

Tema 2 → LA DIVISIBILIDAD.

OBJETIVOS:

1. Reconocer los números primos y los números compuestos.
2. Saber aplicar los algoritmos que permiten estudiar la divisibilidad de los números naturales.
3. Construir el conjunto formado por los divisores y algunos múltiplos de un número natural utilizando diversas estrategias.
4. Saber calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de un número por factorización.
5. Valorar las habilidades matemáticas propias para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

CONTENIDOS:

De conceptos:

- 1.- Múltiplos y divisores de un número.
- 2.- Criterios de divisibilidad.
- 3.- Números primos y números compuestos. Números primos entre sí.
- 4.- Tabla de números primos. Criba de Eratóstenes.
- 5.- Descomposición de un número en factores primos (factorización).
- 6.- Máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.).

Además, ejercicios y problemas de repaso de este tema y el anterior y modelos de controles diversos, con las soluciones correspondientes.

Y, por supuesto, algunas reflexiones.

De procedimientos:

1. Estudio de la divisibilidad de un número aplicando los criterios de divisibilidad.
2. Construcción de una tabla de números primos.
3. Descomposición de un número en factores primos.
4. Simplificación de divisores comunes para estudiar la divisibilidad de un número por otro.
5. Determinación del conjunto de todos los divisores de un número.
6. Cálculo del m.c.d. y del m.c.m. de dos o más números aplicando el método de factorización.
7. Resolución de problemas de la vida cotidiana relacionadas con los múltiplos y divisores.

De actitudes:

1. Valoración del lenguaje matemático para expresar de forma sencilla las relaciones entre números.
2. Reconocimiento de la utilidad del lenguaje matemático para resolver problemas.
3. Incorporación del lenguaje matemático a la forma de proceder habitual para estimar cantidades.
4. Valoración de los medios tecnológicos en el tratamiento de la información.
5. Confianza en la capacidad propia para afrontar y resolver problemas de tipo numérico.
6. Gusto por la precisión, el orden y la claridad en la resolución de problemas relativos a múltiplos, divisores, factorización, m.c.d. y m.c.m.

2.1. - Múltiplos y divisores.

CONCEPTO DE MÚLTIPLO.

Un número es múltiplo de otro si lo contiene una cantidad exacta de veces. O lo que es lo mismo, si un número cualquiera, "a", es múltiplo de otro, "b", existe otro, "c", que multiplicado por "b" da como resultado "a".

¿ CÓMO SE OBTIENEN MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO ?

Para obtener múltiplos de un número se va multiplicando sucesivamente por 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., y los resultados obtenidos son todos múltiplos del citado número inicial. Veamos algunos ejemplos:

1) **Múltiplos de 7** →

7 (7.1), 14 (7.2), 21 (7.3), 28 (7.4), 35 (7.5), etc.

Más abreviadamente sería así:

M (7) → 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49 ...

2) M (13) → 13, 65, 117, 195, 351, 9204 ...

Observarás que es más fácil y sencillo multiplicar por 2, 3, 4, etc., en lugar de hacerlo por números más elevados como hemos hecho en el caso del nº 13, en el que hemos multiplicado por 1, por 5, por 9, por 15, por 27, por 708, etc. Pero todos son múltiplos.

CONCEPTO DE DIVISOR.

Un número entero es divisor de otro si al dividir el segundo entre el primero la división es exacta.

¿ CÓMO SE OBTIENEN LOS DIVISORES DE UN NÚMERO ?

Para calcular los divisores de cualquier número dividimos éste entre la serie de números naturales (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11...) hasta que el cociente que se obtenga sea igual o menor que el divisor.

En muchas ocasiones no necesitarás hacer tantas divisiones, ya que sabrás las reglas de divisibilidad, que veremos próximamente, y será más rápido calcular los divisores. Veamos algunos ejemplos:

3) **Divisores de 28** →

1 (28:1), 2 (28:2), 4 (28:4), 7 (28:7), 14 (28:14) y 28 (28:28).

Más abreviadamente sería así:

D (28) → 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

4) D (72) → 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

5) Hallar cinco múltiplos y todos los divisores de 42.

M (42) → 42 (42.1), 84 (42.2), 126 (42.3),
168 (42.4), 420 (42.10), ...

D (42) → 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42.

PARA RESOLVER:

6) Hallar cinco múltiplos y los divisores de 27.

7) Hallar cinco múltiplos y los divisores de 71.

8) Hallar cinco múltiplos y los divisores de 45.

9) ¿Por qué en los múltiplos se ponen tres puntos suspensivos al final y no se hace igual en los divisores?

10) Dados dos números cualesquiera, ¿forzosamente tienen que tener algún divisor común? ¿Y más de uno? ¿Y forzosamente deberán tener un múltiplo común? ¿Y más de un múltiplo?

2.2. - Criterios de divisibilidad.

Son las reglas que nos permiten establecer si un número entero ($\in \mathbb{Z}$) es divisible por otro, es decir, si lo contiene o no un número exacto de veces. Estas reglas son las siguientes:

* Regla del 2:

Un número es divisible por 2 si termina en 0 ó en cifra par.

* Regla del 3:

Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es 3 ó múltiplo de 3.

* Regla del 5:

Un número es divisible por 5 si termina en 0 ó en 5.

* Regla del 11:

Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y las de los lugares impares es 0, 11 ó múltiplo de 11.

Además de estos criterios, existen otros como los de los números 4, 6, 9, 10, 25, etc., que son, como veremos más adelante, números compuestos; pero los que más utilizaremos son los citados del 2, 3, 5 y 11, que son, como explicaremos en la siguiente pregunta, números primos. Por ello las reglas de estos últimos son las que debes aprenderte y practicar. Veamos algunos ejercicios:

RESUELTOS:

- 1) El número 456 es divisible por 2, porque termina en par; también es por 3, porque las cifras suman 15.
- 2) ¿Por qué números es divisible 647955?
Es divisible por 3, porque sus cifras suman 36, que es múltiplo de 3. Es divisible por 5, porque termina en 5. Y es divisible por 11, porque la diferencia entre la suma de las cifras de los lugares impares ($6 + 7 + 5 = 18$) y la suma de las cifras de los lugares pares ($4 + 9 + 5 = 18$) es 0.
- 3) ¿Qué valor (dígito = número) debes dar a las "x" de cada lugar para que sean esos números divisibles por 2, ó por 3, ó por 5, ó por 11?
 $4x7$, $506x$, $x8451$, $9x178$.

Solucionamos el primero: $4x7 \rightarrow$

Demos el valor que sea a la x nunca será divisible por 2 ni por 5, porque ni termina en par ni en cero ni en cinco.

Si le damos valor de 1, 4 ó 7, será divisible entre 3, porque entonces la suma de sus cifras dará tres o múltiplo de tres (12, 15 y 18).

Si le damos el valor 0, es divisible por 11, porque al restar las suma de los valores pares (0) de los impares ($4 + 7 = 11$) da 11.

PARA RESOLVER:

- 4) Escribe cinco números que sean divisibles por 2 y por 3.
- 5) Ahora cinco que sean divisibles a la vez por 2 y por 3.
- 6) ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 11?
25 – 55 – 87 – 670 – 45067 – 8111 – 209
768023 – 800030 – 6571 – 99 – 45600 – 110.
- 7) ¿Cuál es el menor número que debe sumarse a 803.842 para obtener un múltiplo de 11?
- 8) ¿Qué cifra hay que añadir a la derecha de 23? para obtener números que sean sucesivamente divisibles por 2, por 3, por 5, por 7 y por 11.
- 9) Un capitán del ejército tiene una compañía con una dotación de 3.510 soldados. ¿Puede colocarlos en formación de filas de 2 sin que sobre ninguno? ¿Y de 3? ¿Y de 5? ¿Y de 7? ¿Y de 11?
- 10) ¿Qué valor (dígito = número) debes dar a las "x" de cada lugar para que sean esos números divisibles por 11?
 $11x$ – $16x23$ – $5729x$ – $473x2$ – $678.x81$ – $892.87x$

- 11) Escribe tres números, uno de tres cifras, otro de cuatro y otro de cinco, que sean divisibles, cada uno de ellos, por 2, por 3, por 5 y por 11 al mismo tiempo
- 12) Escribe un número que sea a la vez divisible por 2, por 3 y por 5, pero con la condición de que no termine en 0. (¡)

2.3.- Números primos y números compuestos.

CONCEPTO DE NÚMERO PRIMO:

Un número es primo si sólo tiene como divisores a él mismo y a la unidad.

CONCEPTO DE NÚMERO COMPUESTO:

Un número es compuesto si tiene más divisores que él mismo y la unidad.



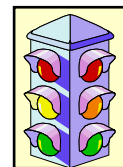
Siguiendo con algunas reflexiones que mencionan aspectos que convendría potenciar en los centros educativos, comentamos lo siguiente:

Cada día el tráfico en todos los lugares del planeta es más denso. Y esto es imparable. **El fenómeno circulatorio es un símbolo de progreso y, al mismo tiempo, un verdadero problema social de primer orden.**



Basta mirar algunos datos sobre accidentes para quedar estupefactos. Así, brevemente, decir que cada año las carreteras españolas se cobran la vida de unos 4.000 ciudadanos, y unos 40.000 ingresan heridos en hospitales. Si nos referimos al mundo, cada año fallecen 1.200.000 personas en accidentes de tráfico. Son **cifras espeluznantes**. Desde luego, las medidas a tomar para remediar algo, o a ser posible mucho, esta situación son muy diversas, tanto desde los organismos, países, empresas, etc., como desde los propios ciudadanos individualmente.

Sin embargo, en mi opinión, aunque cada vez se está tomando más conciencia de ello, se necesita imperiosamente introducir una asignatura (**EDUCACIÓN VIAL**) más *–por supuesto eminentemente todo lo práctica que se pueda–* en la Enseñanza (Primaria y Secundaria, y hasta Universidad, por qué no) desde donde cada día más y mejor se vayan educando los futuros usuarios de vehículos que poblarán las carreteras, autovías y autopistas.



La sociedad no debe quedarse impávida y sin saber qué hacer ante tan gravísimo problema, o sin hacer algo que demuestre ser efectivo.



EJEMPLO RESUELTO:

- 14) Averiguar cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos.

5 – 7 – 10 – 13 – 16 – 19 – 73 – 121

El nº 5 es **primo**, porque sus divisores sólo son 1 y 5, ó sea, sólo él mismo y la unidad.

El nº 7 es **primo**, porque sus divisores son sólo el 1 y el 7, ó sea, sólo él mismo y la unidad.

El nº 10 es **compuesto**, porque sus divisores son el 1, 2, 5 y 10, o sea, más que él mismo y la unidad.

El nº 13 es **primo**, porque sus divisores son 1 y 13.

El nº 16 es **compuesto**, porque sus divisores son 1, 2, 4, 8 y 16.

El nº 19 es **primo**, porque sus divisores son 1 y 19.

El nº 73 es **primo**, porque sus divisores son 1 y 73.

El nº 121 es **compuesto**, porque sus divisores son 1, 11 y 121.

CONCEPTO DE NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ:

Dos o más números son primos entre sí cuando sólo tienen como divisor común a la unidad.

EJEMPLOS RESUELTOS:

- 15) El 10 y el 21, aunque son dos números compuestos, entre ellos son números primos entre sí, porque sólo tienen de **divisor común** (“repe”) a la unidad. Veamos:

D (10) → **1**, 2, 5 y 10.

D (21) → **1**, 3, 7 y 21.

- 16) El 81 y el 94, aunque son dos números compuestos, entre ellos son primos entre sí, porque entre sus divisores sólo se repite la unidad (1):

D (81) → **1**, 3, 9, 27 y 81.

D (121) → **1**, 2, 47 y 94.

- 17) El 35 y el 98 **no** son números primos entre sí, porque tienen más divisores comunes que la unidad (1), en este caso tienen además al 7 de divisor repe.

D (35) → **1**, 5, **7**, y 35.

D (98) → **1**, 2, **7**, 14, 49 y 98.

PARA RESOLVER:

- 18) Explica razonadamente cuáles de los números siguientes son primos y cuáles compuestos.

3 – 8 – 13 – 17 – 21 – 25 – 51 – 144 - 229

- 19) Estudia si los números dados en cada uno de los apartados siguientes son primos entre sí o no.

- a) **9 y 19.**
- b) **21, 26 y 55.**
- c) **24 y 45.**
- d) **40 y 99.**
- e) **70, 77 y 91.**

- 20) Pon un ejemplo de tres números primos entre sí que tengan una, dos y tres cifras, respectivamente, y que sean los tres compuestos

- 21) Encontrar un número de tres cifras que sólo tenga un divisor. (i)

- 22) Encontrar un número que sólo tenga 2 múltiplos. (i)

- 23) Encontrar un número que tenga, exactamente, 10 divisores.

Hay que hacer mención, en esta pregunta, al **sabio griego** llamado **ERATÓSTENES**, nacido en un pueblo de la costa del actual estado de Libia y que murió en la famosa ciudad del saber: Alejandría. Vivió desde el año 275 (?) al 194 a. de C. Fue discípulo de Arquímedes, y destacó en varias disciplinas, sobre todo en Matemáticas, Astronomía y Filosofía. Estudió las dimensiones de la Tierra, de las constelaciones y de su mitología, entre otras cosas. Pero la causa de recordarlo en esta pregunta es porque fue el primero en ingeniárselas para hacer una tabla de números primos que iba identificando.

Es muy clásico ver en libros de Matemáticas, al tratar el tema de la DIVISIBILIDAD, la famosa **tabla de números primos del 1 al 100, llamada CRIBA DE ERATÓSTENES.**

En la página siguiente tienes una tabla de números primos del 1 al 1000. Te servirá para abreviar los cálculos en algunos ejercicios donde al hacer factorizaciones aparezcan algunos números elevados (entre 100 y 1000) que sean primos. Así, con sólo ver la tabla sabrás si es primo o no, sin necesidad de seguir operando cuando el número en estudio sea primo.

Tabla de NÚMEROS PRIMOS menores de 1.000 (< 1000)

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193
197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373
379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757
761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971
977	983	991	997											

EXTRA.- Reflexiona un poco: a ver si descubres cómo se las ingenió Eratóstenes para calcular los números primos del 1 al 1000.

REGLA PRÁCTICA:

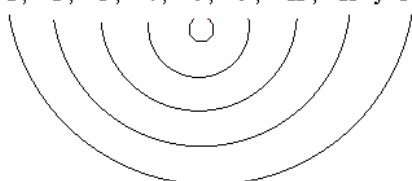
Al terminar un ejercicio de hallar los divisores de un número, podemos comprobar –aunque no de forma completa- si está bien o no con la siguiente regla: ordenamos todos los divisores y vamos comprobando si los productos sucesivos del primero y el último, el segundo y el penúltimo, el tercero y el antepenúltimo, etc., van dando como resultado el número dado. Si es así, es seguro que lo hecho lo tenemos bien, aunque no es seguro que sean éstos todos los divisores, porque si hemos fallado en una pareja, pues no lo descubrimos y nos faltan esos dos divisores.

Explicuemos esto con los divisores del número 36.

D (36) ----- 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

Las parejas que unen los arcos son:

- 1 . 36 = 36
- 2 . 18 = 36
- 3 . 12 = 36
- 4 . 9 = 36
- 6 . 6 = 36



Puedes comprobar que **cada vez que se halla un divisor, en realidad se encuentran dos: el que actúa de divisor y el que se obtiene en el cociente.** Fíjate que hay una manera de poder comprobar, en cierto modo, si has encontrado todos los divisores o si falta alguno, ya que cada uno debe tener su pareja. Claro, si falta uno menor que la mitad del n° no te darás cuenta, y te faltará también su pareja. Recuerda que hay que seguir buscando divisores hasta que el cociente obtenido sea igual o menor que el divisor.

2.4.- Descomposición de un número en factores primos. (FACTORIZACIÓN)

Descomponer un número en factores primos es hallar un producto de varios números (factores) que sean primos y cuyo resultado sea igual al número dado.

Recuerda que:

Factorizar y descomponer son sinónimos. O lo que es lo mismo, hacer una factorización de un número es descomponerlo en factores primos.

Ahora, al principio, para aprender y comprender mejor, al factorizar cualquier número lo vamos a hacer de dos maneras:

- a) **Método de las divisiones sucesivas.**
- b) **Método de las barras,** que debe ser el que domines cuanto antes para emplearlo siempre.

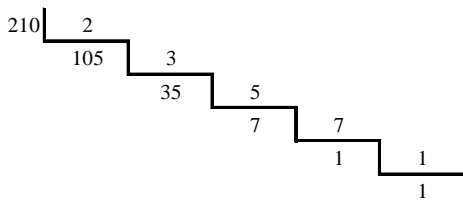
En los dos se trata de ir viendo qué números primos son divisibles por el número que hay que factorizar. O sea, si es divisible por 2, por 3, por 5, por 7, por 11, por 13, etc., que serán los números primos más usados en la mayoría de las descomposiciones.

Veamos algunos ejemplos:

- 1) Hallar la descomposición factorial de los números **210, 396, 500, 544, 713, 1755, 1800, 30030**.

El primer método es ir dividiendo el número dado por los distintos factores primos que sean divisores de dicho número, empezando mejor siempre por el 2, el 3, el 5, el 7, el 11, el 13, etc. Lógicamente, hay que seguir con cada uno de los que sean divisibles hasta que la división no sea exacta. Aunque cambies el orden de los factores, la descomposición te da igual, pero es mejor siempre seguir el orden indicado para evitar posibles errores.

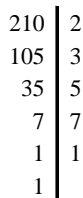
Método de las divisiones sucesivas:



210 = 2 · 3 · 5 · 7 · 1

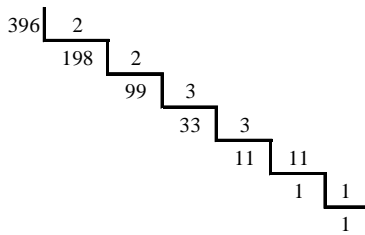
El método de barras es igual que el de las divisiones, sólo que en lugar de hacer todas las divisiones completas basta con ir obteniendo los sucesivos cocientes, que se colocan a la izquierda de la barra, y los diversos factores primos, que se colocan a la derecha de la barra. Si quieres hacer una comprobación para ver si lo tienes bien, realiza los productos de los números primos obtenidos y te tiene que dar como resultado el número dado.

Método de barras :

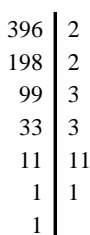


210 = 2 · 3 · 5 · 7 · 1

Método de las divisiones.



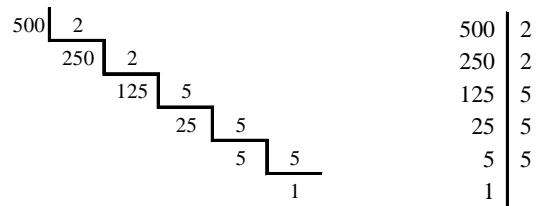
Barras :



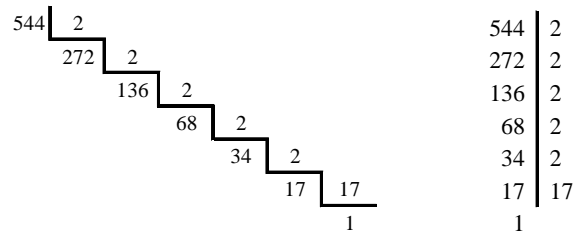
Solución :
396 = { En forma desarrollada → 2 · 2 · 3 · 3 · 11 · 1
 En forma de potencias → 2² · 3² · 11 · 1

Habrás observado que la solución aparece de dos formas: desarrollada y en potencias. Bien, pues en este tema usaremos más la solución en forma de potencias para hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, y para otros, como el caso de simplificar fracciones, utilizaremos más habitualmente la forma desarrollada.

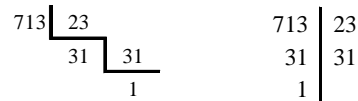
El **“1” no es necesario ponerlo, pero** te aconsejo que te acostumbres a colocarlo al menos en las soluciones, porque así evitarás algunos errores que se suelen presentar al hallar el máximo común divisor, que daremos en la pregunta siguiente, y al simplificar fracciones, que explicaremos en el tema 3. Seguimos con otros :



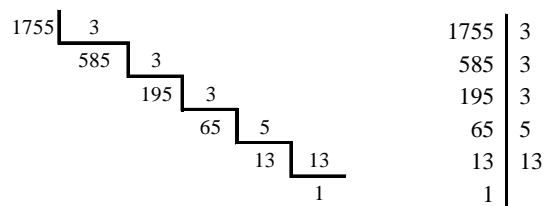
500 = { En forma desarrollada → 2 · 2 · 5 · 5 · 5 · 1
 En forma de potencias → 2² · 5³ · 1



544 = { En forma desarrollada → 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 17 · 1
 En forma de potencias → 2⁵ · 17 · 1

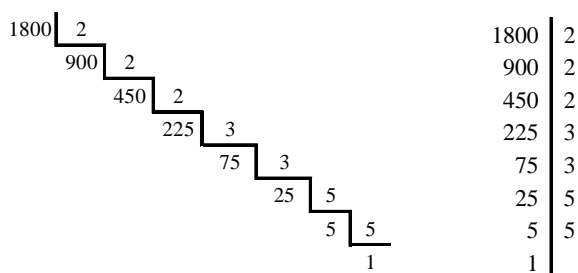


713 = 23 · 31 · 1

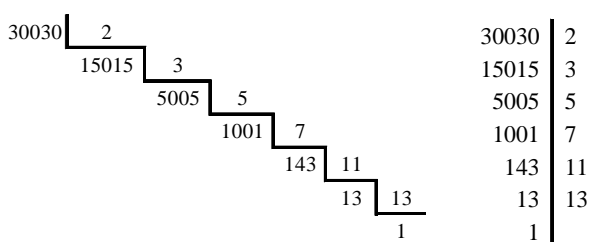


1755 = 3³ · 5 · 13 · 1

Seguimos con las factorizaciones de los números del ejemplo 1.



$$1800 = \begin{cases} \text{En forma desarrollada} \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \\ \text{En forma de potencias} \rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 1 \end{cases}$$



$$30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 1$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER:

Hallar la descomposición factorial de los siguientes números. Hasta el ejercicio nº 10, de las dos formas, es decir, con las divisiones y con las barras. Los demás, sólo con las barras. En todos debes poner la solución recuadrada de las dos formas: desarrollada y en potencias. Te aconsejo también que de vez en cuando compruebes los resultados haciendo el producto de los factores obtenidos a ver si da el número factorizado.

1	75	11	720	21	1350
2	16	12	180	22	120960
3	27	13	620	23	3168
4	625	14	568	24	103950
5	121	15	656	25	45360
6	49	16	345	26	5555
7	2310	17	6540	27	75075
8	300	18	400	28	67000
9	450	19	9900	29	22176
10	1300	20	3969	30	211680

2.5.- Máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números.

Llamamos **máximo común divisor (m. c. d.) de dos o más números al mayor número que es divisor común (repe) de ellos.**

Llamamos **mínimo común múltiplo (m. c. m.) de dos o más números al menor de los números que es múltiplo común (repe) de ellos.**

El **cálculo del m.c.d. y el m.c.m.** lo podemos hacer de dos formas:

- a) **Desarrollando todos sus divisores y múltiplos.** Esta forma nos servirá mucho para comprender mejor los conceptos, pero no la utilizaremos más adelante, pues es muy larga en números pequeños, así que con números mayores...
- b) **Por factorización**, es decir, descomponiéndolos en factores primos. Ésta es la que usaremos de forma habitual.

Veamos algunos ejemplos:

Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números que se indican. Haremos los tres primeros de las dos formas y otros cuatro sólo de la forma b), por factorización.

1) De los números 18 y 30.

a) **Desarrollando sus divisores y múltiplos.**

D (18) → 1, 2, 3, **6**, 9 y 18.

D (30) → 1, 2, 3, 5, **6**, 10, 15 y 30.

El 6 es el mayor divisor “repe” de ambos números. Luego:

$$\text{m. c. d. (18 y 30)} = 6$$

M (18) → 18, 36, 54, 72, **90**, 108, 126, 144, 162, 180, 198, etc.

M (30) → 30, 60, **90**, 120, 150, 180, 210, 240, etc.

El 90 es el menor múltiplo “repe” de ambos números, Luego:

$$\text{m. c. m. (18 y 30)} = 90$$

b) **Por factorización.** Para realizar este método, debes seguir los siguientes pasos:

- 1º) Hacer las barras de los números dados, poniendo los resultados en forma de potencia.
- 2º) Para hallar el m. c. d. se cogen los factores primos que sean comunes (reps) a todos los números dados y que estén elevados al menor exponente.
- 3º) Para hallar el m. c. m. se cogen todos los factores primos distintos que haya entre las descomposiciones de todos los números, y de los que estén “reps” se eligen sólo a los que tengan el mayor exponente.

18	2	30	2
9	3	15	3
3	3	5	5
1	1	1	1
1		1	

$$\left[\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m.c.d.} = 2 \cdot 3 = 6 \\ \text{m.c.m.} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90 \end{array} \right\}$$

Veamos la explicación de lo hecho.

Para el m.c.d. cogemos sólo el factor “2” y el “3”, que son los comunes. En el “2” no hay elección, porque es el mismo. Pero en el “3” elegimos el “3” y no “3²”, porque de los “reps” se cogen los de menor exponente.

Para el m.c.m. se cogen todos los factores primos distintos obtenidos, o sea, el “2”, el “3” y el “5”, estén o no estén “reps”. Dentro de ellos, de los “reps” se cogen los de mayor exponente.

Lógicamente, los resultados son los mismos que los obtenidos de la forma anterior.

2) De los números 40 y 300.

a) **Desarrollando sus divisores y múltiplos.**

D (40) → 1, 2, 4, 5, 8, 10, **20**, y 40.

D (300) → 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, **20**, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150 y 300.

Como ves, hay varios divisores comunes, el 2, el 4, el 10 y el 20. Pero 20 es el mayor divisor “repe” de ambos números, luego:

$$\text{m. c. d. (40 y 300)} = 20$$

M (40) → 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400, 440, 480, 520, 560, **600**, 640, ..., 1200, ... etc.

M (300) → 300, **600**, 900, 1200, 1500, etc.

Si desarrollamos mucho los múltiplos, vemos que se van repitiendo algunos, en nuestro caso, se repiten el 600 y el 1200, pero si seguimos se repetirían el 1800, el 2400, etc. Pero el 600 es el menor múltiplo “repe” de ambos números, luego:

$$\text{m. c. m. (40 y 300)} = 600$$

b) **Por factorización.**

40	2	300	2
20	2	150	2
10	2	75	3
5	5	25	5
1	1	5	5
1		1	

CONSEJO MUY PRÁCTICO:

Cuando hay que factorizar números que terminan en uno, dos, tres ceros, etc., puedes eliminarlos y por cada cero añadir a la descomposición 2 · 5, que es lo que da 10. Si hay dos ceros, añades 2 · 2 · 5 · 5, ó lo que es lo mismo, 2² · 5², y si hay tres ceros... Después sólo queda hacer la descomposición del número dado pero sin los ceros, que evidentemente será más sencilla y más corta.

Veamos algunos ejemplos:

130		2 · 5	700		2 ² · 5 ²	6000		2 ³ · 5 ³
13		13	7		7	6		2
1			1			3		3
						1		

$$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13 ; \quad 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 ; \quad 6000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$\left[\begin{array}{l} 40 = 2^3 \cdot 5 \\ 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m.c.d.} = 2^2 \cdot 5 = 20 \\ \text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600 \end{array} \right\}$$

3) De los números 75 y 112.

a) **Desarrollando sus divisores y múltiplos.**

D (75) → **1**, 3, 5, 15, 25 y 75.

D (112) → **1**, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56 y 112.

Aquí está claro que sólo hay uno que es común: el n° 1.

$$\text{m. c. d. (75 y 112)} = 1$$

M (75) → 75, 150, 225, 300, ..., **8400**, ... 16800, ..., etc.

M (112) → 112, 224, 336, ..., **8400**, ... 16800, ..., etc.

El primer múltiplo común, o sea, el mínimo múltiplo "repe", es el **8400**.

$$\text{m. c. m. (75 y 112)} = 8400$$

b) Por factorización.

75	3	112	2
25	5	56	2
5	5	28	2
1	1	14	2
1		7	7
		1	

$$\left[\begin{array}{l} 75 = 3 \cdot 5^2 \cdot 1 \\ 112 = 2^4 \cdot 7 \cdot 1 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m. c. d.} = 1 \\ \text{m. c. m.} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1 = 8400 \end{array} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2640 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \\ 6300 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ 26136 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11^2 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m. c. d.} = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ \text{m. c. m.} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 = 9.147.600 \end{array} \right\}$$

6) De las expresiones :

$$\left[\begin{array}{l} 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \\ 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \\ 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \end{array} \right]$$

Pues el máximo y el mínimo serían:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{m. c. d.} = 3^2 \cdot 5^2 = 125 \\ \text{m. c. m.} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 162162000 \end{array} \right\}$$

4) De los números 1512 y 720.

1512	2	720	2.5
756	2	72	2
378	2	36	2
189	3	18	2
63	3	9	3
21	3	3	3
7	7	1	
1			

$$\left[\begin{array}{l} 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \\ 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m. c. d.} = 2^3 \cdot 3^2 = 72 \\ \text{m. c. m.} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120 \end{array} \right\}$$

5) De los números 2640, 6300 y 25136.

2640	2.5	6300	2.5.2.5	26136	2
264	2	63	3	13068	2
132	2	21	3	6534	2
66	2	7	7	3267	3
33	3	1		1089	3
11	11			363	3
1				121	11
				11	11
				1	

Observarás que en los números que terminan en cero lo hago como expliqué en la página anterior; así es más práctico y rápido.



Desde hace varias décadas, las reformas educativas vienen dedicando en sus objetivos una vital importancia a los alumnos más necesitados; entiéndase aquellos que no consiguen los objetivos normales (medios) y necesitan más para adaptarnos a sus posibilidades. **Y creo que todos tenemos claro, sin lugar a dudas, que ese enfoque era necesario y urgente.**

Sin embargo, desde mi experiencia observo, cada año con más claridad y con necesidad de más premura en mejorarlo, que **los llamados "apoyos por arriba", léase ayudas a niños de mayor capacidad, más talentosos, más lúcidos, más inteligentes, más ingeniosos, brillan por su ausencia en estas últimas reformas educativas.** Se me podrá decir que la atención a esos alumnos más capaces se recogen en las leyes promulgadas, y quizás sea verdad, pero como profesor ya maduro que soy *-31 años de docencia-* tengo que decir que en la práctica docente diaria de colegios e institutos a esos alumnos antes llamados superdotados no se les presta atención e interés especial, ni trabajan ni aprenden de acuerdo a sus capacidades, ni desarrollan todo el potencial humano e intelectual del que están dotados.

Las causas de ese "cierto abandono" educativo de estos alumnos listos, y/o precoces, y/o creativos son muy diversas, y quizás enumeremos algunas en otra reflexión, pero **la realidad descrita es palpable en gran cantidad de centros educativos.** Como consecuencia de esta situación, estos alumnos, que cada uno tiene algo de "genio", o de brillante, o de creativo, o de mente necesaria para la sociedad, se frustran, viven sin motivaciones, no se integran adecuadamente, enmascaran sus verdaderas habilidades, son frecuentemente incomprensidos, hasta se hastían en las aulas y su estabilidad emocional dista mucho de la que necesitan y pueden llegar a desarrollar. Y, además, **en último término, es la sociedad la que pierde todo ese potencial humano (pensadores, científicos, técnicos, escritores, líderes, etc.) del que cada día estamos más necesitados en estos tiempos de significativa confusión en tantas y tan diversas cosas.**



EJERCICIOS PARA RESOLVER:

Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números expresados en cada ejercicio. Hasta el ejercicio nº 10, de las dos formas: a) desarrollando todos sus divisores y los múltiplos necesarios, y b) por factorización. Del ejercicio nº 11 en adelante solo factorizando. En todos debes poner la solución recuadrada y efectuar los productos de los que salen **el m.c.d. y el m.c.m.**, pero teniendo en cuenta que cuando para hallar el mínimo se necesite hacer muchas operaciones, pues no lo hagas.

Los ejercicios 1, 3, 5, 11 y 19 están resueltos en las páginas 98 y 99.

1	35 y 50	21	125 y 3125
2	24 y 80	22	169, 121 y 125
3	15, 12, 20 y 24	23	2201 y 1411
4	56 y 99	24	18, 6, 36 y 9
5	18, 20 y 24	25	12, 3 y 8
6	10, 25 y 40	26	810, 270 y 1350
7	22, 21 y 30	27	210, 450 y 720
8	71 y 23	28	1296 y 6125
9	13 y 11	29	1200 y 700
10	90 y 63	30	320, 1600 y 2240
11	180 y 600	31	2304 y 3267
12	15, 24 y 45	32	13000 y 7000
13	12, 30 y 60	33	704, 1250 y 3159
14	8, 18, 20 y 60	34	24, 50 y 60
15	15, 9, 45 y 90	35	14, 30 y 45
16	9072 y 360	36	400, 600 y 700
17	100 y 99	37	1001 y 1029
18	12100 y 441	38	250, 7500 y 1500
19	1008, 360 y 3564	39	1210 y 490
20	720, 168 y 675	40	9240 y 900

Estos 40 ejercicios no son para hacerlos todos en un curso, sino para varios y para elegir de entre ellos unos para los más adelantados, otros para los normales y otros para los necesitados de apoyo, de ahí la variedad y dificultad planteada.

2.6.-Problemas sobre divisibilidad.

RESUELTOS:

- 1) Tres camioneros que hacen viajes internacionales tienen varios destinos coincidentes. Uno de ellos es Berlín, adonde el 1º va cada 24 días, el 2º cada 18 y el 3º cada 20 días. ¿Cada cuántos días se encuentran los tres en Berlín? Si la última vez fue el 3 de enero de este año, ¿qué día volverán a encontrarse de seguir todo igual?

En este problema se trata de hallar el mínimo común múltiplo de los tres números.

$$\left[\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \end{array} \right] \rightarrow \text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = \mathbf{360}$$

O sea, que se encuentran **cada 360 días** en Berlín. Si la última vez fue el 3 de enero, se vuelven a ver en Berlín **el 29 de diciembre**. Si ese año es bisiesto, entonces sería el día 28.

- 2) Un salón se va a embaldosar. Si las dimensiones son de 2'4 x 3'6 metros, ¿qué medidas máximas pueden tener las baldosas?

En este problema se trata de hallar el máximo común divisor de los dos números. Como son decimales, por ejemplo los pasamos a decímetros (dm):

$$\left\{ \begin{array}{l} 2'4 \text{ m} \rightarrow 2'4 \cdot 10 = 24 \text{ dm} \\ 3'6 \text{ m} \rightarrow 3'6 \cdot 10 = 36 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array} \right] \rightarrow \text{m.c.d.} = 2^2 \cdot 3 = \mathbf{12}$$

Ajuste final: 12 dm → 12 : 10 = 1'2 m
Es decir, las baldosas mayores que se pueden colocar serían cuadrados **de 1'2 x 1'2 metros**.

- 3) Sin hacer operaciones, sólo a simple vista. Dada la expresión $2^3 \cdot 5^5$, ¿por qué habría que multiplicar para obtener la cantidad de 100000?

100000 es igual a $2^5 \cdot 5^5$, luego nos falta 2^2 .

- 4) Si para hallar el m.c.m. de varios números un alumno aventajado y bastante experto no hace las barras sino que los multiplica los tres, ¿qué se puede decir de los números dados?

Pues que se ha dado cuenta que los números que le han dado son **primos entre sí**.

Normas para la resolución de PROBLEMAS:

Fíjate bien en las siguientes normas, léelas y procura recordarlas cuando resuelvas problemas. Si eres constante te ayudarán, y no sólo a resolverlos mejor, sino a solucionarlos con habilidad y rapidez, incluso a encontrar tu propia satisfacción personal.

- 1) **LEE EL PROBLEMA** despacio, de una forma global, sin detenerte en los detalles.
- 2) **VUELVE A LEERLO** otra vez, pero ahora procura quedarte con detalles significativos del problema.
- 3) **RELEE POR TERCERA VEZ** el enunciado del problema. Y después debes ser capaz de enunciarlo sin leerlo. Pero no se trata de aprendértelo de memoria, sino de comprobar con esta tercera lectura que lo has comprendido perfectamente y, por consiguiente, estás capacitado para explicárselo a alguien a tu manera sin necesidad de leerlo.
- 4) Ahora ya estás en condiciones de analizar el problema, es decir, de pensar en él. A este paso lo llamaremos **PLANTEAMIENTO** del problema. Se trata de descubrir qué operaciones debes ir realizando para llegar a la solución o respuesta.
- 5) Lo más importante de un problema, y de ahí su dificultad, es **DESCUBRIR QUÉ OPERACIONES**, métodos o teoremas vamos a emplear para resolverlo. Debes retener mentalmente el proceso de las operaciones que vas a realizar y, una vez que estés seguro, empezar a desarrollarlo en tu cuaderno o folio.
- 6) Cuando realices las operaciones, apliques fórmulas, utilices teoremas, etc., **NO TENGAS PRISA**. La rapidez la irás adquiriendo con el tiempo y con una actividad progresiva y constante. Es una pena que un alumno consiga plantear bien un problema, que es lo difícil, y como consecuencia de las prisas no logre culminar una solución correcta.
- 7) Procura **SUBRAYAR LAS CANTIDADES** o datos iniciales que vas obteniendo en problemas un poco más largos; ellas te servirán de puente para alcanzar las siguientes.
- 8) La/s solución/es debes distinguirla/s de todo el desarrollo, enmarcándolas en un **RECUADRO** hecho correctamente y añadiéndole unas **PALABRAS EXPLICATIVAS** que hagan referencia a lo que te preguntaban en el enunciado.
- 9) Muchas veces podrás comprobar la/s respuesta/s que obtienes utilizando un poco de **SENTIDO COMÚN**, cualidad muy en desuso hoy día. Veamos algunos ejemplos:
 - a) Si te pedían repartir 5.000 euros y en una de las partes te da 6.217 euros, pues el sentido común te dice que el problema está mal, ¿entiendes?
 - b) Si te piden hallar el precio de una estupenda moto Honda que vale 8500 euros, una vez rebajado el % de descuento, y te sale que pagarás una cantidad mayor que la marcada, pues eso demostrará que está el problema mal resuelto, y que si pones eso como solución, pues que tienes poco sentido común.
- 10) No olvides que siempre es muy conveniente **REPASAR**; con ello se detectan errores, tontos o no, que inevitablemente se tienen en multitud de ocasiones. Nosotros los profesores, cuando preparamos las soluciones de un control, hay veces que también cometemos errores, por lo menos yo.

Estas normas no son para aprendértelas de memoria, sino para que te acostumbres poco a poco a emplearlas. A medio plazo, poniendo interés, perseverancia y esfuerzo, apreciarás tus logros.

PARA RESOLVER:

Los ejercicios 10, 11, 12, 13 y 14 están resueltos en la página 103.

- 5) Halla los tres primeros múltiplos comunes a los números 80 y 108.
- 6) En una compañía de ejército del aire hay una cantidad de soldados que no sobrepasa la cifra de 1.000. Se sabe que pueden formar (hacer formaciones en filas iguales) en grupos de 24, 27 y 32 sin que en esas filas o columnas sobre ni falte ninguno. ¿Cuántos son?
- 7) ¿Qué deduces si te encuentras que al hallar el m.c.m. de varios números se obtiene uno de ellos?
- 8) Toni, alumna de 1º de ESO, recorre en 120 segundos una vuelta completa al estadio de césped de Villafranca, y Mª José, de 2º de ESO, tarda 108 segundos en el mismo recorrido. Si salen las dos al mismo tiempo, calcula lo siguiente:
 - a) Al cabo de cuántos minutos se volverán a encontrar en la salida.
 - b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada una?
 - c) Si cada 90 segundos de carrera pierden 65 gramos cada una, ¿cuántos Kgs perdieron entre ambas hasta coincidir la primera vez en la salida?
- 9) Si tenemos este producto de factores, $2^4 \cdot 5^2$, ¿por qué deberás multiplicarlo para obtener la unidad seguida de siete ceros?
- 10) Sin hacer operaciones. ¿Por qué debes multiplicar el producto $3^4 \cdot 7^2$ para obtener 21^4 .
- 11) ¿Cuál es el m. c. d. de números primos entre sí?
- 12) David tiene en la bodega recipientes de las siguientes capacidades: 120 cl - 18 dl - 2 l y 0'4 dal. ¿Cuál será la cabida de un tonel que se puede llenar exactamente con dichos recipientes?
- 13) Una compañía dedicada al transporte en barcos de personas que disfrutan de sus vacaciones dispone de 4 barcos que tardan, sucesivamente, 6, 8, 10 y 12 días en hacer una travesía por distintos mares. Se pide calcular lo siguiente:

- a) ¿A cuánto asciende el gasto de combustible de la compañía, entre los cuatro barcos, desde que salen todos juntos el día 1 de junio, desde el puerto de Málaga, hasta que vuelven a coincidir en él, si cada viaje de ida y vuelta gastan, por término medio, 4.500 litros de combustible a razón de 1'2 euros/l.?
 - b) Curro se embarcó en el que hacía el viaje de 6 días y Paco en el de 12 días; como no se veían cada vez que volvían a puerto, sino al cabo de varios viajes, calcula estas dos cosas:
 - 1ª) ¿Cuántos viajes hizo Curro y cuántos Paco hasta que coincidieron una vez?
 - 2ª) Cuando se encontraron en el puerto tardaron 2 días en volver a Villafranca, y el curso empezaba el día 3 de octubre. ¿Llegaron a tiempo de empezar las clases en el Instituto?
- 14) Lidia, Rosa, Almudena y Silvia, excelentes deportistas del primer ciclo de ESO, son capaces de correr 10'5 km, 112 hm, 12600 m y 168.000 dm, respectivamente, en una semana de entrenamientos. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de esas distancias en hectómetros?



Una experiencia para poner en práctica, y si no nos da resultado, volver a intentarlo, al menos dos o tres veces, pero con interés y no pensando de antemano que saldrá mal. Y, por supuesto, si nos resulta positiva, pues seguir actuando en esa línea, todavía con más razón. Es la siguiente:

Decidir cambiar la forma negativa en que tratamos y valoramos a alguien (familiar, amigo, conocido, alumno, profesor, etc.) muy cercano a nosotros. O sea, tratar a esa persona con más afecto, dándole confianza, considerando de forma más positiva sus opiniones y/o acciones, demostrándole realmente mayor respeto, dedicándole algo más tiempo del habitual, haciéndole creer firmemente que es capaz de mejorar su carácter y que tiene posibilidades de aumentar el rendimiento en sus quehaceres. O sea, dándole a entender que la valoramos y que creemos en sus posibilidades.



También, **que ese cambio en tu actitud hacia dicha persona no sea "flor de un día"**, sino firme decisión para una significativa temporada de persistir en ese cambio de trato hacia ella.

Quizás, después, lo intentemos con otra. No te resignes y pruébalo, acaso te encuentres bastantes sorpresas provechosas y unas enormes satisfacciones.

