemos modifica la probabilidad del suceso, ya que al ser las dos primeras cartas de oros, sólo quedan 8 cartas de ese palo en la baraja, en la que además sólo quedan 38 cartas, en lugar de 40.

Si el suceso B depende del suceso A, entonces:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{y despejando} \quad \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Sucesos independientes

No siempre existe una relación de dependencia entre dos sucesos de un mismo espacio muestral. A veces, no hay ninguna influencia mutua entre ellos y en estos casos, no tiene sentido usar la fórmula de la probabilidad condicionada.

Ejemplo: "la probabilidad no tiene memoria"

Mucha gente piensa convencida que si han salido 10 caras consecutivas al lanzar una moneda, en la siguiente tirada ***debe*** salir cruz. Este mecanismo de compensación es muy humano, pero no funciona con la probabilidad. De hecho, las tiradas anteriores **no pueden afectar** a la siguiente y por tanto existen las mismas posibilidades de que en la siguiente tirada salga cara o cruz: son **sucesos independientes ->** la probabilidad ***no recuerda*** lo sucedido antes.

Dos sucesos A y B son independientes si A no influye en la realización de B ni B en A -> uno no afecta ni se ve afectado por el otro.

Si A y B son independientes, entonces:

P (B | A) = P (B) y P(A | B) = P (A) por tanto:

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot P(B)$$

Para sucesos independientes, la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades.

Ejemplo: (extracciones consecutivas con devolución)

El experimento consiste en extraer 2 bolas de un urna devolviendo de nuevo a la urna la bola extraída; la urna contiene 4 bolas blancas y 10 negras

P (2º bola sea blanca | la 1º bola ha sido blanca) = $\frac{4}{14}$ = P(2ª blanca)

ya que al devolver la 1ª bola a la urna, las condiciones en la 2ª extracción son las mismas que en la 1ª extracción: hay el mismo número de bolas (14) y la misma composición (4 blancas y 10 negras) -> se trata de **sucesos independientes**, la información de que la 1ª bola ha sido blanca no modifica ni cambia la probabilidad del segundo suceso

P(1ª blanca $\cap$ 2ª blanca) = P(1ª blanca) · P(2ª blanca | 1ª blanca) =

= P(1ª blanca) · P(2ª blanca) = $\frac{4}{14} \cdot \frac{4}{14} = \left(\frac{4}{14}\right)^2$

En resumen

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \textit{si B depende de A}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \textit{si A y B son independientes}$$

Probabilidad compuesta

La probabilidad de que se realicen 2 sucesos A y B es igual a la probabilidad de que se realice el primero -> P(A) multiplicada por la probabilidad de que se realice el 2º habiéndose realizado el 1º -> P(B | A):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Ejemplo

Extraer 2 cartas sin reemplazamiento:

P (las dos sean de oros) = P (1º sea oros $\cap$ 2ª sea oros) =

P (1º oros) · P (2ª oros | 1ª ha sido oros) = $\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{9}{156}$

Debemos usar la probabilidad compuesta cuando tengamos 2 sucesos de forma que la realización del 1º influye o condiciona la realización del 2º: extracciones sin reemplazamiento,........

La fórmula se puede extender al caso de **3 o más sucesos**:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \text{ y } B)$$

suponiendo que A es el 1º suceso, B el 2º y C el 3º.

Una herramienta muy simple y potente para trabajar correctamente con probabilidades condicionadas y probabilidad compuesta es lo que se conoce como **tablas de contingencia**:

Ejemplo

Se sortea un viaje entre los 120 empleados de una empresa. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas.¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a una mujer soltera. Si la persona elegida está casada, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que sea soltera sabiendo que es mujer?

Se introducen los datos conocidos y se completa la tabla:

	Solteros	Casados	Total
Hombres	-	-	-
Mujeres	-	**45**	**65**
Total	-	**80**	**120**

	Solteros	Casados	Total
Hombres	**20**	**35**	**55**
Mujeres	**20**	**45**	**65**
Total	**40**	**80**	**120**

Ahora es sencillo calcular la probabilidad condicionada o la de la intersección de 2 sucesos:

P(mujer y soltera) = P(mujer $\cap$ soltera) = $\frac{20}{120}$ -> hay 20 mujeres solteras de 120 personas (en la intersección de la fila de "mujeres" con la columna de "solteros" hay 20)

P(hombre | casada) = $\frac{35}{80}$ -> en la columna de los "casados" (80), hay 35 que son hombres

P(soltera | mujer) = $\frac{20}{65}$ -> en la fila de los "solteros" (65), hay 20 que son mujeres

Se cumple la definición de probabilidad condicionada:

P(soltera | mujer) = $\frac{P(\text{soltera} \cap \text{mujer})}{P(\text{mujer})} = \frac{\frac{20}{120}}{\frac{65}{120}} = \frac{20 \cdot 120}{65 \cdot 120} = \frac{20}{65}$

Para saber más

- Pagina con teoría y problemas para que resuelvas y compruebes
- Conceptos y ejercicios probabilidad
- Gacetilla matemática: curso de probabilidad completo
- Problemas probabilidad

En los siguientes recursos tienes dos ejercicios explicados :

- El primero es un experimento con sucesos dependientes ,
- y otro con sucesos independientes.

Autoevaluación

S extraen 3 cartas consecutivas de una baraja francesa. Calcula la probabilidad de que las tres sean tréboles si no hay devolución

a) P(1ª trébol $\cap$ 2ª trébol $\cap$ 3ª trébol) = $\frac{2744}{132600}$

b) P(1ª trébol $\cap$ 2ª trébol $\cap$ 3ª trébol) = $\frac{2184}{132600}$

c) P(1ª trébol $\cap$ 2ª trébol $\cap$ 3ª trébol) = $\frac{2744}{140608}$

Comprobar

Se repite el experimento anterior devolviendo la carta al mazo en cada extracción. Calcula la probabilidad de obtener 3 tréboles.

a) P(1ª trébol $\cap$ 2ª trébol $\cap$ 3ª trébol) = $\frac{5644}{1256420}$

b) P(1ª trébol $\cap$ 2ª trébol $\cap$ 3ª trébol) = $\frac{20128}{162600}$

c) P(1ª trébol $\cap$ 2ª trébol $\cap$ 3ª trébol) = $\frac{2744}{140608}$

Comprobar

En una clase de 2º de Bachillerato compuesta por un 55 % de chicos y el resto chicas, practica el balonmano el 40 % de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos un alumno de esa clase al azar: ¿cuál es la probabilidad de que practique el balonmano?

a) P(balonmano) = 0'5125
b) P(balonmano) = 0'3325
c) P(balonmano) = 0'1675

Comprobar