## **<u>Tema</u> <u>5</u>**:

## Iniciación al Álgebra. Ecuaciones y problemas.

#### **OBJETIVOS:**

- 1. Traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico formulando ecuaciones.
- Saber reconocer expresiones algebraicas.
- 3. Extraer factor común en una expresión algebraica.
- 4. Calcular sumas, productos y cocientes de expresiones algebraicas.
- 5. Conocer las identidades notables y aplicarlas al cálculo y simplificación de expresiones algebraicas.
- 6. Resolver ecuaciones de primer grado, sistemas y ecuaciones de 2º grado, comprobando las soluciones obtenidas.
- 7. Resolver problemas utilizando ecuaciones de primer grado, sistemas y ecuaciones de 2º grado.
- 8. Saber representar gráficamente ecuaciones.

#### **CONTENIDOS:**

#### De conceptos:

- 1. Introducción.
- 2. El lenguaje ordinario, el lenguaje numérico y el lenguaje algebraico.
- 3. Expresiones algebraicas.
- 4. Términos o monomios.
- 5. Binomios.
- 6. Polinomios.
- 7. Valor numérico de una expresión algebraica.
- 8. Operaciones con monomios.
- 9. Producto de binomios.
- 10. Identidades notables.
- 11. Factorización de expresiones algebraicas.
- 12. Fracciones algebraicas.
- 13. Operaciones con polinomios.

- 14. Igualdad, identidad y ecuación.
- 15. Estudio de ecuaciones.
- 16. Despeje de incógnitas.
- 17. Resolución de problemas mediante ecuaciones.
- 18. Sistemas de ecuaciones.
- 19. Problemas sobre sistemas de ecuaciones.
- 20. Ecuaciones de 2º grado.
- 21. Problemas a resolver con ecuaciones de  $2^{\circ}$  grado.
- 22. Otros conceptos importantes sobre ecuaciones de 2º grado.
- 23. Representación gráfica de ecuaciones.

Además, como en todos los temas, ejercicios y problemas de repaso de este tema y los anteriores y modelos de controles diversos con las soluciones correspondientes.

Y, por supuesto, algunas reflexiones.

#### De procedimientos:

- 1. Diferenciación entre expresiones numéricas y expresiones algebraicas.
- 2. Aplicación de las identidades notables en los procesos de cálculo y de simplificación de expresiones algebraicas.
- 3. Simplificación de expresiones algebraicas operando, simplificando y extrayendo factor común.
- 4. Resolución de ecuaciones de primer grado y comprobación del resultado obtenido.
- 5. Traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico para formular ecuaciones de primer grado.
- 6. Resolución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones de primer grado.

#### De actitudes:

- Reconocimiento y valoración de la utilidad del lenguaje algebraico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.
- 2. Incorporación del lenguaje algebraico a la forma de proceder habitual para resolver situaciones problemáticas.
- 3. Interés y valoración crítica del uso del lenguaje algebraico en informaciones de los medios de comunicación habituales.
- 4. Reconocimiento de la utilidad de la calculadora para facilitar el cálculo en determinadas situaciones.
- Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos que puedan expresarse algebraicamente.
   Gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento de las expresiones algebraicas.

## 5.1.- Introducción.

ALGEBRA es una parte (rama) de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas.

Las operaciones fundamentales del Álgebra, igual que en la Aritmética, son adición (suma), sustracción (resta), multiplicación (producto), división (cociente), hallar potencias (potenciación) y cálculo de raíces (radicación). En realidad, el Álgebra es una Aritmética de las letras, porque hace las mismas operaciones pero empleando letras, bueno, no sólo letras, además también éstas van con números.

**E**s comprensible que en los primeros días que se explica Álgebra se piense que cómo se van a sumar o restar letras, es decir, cómo se van a operar las letras. Veamos:

En una empresa se decide que "la sexta parte de los presupuestos se destine a material, la mitad a los sueldos de empleados, una treintaava parte para averías, la décima parte para mejoras y el resto en investigación". Está claro que escribir todo este texto ocupa bastantes palabras. Bien, pues el Álgebra nos proporciona la forma de expresar todo eso de forma más reducida. Basta con llamarle con letras a cada uno de los diversos conceptos del presupuesto: "A" (material), "B" (sueldos), "C" (averías), "D" ( mejoras) y "E" (investigación).

Escribiríamos así:

$$A + B + C + D + E = T$$

Observa que hemos llamado con la letra "T" a la suma de todo.

También, si queremos expresar cada partida relacionándola (en función) con el total del presupuesto, lo haríamos así:

$$A = \frac{T}{6}$$
;  $B = \frac{T}{2}$ ;  $C = \frac{T}{30}$ ;  $D = \frac{T}{10}$ ;  $E = \frac{4T}{5}$ .

EXTRA: ¿Cómo se ha obtenido la última expresión destinada a la investigación (E)?

Cada una de las <u>expresiones</u> anteriores, llamadas <u>algebraicas</u>, es una fórmula (ecuación), o sea, una expresión de letras y números que nos deja indicadas las operaciones que hay que realizar para calcular algo (una letra) una vez conocidas otras cosas (otras letras).

Si al año siguiente se decidiera modificar los presupuestos y, por ejemplo, se pensara reducir a la mitad los gastos de material, aumentar al doble los de mejoras y dedicar sólo las tres quintas partes a la investigación, pero manteniendo el mismo presupuesto, pues con la ayuda del Álgebra lo expresamos así:

$$\frac{A}{6}$$
 + B + C + 2D +  $\frac{3}{5}$ E = T

Puede pensarse que el Álgebra consiste entonces en una forma simple de escribir las cosas. No es así, en primer lugar porque <u>una fórmula es el resultado de una cantidad de operaciones realizadas sin las que no hubiera sido posible aplicar la Aritmética al caso o problema planteado, y en segundo lugar porque los ejemplos que estamos poniendo son muy sencillos y sin dificultades excesivas, o sea, Álgebra Elemental.</u>

La experiencia nos demuestra que la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra suele presentar dificultades. Es evidente, porque pasamos de las matemáticas concretas (sólo números) a otras más abstractas (letras, símbolos y números), pero es indudable la utilidad de esta parte de las Matemáticas. El Álgebra, con sus expresiones algebraicas, con sus fórmulas, con sus ecuaciones, nos permite plantear muchas operaciones aritméticas que se efectuarán cuando se sustituyan las letras por sus respectivos valores numéricos. Con las fórmulas o ecuaciones quedamos las operaciones indicadas y se evitan las confusiones. Así escribimos de forma simple y rápida las diversas relaciones de los elementos estudiados. Además, sabemos a simple vista y en un mínimo espacio todas las operaciones que debemos hacer sin necesidad de aprenderlas de memoria.

La aritmética, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, sólo da casos particulares. Por ejemplo: en el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que tienen de lado a los catetos, la aritmética expresa esta relación con casos concretos (particulares) de triángulos; por ejemplo, en un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, la aritmética lo expresa así:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . El álgebra, en cambio, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema de Pitágoras:  $a^2 + b^2 = c^2$ . Donde "a" y "b" representan los valores de los catetos y "c" el valor de su hipotenusa en cualquier triángulo rectángulo. Y a esto es a lo que llamamos generalizar, a expresar mediante una ecuación (fórmula) las operaciones a realizar, sirviéndonos esta fórmula para todos los casos.

# 5.2.- El lenguaje ordinario, el lenguaje numérico y el lenguaje algebraico.

**Lenguaje** ordinario → el usado habitualmente para comunicarnos.

**Lenguaje** numérico → el usado en expresiones matemáticas que contienen sólo números.

**Lenguaje** algebraico → el usado en expresiones matemáticas que contienen números y letras.

**V**eamos un ejemplo:

ancho = 
$$18$$
; largo =  $3 \cdot 18 = 54$   
 $\rightarrow$  LENGUAJE NUMÉRICO.

Cualquier alumno piensa, si no domina las Matemáticas, y sobre todo si no sabe algo de Álgebra, que de los lenguajes mencionados es mejor, para enterarse bien y comprenderlo, el 1º ó el 2º, o sea, el lenguaje ordinario o numérico. Bien, pues no es así; incluso ni el 2º lenguaje mencionado, el numérico, es el mejor, el más necesario. Veamos algunas diferencias que nos hagan comprender que el lenguaje más conveniente y preciso es el LENGUAJE ALGEBRAICO.

El lenguaje algebraico es más breve que el numérico. Es decir, es más corto, abreviado, conciso, reducido. En una palabra más exacto.

Por ejemplo, en el lenguaje numérico expresaríamos los múltiplos de cinco así:

Y en el lenguaje algebraico lo haríamos con esta expresión:

( recuerda que, aunque no pongamos nada, entre el 5 y la "n" hay un punto de multiplicar, o sea, es 5 . n, pero no se suele poner, y que "n" representa a un número natural) El <u>lenguaje</u> <u>algebraico</u> <u>nos permite</u> <u>generalizar, o sea, que nos vale para</u> <u>muchos casos, o mejor todavía, nos sirve</u> <u>universalmente.</u>

Por ejemplo, la propiedad asociativa de la multiplicación de números enteros expresada con lenguaje numérico se haría con múltiples expresiones de números:

$$[(-2), (-4)]$$
,  $5 = (+8)$ ,  $5 = 40$   
 $(-2)$ ,  $[(-4), 5] = (-2)$ ,  $(-20) = 40$ 

$$[(-3), (-1)], (-6) = (+3), (-6) = -18$$
  
 $(-3), [(-1), (-6)] = (-3), (+6) = -18$ 

y, por supuesto, muchos más ejemplos.

Sin embargo, el lenguaje algebraico nos deja expresar la propiedad asociativa con una sola expresión que serviría para todos los ejemplos, y sería así:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
  
donde "x", "y", "z" representan a números.

El lenguaje algebraico nos permite expresar aquellas cantidades que no conocemos y nos deja operar con ellas, aun siendo desconocidas.

**P**or ejemplo, hallar tres números consecutivos que sumen 63.

Llamamos:

"x" al primero,
"
$$x + 1$$
" al segundo y
" $x + 2$ " al tercero.

Luego la expresión algebraica de esos números desconocidos sería ésta:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 63$$

que es una ecuación, como ya veremos más adelante, y que al resolverla nos da la solución, o sea, los números pedidos en el ejemplo puesto, que son 20, 21 y 22 (20 + 21 + 22 = 63).

Así que <u>las expresiones algebraicas nos sirven para expresar en lenguaje matemático</u> (algebraico) <u>situaciones en las que desconocemos datos</u>. Veamos algunos ejercicios a continuación.

#### **EJEMPLOS RESUELTOS**:

Leng. ordinario

- 1) El doble de un número  $\rightarrow$  2 x
- 2) El cuadrado de una distancia  $\rightarrow x^2$
- 3) La edad que tenía hace 7 años  $\rightarrow$  x 7
- 4) El triple de la suma de  $a \ y \ b \ \rightarrow \ 3 \ . \ (a + b)$

Leng. algebraico

- 5) El cociente de dos números es  $10 \rightarrow \frac{x}{y} = 10$
- 6) La cuarta parte de un número disminuida en su cuadrado  $\rightarrow \frac{x}{4} - x^2$
- 7) El cubo de un número aumentado en el doble v disminuido en 3 unidades  $\rightarrow x^3 + 2x - 3$
- 8) La quinta parte más la mitad de una cantidad ightarrow $\rightarrow \frac{b}{5} + \frac{b}{2}$
- 9) Diferencia de dos cuadrados  $\rightarrow$  x  $^2$  y  $^2$
- 10) El precio de "x" litros de gasolina a 1'20 euros  $\rightarrow$  1'2 x
- 11) La cantidad de patas de cierto nº de gatos  $\rightarrow$  4 x
- 12) La cantidad de patas de cierto nº de perdices  $\rightarrow$  2 x
- 13) El doble de la edad que tendré dentro de 6 años  $\,\rightarrow\,$  $\rightarrow$  2. (a + 6)
- 14) La mitad de la edad que tenía hace 5 años  $\rightarrow$
- 15) El perímetro de un pentágono regular  $\rightarrow$  5 n
- 16) El 75 % de una cantidad  $\rightarrow$  0'75 x  $\acute{0}$   $\frac{75 \text{ x}}{100}$
- 17) El quíntuplo de un no, disminuido en su mitad, más el triple menos 12 unidades  $\rightarrow$  5 x  $-\frac{x}{2}$  + 3 x - 12
- 18) Un número y su cubo suman  $120 \rightarrow x + x^3 = 120$
- 19) El triple de un número disminuido en 15 unidades es igual a 45  $\rightarrow$  3 x - 15 = 45
- 20) El precio de "x" kg. de naranjas a 1'65 euros más "y" kg. de plátanos a 2'95 euros  $\rightarrow$  1'65 x + 2'95 y

: OJO ! Muchos de los ejercicios para resolver de los cuadros de las páginas 322 a 346 están resueltos en las páginas 400 a 406 (apartado siguiente del índice de este tema 5).

#### **EJERCICIOS PARA RESOLVER:**

Transforma en lenguaje algebraico las expresiones descritas en lenguaje ordinario.

- 21) La suma de un número menos su cuarta parte es igual a 75.
- **22)** El perímetro de un hexágono regular.
- 23) La décima parte de un número más 9 unidades.
- **24)** La suma de tres números consecutivos es 30.
- **25)** La edad que tendré dentro de tres lustros.

- 26) La suma de tres números pares consecutivos es igual a 66.
- La cuarta parte del perímetro de un octógono.
- El triple de la edad que tenía hace 6 años es igual a **28**)
- El producto de tres números impares consecutivos.
- La diferencia de la edad de dos hermanos es 9 años.
- 31) Dos números suman 40, y su producto es 300.
- El producto de un número y su mitad.
- El perímetro de un triángulo equilátero es igual a
- 34) Auméntale 8 al doble del producto de dos números que suman 21.
- **35)** La mitad de un número que es triple de un múltiplo de 5.
- **36)** Los 2/7 de un número más su mitad.
- La suma de las edades de dos hermanas que se llevan 7 años.
- **38**) Quítale una docena a la edad que tenía hace una decena de años.
- El triple de la suma de dos números impares consecutivos.
- El 60 % de una cierta cantidad.

## 5.3.- Expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras separados por los signos de las operaciones aritméticas  $[+-.:()^n \sqrt{}]$ .

**E**n los ejercicios de Álgebra estamos operando con relaciones numéricas donde una/s cantidad/es es/son desconocida/s.

**E**jemplos de expresiones algebraicas:

A las letras se les denomina variables, y representan a números que son desconocidos o indeterminados hasta tanto no se calculen (resolviendo la ecuación, como veremos más adelante). A continuación estudiaremos distintas clases de expresiones algebraicas.

## 5.4.- Términos o monomios.

**D**efiniciones de término o monomio:

- Conjunto de números y letras unidos por las operaciones de multiplicación, y/o división, y/o potenciación y/o radicación
- Producto de uno o varios números por una o varias letras.
- Otra <u>definición menos</u> <u>ortodoxa</u>, pero quizás más comprensible para ti: <u>un término o monomio lo forman el signo</u>, <u>el número y las letras que hay entre cada signo</u> + y -.

Partes que podemos distinguir en los monomios o términos:

#### Coeficiente.

Coeficiente es el **número** (natural, entero, fraccionario, etc.) que lleva cada **término**. Generalmente se escribe a la izquierda, y por supuesto con el signo correspondiente.

#### • Parte literal (variable/s).

La parte literal de un término o monomio la forman las letras que lo componen con sus respectivos exponentes.

#### • Grado.

El grado de un término o monomio es el exponente mayor al que va elevado la parte literal cuando ésta es de una sola letra; si el término tiene más de una letra, el grado es la suma de los exponentes de dichas variables.

Estudiemos con ejemplos estos conceptos:

1) 
$$-2 \times \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ coeficiente } \rightarrow -2 \\ \circ \text{ parte literal } \rightarrow \times \\ \circ \text{ grado } \rightarrow 1 \text{ [exponente de } \times (x^1) \text{]} \end{cases}$$

2)  $6 \times^3 \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ coeficiente } \rightarrow 6 \\ \circ \text{ parte literal } \rightarrow \times^3 \\ \circ \text{ grado } \rightarrow 3 \text{ [exponente de } \times (x^3) \text{]} \end{cases}$ 

3)  $-\frac{3 \text{ a}^3 \text{ b}}{4} \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ coeficiente } \rightarrow -\frac{3}{4} \\ \circ \text{ parte literal } \rightarrow \text{ a}^3 \text{ b} \\ \circ \text{ grado } \rightarrow 4 \text{ [suma de exponentes: ]} \\ \text{ a}^3 \text{ b}^1 (3+1) \end{cases}$ 

## 5.5.- Binomios.

**E**s un conjunto de dos términos (dos monomios) que están sumando y/o restando.

1) 
$$5 \times -3$$
; 2)  $\frac{4}{3} \times + \times^2$ ; 3)  $\frac{4 \times^2}{7} - \frac{6 \times 8}{8}$ ;  
4)  $7 - a^3$ ; 5)  $m - 1$ ; 6)  $-a + \frac{3}{10}b$ .

## 5.6.- Polinomios.

Es toda suma algebraica (+, -) de dos o más monomios, es decir, de dos o más términos. Bueno, en realidad con dos términos se puede considerar polinomio, pero es más habitual llamarle binomio.

Partes que podemos distinguir en los polinomios:

#### Dentro de cada término:

#### Coeficiente.

Coeficiente es el <u>número</u> (natural, entero, fraccionario, etc.) que lleva cada <u>término</u>. Generalmente se escribe a la izquierda, y por supuesto con el signo correspondiente.

#### Parte <u>literal</u> (variable/s).

La parte literal de un término o monomio la forman <u>las</u> <u>letras</u> que lo componen con sus respectivos exponentes.

#### Grado.

El grado de un término o monomio es <u>el exponente</u> <u>mayor</u> al que va elevado la parte literal cuando ésta es de una sola letra; si el término tiene más de una letra, el grado es la suma de los exponentes de dichas variables.

#### Entre los distintos términos:

#### • <u>Términos de la variable o de la incógnita</u>.

Son los **términos** que contienen a la/s **letra/s**.

#### • Términos independientes o númericos.

**S**on los términos constituidos <u>sólo</u> por <u>números</u>. En realidad, estos términos estarían formados por aquellos cuya parte literal tiene como exponente **0**, con lo cual sólo vale la unidad, y así queda únicamente el número.

#### • <u>Términos semejantes</u>.

Son aquellos que tienen <u>la misma parte literal</u>, es decir, la/s misma/s letra/s, y, por supuesto, con el/los mismo/s exponente/s. Así, los términos semejantes sólo se diferencian en los coeficientes. Evidentemente, los que no tienen parte literal, o sea, los numéricos, son también todos semejantes.

**EJERCICIOS** sobre las partes a distinguir entre monomios, binomios o polinomios.

# 1) $4 - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{2} - 5x$ • de 4 términos: $\left[4\right]$ ; $\left[-\frac{x}{3}\right]$ ; $\left[+\frac{x^3}{2}\right]$ ; $\left[-5x\right]$ $\rightarrow 4, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}, -5.$ o son términos literales o de la incógnita: $\rightarrow \left\{ \left[ -\frac{\mathbf{x}}{3} \right]; \left| +\frac{\mathbf{x}^3}{2} \right|; \left[ -5\mathbf{x} \right] \right.$ o son términos independientes: [4] o reducimos términos semejantes: $-\frac{1}{3}x - 5x = \left(\frac{-1}{3} - \frac{5}{1}\right)x = \frac{-16}{3}x$ $\mid \circ \text{ grado } \rightarrow 3 \mid \text{ exponente de } \left\{ + \frac{x^3}{2} \right\} (x^3) \mid$ 2) $6 \times ^3 \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ es un monomio.} \\ \circ \text{ coeficiente } \rightarrow 6 \\ \circ \text{ parte literal } \rightarrow \times ^3 \\ \circ \text{ grado } \rightarrow 3 \text{ [exponente de } \times (\times^3) \text{]} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 3 & \frac{5 \times y^2}{6} \\ 3 & \frac{5 \times y^2}{6} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ coeficiente } \rightarrow -\frac{5}{6} \\ \circ \text{ parte literal } \rightarrow \times y^2 \\ \circ \text{ grado } \rightarrow 3 \begin{cases} \text{ suma de exponentes:} \\ x^1 y^2 (1+2) \end{cases}$ 4) $5x^3 - 5 + \frac{x}{3} - x$ 5) $-7 + 8x^4 - \frac{2x}{5} + 10 + x - 3x^4$ 7) $-\frac{3}{4} \times 3$ 8) $-2x + x^2 - \frac{1}{3} + 4x - 5$ 9) $1 - 2x + \frac{4}{5}x^3 - x^3 + x - x^2 + \frac{8}{6}$ 11) $\frac{2}{5}x - \frac{1}{6}$ 12) $4x - \frac{x}{2} + x$ 13) $x^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{2} - 1 + x$ 14) $x^2 - x$

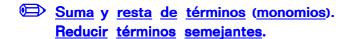
# 5.7.- <u>Valor numérico</u> <u>de una</u> <u>expresión algebraica</u>.

Para hallar el valor numérico de una expresión algebraica se sustituye/n el/los valor/es de la/s variable/s y se resuelven las operaciones expresadas en dicha expresión.

#### **EJERCICIOS** sobre valor numérico.

15) 
$$\begin{cases} 3x - 7 \rightarrow \text{para } x = -2 \\ 3x - 7 = 3.(-2) - 7 = -6 - 7 = -13 \end{cases}$$
16) 
$$\begin{cases} 5 - 6a \rightarrow \text{para } a = 4 \\ 5 - 6a = 5 - 6.4 = 5 - 24 = -19 \end{cases}$$
17) 
$$\begin{cases} 7x - 3y \rightarrow \text{para } \left\{ x = -4 ; y = -10 \right\} \\ 7x - 3y = 7.(-4) - 3.(-10) = -28 + 30 = 2 \end{cases}$$
18) 
$$\begin{cases} z - 9 \rightarrow \text{para } z = 6 \\ z - 9 = 6 - 9 = -3 \end{cases}$$
19) 
$$\begin{cases} -10 - 2a + b \rightarrow \text{para } \left\{ a = 5 ; b = 20 \right\} \\ -10 - 2a + b = -10 - 2.5 + 20 = -10 - 10 + 20 = 0 \end{cases}$$
19) 
$$\begin{cases} -3x^2 - 8 - y \rightarrow \text{para } \left\{ x = -6 ; y = -12 \right\} \\ -3x^2 - 8 - y \rightarrow -3.(-6)^2 - 8 - (-12) = -108 - 8 + 12 = -104 \end{cases}$$
21) 
$$5x + 12 \rightarrow \text{para } x = -2$$
22) 
$$7 - 3a + 4b \rightarrow \text{para } \left\{ a = -5 \\ b = 3 \right\} \end{cases}$$
23) 
$$4x - y + 10 - 5 \rightarrow \text{para } \left\{ x = -3 \\ y = -8 \right\} \end{cases}$$
24) 
$$8 - 7a \rightarrow \text{para } a = 3$$
25) 
$$2a^2 - 25 - 7 \rightarrow \text{para } a = -4$$
26) 
$$x^2 - 3xy + 5y \rightarrow \text{para } \left\{ x = -1 \\ y = -6 \right\} \end{cases}$$
27) 
$$x^2 - 6 \rightarrow \text{para } x = -3$$
28) 
$$-6y^2 - x^4 + 5z \rightarrow \text{para } \left\{ x = -5 \\ y = 3 \\ z = 0 \right\} \end{cases}$$
29) 
$$m^2 + n^2 + mn \rightarrow \text{para } \left\{ a = -7 \\ b = -2 \right\}$$
31) 
$$c - 5 \rightarrow \text{para } c = -4$$
32) 
$$-a^2 + 3b - c \rightarrow \text{para } c = -4$$

## 5.8.- Operaciones con monomios.



Para hacer sumas y/o restas de términos es <u>necesario</u> que <u>éstos sean semejantes</u>, es decir, que tengan la misma parte literal. Lo realizaremos <u>sacando factor común</u> a la parte literal. Si no es así, es decir, si no todos los términos son semejantes, se saca factor común sólo a los factores (números y/o letras) posibles.

1) 
$$2x - 6 + 7x - 12 \rightarrow \begin{cases} \circ (2 + 7) x = 9x \\ \circ - 6 - 12 = -18 \end{cases}$$
  
=  $9x - 18$ 

Bueno, los que ya saben esto bien, es decir, los que lo dominan, lo hacen directamente así:

$$2x - 6 + 7x - 12 = 9x - 18$$

$$\frac{1}{2}x^{2} - 12 + 8x - \frac{1}{2}x + 5x^{2} - 1 \Rightarrow \begin{cases}
\circ (1+5)x^{2} = 6x^{2} \\
\circ (8-1)x = 7x \\
\circ -12 - 1 = -13
\end{cases}$$

$$= 6x^{2} + 7x - 13$$

3) 
$$m^3 - 9m + 7 - 5m^2 + m - m^3 \Rightarrow \text{veamos}:$$
  
 $1m^3 - 9m + 7 - 5m^2 + 1m - 1m^3 \Rightarrow$ 

$$\rightarrow \begin{cases}
\circ (1-1) \text{ m}^3 = 0 \text{ m}^3 = 0 \\
\circ (-9+1) \text{ m} = -8 \text{ m}
\end{cases}$$

$$= -5m^2 - 8m - 7$$

4) 
$$3a^2 + 5ab - 2a + 7 - ab =$$
  
=  $3a^2 + (5-1)ab - 2a + 7 =$ 

$$= 3a^2 + 4ab - 2a + 7$$

5) 
$$4x + 5 - 10x - 9 - x =$$
  
=  $4x + 5 - 10x - 9 - 1x =$   
=  $(4 - 10 - 1)x + (5 - 9) =$   
=  $-7x - 4$ 

Ya lo haremos sin tantos pasos:

$$6) - 5 - x + 10x - 6 = 9x - 11$$

7) 
$$4x^2 - 7 + x - a = 4x^2 - 7 + x - a$$
  
 $\rightarrow$  Igual, porque no hay términos semejantes.

8) 
$$6x - xy + x^2 - 5xy + x =$$
  
=  $x^2 - 6xy + 7x$ 

9) 
$$-1 + a - 3ab + 7 - a + a^2 =$$
  
=  $a^2 - 3ab + 6$ 

10) 
$$2-5x+x-8+4x+6=0$$
  
=  $0x+0=0$ 

11) 
$$10a - 7 + a^2 - 9a + 3 =$$
  
=  $a^2 + a - 4$ 

#### PARA RESOLVER:

12) 
$$5 - x + 2x - 7 =$$

13) 
$$6a-2+8a-7a-9=$$

14) 
$$m^2 + m + m - m - m^3 =$$

15) 
$$2a - 3ab + 4 - 6ab + a =$$

16) 
$$5x - x + 8 - 2x + 7 - 1 =$$

17) 
$$8-4x+x-12+3x+1=$$

18) 
$$x^2 - x^3 + 8x^2 - x^3 + 1 =$$

19) 
$$z - y - 2z + y =$$

$$20) \quad 10 - 4x + 8 - x - 18 =$$

21) 
$$9 + 7xy - xy - 4 - 6xy - 5 =$$

22) 
$$a^2b - b + 7 - 5ab^2 - 4a^2b =$$

23) 
$$x - 2x^3y + y - 5xy^3 + x^3y =$$

$$24) \quad 2x - x + 5x - 10x - 3 =$$

$$25) \quad a - 7a + 4a - a + 9 + 8a =$$

26) 
$$xy + x - y + 3x - 4y + 5xy =$$

27) 
$$x^2 + 4a^2 - 7x^2 - a^2 - 4 =$$

28) 
$$4x^3 - x + x^2 + 9 =$$

29) 
$$x^3 - x^2 - 2x^3 + 4x^2 - x =$$

$$30)$$
  $1-2a-b+a^2=$ 

$$31) \quad 6a - a - 5 + 2a - 7a =$$

32) 
$$15x - 2 + x^2 + x - 7 - 6x^2 - x^2 =$$

La vida es para vivirla, qué duda cabe. Y todavía tiene más sentido esta frase referida a la vida adolescente y juvenil. No es bueno pasar esos años sin haberlos VIVIDO de forma adecuada. Sin embargo, hay que distinguir el modo en que se vivan esos años, porque no todas las formas de vivir son convenientes. Pensamos, muchos de los que hace tiempo

pasamos esas etapas, que cuanto antes te des cuenta de que no merece la pena obstinarse en querer y desear lo que no se tiene y, en cambio, antes aprendas a valorar lo que sí posees, mejor cauce habrás escogido para navegar en el



"río" confuso, complejo, desconcertante y complicado de la vida actual. Cuando no puedas hacer o ser lo que quieres, sé lo que eres.

Un poco enrevesada esta reflexión, ¿verdad? Pues "máscala", a ver si le sacas algún "provechoso sabor".

#### Sacar factor común.

En unidades anteriores ya hemos visto cómo se saca factor común. Recordemos: se trata de extraer fuera de un paréntesis aquellos factores y letras que sean comunes en los términos, quedando la parte restante de cada término dentro del paréntesis. Bueno, en realidad es lo que hemos explicado para sumar y/o restar los términos o monomios. Lo ponemos como otro apartado para reforzar estas operaciones y de paso añadimos términos con coeficientes fraccionarios en los que habitualmente se encuentran bastantes más dificultades.

Veamos algunos ejemplos:

a) 
$$6x - 5 + 8x - x + x^2 - 1 = iOJO!$$
 Recuerda que los términos que no llevan expresamente coeficiente tienen un  $\frac{1}{2}$ , no un  $\frac{1}{2}$ .

$$= \left(6 + 8 - \frac{1}{2}\right)x - 5 - 1 = x^2 + 13x - 6$$
b)  $-3a + \frac{5a}{6} - 2 - \frac{a}{10} + \frac{12}{20}a - \frac{3}{5} = \frac{1}{3}a$ 

$$\begin{cases} -2 - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5} \\ -2 - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5} \end{cases}$$
Solución  $\rightarrow -\frac{5}{3}a - \frac{13}{5}$ 
c)  $-x + \frac{3}{12}x + \frac{2x}{8} + 2 - \frac{5x}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}a$ 
Lo hacemos ahora así (por el mínimo):
$$= \frac{-24x + 6x + 6x + 48 - 20x - 8}{24} = \frac{-32x + 40}{24} = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$
d)  $7x - 2x + 4x - 3x + x = iOJO!$  Recuerda:  $7x - 2x + 4x - 3x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a$ 

#### Producto y división de monomios (términos).

Para realizar multiplicaciones de términos se hace el producto de los coeficientes y el de la parte literal.

Te aconsejo una <u>regla</u> <u>nemotécnica</u> (algo que te ayudará a recordar más fácilmente) para hallar con más sencillez estos productos. Es la **siguiente**:



Que quiere decir lo siguiente:

- **1º** → **S**e averigua el <u>signo</u> final del término resultante.
- 2° → Se resuelven las operaciones de los números.
- $3^{\circ} \rightarrow Se$  hacen las operaciones con las <u>letras</u>.

**V**eamos algunos ejemplos:

1) 
$$(2x^3) \cdot (-5x) = -10x^4$$

$$\begin{cases} \circ \text{ Signo } \Rightarrow -\\ \circ \text{ Número } \Rightarrow 2 \cdot 5 = 10\\ \circ \text{ Letra } \Rightarrow x^3 \cdot x = x^{3+1} = x^4 \end{cases}$$
2)  $(-30a^5) \cdot (-6a^2) = +5a^3$ 

$$\begin{cases} \circ \text{ Signo } \Rightarrow (-) \cdot (-) = +\\ \circ \text{ Número } \Rightarrow 30 \cdot 6 = 5\\ \circ \text{ Letra } \Rightarrow a^5 \cdot a^2 = a^{5-2} = a^3 \end{cases}$$
3)  $(-4a) \cdot (5x) \cdot (-a^3) \cdot (-2x^4) = \frac{-10a^4}{x^3}$ 

$$\begin{cases} \circ \text{ Signo } \Rightarrow (-) \cdot (-) \cdot (-) = -\\ \circ \text{ Número } \Rightarrow 4 \cdot 5 \cdot 2 = 10\\ \circ \text{ Letras } \Rightarrow a \cdot a^3 = a^4 ; x \cdot x^4 = x^{-3} \end{cases}$$
Uno más complicadillo para los que tienen más capacidad:
3a)  $(-3x^2y^4) \cdot (-\frac{2y}{x^5}) \cdot (\frac{x}{5y^2}) = 30x^{-4}y^7$ 

$$\begin{vmatrix} \text{Resultado que se puede} \\ \text{expresar también así:} \end{vmatrix} = \frac{30y^7}{x^4}$$

$$\begin{cases} \circ \text{ Signo } \Rightarrow (-) \cdot (-) = +\\ \circ \text{ Número } \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot (1/5) = 30\\ \circ \text{ Letras } \Rightarrow x^{2+(-5)-1} \cdot y^{4+1-(-2)} = x^{-4} \cdot y^7 \end{cases}$$

#### **EJERCICIOS PARA RESOLVER:**

: OJO ! Muchos de los ejercicios para resolver de los cuadros de las páginas 322 a 346 están resueltos en las páginas 400 a 406 (apartado siguiente del índice de este tema 5).

4) 
$$(3x).(-7x) =$$

5) 
$$(2x^3).(-5x).(-9) =$$

6) 
$$(a^2) \cdot (-a^2b) \cdot (-5a) \cdot (-3) =$$

7) 
$$(-x^2).(8x^3) =$$

8) 
$$-5x \cdot (-4) \cdot x =$$

9) 
$$3a^2 \cdot (-2)a \cdot (-b) \cdot (-1) =$$

10) 
$$\left(-6x^{2}\right)^{3}:\left(-36x^{6}\right)=$$

11) 
$$-40a$$
:  $(-5a^2)$ .  $(-b^2)$ :  $(-b)^2$  =

Unos cuantos ejercicios con bastante más dificultad para alumnos más capacitados:

12) 
$$\left(-\frac{12 x^2 y}{25 x^3}\right) : \left(\frac{-10 x y^2}{(-15 x)^2 y^3}\right) =$$

13) 
$$-(-10a^2)$$
:  $(-6a)^2 \cdot (-\frac{9}{5a})^2 =$ 

14) 
$$\left(\frac{2^3 \cdot 5 \times^2 y}{-6}\right)^{-3} : \left(-\frac{-10 \times x}{-3 y^2}\right)^{-2} =$$

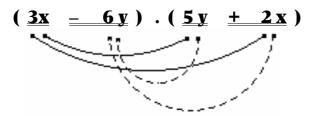
## 5.9.- Producto de binomios.

## Propiedad distributiva.

Recuerda cómo aplicábamos la propiedad distributiva con enteros y con fracciones. Aquí se hace de forma idéntica: se multiplica cada uno términos de un binomio por los del otro.

#### i Ah! No te olvides de la regla nemotécnica aprendida:

## Si. Nu. Le. (signo-número-letra)



Cada rayita representa un producto de dos términos, que debes resolver aplicando Si. Nu. Le., es decir, averiguas primero el signo, después resuelves las cuentas numéricas y, por último, las operaciones de letras. Veamos:

$$(3x).(5y) + (3x).(2x) - (6y).(5y) - (6y).(2x) =$$
  
= + 15 xy + 6 x<sup>2</sup> - 30 y<sup>2</sup> - 12 yx =  
= 6 x<sup>2</sup> + 3 xy - 30 y<sup>2</sup>  $\rightarrow$  solución ordenada

 ${f T}$ ambién se puede efectuar el producto colocando los binomios como se indica a continuación:

Fila de multiplicar (+2x)Esta fila es el resultado de aplicar la pr. distributiva y

Resultado del producto de binomios

#### Seguimos con otros ejemplos:

1) (2x - 3).(4 + 5x) =

Éste lo resolvemos de la 1ª forma, es decir, siguiendo los pasos que indica cada flecha del dibujo anterior. = (2x).(4) + (2x).(5x) - (3).(4) - (3).(5x) =

Como sabes, no es necesario colocar tantos paréntesis, pero te los pongo para que en los primeros ejercicios veas mejor los productos de los distintos términos.

$$= 8x + 10x^{2} - 12 - 15x = 10x^{2} - 7x - 12$$

Los siguientes los haremos más reducidos.

2) 
$$(-x + 5).(-8x - 3) =$$

Éste lo resolvemos de la 2ª forma, o sea, colocando los términos como en las multiplicaciones de números.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & -x & +5 \\
 & -8x & -3 \\
 & +3x & -15 \\
 \hline
 & +8x^2 & -40x \\
\hline
 & 8x^2 & -37x & -15 \\
\end{array}$$

Los siguientes ejemplos los hacemos de la 1<sup>a</sup> forma y sin tantos pasos:

3) 
$$(6y - 2x) \cdot (4x - 5y) =$$

$$= 24yx - 30y^{2} - 8x^{2} + 10xy =$$

$$= -8x^{2} + 34xy - 30y^{2}$$
4)  $\left(\frac{-2}{3}x - 8\right) \cdot \left(\frac{6x}{7} - \frac{4}{5}\right) =$ 

$$= \frac{-12x^{2}}{21} + \frac{8x}{15} - \frac{48x}{7} + \frac{32}{5} =$$

$$= \frac{-4x^{2}}{7} - \frac{664x}{105} + \frac{32}{5}$$

5) 
$$(3 - 5x).(x - 2) =$$

$$6) \quad \left(\frac{6x}{3} - 4\right) \cdot \left(\frac{2x}{-2} + 10\right) =$$

7) 
$$\left(\frac{-5x}{-3} - \frac{-4z}{-6}\right) \cdot \left(\frac{4z}{10} - 8\right) =$$

8) 
$$(-4 + a) \cdot (5a - 1) =$$

9) 
$$(-2x + 7) \cdot (3y - 6) =$$

## 5.10.- Identidades notables.

(Para alumnos más capacitados e interesados, o para 3º)

Las igualdades, identidades o expresiones notables las iniciamos ya en el tema 4 (páginas 160 y 161). Volvemos a darlas otra vez en este tema, porque estos productos de binomios "especiales" conviene aprenderlos muy bien, o memorizarlos, para reducir los cálculos en ejercicios de expresiones algebraicas que a lo largo de los próximos cursos vas a utilizar muy habitualmente en Matemáticas.

## **1** → <u>SUMA AL CUADRADO</u>.

Una suma al cuadrado es igual al cuadrado del primero, **más** el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Para hacer la suma al cuadrado hay que multiplicar dos veces la base (el binomio: los dos términos), y para ello aplicamos la propiedad distributiva.

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$= a^2 + 2 a b + b^2$$

Así obtenemos el resultado de esta igualdad notable, que aunque siempre es posible obtenerlo haciendo lo anterior, es muy conveniente aprenderlo de memoria para ejercicios algebraicos.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

**E**jercicios resueltos:

1) 
$$(3a + 7b)^2 = (3a)^2 + 2.(3a).(7b) + (7b)^2 =$$
  
 $= 9a^2 + 42ab + 49b^2$   
2)  $\left(\frac{5x}{3} + \frac{2y}{11}\right)^2 = \left(\frac{5x}{3}\right)^2 + 2.\left(\frac{5x}{3}\right).\left(\frac{2y}{11}\right) + \left(\frac{2y}{11}\right)^2 =$   
 $= \frac{25x^2}{9} + \frac{20xy}{33} + \frac{4y^2}{121}$   
3)  $(8 + 6n)^2 = 8^2 + 2.8.6n + (6n)^2$   
 $= 64 + 96n + 36n^2$ 

## **2** → <u>DIFERENCIA</u> <u>AL</u> <u>CUADRADO</u>.

Una diferencia al cuadrado es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(x - y)^2 = x^2 - 2.x.y + y^2$$

Para hacer la diferencia al cuadrado hay que multiplicar dos veces la base (el binomio: los dos términos), y para ello aplicamos la propiedad distributiva.

$$(x - y) \cdot (x - y) = x \cdot x - x \cdot y - y \cdot x + y \cdot y =$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$= x^2 - 2 x y + y^2$$

**E**jercicios resueltos:

4) 
$$(3n - 4m)^2 = (3n)^2 - 2 \cdot (3n) \cdot (4m) + (4m)^2 =$$
  
=  $9n^2 - 24nm + 16m^2$   
5)  $\left(\frac{x}{5} - \frac{2z}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{5}\right) \cdot \left(\frac{2z}{3}\right) + \left(\frac{2z}{3}\right)^2 =$   
=  $\frac{x^2}{25} - \frac{4xz}{15} + \frac{4z^2}{9}$   
6)  $(10 - 6a)^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6a + 6a^2$   
=  $100 - 120a + 36a^2$ 

## **❸** → <u>SUMA POR DIFERENCIA</u>.

Una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

Desarrollamos el producto de la suma de dos términos por su diferencia, aplicando la prop. distributiva.  $(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b =$   $\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$   $= a^2 \qquad 0 \qquad - b^2$ 

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

**E**jercicios resueltos:

7) 
$$(2x + 6y) \cdot (2x - 6y) =$$
  
 $= 2x \cdot 2x - 2x \cdot 6y + 6y \cdot 2x - 6y \cdot 6y =$   
 $= 4x^2 - 36y^2$   
8)  $\left(\frac{10a}{7} - 3c\right) \cdot \left(\frac{10a}{7} + 3c\right) =$   
 $= \frac{10a}{7} \cdot \frac{10a}{7} + \frac{10a}{7} \cdot 3c - 3c \cdot \frac{10a}{7} - 3c \cdot 3c =$   
 $= \frac{100a^2}{49} - 9c^2$ 

Estos dos ejercicios los hemos resuelto desarrollando, pero precisamente el aprender las identidades notables de memoria es para resolverlas con más rapidez, como los siguientes:

9) 
$$(12x + y) \cdot (12x - y) = 144x^{2} - y^{2}$$
  
10)  $(-6 + 2a) \cdot (6 + 2a) = 4a^{2} - 36$   
11)  $\left(\frac{3m}{2} + \frac{10n}{6}\right) \cdot \left(\frac{3m}{2} - \frac{10n}{6}\right) = \frac{9m^{2}}{4} - \frac{25n^{2}}{9}$ 

## **4** → DIFERENCIA <u>DE</u> <u>CUADRADOS</u>.

En realidad, podríamos decir que esta igualdad notable es como el "reverso" de la anterior, ya que en aquella el producto de una suma por una diferencia nos da una diferencia de dos cuadrados (las de los dos términos) y en ésta una diferencia de dos cuadrados la podemos factorizar (poner en forma de producto) poniendo la suma por la diferencia de los dos términos dados. O sea, "viceversa" de la identidad notable anterior.

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Ejercicios resueltos y para resolver:

12) 
$$64 x^2 - 25 y^2 = (8x)^2 - (5y)^2 =$$
  
=  $(8x + 5y) \cdot (8x - 5y)$ 

13) 
$$9a^2 - 121 = (3a)^2 - (11)^2 =$$
  
=  $(3a - 11) \cdot (3a + 11)$ 

14) 
$$\frac{x^2}{169} - 4y^2 = \left(\frac{x}{13}\right)^2 - (2y)^2 =$$

$$= \left(\frac{x}{13} + 2y\right) \cdot \left(\frac{x}{13} - 2y\right)$$

15) 
$$(2a + 6b)^2 = 16) \left(\frac{5x}{4} + \frac{2y}{10}\right)^2 =$$

17) 
$$(3 + 5m)^2 = 18) (8m - 9n)^2 =$$

19) 
$$\left(\frac{4a}{12} - \frac{9b}{6}\right)^2 = 20$$
)  $(5x - 1)^2 =$ 

21) 
$$(6a + 3b) \cdot (6a - 3b) =$$

22) 
$$\left(\frac{2x}{12} - 4y\right) \cdot \left(4y + \frac{2x}{12}\right) =$$

23) 
$$(7a + 3) \cdot (7a - 3) =$$

24) 
$$(-2 + 10x) \cdot (10x + 2) =$$

25) 
$$\frac{121 a^2}{36} - \frac{4 b^2}{25}$$
 26)  $9 x^2 - 400 y^2 =$ 

26) 
$$9x^2 - 400y^2$$

$$27) \quad 225 \, a^2 - 144 =$$

27) 
$$225 a^2 - 144 = 28$$
)  $\frac{49 x^2}{196} - y^2 =$ 

Dentro de las reflexiones que mencionan algunos aspectos que deberían mejorar y/o potenciarse en los centros educativos, señalamos aquí la siguiente:

Para considerar que un alumno sale formado íntegramente de su etapa escolar, una de las ideas muy claras y vivenciales que debe sacar, entre otras, es la de contribuir al orden en la naturaleza y sentir <u>la necesidad imperiosa de que el equilibrio</u> entre todos los seres que habitan



planeta Tierra no vaya a peor, ayudando cada uno a su manera y de acuerdo con sus posibilidades a que todos los animales y plantas puedan seguir viviendo, o sea, pudiéndose alimentar y crecer.

¿Sientes tú algo de esto? ¿Lo vives?

## 5.11.-Factorización de expresiones algebraicas.

(Para alumnos más capacitados e interesados, o para 3º)

La operación de **FACTORIZAR** consiste en convertir en productos expresiones algebraicas que contienen sumas y/o restas de varios términos. Estos productos pueden ser de monomios por binomios, binomios por binomios, monomio por trinomio, etc.

Podemos factorizar, siempre que sea posible, con los siguientes métodos:

#### a) Sacando factor común (ver pág. 326).

- $\frac{1}{1} 2xy + 3x = (2y + 3)x$
- 2) 4 6a = 2.2 2.3a = 2.(2 3a)
- 3)  $5 2a + 3a \rightarrow No es posible$ .
- 4)  $10 a x^2 12 a^3 x + 18 a^2 x^2 =$  $= \underline{2}.5.\underline{a}.\underline{x}.x - \underline{2}.2.3.\underline{a}.a.\underline{x} + \underline{2}.3.3.\underline{a}.a.\underline{x}.x =$  $= 2ax.(5x - 6a^2 + 9ax)$
- 5)  $6a 5a^2 =$
- 6)  $x 2x^3 + 5x =$
- 7) 10 15x + 5 =
- 8)  $6 x^2 y 10 x^2 =$
- 9)  $3a^2b ab + 4ab^2 =$
- 10) 6 15x + 9y =
- 11)  $10 ab 5a + 20 ab + 15a^2 =$
- 12)  $a^4 + a^3 a^2 =$
- 13) 18 81x + 27y =
- 14)  $x^2 4xy + x =$
- 15)  $a^2 5a + 10a =$

#### b) Convirtiendo un trinomio en una suma o diferencia al cuadrado (ver página anterior).

16) 
$$4 + 12a + 9a^2 =$$
  
=  $(2)^2 + 2 \cdot (2) \cdot (3a) + (3a)^2 =$   
=  $(2 + 3a)^2 = (2 + 3a) \cdot (2 + 3a)$ 

17) 
$$49x^2 - 14xy + y^2 =$$
  
=  $(7x)^2 - 2.(7x).(y) + (y)^2 =$   
=  $(7x - y)^2 = (7x - y).(7x - y)$ 

- 18)  $25 40a + 16a^2 = 19$ )  $x^2 + 9y^2 + 6xy =$
- 20)  $49 \text{ m}^2 + 121 154 \text{ m} = 21) 30 \text{ x y} + 25 \text{ x}^2 + 9 \text{ y}^2 =$
- 22)  $36a^2 + 12ab + b^2 = 23$ )  $9 12a + 4a^2 =$

# c) Expresando una diferencia de cuadrados en forma de producto (ver columna anterior).

24) 
$$25 - 4x^2 = (5)^2 - (2x)^2 =$$

$$= (5 + 2x) \cdot (5 - 2x)$$
25)  $121a^2 - 9b^2 = (11a)^2 - (3b)^2 =$ 

$$= (11a - 3b) \cdot (11a + 3b)$$
26)  $\frac{36a^2}{49} - 100b^2 = \left(\frac{6a}{7}\right)^2 - (10b)^2 =$ 

$$= \left(\frac{6a}{7} + 10b\right) \cdot \left(\frac{6a}{7} - 10b\right)$$
27)  $\frac{9}{16} - \frac{4a^2}{25} =$ 
28)  $1 - 25x^2 =$ 
29)  $81 - 100a^2 =$ 
30)  $\frac{49}{4} - m^2 =$ 
31)  $64 - 25x^2 =$ 
32)  $x^2 - y^2 =$ 
33)  $4x^2 - \frac{100z^2}{81} =$ 
34)  $a^2 - b^2 =$ 
35)  $\frac{64a^2}{b^2} - \frac{x^2}{9y^2} =$ 
36)  $225a^2 - 400b^2 =$ 

## 5.12.- Fracciones algebraicas.

Las fracciones que tienen expresiones algebraicas (números y letras) en el numerador y en el denominador se denominan fracciones algebraicas.

**P**ara realizar operaciones con ellas seguiremos los mismos pasos aprendidos en el tema 3, es decir, como si fueran fracciones numéricas.

**R**ecuerda : para <u>sumar</u> y <u>restar</u> fracciones de distintos denominadores hay que hacerlo por el método del mínimo.

1) 
$$\frac{3a}{5b} + \frac{4-a}{2a} - \frac{2}{10} \Rightarrow \text{m.c.m.} = 10 \text{ a b}$$

$$= \frac{(2a) \cdot (3a)}{10 \text{ ab}} + \frac{(5b) \cdot (4-a)}{10 \text{ ab}} - \frac{(ab) \cdot (2)}{10 \text{ ab}} =$$

$$= \frac{6a^2 + 20b - 5ab - 2ab}{10 \text{ a b}} =$$

$$= \frac{6a^2 + 20b - 7ab}{10 \text{ a b}}$$
2)  $\frac{4x}{20} + \frac{5}{6x} - \frac{1-3x}{12} =$ 
3)  $\frac{3a+1}{8a} - \frac{2}{12a} - \frac{5+a}{6} =$ 
4)  $\frac{2y}{10x} - \frac{4x-3}{25y} + \frac{x}{xy} - \frac{5y}{4} =$ 
5)  $\frac{5}{16a^2} + \frac{3a}{4a} - \frac{-4+8a}{6} =$ 

(Esta pregunta es para alumnos más capacitados e interesados)

Recuerda: para <u>multiplicar</u> fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores respectivamente, y para <u>dividir</u> se hace en cruz (o lo que es lo mismo, multiplicar por la fracción inversa).

6) 
$$\frac{5-x}{4x-2} \cdot \frac{3x-6}{x} = \frac{(5-x) \cdot (3x-6)}{(4x-2) \cdot (x)} =$$

$$= \frac{15x-30-3x^2+6x}{4x^2-2x} = \frac{-3x^2+21x-30}{4x^2-2x}$$
7) 
$$\frac{2a-6}{4-3a} \cdot \frac{5a}{8+a} = \frac{(2a-6) \cdot (8+a)}{(4-3a) \cdot (5a)} =$$

$$= \frac{16a+2a^2-48-6a}{20a-15a^2} = \frac{2a^2+10a-48}{20a-15a^2}$$
8) 
$$\frac{3x}{5y-2} \cdot \frac{6y-4}{10} \cdot \frac{8+9x}{-5} =$$

$$= \frac{(3x) \cdot (6y-4) \cdot (-5)}{(5y-2) \cdot (10) \cdot (8+9x)} =$$

$$= \frac{-90xy+60x}{400y+450xy-160-180x}$$
9) 
$$\frac{1+3x}{5x-4} \cdot \frac{6-2x}{10x} =$$
10) 
$$\frac{3b+7}{5b-a} \cdot \frac{2b}{1-4a} =$$
11) 
$$\frac{-2y}{8+4x} \cdot \frac{10-3x}{6} \cdot \frac{-5}{3y+1} =$$

Recuerda: para <u>simplificar</u> fracciones debe haber factores comunes en los productos del numerador y denominador. Si en las fracciones algebraicas iniciales no hay productos, debemos intentar factorizar las expresiones algebraicas del numerador y del denominador para ver si es posible conseguir algunos factores comunes en ambos términos, y después simplificarlos. La factorización la haces de alguna de las tres formas que se explican en la pregunta anterior (5.11). Veamos:

12) 
$$\frac{2x - x^{2}}{5x} = \frac{(2 - x) \cdot x}{5 \cdot x} = \frac{2 - x}{5}$$
13) 
$$\frac{7a^{4}b}{2a^{2}b^{3}} = \frac{7a^{2}}{2b^{2}}$$
14) 
$$\frac{12x^{3}y^{2}}{8xy} = \frac{3x^{2}y}{2}$$
15) 
$$\frac{10x^{2}}{20x^{3} - 5x^{2}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{5x^{2} \cdot (4x - 1)} = \frac{2}{4x - 1}$$
17) 
$$\frac{9 - 12x + 4x^{2}}{15 - 10x} = \frac{(3 - 2x) \cdot (3 - 2x)}{5 \cdot (3 - 2x)} = \frac{3 - 2x}{5}$$

#### SIMPLIFICACIONES PARA RESOLVER:

18)	$\frac{4+6x}{2} =$	19)	$\frac{10}{25 - 15 a} =$
20)	$\frac{18 x^3 - 12 x^2}{6 x} =$	21)	$\frac{15 - 30 \mathrm{x}}{6 \mathrm{x}^2 - 3} =$
22)	$\frac{a^3 + 5a^2}{4a^2} =$	23)	$\frac{\mathbf{x}^2 - 25}{5 + \mathbf{x}} =$
24)	$\frac{-8x^3 - 10x}{50x^2 - 2x} =$	25)	$\frac{30 x^3 y}{15 x y^2} =$
26.)	$\frac{\mathbf{m}^2 - 9}{} =$	27)	$4 - 25 x^2$

# 28) $\frac{100 - a^2}{4 + 20 x} = 29$ ) $\frac{25 - 30 a + 9 a^2}{-15 a + 25} =$

## 5.13.- Operaciones con polinomios.

(Para alumnos más capacitados e interesados, o para 3º)

### a) Sumas y restas de polinomios.

**P**ara sumar y/o restar polinomios se reducen los monomios semejantes, es decir, agrupamos los términos semejantes sacando factor común.

#### **⊗** Dados los polinomios siguientes:

Datos for pointolinos signientes:  

$$A = -4x^{2} + 3x^{5} - x + 2 - 6x^{3}$$

$$B = x^{2} + 4x - 6$$

$$C = -2x^{5} + x^{3} - 3 - 7x + 8x^{4}$$

$$D = \frac{3}{4}x^{2} - \frac{6x}{5} + \frac{2}{3}$$

$$E = \frac{-x^{2}}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{1}{8}$$

Realiza estas operaciones:

i O J O! Antes de operar debes ordenar.

- 1) A + B =
- 2) B C + A =
- 3) B + E =
- 4) B + D E =

#### 1) Resolución.

$$A \rightarrow +3x^{5} -6x^{3} -4x^{2} -1x + 2$$

$$B \rightarrow + 1x^{2} +4x -6$$

$$A + B = +3x^{5} -6x^{3} -3x^{2} +3x -4$$

#### 2) Resolución.

#### 3) Resolución.

#### 4) Resolución.

# b) <u>Producto</u> <u>de</u> <u>un</u> p<u>olinomio</u> <u>por</u> <u>un</u> monomio.

Para multiplicar un polinomio por un monomio se va multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio. Después se reducen los términos semejantes.

#### **⊗** Dadas las siguientes expresiones:

F = 
$$3x - x^2 - 5 + 4x^3$$
  
G =  $-5x^2 + x - 2$   
H =  $-2x^6 - x^4 - 1 + 3x + 8x^2$   
I =  $-\frac{x}{2} + \frac{3}{5} - \frac{4}{6}x^2$   
J =  $\frac{x^2}{4} - \frac{2x}{6} + \frac{3}{10}$   
K =  $-5x$   
L =  $6x^2$   
M =  $-\frac{2}{3}x$   
N =  $\frac{-x^3}{4}$ 

Realiza estas operaciones:

i O J O! Antes de operar debes ordenar.

- 5)  $F \cdot K =$
- 6)  $G \cdot L =$
- 7)  $H \cdot M =$
- $8) (I + J) \cdot N =$

#### 5) Resolución.

F 
$$\rightarrow$$
 + 4x<sup>3</sup> -1x<sup>2</sup> + 3x - 5  
K  $\rightarrow$  (-5x)  
F. K =  $-20x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 25x$ 

#### 6) Resolución.

G 
$$\rightarrow$$
  $-5x^{2} + x - 2$   
L  $\rightarrow$   $+6x^{2}$   
G. L =  $-30x^{4} + 6x^{3} - 12x^{2}$ 

#### 7) Resolución.

H 
$$\rightarrow$$
 -2x<sup>6</sup> -1x<sup>4</sup> +8x<sup>2</sup> +3x -1  
M  $\rightarrow$   $\frac{-2}{3}x$   
H.M=  $\frac{4}{3}x^7$  +  $\frac{2}{3}x^5$  -  $\frac{16}{3}x^3$  - 2x<sup>2</sup> +  $\frac{2}{3}x$ 

#### 8) Resolución.

$$I \rightarrow \frac{-4}{6} x^{2} - \frac{1}{2} x + \frac{3}{5}$$

$$+ J \rightarrow \frac{1}{4} x^{2} - \frac{2}{6} x + \frac{3}{10}$$

$$(I + J) \rightarrow \frac{-5}{4} x^{2} - \frac{5}{6} x + \frac{9}{10}$$

$$N \rightarrow \frac{-1}{4} x^{3}$$

$$(I + J) \cdot N = \frac{5}{16} x^{5} + \frac{5}{24} x^{4} - \frac{9}{40} x^{3}$$

#### c) Producto de polinomios.

Para multiplicar polinomios se efectúa el producto de cada uno de los términos de uno de ellos por cada uno de los términos del otro. Después se reducen los términos semejantes.

## **⊗** Dados los polinomios siguientes: $\tilde{N} = -7x + x^4 - 3x^2 + 5$

$$O = -2x^2 + 6x - 4$$

$$p = -\frac{5}{2}x + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{6}$$

$$Q = \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{10} + \frac{3}{5}$$

Realiza estas operaciones:

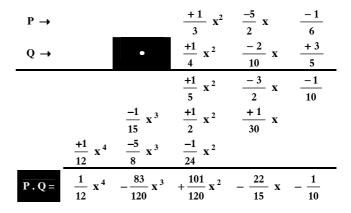
9) 
$$\tilde{N}$$
 .  $\tilde{O}$  = ; 10)  $\tilde{P}$  .  $\tilde{Q}$  =

#### 9) Resolución.

iOJO! Debes quedar espacios en blanco para las potencias de "x" que falten.

$$\tilde{N}$$
 →  $+x^4$   $-3x^2$   $-7x$   $+5$   $-2x^2$   $+6x$   $-4$   $-18x^3$   $-42x^2$   $+30x$   $-2x^6$   $+6x^5$   $+2x^4$   $-4x^3$   $-40x^2$   $+58x^2$   $-20$ 

#### 10) Resolución.



#### d) <u>División de un polinomio entre un</u> monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio entre dicho monomio.

#### **⊗** Dadas las expresiones siguientes:

$$R = 18x^{2} - 6x^{3} + 9x^{4} - 10$$

$$S = -4x^{3} - 2x + 1 + x^{2}$$

$$T = -3x$$

$$U = \frac{-2x^2}{5}$$

Realiza estas operaciones:

- 11) R : T =
- 12) S : T =
- 13) S : U =

#### 11) Resolución de "R: T".

$$+9x^{4}$$
  $-6x^{3}$   $+18x^{2}$   $-10$   $-3x$   $-10$   $-3x^{3}$   $+2x^{2}$   $-6x$ 

#### $D = d \cdot c + r$

Dividendo (D)  $\rightarrow$  polinomio "R"  $\rightarrow$  9 x<sup>4</sup> - 6 x<sup>3</sup> + 18 x<sup>2</sup> - 10 divisor (d)  $\rightarrow$  monomio "T"  $\rightarrow$  - 3x cociente (c)  $\rightarrow$  resultado  $\rightarrow -3x^3 - 2x^2 - 6x$ resto  $(r) \rightarrow -10$  $9 x^4 - 6 x^3 + 18 x^2 - 10 = (-3 x) \cdot (-3 x^3 + 2 x^2 - 6 x) - 10$ 

#### 12) Resolución de "S: T".

$$D = d \cdot c + r$$

Dividendo (D)  $\rightarrow$  polinomio "S"  $\rightarrow$  -4 x<sup>3</sup> + x<sup>2</sup> - 2 x + 1 divisor (d)  $\rightarrow$  monomio "T"  $\rightarrow$  -3 x

cociente (c) 
$$\rightarrow$$
 resultado  $\rightarrow \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$ 

resto 
$$(r) \rightarrow + 1$$

$$-4x^3 + x^2 - 2x + 1 = (-3x) \cdot (\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}) + 1$$

#### 13) Resolución de "S: U".

$$-4x^{3} + 1x^{2} - 2x + 1 - \frac{2}{5}x^{2}$$

$$Resto \rightarrow -2x + 1 + 10x - \frac{5}{2}$$

#### $D = d \cdot c + r$

Dividendo (D)  $\rightarrow$  polinomio "S"  $\rightarrow$  -4x<sup>3</sup> + x<sup>2</sup> - 2x + 1 divisor (d)  $\rightarrow$  monomio "U"  $\rightarrow$  -  $\frac{2}{\pi}$ x<sup>2</sup>

cociente (c) 
$$\rightarrow$$
 resultado  $\rightarrow \frac{10 \text{ x} - \frac{5}{2}}{}$ 

resto 
$$(r) \rightarrow -2x + 1$$

$$-4x^3 + x^2 - 2x + 1 = \left(-\frac{2}{5}x^2\right) \cdot \left(10x - \frac{5}{2}\right) - 2x + 1$$

#### e) División de polinomios.

Para dividir polinomios se deben seguir los siguientes pasos:

- **1°)** Se ordenan ambos polinomios. Recuerda que hay que colocar sus términos de mayor a menor grado (potencias decrecientes de "x").
- **2°)** Se divide el primer término del polinomio dividendo entre el primer término del polinomio divisor, con lo que obtenemos el primer término del cociente.
- **3°)** El primer término del cociente obtenido se multiplica por cada uno de los términos del divisor, colocando el resultado debajo del dividendo, cada uno debajo de su monomio semejante, y se resta dicho el polinomio resultante del dividendo.
- **4º)** Se vuelve a dividir el primer término del polinomio obtenido en la anterior resta entre el primer término del polinomio divisor.
- **5°)** Se siguen los mismos pasos anteriores hasta que el polinomio que se obtenga de resto sea cero (0, división exacta) o un resto de menor grado que el del divisor (división inexacta).
- **6°)** Puedes efectuar la prueba (comprobar si está bien) multiplicando el polinomio cociente por el divisor, sumándole el resto y debe dar el polinomio dividendo.

$$(D = d \cdot c + r)$$

#### \*

La división de polinomios es un estupendo y eficaz ejercicio de cálculo en la E.S.O. En ella se repasa una gran cantidad de automatismos y conceptos elementales, a saber: enteros, fracciones, potencias y álgebra. Veamos algunos ejemplos. Fíjate bien en el ejemplo en el que se obtienen coeficientes fraccionarios en el polinomio cociente. Si sabes y dominas estas divisiones en las que salen fracciones en los coeficientes del cociente, tu nivel de Matemáticas en cálculo esencial es bastante satisfactorio. iMucho ánimo! El que domina el cálculo tiene mucho "camino" recorrido para empezar a asimilar y dominar esta asignatura en los últimos cursos de la E.S.O. y, sobre todo, en el Bachillerato.

14) Siendo  $\underline{V} = -18 x^6 - 21 x^5 + 60 x^4 - 108 x^3 + 21 x^2 + 54 x - 60$  y  $\underline{W} = 6 x^3 + 9 x^2 - 21 x + 15$ , realiza V: W. Resolución:

## 15) Divide $\underline{X} = \underline{x^6 + 2x^4 - 3x^3 - 10}$ entre $\underline{Y} = \underline{x^3 - 2x^2 - 5}$ . Resolución:

NOTA: Observa que es necesario dejar espacio (columna) para aquellas potencias de "x" que no aparecen en el polinomio dividiendo.

16) Dividir el polinomio  $-10 x^5 - 2 x^3 + 6 x^2 - 7$  entre  $-2 x^2 + 4 x$ . Resolución:

17) A ver, uno bastante complicado:

Dividir el polinomio –  $x^6 + 3x^5 - 10x^3 + 2x - \frac{1}{4}$  entre  $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 - \frac{3}{4}$ . Resolución:

f) Caso particular de división de polinomios. División de un polinomio en "x" por el binomio "x - a". Regla de RUFFINI.

Para dividir un polinomio entre "x – a" se puede hacer como hemos explicado en el apartado anterior, pero hay otra forma más practica –y sencilla cuando la aprendas-llamada REGLA DE RUFFINI. Veamos cómo se aplica esta regla:

- 1º) Se ordena en forma de potencia decreciente el polinomio dividendo.
- **E**scribimos en una línea horizontal los coeficientes —con su signo correspondiente cada uno, claro- del polinomio ordenado en forma decreciente, teniendo en cuenta que hay que poner de coeficiente un cero ( $\underline{\mathbf{0}}$ ) en el lugar de aquellas potencias de "x" que falten.
- **D**ebajo, en otra línea y a la izquierda, es decir, en una columna fuera de todos los coeficientes escritos anteriormente, escribimos el valor de " $\underline{a}$ " (del binomio "x a") cambiado de signo. Si el binomio es  $\underline{x 4}$ , pues escribimos  $\underline{+ 4}$ ; si es  $\underline{x + 9}$ , pues escribimos  $\underline{- 9}$ , etc.
- **4º)** Se traza una raya horizontal debajo de las dos líneas. Se repite el primer coeficiente del polinomio, ya que el primer coeficiente del cociente es igual al del dividendo.
- **Se** multiplica el valor escrito en la 2ª línea por el escrito en la 3ª línea, debajo de la raya horizontal, y el resultado se escribe debajo del 2º coeficiente, es decir, en la 2ª línea. Se suma ese resultado con el 2º coeficiente y lo que da se escribe debajo, en la 3ª línea. Y así se va repitiendo hasta llegar al final.
- **6º)** El polinomio cociente tiene como coeficientes ordenados a los números obtenidos en la 3ª línea, teniendo en

cuenta que el grado de "x" en cada uno de ellos es una unidad menor que el grado del dividendo y que el resto es el último número (coeficiente) obtenido en esa 3ª fila.

#### EJEMPLO Nº 18:

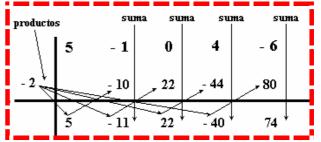
Dividir el polinomio  $4x - x^3 - 6 + 5x^4$  entre el binomio x + 2.

Ordenamos y completamos el polinomio:

$$5x^4 - \underline{1}x^3 + \underline{0}x^2 + 4x - 6$$

Los coeficientes a operar por Ruffini son:

$$5 - 1 \quad 0 + 4 - 6$$



El resultado de la división por Ruffini es el siguiente:

Polinomio dividendo =  $5x^4 - x^3 + 4x - 6$ Divisor = x + 2 [a = -2;  $x - \underline{a} = x - (-2)$ ]

Polinomio cociente =  $5x^3 - 11x^2 + 22x - 40$ Resto = 74

$$\begin{vmatrix} \text{Para hacer} \\ \text{la prueba} \end{vmatrix} \rightarrow \underbrace{D = d \cdot c + r}_{\text{la prueba}} \Rightarrow \begin{cases} D \rightarrow \text{ dividendo} \\ d \rightarrow \text{ divisor} \\ c \rightarrow \text{ cociente} \\ r \rightarrow \text{ resto} \end{cases}$$
$$\left(5 \times 3 - 11 \times 2 + 22 \times -40\right) \cdot \left(x + 2\right) + 74 =$$
$$= 5 \times 4 - x^3 + 4 \times -6$$

La anterior división se haría así con el método normal, es decir, sin aplicar la regla de Ruffini.

Lógicamente, da lo mismo que dividiendo por Ruffini; pero es evidente que el método Ruffini es más práctico y rápido.

#### **R**esolvemos otros ejemplos por **Ruffini**:

#### EJEMPLO Nº 19:

Dividir el polinomio 
$$6 x^5 - 2 x^3 + 2$$

$$x + 1$$
 ;OJO!  $\rightarrow x - (-1)$   $\Rightarrow$  luego  $a = -1$ 

Ordenamos, completamos los coeficientes y realizamos la tabla:

Cociente 
$$\implies$$
  $6x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 4x + 4$ 

<u>Resto</u> • ◆ - 2

#### 00000000000000000000

#### EJEMPLO Nº 20:

**D**ividir el polinomio

$$3x^4 - 3x^3 + 3x - 15$$

entre

Ordenamos, completamos los coeficientes y realizamos la tabla:

Cociente 
$$\implies 3 x^3 + 3 x^2 + 6 x + 15$$

<u>Resto</u> • ◆ 15

#### 

#### EJEMPLO Nº 21:

$$(x + 5x^3 - 8 + x^4) : (4 + x) =$$

Ordenamos, completamos los coeficientes y realizamos la tabla:

Cociente 
$$\Rightarrow$$
  $x^3 + x^2 - 4x + 17$ 

<u>Resto</u> • → 76

#### 00000000000000000000

#### EJEMPLO Nº 22:

$$\left(-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}x^4 - x\right) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Cociente 
$$\implies -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{31}{8}$$

#### 

#### EJEMPLO Nº 23:

$$(6x^5 - 2x + 2): (\frac{1}{2} + x)$$

**Cociente** 
$$\Leftrightarrow$$
  $6x^4 - 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{13}{8}$ 

 $\underline{\text{Resto}} \quad \bullet \quad \frac{45}{16}$ 

#### 000000000000000000000

A ver qué opinión de las siguientes coincide más con lo que tú piensas que es o debe ser un centro educativo:



- a) Un centro educativo ofrece a los alumnos una ampliación de la educación y valores recibidos en su familia y una formación académica.
- b) En los centros educativos se recogen a los alumnos, como si fueran guarderías, para que sus padres puedan trabajar o dedicarse a otras cosas.
- c) Los centros educativos sirven para reparar las deficiencias que los alumnos traen de sus casas.



# EJERCICIOS PARA RESOLVER SOBRE OPERACIONES CON POLINOMIOS:

**OJO!** Muchos de los ejercicios para resolver de los cuadros de las páginas 322 a 346 están resueltos en las páginas 400 a 406 (apartado siguiente del índice de este tema 5).

#### ⊗ Dadas las siguientes expresiones algebraicas:

$$A \rightarrow -5x^3 + 4x^4 - x + x^2 - 6$$

$$\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x}^2 - 7$$

$$C \rightarrow -3x^6 + 6x^5 + 9x^4 + 3x^3 - 12x^2$$

$$D \ \rightarrow \ -\ 3\,x\ +\ 1$$

$$E \ \rightarrow \ x - 4$$

$$F \rightarrow -x^3 + 3x^2 - 5x - 3$$

$$G \rightarrow -2x^4 - 8 + 10x^6 + 4x^2$$

$$H \ \to \ -\ 7\,x^{\ 5} \ +\ 10 \ -\ x \ +\ 4\,x^{\ 3}$$

$$I \ \rightarrow \ 5\,x^{\,2} \,-\, 3\,x$$

$$J \ \rightarrow \ x \ + \ 1$$

$$K \rightarrow -5x - 3$$

$$L \rightarrow x - 5$$

$$M \ \to \ -2\,x^2$$

#### $\otimes$ Realiza las siguientes operaciones:

1) 
$$A + B + C =$$

$$2) C - A =$$

3) 
$$C - E - L =$$

4) 
$$F - A + H =$$

5) 
$$D + M - I + E - J - K =$$

6) 
$$-2A + 3B - \frac{G}{2} =$$

7) 
$$G + \frac{2}{3}C - B + 5J =$$

8) 
$$(D - G) \cdot J =$$

9) 
$$H : I =$$

10) B: L = 
$$\rightarrow$$
  $\begin{cases} \circ \text{ división normal y} \\ \circ \text{ por Ruffini} \end{cases}$ 

11) A: 
$$J = \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ división normal y} \\ \circ \text{ por Ruffini} \end{cases}$$

12) 
$$[L - E].B =$$

$$13) - G : M =$$

14) 
$$\left[ -H + 2A - \frac{1}{2}H \right]$$
: J =

15) 
$$-(F-G+H):L =$$

$$16) - M \cdot (-F) =$$

17) 
$$[K \cdot (-J) + A] : E =$$

18) 
$$\left[ \frac{1}{-3} - 2M + \frac{3G}{2} \right]$$
. D =

19) 
$$\left[\frac{-C}{3} + 2A\right]$$
:  $\left(D + J + K\right) = (por Ruffini)$ 

20) 
$$-G:(-K)=$$

#### Otro bloque con coeficientes fraccionarios:

#### ⊗ Dadas las siguientes expresiones algebraicas:

$$N \rightarrow -\frac{2}{3}x^5 + \frac{x^4}{5} - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 4$$

$$\tilde{N} \rightarrow x^5 - \frac{2x^4}{5} - x + 10$$

$$O \rightarrow \frac{x}{3} + \frac{3x^2}{4} - \frac{5}{3}x^2 + x - \frac{9x}{2}$$

$$P \rightarrow -\frac{1}{2}x^6 - \frac{4x^5}{6} + \frac{3}{4}x^3 - x^2 + \frac{1}{6}$$

$$Q \rightarrow \frac{2}{3}x^4 - \frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{4}$$

$$R \rightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{x^3}{10} - \frac{5x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}$$

$$S \rightarrow -x^3 - \frac{x^2}{5} + \frac{1}{2}x - 2x^5 + \frac{3}{8}$$

$$T \rightarrow \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{5}x$$

$$U \rightarrow 3x - \frac{1}{4}$$

$$V \rightarrow x - \frac{1}{2}$$

$$W \rightarrow x + \frac{2}{3}$$

$$X \rightarrow x - 4$$

$$Y \rightarrow x + 1$$

$$Z \rightarrow -\frac{5x}{2}$$

#### ⊗ Realiza las siguientes operaciones:

21) 
$$U + V =$$

22) 
$$W - X + Y - Z + T =$$

23) 
$$P - \tilde{N} + T =$$

$$24) Q + R =$$

25) N - 
$$\tilde{N}$$
 + O =

$$26) - R + S - P =$$

27) 
$$\tilde{N} \cdot Z =$$

28) 
$$R : Z =$$

29) 
$$Q : Y = (por Ruffini)$$

30) 
$$N : V = (por Ruffini)$$

- 31) O: U =
- 32) S . T =

33) 
$$[-N+S]$$
:  $X = (por Ruffini)$ 

34) 
$$T \cdot U \cdot Y =$$

35) 
$$(V - 2X + 3Y) \cdot (-Z) =$$

36) 
$$\tilde{N}$$
:  $V = (por Ruffini)$ 

37) 
$$\left[ \frac{-4Z}{3} \cdot \frac{2Y}{5} - 3T \right] : Y =$$

## 5.14.- Igualdad, identidad, ecuación.

#### 米 IGUALDAD.

Una **IGUALDAD** es una expresión matemática que **contiene el signo** " = ". Si sólo tiene números, es una igualdad numérica, y si tiene números y letras es una igualdad literal o algebraica.

#### IDENTIDAD.

Si una igualdad literal se verifica, o sea, se cumple, para cualquier valor numérico que demos a la/s variable/s, tenemos una IDENTIDAD.

### ECUACIÓN.

Si una igualdad literal <u>se</u> <u>cumple</u> <u>sólo</u> <u>para</u> cierto/s valor de la/s incógnita/s (variable/s), entonces tenemos una ECUACIÓN.

Normalmente se utiliza la letra "x" como variable o **incógnita** más usada en las expresiones algebraicas v ecuaciones, pero ten en cuenta que puede emplearse cualquiera otra letra, sea de nuestro alfabeto o de otro.

#### Ejercicios para distinguir entre identidad y ecuación:

1) 
$$3x - x = 2x$$
; damos valores a la "x":

$$\begin{array}{c}
3x - x = 2x \\
3.0 - 0 = 2.0 \\
0 - 0 = 0 \\
0 = 0 \rightarrow \text{ cierta}
\end{array}$$
o para "x = 1"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
3x - x = 2x \\
3.1 - 1 = 2.1 \\
3 - 1 = 2 \\
2 = 2 \rightarrow \text{ cierta}
\end{cases}$$
o para "x = 2"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
3x - x = 2x \\
3.1 - 1 = 2.1 \\
3 - 1 = 2
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
3x - x = 2x \\
3.2 - 2 = 2.2 \\
6 - 2 = 4 \\
4 = 4 \rightarrow \text{ cierta}
\end{cases}$$
o para "x = -1"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
3x - x = 2x \\
3.(-1) - (-1) = 2.(-1) \\
-3 + 1 = -2 \\
-2 = -2 \rightarrow \text{ cierta}
\end{cases}$$
o para "x = -2"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
3x - x = 2x \\
3.(-1) - (-1) = 2.(-1) \\
-3 + 1 = -2 \\
-2 = -2 \rightarrow \text{ cierta}
\end{cases}$$
Etc. Seguiría siendo cierta para otros valores, luego:

La igualdad  $3x - x = 2x$  es una IDENTIDAD.

2) 
$$5 - 4x = 17$$
; damos valores a la "x":

o para "x = 0"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17 \\
5 - 4.0 = 17 \\
5 - 0 = 17
\end{cases}$$
o para "x = 1"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17 \\
5 - 4.1 = 17 \\
5 - 4 = 17
\end{cases}$$
o para "x = 2"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17 \\
5 - 4.2 = 17
\end{cases}$$
o para "x = -1"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17 \\
5 - 4.2 = 17
\end{cases}$$
o para "x = -1"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17 \\
5 - 4.2 = 17
\end{cases}$$
o para "x = -1"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17 \\
5 - 4.(-1) = 17 \\
5 + 4 = 17
\end{cases}$$
o para "x = -2"  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17 \\
5 - 4.(-2) = 17 \\
5 + 8 = 17 \\
13 \neq 17 \rightarrow \text{ falsa}
\end{cases}$$
Si seguimos, llegaríamos al valor "x = -3" y:

$$\begin{cases}
5 - 4x = 17
\end{cases}$$

∘ para "x = -3" → 
$$\begin{cases} 5 - 4x = 17 \\ 5 - 4.(-3) = 17 \\ 5 + 12 = 17 \\ 17 = 17 \rightarrow CIERTA \end{cases}$$

Si seguimos, ya no habrá otro valor para el que esta igualdad se cumpla, es decir, sea cierta, porque es una ecuación de primer grado (con una sola solución).

La igualdad "5 - 4x" = 17 es una ECUACIÓN.

⊗ Averigua si las siguientes igualdades son identidades o ecuaciones:

3) 
$$3x + 8 = 5$$
  
4)  $5x - 2x = 3x$   
5)  $6x = x + 5x$   
6)  $7 - 4x = 15$   
7)  $7 + 9x - 2 = 2x + 5$   
8)  $x + x = 2x$   
9)  $6 - 3x = 12$   
10)  $-2x + 4 = 0$   
11)  $8x - 4x - x = 3x$   
12)  $\frac{7x + 4x - x}{5} = 2x$ 

## 5.15.- Estudio de ecuaciones.

#### PARTES O ELEMENTOS DE UNA ECUACIÓN.

#### 1er miembro y 2º miembro.

El primer miembro es la expresión que está a la izquierda del signo "=". Y el 2º miembro es la parte que está a la derecha del signo " = ".

#### Términos de la incógnita.

Son los términos que llevan las letras, o sea, la incógnita, que habitualmente será la "x".

#### Coeficientes de la "x".

Son los números (enteros, fraccionarios, etc.) que van delante de la incógnita, con su signo correspondiente, por supuesto.

#### Términos independientes o numéricos.

Son aquellos que están formados sólo por los números. No llevan letras.

#### Grado de la ecuación.

Es el exponente máximo al que va elevado la incógnita. Generalmente estudiaremos ecuaciones de grado 1, es decir, que la incógnita habitual será "x<sup>1</sup>", que como muy bien sabes no suele ponerse el exponente "1", sino que se expresa así: "x".

#### Solución de la ecuación.

Es el número que verifica que la igualdad literal es cierta. Siempre que hagas una ecuación puedes comprobar (hacer la prueba) si está bien sustituyendo la incógnita por el valor que te ha dado la solución; si los dos miembros te dan el mismo resultado estará bien, si no es así ...

$$2x - 1 + 3x = \frac{2}{5}x - x + 2 - \frac{8x}{20}$$

$$\otimes \left\{ \begin{array}{c}
\circ 1^{\text{er}} \text{ miembro} \rightarrow \left[ 2x - 1 + 3x \right] \\
\circ 2^{\circ} \text{ miembro} \rightarrow \left[ \frac{2}{5}x - x + 2 - \frac{8x}{20} \right] \\
\end{array} \right.$$

Términos de la incógnita → 2x, +3x, 
$$\frac{2x}{5}$$
, -x,  $-\frac{8}{20}$  x

 Solution 
 Solution 
 Coeficientes de la "x" → +2, +3,  $\frac{+2}{5}$ , -1,  $-\frac{8}{20}$ 

$$\otimes$$
 Coeficientes de la "x"  $\rightarrow$  + 2, + 3,  $\frac{+2}{5}$ , -1,  $-\frac{8}{20}$ 

$$\otimes$$
 Términos independientes  $\rightarrow -1$ , + 2

$$\otimes$$
   Grado de la ecuación  $\,\rightarrow\,$  "1" (de primer grado)

#### REALIZA TÚ LO MISMO EN LAS SIGUIENTES ECUACIONES :

$$B) \quad 5x - 9 + 3x = 6 - x + 3$$

C) 
$$25 - 3x + 4 - x = 2x + x - 4$$

D) 
$$\frac{x}{3} + 2 - 5x + \frac{8}{6} = \frac{2}{5}x - x + \frac{10}{3}$$

E) 
$$\frac{1}{12}$$
 - 3x + 4 =  $\frac{x}{4}$  -  $\frac{5x}{3}$  -  $\frac{11}{12}$ 

#### **ECUACIONES EQUIVALENTES.**

#### Dos ecuaciones son equivalentes tienen la misma solución, o soluciones.

Se pueden obtener ecuaciones equivalentes a una dada de la siguiente forma:

- Sumando un número cualquiera a los dos miembros.
- **R**estando una misma cantidad a los dos miembros.
- **M**ultiplicando los dos miembros por lo mismo.
- Dividiendo ambos miembros por un mismo número.

#### A) 3x - 2 = 10

La solución de esta ecuación es "x = 4". Todavía, en 1º de E.S.O., los alumnos no saben resolver ecuaciones, pero no importa para llegar a comprender esta pregunta, porque le decimos la solución. Bien, pues vamos a obtener ecuaciones equivalentes a la que tenemos arriba y tú comprueba a ver si sigue dando la misma solución.

$$\begin{cases} \rightarrow \text{ Sumamos } + 5 \text{ a los dos miembros:} \\ 3x - 2 + 5 = 10 + 5 \\ \rightarrow \text{ Comprueba, y verás que la solución es 4.} \end{cases}$$

→ Comprueba, y verás que la solución es 4.

B) Intenta hacer lo mismo con la ecuación:

$$7 - 2x = 13$$

- → Sumando 4.
- Restando 3.
- $\rightarrow$  Multiplicando por -2.
- → Dividiendo entre 10.

El concepto de ecuaciones equivalentes y la forma de obtenerlas nos va a servir para resolverlas, ya que por medio de las reglas que hemos visto en la columna anterior operaremos hasta conseguir saber cuál es el valor de la incógnita para el que se cumple la expresión algebraica que dicta la ecuación.

A continuación, en la página siguiente, empezamos a saber cómo se resuelven las ecuaciones, en este caso las llamadas de primer grado, es decir, aquellas en las que sólo hay una incógnita (llamada generalmente con la letra "x") elevada a la unidad ( x 1). En estas ecuaciones hay una solución, pero más adelante veremos otras ecuaciones en las que la "x" va elevada al cuadrado ( x 2), ecuaciones de segundo grado, que tienen dos soluciones. Así que las soluciones de una ecuación van directamente relacionadas con el exponente de la incógnita.



Es una tendencia muy habitual en todos nosotros, bueno al menos en una mayoría en la que yo me incluyo,

agrandar-magnificar-aumentar-acrecentar--acentuar-etc. tanto las

acciones-gestos-hechos-cosas-etc.

positivas-buenas-apreciables-sensatas-inteligentes-etc., sobre todo en las personas que nos caen bien o sentimos más cercanas, como las

inoportunas-negativas-nocivas-incorrectas-etc., en otras personas que nos caen mal o no son de nuestro agrado.

Por ejemplo, una cualidad de un familiar o amigo la ensalzamos de tal forma que hasta la exageramos; sin embargo, algún defecto de otra persona lo agrandamos tanto que de forma consciente o inconsciente, a veces, llegamos hasta degradarla o humillarla.

NOS RESULTA DIFÍCIL, EN MUCHAS OCASIONES, JUZGAR O ACTUAR DE FORMA EQUILIBRADA, FLEXIBLE Y JUSTA.

No todo es negativo en una persona, ni todo provechoso y

elogiable en otras. Por ello, debemos aprender a valorar en su justo término, sin prejuicios, ni suspicacias, ni favoritismos. Y encontrar los aspectos positivos de aquellos que para nosotros



tienen casi todo, o todo, negativo.

Por supuesto, es más efectivo y conveniente preocuparnos de conocer y potenciar los aspectos positivos de las personas que ...



## ★ RE

#### RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO. REGLAS.

**E**l objetivo principal de la resolución de una ecuación es hallar el valor de la incógnita. Para ello tenemos que conseguir lo que llamaremos "despejar la incógnita", o sea, quedar sola la "x" en un miembro. Estudiemos los pasos en esta ecuación, que como podrás observar es más bien larga y difícil, pero hemos elegido una complicada para poder explicar adecuadamente todas las reglas. Veamos:

$$\frac{4}{6} + \frac{2}{15} x - x = 6 - \frac{4x - 40}{20}$$

 SE QUITAN DENOMINADORES, si los hay. Para ello se halla el m.c.m. de ellos y se multiplican todos los términos de la ecuación por el número que salga como m.c.m. de los denominadores.

$$\frac{\text{m.c.m. de } 6, 15 \text{ y } 20 = 60}{\frac{60.4}{6} + \frac{60.2 \text{ x}}{15} - 60.\text{ x} = 60.6 - \frac{60.(4 \text{ x} - 40)}{20}}{10.4 + 4.2 \text{ x} - 60 \text{ x} = 360 - 3.(4 \text{ x} - 40)}$$

2) <u>SE ELIMINAN LOS PARÉNTESIS</u> y corchetes, siempre que haya. Recuerda que para hacerlo debes aplicar la propiedad distributiva.

$$40 + 8x - 60x = 360 - 12x + 120$$

3) SE REALIZA UNA TRASPOSICIÓN DE TÉRMINOS, pasando los términos de la incógnita a un miembro —da igual a uno que a otro; tú los pasas al que más te interese- y los numéricos al otro.

Para trasponer términos debes sumar, restar, multiplicar o dividir ambos miembros por aquellos números o expresiones que interesen hasta quedar despejada (aislada) la "x". Es una forma de ir obteniendo ecuaciones equivalentes hasta llegar a la solución.



PERO EN LA PRÁCTICA LO QUE HACEMOS ES PASAR LOS TÉRMINOS DE UN MIEMBRO A OTRO TENIENDO EN CUENTA QUE CAMBIA LA OPERACIÓN QUE REALIZABA EN EL MIEMBRO INICIAL. O SEA:

- si está sumando, pasa restando.
- <u> Si estaba restando, pasa sumando.</u>
- Si está multiplicando, pasa dividiendo.
- Si estaba dividiendo, pasa multiplicando.

$$8 x - 60 x + 12 x = 360 - 40 + 120$$

4) SE REDUCEN LOS TÉRMINOS SEME-JANTES. Para ello se saca factor común a los términos de la "x" y se resuelven las cantidades numéricas.

(Ver las preguntas 5.8, 5.11.a y 5.13.a)

$$(8 - 60 + 12) x = 440$$
  
- 40 x = 440

5) <u>SE DESPEJA LA INCÓGNITA</u>, trasponiendo (pasando) su coeficiente al otro miembro, y así llegamos a la solución.

$$-40 x = 440$$

$$X = \frac{440}{-40} = -11$$

**6) P**or último, **SE HACE LA COMPROBACIÓN**, que es sustituir el valor obtenido por la "x" y verificar que ambos miembros dan lo mismo.

$$\frac{4}{6} + \frac{2}{15} \times - \times = 6 - \frac{4 \times - 40}{20}$$

$$\frac{4}{6} + \frac{2 \cdot (-11)}{15} - (-11) = 6 - \frac{4 \cdot (-11) - 40}{20}$$

$$\frac{4}{6} + \frac{-22}{15} + 11 = 6 - \frac{-44 - 40}{20}$$

$$\frac{5 \cdot 4 - 22 \cdot 2 + 30 \cdot 11}{30} = 6 - \frac{-84}{20}$$

$$\frac{306}{30} = \frac{6 \cdot 20 + 84}{20} = \frac{204}{20}$$

$$\left\{ \text{Lo obtenido en el 1}^{\text{er}} \text{ miembro } \rightarrow \frac{306}{30} \right\}$$

$$\text{es igual a lo obtenido en el 2° miembro } \rightarrow \frac{204}{20} \right\}$$

$$\text{Multiplica en cruz, verás que son equivalentes.}$$

$$\text{i COMPROBADO!}$$

## **◎□■■⊙♦♦♦■◇□○**\*○■

Bueno, observarás que este ejemplo explicado es largo y difícil. Lo he puesto así para poder explicar todos los pasos. No os "asustéis" los de 1º que todavía no sabéis nada de ecuaciones. En la página siguiente hay ecuaciones resueltas bastante más cortitas y sencillas, que es por donde debemos empezar a practicar. Los de otros cursos (2º y 3º) seguramente estarán más "tranquilos" porque ya dominan más o menos la resolución de ecuaciones de primer grado.

Saber resolver muy bien las ecuaciones es necesario y esencial para no tener ciertos problemas en los cursos próximos en esta asignatura. Así que cuanto antes las domines, mejor será tu rendimiento y más confianza tendrás en las Matemáticas.

## <u>ECUACIONES</u>

Al principio, hasta tanto no domines un poco y tengas cierta práctica, conviene que pases la "x", es decir, todos los términos de la incógnita, al miembro donde su coeficiente quede positivo. Hay que quedar muy claro que puedes hacer la trasposición de términos de la "x" a uno u otro miembro indistintamente, pero como es evidente que ahora en los comienzos si trabajas con coeficientes negativos encontrarás mayores dificultades, pues mejor pasarlos donde queden positivos y ya más adelante, cuando tengas más práctica, tú mismo las resolverás de una y otra forma sin problemas.

1) 
$$x + 3 = 10$$

El término + 3 pasa al otro miembro restando (-3)

 $x = 10 - 3$ 
 $x = 7$ 

2) 
$$5 + x = -8$$
  
 $x = -8 - 5$   
 $x = -13$ 

3) 
$$-6 - x = -9$$

El término  $-9$  pasa al otro miembro sumando

 $(+9)$  y el término  $-x$  pasa también sumando  $(+x)$ 
 $-6 + 9 = x$ 
 $3 = x$ 

Comprueba tú algunos de los resultados obtenidos, a ver si son ciertos. Por ejemplo en las ecuaciones que dan soluciones enteras.

4) 
$$2x - 7 = 5x + 8$$
  
 $-7 - 8 = 5x - 2x$   
 $-15 = (5 - 2)x$   
 $-15 = 3x$   
 $\frac{-15}{3} = x$   
 $-5 = x$ 

5) 
$$10 - x + 8x = 3x + 25$$
  
 $-1x + 8x - 3x = 25 - 10$   
 $(-1 + 8 - 3)x = 15$   
 $4x = 15$   
 $x = \frac{15}{4} = 3'75$ 

6) 
$$2 + 3 \cdot (x - 7) = 8x + 6$$
  
 $2 + 3x - 21 = 8x + 6$   
 $2 - 21 - 6 = 8x - 3x$   
 $- 25 = (8 - 3)x$   
 $- 25 = 5x$   
 $\frac{-25}{5} = x = -5$ 

## RESUELTAS

7) 
$$\frac{\mathbf{x}}{-3} = 7$$

$$\mathbf{x} = -3.7$$

$$\mathbf{x} = -21$$

8) 
$$5 - a + 4a = 2 - 8 (10 - a)$$
  
 $5 - 1a + 4a = 2 - 80 + 8a$   
 $5 - 2 + 80 = 8a + 1a - 4a$   
 $83 = (8 + 1 - 4)a$   
 $83 = 5a$   
 $\frac{83}{5} = a = 16'6$ 

9) 
$$\frac{x}{4} = \frac{7}{2}$$
  
(multiplicar en cruz)  $2x = 28$   
 $x = \frac{28}{2} = 14$ 

10) 
$$\frac{-5}{x} = \frac{3}{6}$$
(multiplicar en cruz)
$$-30 = 3x$$

$$\frac{-30}{3} = x = -10$$

Veamos otra forma de hacer la 9 y la 10, multiplicando por el mínimo:

9) 
$$\frac{y}{4} = \frac{7}{2}$$
  
[m.c.m. 4 y 2 = 4]  $\frac{4 \cdot y}{4} = \frac{4 \cdot 7}{2}$   
 $y = \frac{28}{2}$   
 $y = 14$ 

$$\begin{array}{rcl}
 & 10 & \frac{-5}{x} & = \frac{3}{6} \\
 & 9) & \frac{y}{4} & = \frac{7}{2} \\
 & [m.c.m. \ 4 \ y \ 2 = 4] \\
 & \frac{4 \cdot y}{4} & = \frac{4 \cdot 7}{2} \\
 & y & = \frac{28}{2} \\
 & y & = 14
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & 10) & \frac{-5}{x} & = \frac{3}{6} \\
 & [m.c.m. \ x \ y \ 6 = 6 \ x] \\
 & Bueno, si no comprendes mejor hacerlo en cruz.
 
$$& \frac{6x \cdot (-5)}{x} & = \frac{6x \cdot 3}{6} \\
 & -30 & = x \cdot 3 \\
 & \frac{-30}{3} & = x = -10
\end{array}$$$$

11) 
$$\frac{-3x}{5} = 12$$

$$\begin{bmatrix} El "5", \text{ que está dividiendo, pasa al otro } \\ \text{miembro multiplicando.} \end{bmatrix}$$

$$-3x = 12.5$$

$$\begin{bmatrix} El \text{ coeficiente } "-3", \text{ que está multiplicando } \\ \text{a la "x", pasa al otro miembro dividiendo.} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \frac{60}{-3} = -20$$

Creo que es más fácil y práctico multiplicar en cruz en las ecuaciones del tipo de la nº 9 y nº 10, pero no lo hagas siempre. Por ejemplo, en las siguientes no es posible hacer el producto en cruz, y es necesario hacerlo por el m. c. m. de los denominadores.

12) 
$$\frac{2x}{6} = \frac{-3}{4} + x$$
  
13)  $\frac{-6x}{8} - 5 = \frac{10}{12}$ 

Las resolvemos en la página siguiente.

12) 
$$\frac{2x}{6} = \frac{-3}{4} + x \rightarrow \text{m.c.m.} (6,4) = 12$$

$$\frac{12 \cdot 2x}{6} = \frac{12 \cdot (-3)}{4} + 12 \cdot x$$

$$2 \cdot 2x = 3 \cdot (-3) + 12x$$

$$4x = -9 + 12x$$

$$9 = 12x - 4x$$

$$9 = (12 - 4)x$$

$$9 = 8x$$

$$\frac{9}{8} = x = 1'125$$
13) 
$$\frac{-6x}{8} - 5 = \frac{10}{12} \rightarrow \text{m.c.m.} (8,12) = 24$$

$$\frac{24 \cdot (-6x)}{8} - 24 \cdot 5 = \frac{24 \cdot 10}{12}$$

$$3 \cdot (-6x) - 120 = 2 \cdot 10$$

$$-18x = 20 + 120$$

$$x = \frac{140}{-18} = -7'777... = -7'7$$

14) 
$$\frac{2}{6} - \frac{b}{4} + 5 = \frac{3b}{8} - b \rightarrow \text{mínimo} = 24$$
  
 $\frac{24.2}{6} - \frac{24.b}{4} + 24.5 = \frac{24.3b}{8} - 24.b$   
 $4.2 - 6.b + 120 = 3.3b - 24b$   
 $- 6b - 9b + 24b = -8 - 120$   
 $(-6 - 9 + 24)b = -128$   
 $9b = -128$ ;  $\mathbf{b} = \frac{-128}{9} = -14^{\frac{1}{2}}$ 

Habrás observado que en las ecuaciones donde hay que multiplicar por el mínimo todos los términos hago un paso más: poner el producto del cociente entre el mínimo y el denominador por el término que había en el numerador. En realidad no es necesario hacer eso, es un paso que sobra, pero lo hago en estas primeras ecuaciones para que lo veas bien y lo hagas de esa forma, aunque sin poner indicado ese producto. O sea, que tú, cuando ya te habitúes y lo domines, ese paso te lo saltas, porque lo harás mentalmente.

Después de estas catorce primeras ecuaciones, ahora vamos a resolver las ecuaciones anteriores números 4, 5, 6 y 8 pasando la "x" al otro miembro, verás como obtenemos los mismos resultados.

4) 
$$2x - 7 = 5x + 8$$
  
 $2x - 5x = 8 + 7$   
 $(2 - 5)x = 15$   
 $- 3x = 15$   
 $x = \frac{15}{-3} = -5$ 

5) 
$$10 - x + 8x = 3x + 25$$
  
 $10 - 25 = 3x + 1x - 8x$   
 $-15 = (3 + 1 - 8)x$   
 $-15 = -4x$   
 $\frac{-15}{-4} = x = 3'75$ 

6) 
$$2 + 3 \cdot (a - 7) = 8a + 6$$
  
 $2 + 3a - 21 = 8a + 6$   
 $3a - 8a = 6 - 2 + 21$   
 $(3 - 8)a = 25$   
 $-5a = 25$   
 $a = \frac{25}{-5} = -5$ 

8) 
$$5 - x + 4x = 2 - 8 (10 - x)$$
  
 $5 - 1x + 4x = 2 - 80 + 8x$   
 $- 1x + 4x - 8x = 2 - 80 - 5$   
 $(-1 + 4 - 8)x = -83$   
 $-5x = -83$   
 $x = \frac{-83}{-5} = 16'6$ 

$$\frac{2 - 6(5 + 8x)}{-3} = 3x - 7$$
En equationes de este tipe de més mé

En ecuaciones de este tipo, lo más práctico es pasar el (-3) multiplicando a  $\overline{TODO}$  el  $2^{\circ}$  miembro.

$$2 - 6 (5 + 8x) = -3 \cdot (3x - 7)$$

$$2 - 30 - 48x = -9x + 21$$

$$-48x + 9x = 21 - 2 + 30$$

$$-39x = 49$$

$$\mathbf{X} = \frac{49}{-39} = -1'256410...$$

En las soluciones con decimales ilimitados, basta con sacar un par de cifras. ( x = -1'25... )

16) 
$$\frac{3-4m}{2} = \frac{2m+5}{6} \rightarrow \text{Mejor en cruz.}$$

$$(3-4m).6 = 2.(2m+5)$$

$$18-24m = 4m+10$$

$$-24m-4m = 10-18$$

$$-28m = -8$$

$$\mathbf{m} = \frac{-8}{-28} = \mathbf{0}^{1}28...$$

17) 
$$2 - (5x + 4) - \frac{10 - 2x}{6} + 3 = x - \frac{4x + 6}{9}$$
  
 $18.2 - 18.(5x + 4) - \frac{18.(10 - 2x)}{6} + 18.3 = 18.x - \frac{18(4x + 6)}{9}$   
 $36 - 90x - 72 - 3.(10 - 2x) + 54 = 18x - 2.(4x + 6)$   
 $36 - 90x - 72 - 30 + 6x + 54 = 18x - 8x - 12$   
 $- 90x + 6x - 18x + 8x = -12 - 36 + 72 + 30 - 54$   
 $- 94x = 0$   
 $\mathbf{X} = \frac{0}{-94} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \text{i Una ecuación tan larga y} \\ \text{dificil para que dé tan poco!} \end{cases}$ 

A partir de ahora ya no las resolveré con tantos pasos, porque se supone que poco a poco no los necesitarás. Si quieres aprender bien las ecuaciones, necesitas:

INTERÉS, CONCENTRACIÓN y PRÁCTICA.

18) 
$$3x - 2(x + 5) = 6 - (3 - 4x) 5$$
  
 $3x - 2x - 10 = 6 - 15 + 20x$   
 $3x - 2x - 20x = 6 - 15 + 10$   
 $(3 - 2 - 20)x = 1$   
 $-19x = 1$   
 $x = \frac{1}{-19} = -0'05...$ 

20) 
$$\frac{5c + 3}{4} = \frac{6 + 2c}{8} \rightarrow \text{mejor en cruz}$$
  
 $(5c + 3) \cdot 8 = 4 \cdot (6 + 2c)$   
 $40c + 24 = 24 + 8c$   
 $32c = 0$   
 $\mathbf{C} = \frac{0}{32} = \mathbf{0}$ 

21) 
$$6 - 12x(5 - x) = (3 + 2x) 6x - 2(x - 3)$$
  
 $6 - 60x + 12x^2 = 18x + 12x^2 - 2x + 6$   
 $- 60x + 12x^2 - 18x - 12x^2 + 2x = 6 - 6$   
 $- 60x - 18x + 2x = 0$   
 $- 76x = 0$   
 $x = \frac{0}{-76} = 0$ 

23) 
$$\frac{-6 (5-2x)}{-4} = 3x + 10 - x$$

$$-6 \cdot (5-2x) = -4 \cdot (3x + 10 - x)$$

$$-30 + 12x = -12x - 40 + 4x$$

$$12x + 12x - 4x = -40 + 30$$

$$20x = -10$$

$$\mathbf{X} = \frac{-10}{20} = -0'5$$

25) 
$$3a - 2 = a - 45$$
  
 $3a - \underline{1}a = -45 + 2$   
 $2a = -43$   
 $a = -21'5$ 

26) 
$$4 - (-9 + 2x) 3 = x - 5 (-4x - 6)$$
  
 $4 + 27 - 6x = 1x + 20x + 30$   
 $(-6 - 1 - 20) x = 30 - 4 - 27$   
 $-27x = -1$   
 $x = \frac{-1}{-27} = 0'\widehat{037}$ 

27) 
$$-3 = \frac{24}{x}$$
  
 $-3x = 24$   
 $X = \frac{24}{-3} = -8$ 

27) 
$$-3 = \frac{24}{x}$$
  
 $-3x = 24$   
 $\mathbf{X} = \frac{24}{-3} = -8$ 

$$28) 4 = \frac{-6}{3x} + 5$$

$$12x = -6 + 15x$$

$$-3x = -6$$

$$\mathbf{X} = 2$$

29) 
$$2z - \frac{5}{8} + \frac{z}{40} = \frac{3z}{20} + 5$$
  
 $40.2z - \frac{40.5}{8} + \frac{40.z}{40} = \frac{40.3z}{20} + 40.5$   
 $80z - 25 + \underline{1}z = 6z + 200$   
 $75z = 225 \Rightarrow z = 3$ 

$$30) \frac{x}{18} + 2 - \frac{-3 + 5x}{9} = \frac{6}{4} - \frac{x - 1}{6}$$

$$\frac{36.x}{18} + 36.2 - \frac{36.(-3 + 5x)}{9} = \frac{36.6}{4} - \frac{36.(x - 1)}{6}$$

$$2x + 72 - 4.(-3 + 5x) = 9.6 - 6.(x - 1)$$

$$2x + 72 + 12 - 20x = 54 - 6x + 6$$

$$2x - 20x + 6x = 54 + 6 - 72 - 12$$

$$-12x = -24 \implies X = 2$$

$$31) - \frac{2a}{30} + 3 - (5 + a) 4 = a - \frac{(6 - 3a)}{18} 5$$

$$-\frac{90.2a}{30} + 90.3 - 90.(5 + a).4 = 90.a - \frac{90.(6 - 3a).5}{18}$$

$$-6a + 270 - 1800 - 360a = 90a - 150 + 75a$$

$$-6a - 360a - 90a - 75a = -150 - 270 + 1800$$

$$(-6 - 360 - 90 - 75) a = 1380$$

$$-531a = 1380$$

$$a = \frac{1380}{-531} = -2'59...$$

Las ecuaciones resultan a bastantes alumnos algo difíciles y, sobre todo, pesadas y muy abstractas; es lógico. Pero son muy <u>necesarias</u> <u>e</u> <u>imprescindibles</u>. Constituyen un **instrumento fundamental** para construir un edificio de Matemáticas que se asiente en unos potentes cimientos.

#### Una reflexión que posiblemente resultará polémica.

En la vida, cada cierto tiempo, todos necesitamos algunas fiestas. Días para divertirse, pasarlo bien -tanto con la familia como con los amigos- y olvidarse del cotidiano trabajo para cargar pilas y volver otra vez al tajo. Creo que es una premisa mayoritariamente aceptada. Todos los pueblos y ciudades tienen sus fiestas. Y eso es

Sin embargo, en este nuestro querido pueblo de Villafranca

nos pasamos. Así lo pienso yo, al menos. Casi tocamos a fiesta por mes. Bueno, hay épocas en las que tocamos a dos por mes. Por ejemplo, entre las fiestas de Las Peñitas (15 de agosto) y las de La Coronada (8 de septiembre) hay apenas tres semanas. Pero en fin, al menos en estas dos fiestas mencionadas no incide el peso de mi reflexión, porque es época de verano y vacaciones.



Pongámonos en lugar de un alumno normal, de los que tanto abundan hoy. Que no tiene mucha fuerza de voluntad, que su responsabilidad ante su trabajo (el estudio) es más bien escasa -por no decir nula-, que en su casa no le exigen y revisan demasiado y que sus estudios van medio-medio, o más bien medio-cuarto. Pensemos un poco. Comienza el curso. Mediados de septiembre. Cuesta volver a empezar. No me concentro. No aprovecho. Poco a poco. Venga. Ya casi voy cogiendo el tono. Es que el verano es

mucho verano, y los recuerdos están tan frescos que... ¿Por qué no durará más el verano?



Llegan las Fiestas del Pilar. Tres o cuatro días, al menos. Amigos, amigas, trasnochar, etc. Cuando iba estabilizando mi estudio, vuelta a empezar. En fin, no me desanimo, que quedan más de dos meses para Navidad. ¡Ánimo!

Volver a "coger el chip". Poco a poco, con mucho esfuerzo. Y sacrificio, porque si no... Pasamos el puente de Todos los Santos sin hacerle mucho caso, porque si no perdemos el hilo cogido. Ya estamos bien. Estudiando y rindiendo. Va a llegar diciembre. ¡Vaya! El acueducto de la Constitución y de la Inmaculada. A ver si aguanto y no pierdo los hábitos que ya había adquirido.

Desilusión. O mejor dicho, casi desastre, porque al volver del

acueducto tenía bastantes exámenes y me han salido fatal. Claro, cómo me iban a salir; si en estos días casi ni he dado golpe. Decepción.



Bueno, quizás en lo que queda hasta las Navidades pueda entonarme y recuperar algunas de las calabazas obtenidas.

No pudo ser, porque en tan pocos días me ha sido imposible volver a "coger el chip" del estudio y la concentración. En fin, no le

daré vueltas. En el segundo trimestre me esfuerzo

Vuelvo a las clases sobre el 10 de enero. Pero no ha pasado un mes cuando llega la Fiesta

de Las Candelas. No consigo ponerme de pie y andar. Pero es que a los pocos días se presenta la Semana del Centro, y para colmo de colmos, ya no me acordaba, vienen Los Carnavales. ¡Adiós! Pero es

que casi no hay tregua, cómo no voy a sucumbir ante tanta...

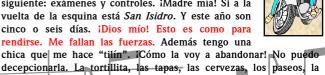
Terminaron. Esto no puede seguir así. Hay que poner algún remedio. Este mes que me queda hasta Semana Santa voy a machacarme al máximo.



Menos mal que ha habido un poco de oasis de normalidad, estudio, trabajo y rendimiento en estas cuatro semanas. He recuperado una asignatura de diciembre y he aprobado tres de este trimestre. Me han quedado siete. Claro, si de tres meses he aprovechado cuatro semanas. Pero menos es nada. Seguramente en el último trimestre...

Empezamos el último tramo del curso casi a mediados de abril. Paso a paso. Pero ahora todo se me hace más difícil y

complicado, porque no he aprendido lo que debía en más de la mitad del curso. Muchas cosas, aunque quiero y pongo ganas, no las entiendo. Me desanimo. Casi no me he dado cuenta, ya que no asimilo bien ni rindo lo suficiente, y ya tengo otro puente: el de 1º de mayo. Pero éste lo voy a exprimir bien. Semana siguiente: exámenes y controles. ¡Madre mía! Si a la vuelta de la esquina está San Isidro. Y este año son cinco o seis días. ¡Dios mío! Esto es como para rendirse. Me fallan las fuerzas. Además tengo una



Llega el 17 de mayo. No voy a clase. Estoy destrozado, pero no de estudiar, sino del baile. Y de lo que bebí. Y de no descansar. De tantos días y de otras cosas que... Lo siento. Ya iré mañana.

Ahora, encima, ha empezado a subir la temperatura. Hay días de bochorno. Yo no puedo. Me siento incapaz. Me aburro mucho,

estudiando, evidentemente. Han sido muchas fiestas. Muchos buenos ratos. Y muchas experiencias. No me concentro. Los recuerdos me lo impiden. Pero tengo que hacer un último esfuerzo, a ver si me quedan menos de las que ya



llevo suspensas. Tengo tres o cuatro semanas hasta los exámenes finales de junio. No voy a salir de casa (i).



hierba, la verbena..)

Lo intento. No rindo. No me concentro. Vuelvo a intentarlo. Llevo dos horas y si acaso he estudiado una o dos páginas. Así no llego a ningún sitio. ¡Vaya! Pero es que de Matemáticas aunque quiero no me entero. Claro, si no me iba bien desde noviembre cómo... Pero de Inglés tampoco.

Ni de Física, ni de... ¡Esto es un desastre!

Vuelvo a probar. No a aprobar, porque ya no tengo ni pizca de esperanza. La he perdido. Además, pienso que me lo he ganado a pulso. El desastre, claro. Intentaré recuperar alguna asignatura más fácil en estos pocos días que quedan de curso. Es lo mínimo. Quizás con ello alivie el estado animado de mis padres ante mi situación.



iHorror! Pero si todavía nos queda esa nueva fiesta. ¡Qué barbaridad! Dice mi madre que antiguamente era la Fiesta de San Antonio, la que ahora es la de la barriada nueva de la Casa de La Cultura. No me acuerdo cómo le dicen. Pero si es que ya estoy perdiendo casi la memoria. Es que la practico tan poco que... Esto ha sido ya la gota que colmó mi vaso. Me rindo -en realidad estaba deseando claudicar-. Me siento incapaz. El curso próximo no me pasará esto. Lo prometo. Creo que esta experiencia me servirá. No tengo duda. Me esforzaré al máximo. Y ahora me voy a las fiestas de la barriada de La Harinera, a pasármelo bien, porque ya hasta septiembre no tengo que... Suena el móvil. Es Tentación, que así se llama mi nueva chica; a la anterior, que se llama Esforzada, la dejé.

Hasta el curso que viene, que volvamos a empezar.



El ESFUERZO en el ESTUDIO te forma, te hace más culto, te 'eleva' y, además, será to par

## <u>Ecuaciones</u> para resolver:

## **SOLUCIONES** en las págs. 407 a 410.

- 1) x 8 = 12 2) 7 + x = 5

- 3) x + 1 = -6 4) 3x = 125) 7x = -21 6) 4x 3 = 157) 2x + 9 = 5x 1
- 8) 4 2x + 3x = 7x 8
- 9)  $\frac{x}{2} = 5$  10) 5.(2 + x) = 25
- 11)  $(6 x) \cdot 3 = 12$
- 12) 7 3(x + 5) = 20 + 9
- $13) \quad \frac{4x}{5} = -8$
- $14) \quad 4x + 3 = 1 x + 10$
- 15)  $\frac{7}{4}$  + x = 1 x
- 16)  $\frac{2x}{5} = -7$  17)  $\frac{1-2x}{3} = 1+x$
- 18) 4 2(x 5) = 1 3(2x + 9)
- 19) 2a 3 + 5(6 2a) = a 1
- $20) \quad \frac{4}{5} \quad \quad \frac{x}{12} \quad + \quad 1 \quad = \quad 3x$
- 21)  $\frac{2x}{10}$  5 +  $\frac{x}{6}$  = 1  $\frac{5x}{15}$
- $22) \quad \frac{4-2x}{5} \quad \quad \frac{1+3x}{10} \quad = \quad 7 \quad \quad x$
- $23) \quad \frac{4 5x}{2} = x 2$
- $24) \quad \frac{x}{2} \frac{1}{6} + \frac{3x}{18} = x \frac{5}{12} + 1$
- $25) \quad \frac{4}{5} = \frac{x}{7} \qquad 26) \quad \frac{-2}{7} = \frac{4}{6}$
- 27)  $\frac{1}{3} = \frac{-5}{3}$  28)  $\frac{x}{-3} = \frac{-5}{-8}$
- 29)  $\frac{2x-1}{5} = \frac{x}{4}$  30)  $\frac{-5}{x-3} = \frac{4}{x}$
- $31) \quad \frac{1}{2} \quad \quad \frac{4x \quad \quad 5}{5} \quad = \quad 6$

En los siguientes, despejar la letra subrayada en negrita:

- 32)  $e = v \underline{t}$  33)  $v = \underline{e}$
- 34)  $\frac{e}{+} = v$  35)  $F = \underline{m}$ . a
- 36)  $\underline{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$  37)  $\frac{5}{\mathbf{x}} = \frac{4}{\mathbf{a}}$
- 38)  $\frac{-8}{4x} = \frac{Z}{3x}$  39)  $\frac{3}{X} = \frac{4x}{54}$
- 40)  $\frac{2-x+4x}{5x} = \frac{\underline{a}}{-6}$
- 41)  $d = \frac{\mathbf{m}}{V}$  42)  $d = \frac{\mathbf{m}}{V}$
- 43)  $v = V_0 + at$  44)  $v = v_0 + at$

- $\frac{\overline{45}}{v_{m}} = \frac{v_{0} + a \, \underline{t}}{2} \qquad 46) \, e = v_{0} \, t + \frac{1}{2} \, \underline{a} \, t^{2}$
- A continuación resolver: 47) 3 =  $\frac{-5 + 4a}{3}$
- 48)  $\frac{(3 + 4z)(-2)}{-6} = \frac{-5 \cdot (2z 4)}{-3}$
- 49)  $1 (7 4x) 2 = 3x 2 \cdot (-4x + 6)$
- 50)  $-12 = \frac{240}{-5x}$
- $51) 10 = \frac{4}{-3x} 2$
- 52)  $1 \frac{2}{24} + \frac{y}{48} = \frac{5y}{16} x$
- 53)  $\frac{x}{50} + 2 \frac{2-3x}{2} = \frac{1}{5} \frac{6x+1}{25}$
- 54)  $-\frac{2a}{30} + 3 (5 + a) 4 = a \frac{(6 3a)}{18} 5$
- 55)  $\frac{2n}{16} \frac{5+4n}{24} = 3 \frac{(1-6n)2}{12}$
- $56) \quad \frac{-6 (5-2x)}{-4} = 3x + 10 x$
- 57)  $\frac{x}{4} \frac{x}{10} + \frac{3}{6} 5 = \frac{1}{15} \frac{3(2x+1)}{30}$
- 58) b + 15 = 2 59) 5 x = -360) x + 6 = -7 61) 9c = 062) -2x = -11 63) 8x + 1 = 5

- $64) \quad 4h \quad -8 \quad = \quad 9h \quad + \quad 10$
- $65) \quad 18 + 2x 2x = 10x 8 x$
- $66) \quad \frac{-x}{4} = -5$
- 67) x + 5 = -6 68) 3x 2 = -15
- $69) \quad 4x 7 x = 6(x 1) + 2$
- 70)  $\frac{x}{4} = 7$  71)  $\frac{2x 8}{7} = 5 + x$
- 72)  $\frac{4}{x} = \frac{-5}{3}$
- 73)  $\frac{2}{5} + \frac{4x}{4} 1 = 6x$
- 74)  $\frac{2}{7} = \frac{x}{-3}$  A continuación despejar:
- 75)  $4\underline{a} \times y = 2 5x$  76)  $A = \frac{B}{C}$
- 77)  $\frac{7}{v 5} = \frac{-2}{v}$  78)  $V = \frac{e}{t}$
- 79)  $\frac{2}{12} \frac{4-3x}{18} + x = \frac{3}{36} \frac{5x+7}{6} 1$
- $80) \quad 5 4(3 + 2x) = 7x 2(x 8)$
- $81) \quad \frac{4x 2}{3} = \frac{6 3x}{5}$
- $82) \quad \frac{-2}{1-5x} = \frac{4}{6x-3}$

#### 5.16.- Despeie incógnitas

No sólo en Matemáticas, sino en otras asignaturas (Física, Química, Ciencias Naturales, etc.), se necesita continuamente saber despejar incógnitas de múltiples fórmulas para la resolución de problemas. Despejar una letra es quedarla aislada en uno de los miembros de la igualdad (ecuación o fórmula) para, una vez sustituidos los valores numéricos de las demás letras, hallar su solución. Lo haremos siguiendo los pasos explicados en la resolución de ecuaciones

### **SOLUCIONES** del nº 21 al 60 en las págs. 421 y 422.

- 1)  $a \cdot x = b$
- 2) 6.  $t + 1 = \frac{3}{5}$
- 3) 4 7. d = 8. y
- 4) 2.a.b + 5.x = 1 3.m
- 5)  $3 \cdot y 1 = 5 \cdot a \cdot X$
- 6) 4.a.Z + 6.x = 3 m
- 7) x.y 2.X = x + m.n
- 8) 2. m . n = x
- 9)  $\frac{5 \cdot x \cdot y}{3} = z$
- 10) 6.a + x =  $\frac{7}{b}$
- 11) 8 . b . c =  $X^2$
- 12)  $\frac{3 \cdot x}{5} = \frac{a \cdot b}{2}$
- 13)  $\frac{4 \cdot a \cdot m}{5 \cdot X} = 3 \cdot b$
- 14) 2 + b . y =  $\frac{1}{C}$
- 15) 2.  $D = n \cdot (n 3)$
- 16)  $S = 180 \cdot (n 2)$
- 17)  $L = 2 \cdot \pi \cdot r$
- 18) L =  $\pi \cdot d$
- 19) L =  $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360}$
- 20) L =  $\frac{\pi \cdot r}{180}$

- 25) A =  $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
- $A = \pi \cdot r^2$
- $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \boldsymbol{n}^o}{}$
- 30) A =  $\pi \cdot (R^2 r^2)$

En estos ejercicios debes despejar la letra que está más señalada, es decir, la que en cada expresión está en negrita y en cursiva. Los 20 primeros están resueltos en la página siguiente. Te aconsejo que cuando te mande hacerlos hagas uno y lo corrijas, otro y a ver los posibles fallos, y otro y..., o sea, no hacer los 5, 10 ó 15 que te mande y corregirlos todos después, sino ver los errores uno a uno.

- 31) a X = b
- 32) 6 t + 1 =  $\frac{s}{5}$
- 33) 4 7 d = 8 V
- 34) 2 a b + 5 x = 1 3 m
- 35) 3 V 1 = 5 a x
- 36) 4 a z + 6 X = 3 m
- 37) x y 2 n = x + m n
- 38) 2 m n 7 =  $\frac{4}{x}$
- 39)  $\frac{5 \times y}{3 z} = a$
- 40) 6  $a + x = \frac{7}{b}$
- 41) 8  $b^2$  c = x
- 42)  $\frac{3 \ X}{5} = \frac{a \ b}{2}$
- 43)  $\frac{4 \text{ a } m}{5 \text{ x}} = 3 \text{ b}$
- 44)  $\frac{3}{h}$  + 4 y = 5 x
- 45)  $\frac{4 \times + 5}{-2} = \frac{-3 \times + 1}{-2}$
- 46) 5  $X^2 = \frac{3}{7}$
- $47) \quad \frac{\mathsf{L}}{r} = 2 \; \pi$
- 49)  $2 X^2 1 = 9$
- 50) A = 6 $\ell^2$
- 52) V =  $\frac{A h}{2}$
- 53)  $A = 4 \pi r^2$
- 54)  $A = 2 \pi r g$
- 55) A =  $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
- 56)  $3 \text{ a b} + \boldsymbol{b} = 1 \text{ x b}$
- 57)  $\frac{8a}{3} = 2 X^2$
- 58)  $a^2 = \boldsymbol{b}^2 + c^2$
- 59) A =  $\frac{\pi r^2 n^{\circ}}{360}$

1) 
$$a \cdot x = b$$

$$a = \frac{b}{x}$$

2) 
$$6 \cdot t + 1 = \frac{3}{5}$$
  
 $6t = \frac{3}{5} - 1 = \frac{-2}{5}$   
 $t = \frac{-2}{30} = -\frac{1}{15}$ 

3) 
$$4 - 7 \cdot d = 8 \cdot y$$
  
 $-7d = 8y - 4$   
 $d = \frac{8y - 4}{-7} = \frac{4 - 8y}{7}$ 

4) 2. 
$$a \cdot b + 5 \cdot x = 1 - 3 \cdot m$$
  
2  $ab = 1 - 3m - 5x$   

$$a = \frac{1 - 3m - 5x}{2h}$$

5) 
$$3 \cdot y - 1 = 5 \cdot a \cdot X$$
  
$$\frac{3y - 1}{5a} = X$$

6) 4 . a . 
$$Z$$
 + 6 .  $x$  = 3 - m  
4 a z = 3 - m - 6 x  
 $Z = \frac{3 - m - 6x}{4a}$ 

7) 
$$x \cdot y - 2 \cdot X = x + m \cdot n$$
  
 $xy - 2x - 1x = mn$   
 $(y - 2 - 1) x = mn$   
 $X = \frac{mn}{y - 3}$ 

8) 2. 
$$m$$
. n = x
$$m = \frac{x}{2n}$$

9) 
$$\frac{5 \cdot x \cdot y}{3} = z$$
$$5xy = 3z$$
$$y = \frac{3z}{5x}$$

10) 6. a + x = 
$$\frac{7}{b}$$
  
(6a + x).b = 7  
 $b = \frac{7}{6a + x}$ 

11) 8 . b . c = 
$$X^2$$
  
 $\pm \sqrt{8bc} = x$   
12)  $\frac{3 \cdot x}{5} = \frac{a \cdot b}{2}$ 

12) 
$$\frac{}{5} = \frac{}{2}$$

$$3x \cdot 2 = 5 \cdot ab \Rightarrow \frac{6x}{5b} = a$$

13) 
$$\frac{4 \cdot a \cdot m}{5 \cdot x} = 3 \cdot b$$
  
 $4am = 3b \cdot 5x \Rightarrow \frac{4am}{15b} = x$ 

14) 
$$2 + b \cdot y = \frac{1}{c}$$
  
 $(2 + by) \cdot c = 1$   
 $c = \frac{1}{2 + by}$ 

15) 2. 
$$D = n \cdot (n - 3)$$
  

$$D = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

16) 
$$S = 180 \cdot (n - 2)$$
  
 $S = 180 \cdot -360$   
 $S + 360 = 180 \cdot -360$   
 $\frac{S + 360}{180} = n$ 

17) 
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\frac{L}{2\pi} = r$$

18) 
$$L = \pi \cdot d$$

$$\frac{L}{\pi} = d$$

19) 
$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360}$$
$$360L = 2\pi r$$
$$\frac{360 L}{2\pi} = r$$

20) 
$$L = \frac{\pi \cdot r}{180}$$

$$180L = \pi r$$

$$\frac{180 L}{\pi} = r$$

#### תתתתתתתתתתתתתתתת

Esta reflexión puede resultar de mal gusto, o más bien de mal olor. Trata sobre LA HALITOSIS. ¡Que no sabes qué es! Bueno, te ayudo: halitosis es el olor desagradable producido por un mal aliento. Esto lo padece mucha gente. Millones, porque afecta a más de la mitad de la población.

En realidad desde esta reflexión pretendo ayudar a aquellos que no saben que padecen esto, o si lo saben no quieren o no saben ponerle algo de remedio. Lo primero es darse cuenta y admitirlo, si tienes halitosis, claro. Si no lo sabes, debes

preguntar a familiares, o a amigos de verdad, que te digan con toda confianza si a ti te pasa algo de eso, porque no dudes que si te pasa, ellos indudablemente y de forma frecuente lo han notado. Una vez que te enteres, si lo padeces, debes conocer cómo mejorarlo o curarlo. Lo mejor es preguntar al médico, o en la farmacia, hay muchas veces folletos muy asequibles que explican qué hacer, o a alguien que te pueda ayudar. Yo, humildemente, en la



página 181 del libro MATYVAL II, te explico muy detenidamente cosas que creo que te vendrán muy bien. Si te han dicho que ..., <u>no lo dejes, intenta mejorarlo y hasta eliminarlo; se puede. De</u> forma consciente o inconsciente produce algún tipo de rechazo en la convivencia diaria. Y eso no creo que te agrade. Si todavía no tienes el libro MATYVAL II, me lo puedes pedir. No te dé vergüenza.



# 5.17.- Resolución de problemas mediante ecuaciones.

**M**ultitud de problemas de la vida cotidiana, de industrias, de arquitectura, de carreteras, de talleres, del espacio, etc., se resuelven mediante ecuaciones. La mayoría de ellos con ecuaciones mucho más complicadas y complejas que las que vamos a estudiar nosotros, pero en realidad la base para resolverlos son las ecuaciones. De ahí la importancia que tiene su estudio. Veamos ejemplos sobre ecuaciones de primer grado.

Los pasos a seguir para resolver problemas son los siguientes:

#### 1) Elegir la incógnita.

Una vez leído *-como norma general tres veces*- y comprendido el problema, se elegirá el valor pedido como incógnita y lo llamaremos "x".

#### 2) Planteamiento de la ecuación.

Plantear un problema es poner en forma de ecuación las condiciones y datos que nos dice. Es decir, pasar del lenguaje verbal u ordinario descrito en el problema al lenguaje algebraico o matemático -ver pregunta nº 1 -. Para ello designamos con una letra, generalmente la "x", a la incógnita y establecemos una igualdad algebraica con ella y las diversas operaciones que nos indica el enunciado del problema.

Este paso es el que más dificultades te va a dar a la hora de resolver problemas de ecuaciones, por tanto, debes prestar toda la atención posible a los planteamientos de todos los problemas, los resueltos en este libro y los que expliquemos en clase, ya que un planteamiento bien hecho es tener casi un 80 % del problema resuelto.

#### 3) Resolución de la ecuación.

Parte más algebraica del problema. Sigue los pasos explicados en la página 238.

#### 4) Solución/respuesta.

Una vez hallada la solución del problema debes tener en cuenta que no siempre el valor obtenido es la respuesta del problema. La mayoría de las veces será ése, pero otras no. Por ejemplo, si nos pedían tres números impares consecutivos y la "x" es igual a 9, pues la respuesta sería 19 (2 x + 1), 21 (2 x + 3) y 23 (2 x + 5).

#### 5) Discusión/comprobación.

Una vez hallada la solución debemos comprobar —en su caso discutir— si satisface las condiciones del problema. Por ejemplo, si nos pedían un número par y nos sale 15, pues está muy claro que está mal; si al sustituir en la ecuación la igualdad no se cumple, pues está mal.

## Problema resuelto nº 1.

Sinforoso compra unos zapatos, un pantalón y un CD. El pantalón costó la mitad que los zapatos y el CD la sexta parte de los zapatos. El importe fue de 120 euros. ¿Cuánto costó cada cosa?

#### A) ELECCIÓN DE LA INCÓGNITA.

Llamaremos:
$$\begin{array}{ccc}
 & "x" & \to \text{ precio de los zapatos} \\
 & & "\frac{x}{2}" & \to \text{ precio del pantalón} \\
 & & & \frac{x}{6}" & \to \text{ precio del CD}
\end{array}$$

#### B) PLANTEAMIENTO DE LA ECUACIÓN.

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} = 120$$

#### C) <u>RESOLUCIÓN</u> <u>DE LA ECUACIÓN</u>.

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} = 120 \rightarrow \text{m.c.m.} = 6$$

$$6x + \frac{6 \cdot x}{2} + \frac{6 \cdot x}{6} = 6.120$$

$$6x + 3x + x = 720$$

$$(6 + 3 + 1)x = 720$$

$$x = \frac{720}{10} = 72 \text{ euros}$$

### D) SOLUCIÓN/RESPUESTA.

- Los zapatos costaron 72 euros.
- El pantalón 36 euros (72/2).
- **E**l **CD** 12 euros (**72**/**6**).

## E) <u>DISCUSIÓN/COMPROBACIÓN.</u>

Comprobamos que el pantalón vale la mitad que los zapatos, el CD vale la sexta parte y que las tres cosas juntas suman los 120 euros gastados.

## PROBLEMA RESUELTO CORRECTAMENTE. ;OKEY!

**ADVERTENCIA:** Es aconsejable, y muy eficaz, resolver los primeros problemas siguiendo los pasos que se han explicado. Después, una vez que los domines suficientemente, ya no es necesario resolverlos de una forma tan larga (?). En los siguientes reduciré las explicaciones para que no me ocupen tantas páginas.

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 2. (De dineros)

Silvia tiene de ahorros 2000 euros y Toni 3000 euros. Si cada año Silvia ahorra 150 euros y Toni 100 euros. ¿cuántos lustros pasarán hasta que Silvia iguale en dinero ahorrado a su amiga Silvia?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 3. (De mezclas)

Un comerciante mezcla 42 kg de café de 10'80 euros/kg con 25 kg a 13'50 euros/kg v con 32 kg a 12'60 euros/kg. ¿A qué precio debe poner el kg de la mezcla resultante?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 4. (De números)

¿Qué número multiplicado por 9 y disminuyendo el resultado en una decena de docenas da como resultado la raíz cuadrada de 225?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 5. (De edades)

La madre de Rigoberto tiene triple edad que él, y dentro de 14 años sólo tendrá el doble de lo que tenga entonces él. ¿Cuáles son las edades de cada uno ahora?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 6. (De fracciones)

Las clases del primer ciclo de E.S.O. en el I.E.S. "Meléndez Valdés" están constituidas de la siguiente forma: en la 1<sup>a</sup> hay una sexta parte de los alumnos del ciclo; en la 2<sup>a</sup>, la cuarta parte; en la 3<sup>a</sup>, la quinta parte, y en la última, la tercera parte, además de 9 alumnos que han causado baja a lo largo del curso por diversos motivos. ¿Cuántos alumnos había en el ciclo al principio de curso?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 7. (De distancias)

Un estudiante del I.E.S. "Meléndez Valdés" de Villafranca, una vez que ha terminado con una buena nota su Bachillerato, se ha matriculado en la Facultad de Ciencias del Deporte de Cáceres. La distancia que hay desde su residencia a la Facultad es tal que aumentada en su 4/9 resultaría 2'6 km. ¿Cuántos metros tiene esa distancia?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 8. (De fracciones)

En una fracción el denominador es 4 unidades mayor que el numerador, y si añadimos 24 al numerador, la fracción es igual a la inversa de la fracción inicial. ¿Cuál es esa fracción primitiva?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 9. (De repartos)

Reparte un premio de 72000 euros entre 4 chicos y 10 chicas, de tal forma que cada chica reciba 3000 euros más que cada chico.

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 10. (De figuras planas)

Si un lado de un cuadrado fuera más corto en 12 cm y el otro más largo en 1'6 dm, las medidas de los lados del rectángulo que resultara estarían en la razón ½, ¿Cuál es el área del cuadrado inicial?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 11. (De números)

Calcula tres números consecutivos cuya suma es igual al doble del mayor más 1.

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 12. (De repartos)

Reparte 1050 euros entre cinco personas de modo que a cada una le corresponda 50 euros más que la anterior.

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 13. (De móviles)

La distancia entre dos ciudades, A y B, con estación de ferrocarril es de 24 mam. Un tren sale de "A" en dirección a "B" con una velocidad constante de 50 km/h, y de "B" hacia "A" sale otro con velocidad constante de 70 km/h. ¿Cuánto tardarán en juntarse y a qué distancia?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 14. ( De capacidad )

La cisterna de un camión repartidor está llena de gasolina. En la 1<sup>a</sup> gasolinera deja ½ de su contenido, en la 2<sup>a</sup> deja 3/5 de lo que quedaba y para la 3<sup>a</sup> sólo quedan en la cisterna 8400 dl. ¿Cuál es la capacidad en litros de dicho recipiente?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 15. (De repartos)

Lidia reparte naranjas a tres niños. A Gumersindo le da la mitad de las que tiene y media naranja más; a Turulato la mitad de las que quedaron y media naranja y a Doroteo la mitad de las que quedan, después de darle a Turulato, y media naranja más. Con este reparto peculiar se le terminan las naranjas. Después fue a ver a su amiga Dorotea y le planteó el problema preguntándole cuántas naranjas repartió. Ni que decir tiene que la mente veloz de Dorotea tardó pocos minutos en calcularlo. ¿Sabes tú cómo lo hizo?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 16. (De números)

La suma de dos números enteros es 30. Sabiendo que la mitad del mayor más un quinto del menor suman 12, ¿cuáles son dichos números?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 17. (De móviles)

Un tractor sale de un punto "A" en línea recta a una velocidad constante de 6 m/seg. Tres segundos más tarde sale en su persecución otro tractor, del mismo punto "A", a una velocidad de 8 m/seg. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarlo y a cuántos metros de "A"?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 18. (De edades)

Filomeno tiene 41 años y su hija Anastasia 16 años. ¿Al cabo de cuántos años tendrá el padre doce séptimos de la edad de su hija?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 19. (De figuras planas)

Se sabe que en un triángulo rectángulo uno de los ángulos contiguos a la hipotenusa es 2/3 menor que el otro contiguo. ¿Cuántos grados miden respectivamente los tres ángulos de dicho triángulo?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 20. (De animales)

En una finca hay 39 animales. Se sabe que sólo hay patos y ovejas, y que entre todos suman 126 patas. ¿Cuántos patos y ovejas hay?

#### PROBLEMA RESULTO Nº 21. (De tiempos)

El tiempo que debes emplear en resolver este problema se descompone del siguiente modo: 1/5 en plantearlo, 4/10 en resolverlo y un minuto en comprobarlo. ¿Cuántos segundos emplearás en terminarlo?

#### PROBLEMA RESUELTO Nº 22. (De mezclas)

Un almacenista ha de servir 1200 litros de aceite a 4'50 euros/l. Como no tiene existencias de aceite de ese precio, mezcla ciertas cantidades de otros aceites de 4'20 euros/l y 5 euros/l. ¿Cuántos litros de cada clase deberá mezclar para servir aceite al referido precio de 4'50 euros/l?

### PROBLEMA RESUELTO Nº 23. (De figuras planas)

Los lados de un rectángulo miden respectivamente 1'8 dm y 6 cm. Si reducimos cada lado en un mismo nº de centímetros, se obtiene otro rectángulo de 320 mm. ¿Cuántos cm hemos quitado?

## PROBLEMA RESUELTO Nº 24. (De números)

La diferencia de dos números es 6 y su cociente es 5/3. ¿Cuáles son los números?

## PROBLEMA RESUELTO Nº 25. (De números)

La suma de tres números pares es igual a cuatro veces el primero disminuido en 24. ¿Cuáles son dichos números?

2) 
$$2000 + 150 x = 3000 + 100 x$$
  
 $150 x - 100 x = 3000 - 2000$   
 $50 x = 1000$   
 $x = \frac{1000}{50} = 20$  años  $(20:5 = 4)$   
Solución  $\rightarrow$  Deberán pasar  $4$  lustros.

4) 
$$9x - 10.12 = \sqrt{225}$$
  
 $9x = 15 + 120$   
 $x = \frac{135}{9} = 15$   
Solución  $\rightarrow$  El nº pedido es  $15$ .

$$\begin{cases} \text{Ahora} & \text{Edad de Rigoberto} \rightarrow x \\ \text{Edad de su madre} \rightarrow 3x \\ \text{Dentro de 14 años} & \text{Rigoberto} \rightarrow x + 14 \\ \text{Madre} \rightarrow 3x + 14 \\ \hline 3x + 14 & = 2 \cdot (x + 14) \\ 3x + 14 & = 2x + 28 \\ \hline x = 14 \text{ años (Rigoberto)}; 3x = 42 \text{ años (madre)} \\ \text{Solución} \rightarrow & \begin{cases} \circ & \text{Rigoberto} \\ \circ & \text{Rigoberto} \end{cases} \text{ tiene } \frac{14 \text{ años}}{42 \text{ años}} \end{cases}$$

6) 
$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x + \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 9 = x$$
  
 $\frac{60x}{6} + \frac{60x}{4} + \frac{60x}{5} + \frac{60x}{3} + 60.9 = 60x$   
 $10x + 15 + 12x + 20x + 540 = 60x$   
 $-3x = -540 \rightarrow x = 180$   
Solución  $\rightarrow$  Al principio había 180 alumnos.

7) 
$$\otimes$$
 Ajuste previo : 2'6 km  $\rightarrow$  2'6 . 1000 = 2600 m  
 $x + \frac{4}{9}x = 2600$   
 $9x + 4x = 23400$   
 $13x = 23400 \rightarrow x = 1800$  m  
Solución  $\rightarrow$  El trayecto mide 1800 metros.

```
11) \otimes Tres n. consecutivos \rightarrow x; x + 1; x + 2
(x) + (x + 1) + (x + 2) = 2 \cdot (x + 2) + 1
3x - 2x = 4 + 1 - 3
x = 2
Solución \rightarrow Los n. pedidos son 2, 3 y 4.
```

COMPRUEBA TÚ LOS RESULTADOS!

8) 
$$\begin{cases} \circ \text{ Fracción inicial } \rightarrow \frac{x}{x+4} \\ \circ \text{ Fracción nueva} \rightarrow \frac{x+24}{x+4} \\ & \text{ inversa de la inicial } \\ \hline \frac{x+24}{x+4} = \frac{x+4}{x} \\ \otimes \text{ Multiplicamos en CRUZ :} \\ (x+24) \cdot x = (x+4) \cdot (x+4) \\ x^2 + 24x = x^2 + 8x + 16 \\ \hline \frac{x^2}{16x} + 24x - \frac{x^2}{2} - 8x = 16 \\ \hline 16x = 16 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$
Solución 
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ Fracción primitiva } \rightarrow \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \\ \text{ Fracción posterior } \rightarrow \frac{1+24}{1+4} = \frac{25}{5} \end{cases}$$

10) 
$$\begin{cases} \text{Cuadrado inicial} \rightarrow (x) \cdot (x) \\ \text{Rectángulo posterior} \rightarrow (x-12) \cdot (x+16) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Razón de los lados} \\ \text{del rectángulo} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{x-12}{x+16} = \frac{1}{2}$$

$$(x-12) \cdot 2 = (x+16) \cdot 1$$

$$2x-24 = x+16$$

$$x = 40 \text{ cm}$$
Solución  $\rightarrow \text{ Årea}_{\text{cuadrado}} = x^2 = 40^2 = \frac{1600 \text{ cm}^2}{1600 \text{ cm}^2}$ 

12) (x) + (x+50) + (x+100) + (x+150) + (x+200) = 1050  

$$5 x + 500 = 1050$$
  
 $x = \frac{550}{5} = 110$   
Solución: Las partes son 110, 160, 210, 260 y 310.

$$13) \downarrow \underline{\hspace{1cm}} \bot \underline{\hspace{1cm}}} \underline{\hspace{1cm}} \bot \underline{\hspace{1cm}} \bot$$

Capacidad del recipiente 
$$\rightarrow$$
 x

Sacamos  $\frac{1}{4}$  x  $\rightarrow$  queda  $\rightarrow$  x  $-\frac{x}{4}$  =  $\frac{3x}{4}$ 

Sacamos  $\frac{3}{5}$  del resto  $\frac{3x}{4} \rightarrow \frac{3.3x}{5.4}$  =  $\frac{9x}{20}$ 

Y quedan  $\rightarrow$  840 litros

 $\frac{1}{4}$  x +  $\frac{9}{20}$  x + 840 = x

 $5x + 9x - 20x = -20.840$ 
 $-6x = -16800 \Rightarrow x = 2800$  litros

Solución  $\rightarrow$  La cisterna llena tiene  $2800$  litros.

15) • Número de naranjas 
$$\rightarrow$$
 "x"

• Para Gumersindo  $\rightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ 

•  $\left|\begin{array}{c} \text{Luego} \\ \text{quedaron} \end{array}\right| \rightarrow x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ 

• Para Turulato  $\rightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ 

•  $\left|\begin{array}{c} \text{Luego} \\ \text{quedaron} \end{array}\right| \rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$ 

• Para Doroteo  $\rightarrow \frac{\frac{x}{4} - \frac{3}{4}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$ 

•  $x = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{8}\right)$ 

•  $x = 7$ 

Solución  $\rightarrow \begin{cases} \text{Lidia } (\frac{7}{2} \text{ naranjas}), \text{ Gumersindo } (\frac{4}{2} \text{ n.}), \text{ Turulato } (\frac{2}{2} \text{ n.}) \text{ y Doroteo } (\frac{1}{2} \text{ naranja}). \end{cases}$ 

16) 
$$\otimes$$
 1 er n°  $\rightarrow$  "x"  $\stackrel{\bullet}{,}$  2° n°  $\rightarrow$  "30 - x"   
 $\frac{x}{2}$  +  $\frac{30 - x}{5}$  = 12   
 $\frac{10 \cdot x}{2}$  +  $\frac{10 \cdot (30 - x)}{5}$  = 10 · 12   
Resuelta da:  $x = 20$    
Solución  $\rightarrow$  Los números pedidos son  $20 y 10$ .

$$\begin{cases} \text{Ahora} & \text{Edad de Filomeno} \rightarrow 41 \text{ años} \\ \text{Edad de Anastasia} \rightarrow 16 \text{ años} \\ \text{Dentro de "x"años} & \text{Filomeno} \rightarrow 41 + x \\ \text{Anastasia} \rightarrow 16 + x \\ \end{cases}$$
 
$$\frac{\text{Filomeno}}{41 + x} = \frac{12}{7} \cdot \frac{\text{Anastasia}}{(16 + x)}$$
 
$$\text{Resuelta, se obtiene :}$$
 
$$x = 19 \text{ años}$$
 
$$\text{Solución} \rightarrow \text{Deberán pasar} \quad \underline{19 \text{ años}}.$$

### COMPRUEBA TÚ LOS RESULTADOS!

17) 
$$\downarrow A \qquad B$$

$$\begin{bmatrix} e_1 = e_2 \\ v_1 = 6 \text{ m/s} ; v_2 = 8 \text{ m/s} \\ t_1 = t_2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{F\'ormulas del} \\ \text{movimiento} \end{vmatrix} \rightarrow \left\{ e = \text{vt} ; \text{v} = \frac{e}{t} ; \text{t} = \frac{e}{\text{v}} \right.$$

$$\begin{cases} e_1 = v_1 \cdot t_1 = 6 \cdot (t+3) \\ e_2 = v_2 \cdot t_2 = 8 \cdot t \end{cases} \right\} \rightarrow e_1 = e_2$$

$$\begin{cases} \text{Como recorren el mismo espacio, igualamos:} \\ 6 \cdot (t+3) = 8 \cdot t \\ 6t - 8t = -18 \rightarrow t = 9 \text{ segundos} \end{cases}$$

$$9 \text{ seg } \cdot 8 \text{ m/seg } = 72 \text{ m}$$

$$\begin{cases} \text{Se encuentran a los } 9 \text{ segundos} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Se encuentran a los } 9 \text{ segundos} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Se encuentran a los } 9 \text{ segundos} \end{cases}$$

19) 
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$$
  
90 +  $\frac{2}{3}x + x = 180$   
270 + 2x + 3x = 540  
5x = 270  $\rightarrow x = 54^{\circ}$   
Solución  $\rightarrow \hat{A} = 90^{\circ}$ ;  $\hat{B} = 36^{\circ}$ ;  $\hat{C} = 54^{\circ}$ .

20) N° de patos 
$$\rightarrow$$
 "x"; n° de ovejas  $\rightarrow$  "39 - x"

patas(2).patos(x) patas(4).ovejas(39 - x) patas totales

2x + 4.(39 - x) = 126

2x - 4x = 126 - 156

x = 15  $\Rightarrow$  39 - 15 = 24

Solución  $\rightarrow$  Hay 15 patos y 24 ovejas.

21) Tiempo total empleado 
$$\rightarrow$$
 "x" segundos.

$$\frac{1}{5} x + \frac{4}{10} x + \frac{1 \text{ minuto}}{60} = x$$

$$2x + 4x - 10x = -600$$

$$-4x = -600 \Rightarrow x = 150 \text{ seg.}$$
Solución  $\rightarrow$  Tardará  $2'5$  minutos en resolverlo.

22) En general, en todas las mezclas se debe cumplir:
$$\begin{vmatrix} valor & de & las & cantidades \\ que & se & mezclan \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} valor & de \\ la & mezcla \end{vmatrix}$$

$$\frac{aceite & 1^a}{4'20 & x} + \frac{aceite & 2^a}{5 \cdot (1200 - x)} = \frac{aceite & mezcla}{1200 \cdot 4'50}$$

$$\frac{4'2x - 5x = -600}{-0'8 & x} = -600 \rightarrow x = 750$$
Solución 
$$\rightarrow \begin{cases} Se & mezclarán & 750 & litros & de & la & 1^a \\ aceite & y & 450 & litros & de & la & 2^a \end{cases}$$

23) 
$$\begin{cases} \text{Rectángulo inicial} \rightarrow 18.6 \\ \text{Rectángulo posterior} \rightarrow (18 - x).(6 - x) \\ 2.(18 - x) + 2.(6 - x) = 32 \text{ (perímetro)} \\ -2x - 2x = 32 - 36 - 12 \\ -4x = -16 \Rightarrow x = 4 \text{ cm} \\ \text{Solución} \rightarrow \text{Se redujo } 4 \text{ cm cada lado.} \end{cases}$$

24) 
$$\otimes$$
 Un n° es "x" y el otro es "x - 6".  
 $\otimes$  Propiedad fundamental de la división :  
D = d . c + r  
 $x = (x-6) \cdot \frac{5}{3} + 0$   
 $3x = 5x - 30 \Rightarrow x = 15$   
Solución  $\rightarrow$  Los números pedidos son 15 y 9.

$$25) \begin{cases} \circ \text{ A un n } \circ \text{ par le designamos } \rightarrow \text{"2 x ".} \\ \circ \text{ Los siguientes serán } \rightarrow \text{"2 x + 2"; "2 x + 4".} \\ (2x) + (2x + 2) + (2x + 4) = 4 \cdot (2x) - 24 \\ -2x = -30 \Rightarrow x = 15 \\ S \rightarrow \text{Los n. pares pedidos son } 30 \cdot (2x), 32 \cdot y \cdot 34.$$

#### ¡COMPRUEBA TÚ LOS RESULTADOS!

Cada uno en nuestras vidas conocemos suficientes casos en los que <u>el interés, las ganas y los deseos de conseguir algo logran bastantes más éxitos</u> (positivos y valorados) <u>que el saber, el querer dominar o el sentirse superior</u>. Basta repasar distintos campos de la sociedad actual para recordar ejemplos:

- Equipos de fútbol supermillonarios llenos de estrellas que pierden ante otro equipo humilde pero lleno de ilusión.
- Alumnos muy inteligentes y dotados que a duras penas consiguen, si acaso, el título de Secundaria, cuando otros muy normalitos y menos talentosos, pero con mucho esfuerzo hacen no sólo un buen Ba



- esfuerzo, hacen no sólo un buen Bachillerato sino que terminan una carrera universitaria.
- Personas con capitales (dinero) y buenas perspectivas que a la vuelta de dos o tres negocios que emprenden fracasan o..., cuando otras casi sin posibilidades económicas, ni familiares, ni buena situación social empiezan con un pequeño negocio y a medio plazo acrecientan sus horizontes y logros empresariales de forma muy significativa.
- <u>Etc</u>

Y es que en la vida, en muchas ocasiones, sobre todo en la adolescencia y juventud, <u>CONSIGUE</u> <u>MÁS</u> <u>EL</u> <u>QUE</u> <u>QUIERE</u> <u>QUE</u> <u>EL QUE</u> <u>PUEDE</u>.



#### PROBLEMAS PARA RESOLVER:

#### SOLUCIONES en las págs. 423 a 425.

- Halla la longitud de una pieza de tela sabiendo que después de haber vendido la mitad, la quinta parte y la décima parte quedan 20 metros.
- La fortuna de un padre fue repartida entre sus tres hijos: Hipólito, 1/4; Gabino, 2/3, y Balbina, 750000 euros. ¿Cuál era el capital y cuánto correspondió a cada uno?
- **¿C**uál es el número que sumado con −5 da 3?
- 4.- ¿Qué número multiplicado por 6 y sumando al resultado 14 da 38?
- 5.- Una persona ha gastado 4/10 de una cantidad de dinero, de tal manera que sus 4/12 equivalen a 4800 euros. ¿Cuánto dinero ha gastado?
- **6.-** Después de gastar los 5/9 del dinero de un premio de la Lotería Primitiva, todavía me quedan 243000 euros. Averigua qué dinero tenía al principio y cuánto gasté.
- 7.- Cuántas veces está contenido medio mes en 19/2 de mes?
- 8.- ¿Cuál es la edad de un padre que duplica la de su hijo y que hace 24 años su edad era 10 veces mayor que la de su hijo?
- 9.-El cociente exacto de dos números es 3 y su diferencia es 24. ¿Cuáles son?
- **10.-** Tenemos dos toneles de igual capacidad llenos de vino. Si sacamos 20 litros del 1º y 90 litros del 2º, queda en el 1º doble cantidad que en el 2º. ¿Cuál es la capacidad de cada tonel?
- 11.- Si repartes 2830 euros entre Lucrecia y Segismundo, sabiendo que la 1ª recibe 750 euros más que el 2º, ¿cuánto recibirá cada uno?
- 12.- Un señor sufre en su sueldo mensual un descuento de sus 4/18, y recibe 156370 euros. Averigua qué sueldo bruto recibe al mes.
- **13.-** Reparte 41.(-10) <sup>4</sup> entre una familia de 4 personas mayores y 10 niños, de modo que cada persona mayor reciba 15000 euros más que cada niño.

- **14.-** Halla un número tal que la suma de sus cocientes por 4, 6 y 12 sea igual a 24.
- 15.- Un rectángulo tiene un perímetro de 0'16 km y la base es 3000 mm mayor que la altura. Halla su área en "ca".
- 16.- La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 1. Calcula esos números.
- 17.- En una reunión de 44 personas hay 6 mujeres más que hombres, y tantos niños como mujeres y hombres unidos. ¿Cuántas personas hay de cada clase?
- 18.- ¿Qué número hay que sumar a 4300 para hacerlo cinco veces mayor?
- 19.- Se reparten 284000 euros entre tres personas, de modo que el 1º recibe 18000 euros más que el 2º v el 3º tanto dinero como los otros dos juntos. ¿Cuánto recibió cada uno?
- 20.- La edad de Prudencio es doble que la de su hermana Hermenegilda. Hace 7 años la suma de las dos edades era igual a la edad actual de Prudencio. Calcular:
  - a) Las edades actuales de ambos.
  - b) ¿Cuándo tendrá Prudencio el triple de la edad de Hermenegilda?

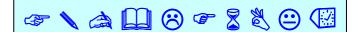
#### うかんしょうしゅう しゅうしゅうしゅう

Si analizamos de forma fría y reposada a la sociedad

actual, en una parte significativa de ella podemos detectar sin ambigüedades, entre otras características esenciales, que oferta pocos valores y que ofrece pocos horizontes, entendidos los valores como universales y los horizontes como guías para el vivir más allá, es decir, para vivir con sentido trascendente la vida.



No atraviesa sus mejores momentos la familia, y quizás ahí esté gran parte de la posible solución a esos problemas de la sociedad. Empezando por asumir la responsabilidad casi total, en algunos aspectos total, y la autoridad de educar a sus hijos, continuando con no delegar esta responsabilidad primaria -dedicando tiempo, dedicación, esfuerzo, perseverancia, no decaimiento- y fundamental en colegios e institutos y acompañar siempre estas actitudes de afectividad, disciplina, control, revisión, estímulo y motivación.



# 5.18.- Sistemas de ecuaciones.

Hasta ahora nos hemos dedicado a estudiar las ecuaciones de primer grado con una incógnita. A continuación, aquellos que puedan y dispongan de interés, capacidad y tiempo, podrán aprender a resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas; incluso, si el horario reducido que la asignatura de "Mate" tiene en la E. S. O. os lo permite a los interesados, podréis ejercitaros en problemas sobre sistemas. Si así es, comprobarás que muchos problemas de una ecuación de primer grado se pueden resolver más fácilmente con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar los valores de las incógnitas, generalmente llamadas "x" e "y", que satisfacen las dos ecuaciones, es decir, que al sustituir esos valores por "x" e "y" se verifica que las dos igualdades son ciertas. Para resolver sistemas se pueden utilizar tres métodos:

# A) <u>MÉTODO</u> <u>DE</u> <u>REDUCCIÓN</u>.

El objetivo de este método <u>es conseguir que una de las incógnitas tenga igual coeficiente en las dos ecuaciones, con lo cual al restar ambas ecuaciones se reducen esos términos, quedando eliminada una de las incógnitas y convirtiendo el sistema inicial en una sola ecuación de primer grado que resolveremos. Después, sustituimos el valor hallado en una de las ecuaciones y obtenemos el valor de la otra incógnita.</u>

Para conseguir esto deberemos multiplicar ambas ecuaciones por los números convenientes y lograr la simplificación (reducción) de una de las incógnitas. En fin, pongámonos "manos a la obra", que es la mejor forma de aprenderlo. Resolver los siguientes ejemplos por REDUCCIÓN:

# **EJEMPLO** $N^{\circ}$ 1:

$$\left\{ \begin{array}{lll}
4x + 12 & = 5y \\
6 - 3y & = -2x
\end{array} \right\}$$

**E**s conveniente colocar siempre los términos del sistema en la forma general, que consiste en ponerlo ordenadamente así:

**A**sí que los colocamos ordenados:

$$\left\{
\begin{array}{lll}
4x - 5y & = & -12 \\
2x - 3y & = & -6
\end{array}
\right\}$$

Ahora pensamos cuál eliminar y por qué números debemos multiplicar. Veamos: si quisiéramos eliminar la "x", bastaría multiplicar por 2 la 2ª ecuación:

$$\begin{cases} 4x - 5y = -12 \\ 2x - 3y = -6 / \bullet 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x - 5y = -12 \\ 4x - 6y = -12 \end{cases}$$

**R**estando ambas ecuaciones, se reduce la "x":

$$\left\{ -11 \, y = 0 \, \right\} \\ \left\{ y = \frac{0}{-11} = 0 \, \right\}$$

Sabiendo que  $\{y = 0\}$ , sustituimos ese valor en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 12 = 5y \\ 4x + 12 = 5 \cdot 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 12 = 5 \cdot 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x = 0 - 12 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x = -12 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-12}{4} = -3 \end{array} \right\}$$

**Y** ya tenemos las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= -3 \\
\mathbf{y} &= 0
\end{aligned}$$

### **COMPROBACIÓN:**

Para comprobar sustituimos los valores en las dos ecuaciones iniciales:

$$\begin{cases} 4x + 12 = 5y \\ 6 - 3y = -2x \end{cases} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ 6 - 3 \bullet 0 = -2 \bullet (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 + 12 = 0 \\ 6 - 0 = +6 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ 6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 6 = 6 \end{cases}$$
CIERTAS

### EJEMPLO $N^{\circ}$ 2:

Una vez resuelto el sistema anterior, vamos a comprobar que podíamos haber reducido la "y" en lugar de la "x", y que obtenemos las mismas soluciones.

Partimos del sistema anterior ordenado:

$$\left\{ \begin{array}{l}
4x - 5y = -12 \\
2x - 3y = -6
\end{array} \right\}$$

Si antes multiplicábamos por 2 la  $2^a$  ecuación, ahora vamos a multiplicar por -3 la  $1^a$  y por 5 la  $2^a$ :

$$\begin{cases}
4x - 5y = -12 / \bullet (-3) \\
2x - 3y = -6 / \bullet 5
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-12x + 15y = +36 \\
10x - 15y = -30
\end{cases}$$

**A**ntes restábamos ambas ecuaciones, y ahora he multiplicado la 1<sup>a</sup> ecuación por – **3** para que veas que si logramos los coeficientes de signos opuestos hay que sumar las ecuaciones, en lugar de restarlas. Veamos:

$$\{-2x = 6\} \Rightarrow x = \frac{6}{-2} = -3$$

Sabiendo que  $\{x = -3\}$ , sustituimos ese valor en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales:

$$4x + 12 = 5y$$

$$4 \cdot (-3) + 12 = 5y$$

$$-12 + 12 = 5y$$

$$0 = 5y$$

$$\frac{0}{5} = y = 0$$

Las soluciones son:  

$$x = -3$$
;  $y = 0$ 

# B) <u>MÉTODO</u> <u>DE SUSTITUCIÓN</u>.

El objetivo de este método es conseguir despejar una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones y sustituir la expresión resultante en la otra ecuación. Así conseguimos una sola ecuación con una incógnita, que resolveremos fácilmente a estas "alturas"; claro que será fácil si antes ha habido, por tu parte, interés, trabajo y esfuerzo, si no... Una pregunta habitual de los que quieren aprender bien: ¿ Qué incógnita despejamos y en qué ecuación ? Pues bien, conviene hacerlo en la ecuación que resulte más fácil, cosa que ya aprenderás con la práctica, pero como norma general te diré que es conveniente despejar una incógnita cuyo coeficiente sea la unidad (1), con lo cual no trabajarás con denominadores. De cualquier forma, debes aprender a hacerlo en cualquier caso. No hay más remedio, así que otra vez: "Manos a la obra".

# EJEMPLO Nº 3:

$$\begin{cases} 2x = 3y - 13 \\ y - x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Ponemos en la forma general} \end{cases} :$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ -x + y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Despejamos (aislamos, quedamos sola en un miembro) la "y" en la 2ª ecuación.} \end{cases} :$$

$$\begin{cases} y = x + 6 \end{cases}$$
Sustituimos "y", de ahí el nombre de este método.
Ponemos  $(x + 6)$  en lugar de la "y" de la otra ecuación.
$$2x - 3y = -13$$

$$2x - 3 \cdot (x + 6) = -13$$

$$2x - 3x - 18 = -13$$

$$-x = 5 \Rightarrow x = -5$$

Volvemos a sustituir el valor de "x" (-5) en la ecuación de despeje, ya que es la más fácil:

$$y = x + 6 \Rightarrow y = -5 + 6 = 1$$
  
Ya tenemos las soluciones del sistema:  
 $x = -5$ ;  $y = 1$ 

# EJEMPLO Nº 4:

**E**l mismo sistema anterior, pero despejando la "x" en la 1ª ecuación. Partimos de la forma general :

$$\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow | \text{ Despejamos la "x" en la 1ª ecuación } | :$$

$$\begin{vmatrix} 2x - 3y = -13 \\ 2x = -13 + 3y \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x = \frac{-13 + 3y}{2} \end{bmatrix}$$

Observa que al despejar una de las incógnitas cuyo coeficiente no es la unidad (1) obtenemos al final denominadores. Y "no pasa nada", sólo que es más cómodo trabajar sin ellos. i Ah! Que conste que debes saber de cualquier forma.

De manera análoga al anterior ejemplo, sustituimos la expresión que vale "x" en la otra ecuación, la  $2^a$ :

$$-x + y = 6$$

$$-\left(\frac{-13 + 3y}{2}\right) + y = 6$$

$$13 - 3y + 2y = 2.6$$

$$-y = -1$$

$$y = 1$$

Volvemos a sustituir (y = 1) en la 2<sup>a</sup> ecuación, por ser fácil:

$$-x + y = 6$$

$$-x + 1 = 6$$

$$-x = 6 - 1 = 5 \implies x = -5$$

### **COMPROBACIÓN:**

$$\begin{cases}
2x-3y=-13 \\
-x+y=6
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
2 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 = -13 \\
-(-5) + 1 = 6
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-10 - 3 = -13 \\
+5 + 1 = 6
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-13 = -13 \\
+6 = 6
\end{cases}$$
CIERTAS

Este ejemplo ha resultado algo más laborioso, ¿verdad? Es por los denominadores, pero eso es conveniente, ya que a sí te habitúas al cálculo con ellos.

#### **MÉTODO** IGUALACIÓN.

El objetivo de este método es conseguir despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones resultantes. Así conseguimos una sola ecuación con una incógnita, que debe ser "coser y cantar" para los estudiantes que han aprovechado su tiempo. Y otra vez surge la pregunta: ¿Qué incógnita despejamos, la "x" o la "y"? Pues bien, conviene despejar aquella que nos resulte más fácil, claro está; pero eso es cosa que aprenderás con la práctica. Debes tener en cuenta que siempre será conveniente despejar la incógnita cuvo coeficiente sea la unidad (1) en una de la dos ecuaciones, o mejor en las dos, ya que no trabajarás con denominadores, o trabajarás con menos, si es que en algunos despejes los obtienes. De cualquier forma, debes aprender a hacerlo en cualquier caso. Bueno, volvemos "al tajo". Sería bueno (¿) que se aprendieran estas cosas y otras con unas pastillitas o cápsulas, ¿no? Pero todavía no se han inventado, y no queda más remedio que, si tú quieres, echarle ganas, faena y voluntad. Y si no, pues a ...

En mi opinión, recogida de la experiencia de bastantes años, creo que en general éste es el método que más le cuesta aprender a los alumnos. Aprenderemos y practicaremos los tres, y los preguntaré, pero si no logras dominarlos, intenta por lo menos aprender bien uno de ellos.

# **EJEMPLO** No $5: \rightarrow$ Uno facilito (i).

$$\begin{cases} x + 2 = -6y \\ y + x = 3 \end{cases}$$

**E**n este método no es muy necesario poner el sistema en la forma general. Observamos que lo más sencillo es despejar la "x" en las dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
x & = -2 - 6y \\
x & = 3 - y
\end{array} \right\}$$

IGUALAMOS los 2ºº miembros, o sea, las dos expresiones obtenidas, por eso se llama el método de IGUALACIÓN:

$$-2 - 6y = 3 - y$$

- 2 - 6 y = 3 - y Ya tenemos una ecuación de una incógnita.

$$-6y + y = 3 + 2$$

$$-5y = 5$$

$$y = \frac{5}{-5} = -1$$

Sustituimos el valor de "y" (y = 1) en una de las dos ecuaciones (la 3ª ó la 4ª):

$$x = 3 - y \implies x = 3 - (-1) = 4$$

Ya hemos resuelto el sistema por igualación.

$$x = 4$$
;  $y = -1$  Comprueba tú.

# EJEMPLO $N^o$ 6: $\rightarrow$ Uno más difícil.

$$\left\{
\begin{array}{lllll}
5 & x & - & 3 & y & = & 8 \\
2 & y & + & 20 & = & -4 & x
\end{array}
\right\}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & y & = 8 & -5 & x \\ 2 & y & = -4 & x - 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y & = \frac{8 - 5 & x}{-3} \\ y & = \frac{-4 & x - 20}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{8 - 5 & x}{-3} & = \frac{-4 & x - 20}{2} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \text{Multiplicamos} \\ \text{en CRUZ.} \end{vmatrix}$$

$$(8 - 5x) \cdot 2 & = -3 \cdot (-4x - 20)$$

$$16 - 10x & = +12x + 60$$

$$-22x & = 44 \Rightarrow x & = -2$$
Sustituimos el valor de "x" (-2) en la 5ª ecuación:
$$y & = \frac{8 - 5 & x}{-3} & = \frac{8 - 5 \cdot (-2)}{-3} & = \frac{8 + 10}{-3} & = -6$$
Terminado  $\Rightarrow x = -2$ ;  $y = -6$ 

### **COMPROBACIÓN:**

$$\begin{cases} 5 \times - 3 & y = 8 \\ 2 & y + 20 = -4 & x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot (-2) - 3 \cdot (-6) = 8 \\ 2 \cdot (-6) + 20 = -4 \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 + 18 = 8 \\ -12 + 20 = 8 \end{cases}$$
; 
$$\begin{cases} 8 = 8 \\ 8 = 8 \end{cases}$$
 CIERTAS

# 0000000000000000

La edad a la que los adolescentes o jóvenes se hacen las siguientes preguntas es muy variada, porque depende de la educación y formación recibidas, pero por si no te las has formulado nunca, son éstas:

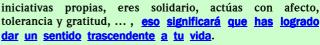
¿ Para qué estudio yo? ¿ Para qué estoy yo aquí? ¿ Para qué quiero mi vida?

Verdaderamente, cuanto antes des un sentido a tu vida, antes alcanzarás una personalidad sólida que te prepare

firmemente para la vida que te depare el futuro.

Si no eres autónomo, si te dejas llevar de los demás, si vas siempre a la moda, si vas al "botellón" porque va todo el mundo, si tu comportamiento no es respetuoso porque eso no se lleva, etc., entonces el sentido de tu vida posee poca trascendencia.

Si te sientes diferente, valoras el esfuerzo, tienes fuerza de voluntad, te gusta pensar más allá de lo inmediato, tienes





# Resuelve los siguientes sistemas por el método de REDUCCIÓN:

# Resuelve los siguientes sistemas por el método de SUSTITUCIÓN:

# **SOLUCIONES** en las págs. 426 a 430.

# **SOLUCIONES** en las págs. 426 a 430.

1) 
$$\begin{bmatrix} -x + y = -1 \\ 2x + 3y = 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
x & = 2 - y \\
x & = y
\end{bmatrix}$$

3) 
$$\begin{bmatrix} 6x + 8y = 8 \\ x - 3y = 10 \end{bmatrix}$$

15) 
$$\begin{bmatrix} 3x + 4y = 2 \\ x = 10 + 3y \end{bmatrix}$$

4) 
$$\left[ \frac{2x-6}{4} + \frac{2y-4}{5} = 4(x-2) - 2y \\ \frac{5x}{3} + \frac{5y}{2} = 5x - 5y + 5 \right]$$

16) 
$$\left[ \frac{x-3}{4} + y = 2(x-2) - \frac{y-2}{5} \\ \frac{x}{3} + y = x + 1 - \frac{y}{2} \right]$$

5) 
$$\left[ \begin{array}{rrrr} 3x + 2y & = & -6 \\ 5y - 4x & = & -15 \end{array} \right]$$

17) 
$$\left[ \begin{array}{rcl} 2y & = & -6 - 3x \\ 5y & = & 4x - 15 \end{array} \right]$$

18) 
$$\begin{bmatrix} 6x = 4y - 6 \\ y - 1 = \frac{7x + 2}{5} \end{bmatrix}$$

7) 
$$\left[ \frac{2}{5} x = \frac{3}{9} y \\ \frac{4}{6} - 2 = \frac{3}{-15} - 7 \right]$$

19) 
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} x - \frac{3}{9} y = 0 \\ \frac{4}{6} y + 7 = \frac{3}{-15} x + 2 \end{bmatrix}$$

8) 
$$\left[ \begin{array}{cccc} a & + & b & = & 1'3 \\ a & - & b & = & 0'5 \end{array} \right]$$

20) 
$$\begin{bmatrix} m + n = 13 \\ m - n = 5 \end{bmatrix}$$

9) 
$$\begin{bmatrix} 2x - 15 = 10y \\ 4y = -18 + 2x \end{bmatrix}$$

10) 
$$\begin{bmatrix} 6-3(5-5x) = 3y+3 \\ -4(2y+6) = x+8 \end{bmatrix}$$

22) 
$$\begin{bmatrix} 3y-3(5-5x) = -3 \\ -8-4(2y+6) = x \end{bmatrix}$$

12) 
$$\begin{bmatrix} 3x - 8y = -19 \\ 6y - 4x = 16 \end{bmatrix}$$

24) 
$$\begin{bmatrix} 38 = 16y - 6x \\ 3y = 8 + 2x \end{bmatrix}$$

# Resuelve por IGUALACIÓN:

# **SOLUCIONES** en las págs. 426 a 430.

26) 
$$\begin{bmatrix} x + y = 10 \\ 7y = 6x - 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x + 4y = 2 \\ 3x - 3y = 30 \end{bmatrix}$$

28) 
$$\begin{bmatrix} 5x + \frac{5y}{3} = 55 \\ \frac{2x}{3} + 6y = 42 \end{bmatrix}$$

29) 
$$\left[ \begin{array}{cccc} 2y + 6 + 3x = 0 \\ 0 = 4x - 15 - 5y \end{array} \right]$$

30) 
$$\left[ \begin{array}{rrrr} 3x & + 3 & = 2y \\ \frac{y-1}{2} & = \frac{7x+2}{10} \end{array} \right]$$

31) 
$$\begin{bmatrix} 36 \times - 15 y = 45 \\ \frac{2}{3}y + 7 = \frac{x}{-5} + 2 \end{bmatrix}$$

32) 
$$\begin{bmatrix} 2a + 2b = 26 \\ 3a - 3b = 15 \end{bmatrix}$$

34) 
$$\begin{bmatrix} 1 - x = 3y \\ (2-2x)3 = -2y - 80 \end{bmatrix}$$

35) 
$$\left[ \begin{array}{rrrr} 8'4 \, x & = & 48 \, - \, 30 \, y \\ 12'5 \, y & = & 125 \, - \, 3'5 \, x \end{array} \right]$$

36) 
$$\begin{bmatrix} 5y = 2x + \frac{15}{2} \\ -3x = 20 - 4y \end{bmatrix}$$

# Ejercicios EXTRAS sobre sistemas:

- 37) ¿Qué clase de ecuación es ésta?

   [ 3 x 4 y = 7 ]

   Intenta hallar tres pares de soluciones diferentes.
   [ Cotización → 2 ※]
- Las soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas son : x = -1, y = 0.

  Escribe un sistema que cumpla esas condiciones.

  [Valoración  $\rightarrow 2 \not\approx$ ]
- 39) Tenemos esta ecuación :

  [ 2 x 1 ... \_ 0

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{2x}{5} - \frac{1}{3}y & = & 0 \end{array}\right]$$

Escribe otra que forme un sistema con ella y cuyas soluciones sean : x = -5, y = -6. [Coste  $\rightarrow 2 ?$ ]

- 40) ¿Cuál de estos sistemas tiene como soluciones: x = 6, y = -2?  $\begin{bmatrix} 3x-8y=-19 \\ 6y-4x=16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y=9 \\ y+x=1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x=22+8y \\ 4y=3x-26 \end{bmatrix}$ [Tasación  $\rightarrow 2 \not\approx$ ]
- 41) Encuentra un sistema que no tenga soluciones. [Importe → 3 ★]
- 42) Ahora encuentra un sistema que tenga muchas soluciones, o mejor dicho, que tenga infinitas soluciones. [Cuantía → 3 ★]
- 43) Escribe un sistema que tenga como solución x = -3 y cuyos términos independientes sean nulos. Halla tú la otra incógnita (¿y?). [Cuota  $\rightarrow 3 \times$ ]

### 

¿Cómo cambian los tiempos? Fíjate en las dos opiniones siguientes. Cómodo es un chico de 15 años. Modesta es una venerable señora de 66 años.

<u>CÓMODO</u>: "Estoy deseando que lleguen los viernes, porque me tiro tres días <u>sin hacer deberes ni tareas</u> del Instituto".

MODESTA: "Los fines de semana que no hay Escuela de Adultos es como si te faitara algo para luchar".

¿...? Sin comentarios.

# 5.19.- Problemas sobre sistemas.

- 1) Descomponer el número 500 en dos partes, de tal forma que dividiendo la mayor entre la menor obtenemos 3 de cociente y 24 de resto.
- \* PLANTEAMIENTO: (Generalmente, lo más difícil)

$$\otimes \left\{ \begin{array}{l} \text{Llamamos} \ "x" \ e \ "y" \ a \ los \ dos \ números: \\ x + y = 500 \ \rightarrow \ 1^a \ ecuación \\ \end{array} \right. \\ \otimes \left\{ \begin{array}{l} \text{Aplicamos} \ las \ equivalencias \ fundamentales \ de \ la \ división: } \\ D = d \cdot c + r \\ x = y \cdot 3 + 24 \ \rightarrow \ 2^a \ ecuación \\ \end{array} \right. \\ \otimes \left[ \begin{array}{l} x + y = 500 \\ x = y \cdot 3 + 24 \end{array} \right]$$

\* R E S O L U C I O N: (Lo hacemos por SUSTITUCIÓN)

$$\begin{bmatrix} x + y = 500 \\ x = y \cdot 3 + 24 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Despejamos "x" en la 1a:}$$

$$x = 500 - y \rightarrow \text{Sustituimos en la 2a:}$$

$$\xrightarrow{\text{"x"}} 500 - y = 3y + 24 \rightarrow \text{Resolvemos:}$$

$$- y - 3y = 24 - 500$$

$$- 4y = -476$$

$$y = \frac{-476}{-4} = +119$$
Ahora sustituimos el valor de "y" (119) en una ecuación, mejor en la 3a de este cuadro, y hallamos el valor de "x":
$$x = 500 - y = 500 - 119 = 381$$

$$\text{SOLUCIONES} \rightarrow \begin{cases} x = 381 \\ y = 119 \end{cases}$$

**\* COMPROBACIÓN:** 

¿Suman los dos números 500?

$$381 + 119 = 500 \rightarrow \underline{CIERTO}$$

¿Al dividir el mayor entre el menor se obtiene 3 de cociente y 24 de resto?

$$\left\{
\begin{array}{c|c}
381 & 119 \\
-357 & 3
\end{array}
\right\}$$
→  $\underline{CIERTO}$ 

Este mismo problema se resuelve con una ecuación de una incógnita, que en realidad viene a ser parecido al anterior, aunque frecuentemente este planteamiento presenta más dificultad para una mayoría de vosotros. Veámoslo:

Un número es "x" y otro es "500 - x".

Con la equivalencia fundamental de la división:

$$D = d \cdot c + r$$

Dividendo
$$500 - x = x \cdot 3 + 24$$

Resolvemos: 
$$500 - 24 = x + 3x$$

$$476 = 4x ; \frac{476}{4} = x = 119$$

$$500 - 119 = 381 \rightarrow \text{El otro número}.$$

**C**uál de las dos resoluciones te ha parecido más asequible? Habrá quien responda que ninguna de las dos, que no se entera, que se hace un lío, etc. Puede ser. Y quizás no sean pocos los que estén en esta situación; pero sigue con atención y empeño, verás como van desapareciendo las dificultades y apareciendo la claridad (entendimiento).

2) En una granja hay gallinas y conejos. En total son 330 animales. Y una suma de 1.140 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

<u>atención: iré dando menos explicaciones y resolveré</u> PONIENDO MENOS PASOS, YA QUE SE HACEN LARGOS Y ALGUNOS NO NECESITAN TANTO. ESPERO QUE COMPRENDAS BIEN.

```
Llamamos "x" a las gallinas e "y" a los conejos:
     x + y = 330 \rightarrow 1^a ecuación
    Como las gallinas tienen dos patas (2 x ) y los
⊗ { conejos cuatro (4 y) resulta:
     2x + 4y = 1140 \rightarrow 2^a ecuación
     El sistema que resulta es:
     \int x + y = 330
     |2x + 4y = 1140
     Resolvemos ahora por reducción, aunque sería
→ más fácil por sustitución, pero así repasamos.
    Multiplicamos la 1ª por "-2".
   \begin{bmatrix} -2x - 2y = -2 \cdot 330 \\ 2x + 4y = 1140 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Sumamos ambas}:
     2y = 480 \Rightarrow y = 240
→ Sustituimos el valor de "y" (240) en la 1ª ecuación:
     x + y = 330
     x + 240 = 330 \Rightarrow x = 90
    SOLUCIÓN \rightarrow \begin{cases} \circ 90 \text{ gallinas} \\ \circ 240 \text{ conejos} \end{cases}
→ Comprobamos:
   ¿Son 330 animales?
   90 + 240 = 330 \rightarrow \underline{CIERTO}
    ¿Entre todos tienen 1140 patas?
    90.2 + 240.4 = 180 + 960 = 1140 \rightarrow CIERTO
```

**R**esolvemos el mismo, el nº 2, planteando una sola ecuación con una incógnita:

Las gallinas son "x" y los conejos "330 - x".

Con las patas:  $\underline{2} \cdot x + (330 - x) \cdot \underline{4} = 1140 \text{ (patas en total)}$ Resolvemos: 2x + 1320 - 4x = 1140  $-2x = -180 \Rightarrow x = \underline{90} \text{ (gallinas)}$   $330 - 90 = \underline{240} \text{ (conejos)}$ 

- **EXTRA**: Resuelve el nº 2 por sustitución e igualación.
- 3) Pantunflo v Sinforosa, dos jóvenes veinteañeros, fueron de fiesta. Al terminar la celebración recorrieron "El Abuelo", "La Pulcra", "El Límite", etc. Se lo pasaron "guay", casi "chachy". Como Pantunflo es deportista, no necesita aderezarse de alcohol para divertirse; sin embargo, su amiga Sinforosa es raro el día que pasa sin un buen (i) cubata o una buena (i) litrona. Muchas veces hasta se lo pasa mal en las fiestas por beber tanto. Y al día siguiente no digamos ... Las resacas son piramidales; sus amigas esos días le llaman cabezona, ya que aparenta tener más tamaño su cráneo a causa de los macizos dolores de cabeza que la atornillan. Bueno, al grano con el problema. A lo largo de toda la noche Pantunflo bebió 9 refrescos y se tomó 5 bocadillos; en total se gastó 30'50 euros. Sinforosa se "empapó" con 11 cubatas y sólo 2 bocatas; su monedero desembolsó 49 euros -fue una resaca de unos mil duros de los antiguos, por ello vigorosa-. Si los cubatas costaban el doble que los refrescos, ¿cuántos costaban los refrescos, los cubatas y los bocadillos? (¿Crees que Sinforosa resolvería al día siguiente este problema? ¿Y Pantunflo después de recorrerse 10 km haciendo footing?)

4) La 2<sup>a</sup> razón de una proporción es 7/5. Si sumamos 6 unidades a los dos términos de la 1<sup>a</sup> razón, se obtiene una nueva proporción poniendo como razón 5/4. ¿Cuáles eran los términos de la 1<sup>a</sup> razón?

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{y} = \frac{7}{5} \\ \frac{x+6}{y+6} = \frac{5}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{Multiplicamos} \\ \text{EN CRUZ} : \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \cdot 5 = y \cdot 7 \\ (x+6) \cdot 4 = (y+6) \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x - 7y = 0 \\ 4x - 5y = 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{Resolvemos por el} \\ \text{método de reducción} : \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x - 7y = 0 / .(-5) \\ 4x - 5y = 6 / .7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -25x + 35y = 0 \\ 28x - 35y = 42 \end{bmatrix}$$

$$3x = 42 \Rightarrow x = 14$$
Sustituimos:
$$5x = 7y \Rightarrow 5.14 = 7y \Rightarrow y = 10$$
Soluciones:  $x = 14$ ;  $y = 10$ 

### COMPRUEBA TÚ

5) Encontrar dos números tales que el triple del 1º más el 2º sea igual a dos, y la cuarta parte del 2º menos la tercera parte del 1º sea siete.

3x + y = 2

Hasta ahora no había salido un sistema que tuviera denominadores en la forma general. Pero tranquilo, que basta con quitarlos; no de cualquier manera, sino por el método del mínimo (M.D.C.).

$$\begin{bmatrix} 3x + y = 2 \\ 3y - 4x = 84 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \text{Resolvemos por SUSTITUCIÓN:} \\ \text{Despejamos "y" en la 3ª ecuación:} \\ y = 2 - 3x \\ 3 \cdot (2 - 3x) - 4x = 84 \\ - 13x = 78 \Rightarrow x = -6 \\ \text{Sustituimos "} x = -6": \\ y = 2 - 3x = 2 - 3 \cdot (-6) = 20 \\ \text{Soluciones:} \underline{x = -6} ; \underline{y = 20}$$

### COMPRUEBA TÚ

6) La edad de Tulia es triple que la de su hijo Ismael. Y hace 6 años era cuatro veces mayor. ¿Cuáles son las edades actuales de ambos?

⊗ Ahora: 
$$\begin{cases} \circ "x" \rightarrow \text{ edad de Tulia} \\ \circ "y" \rightarrow \text{ edad de Ismael} \end{cases}$$
⊗ 
$$\begin{vmatrix} \text{Hace 6} \\ \text{años} \end{vmatrix} : \begin{cases} \circ "x - 6" \rightarrow \text{ edad de Tulia} \\ \circ "y - 6" \rightarrow \text{ edad de Ismael} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x = 3y \\ x - 6 = 4 \cdot (y - 6) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \text{Lo mejor es resolver} \\ \text{por sustitución:} \end{vmatrix}$$

$$3y - 6 = 4y - 24$$

$$18 = y \rightarrow \text{Luego: } x = 3 \cdot y = 3 \cdot 18 = 54$$
S: Tulia tiene 54 años e Ismael 18 años.
$$\begin{vmatrix} \text{COMPROBAMOS:} \\ * 1^a \text{ condición } \rightarrow 54 \text{ es el triple de } 18 \cdot \\ * 2^a \text{ condición } \rightarrow (54 - 6) \text{ es cuatro veces } (18 - 6) \end{vmatrix}$$

7) Encontrar una cantidad de dos cifras que cumpla las siguientes condiciones:

• Son CIERTAS las dos.

- a) Que la cifra del lugar de las decenas más la cifra del lugar de las unidades
- b) Que si se invierte el orden de dichas cifras, la cantidad inicial aumenta 9 unidades.

$$\begin{cases}
 \| x \| \text{ la cifra del lugar de las decenas.} \\
 \| y \| \text{ la cifra del lugar de las unidades.} \\
 \text{En general, una cantidad de dos cifras será siempre así:} \quad \underline{10 x + y} \\
 \begin{bmatrix}
 1^a \text{ condición:} & x + y = 11 \\
 2^a \text{ condición:} & 10 x + y + 9 = 10 y + x
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x + y = 11 / . (9) \\
 9x - 9y = -9
 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}
 \text{Preparado para reducir:} \\
 \hline
 9x + 9y = 99 \\
 9x - 9y = -9
 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}
 18x = 90
 \end{cases} \Rightarrow \\
 x = 5 \Rightarrow y = 11 - 5 = 6
 \end{bmatrix}$$
Solución: La cantidad pedida es  $\underline{56}$ .

#### COMPRUEBA TÚ

8) EXTRA "A".- A continuación tienes un sistema en el que falta saber el coeficiente de la "y" en la 1ª ecuación. Sabemos una de las soluciones: x = -2. ¿ Cuál es el coeficiente desconocido ("a") y cuánto vale la incógnita "y"?

$$\begin{bmatrix} 5 & x & = "a" & y & - & 10 \\ 6 & y & = - & 8 & - & 4 & x \end{bmatrix}$$

EXTRA "B". Resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & a & = & 21 & - & \frac{4}{5} \\ 17 & - & \frac{2}{3} & = & \frac{3}{5} & b \end{bmatrix}$$

10) EXTRA "C". Resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Tendrás una buena "cosecha" para el próximo control.

$$\begin{bmatrix} 2x + 5y - 7z = 9 \\ 5x - y + 3z = 16 \\ 7x - 8y + z = 6 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS A RESOLVER CON **SISTEMAS DE ECUACIONES:** 

# **SOLUCIONES** en las págs. 431 a 434.

- 1) En una granja hay 165 animales. Si sabemos que son gallinas y conejos, y que el número total de patas es de 570, ¿cuántos animales hay de cada uno?
- 2) Halla un número natural tal que al sumarle 8 y multiplicar la suma por el número que resulta al restarle 3, el producto sea igual a 476.
- 3) En una hucha hay 21750 euros entre monedas de 25 y 50 euros. Sabiendo que hay 700 monedas, ¿cuántas hay de cada una?
- 4) La razón de dos números es 3 /4 . Si sumamos 10 unidades a cada término, la razón de los nuevos números es 11 / 14. ¿Cuáles son dichos números?
- 5) Encontrar un número de dos cifras sabiendo que sus dígitos suman 11 y que si a dicho número se le suma el que resulta al invertir el orden de sus dígitos se obtiene el número 121.
- 6) Si tengo un total de 62 monedas (de 10 y de 5 euros) que suman 500 euros, ¿cuántas tengo de cada clase?
- 7) Entre dos chavales tienen 1.790 euros, y las tres cuartas partes del dinero de uno excede al del otro en 30 euros. ¿Cuánto tiene cada uno?
- 8) Las dos terceras partes de la edad de Cirilo, padre de Bonifacio, excede en 4 años a la de éste, mientras que hace 8 años la edad del padre era doble que la del hijo. ¿Qué edades tienen ambos?
- 9) Hallar las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le falta un año para tener 6 veces la edad del otro, y que restando 2 años al mayor y dividiendo esta diferencia por la edad del menor se obtiene 5 de cociente.

- 10) Descomponer el número 600 en dos partes, de tal manera que al dividir la mayor entre la menor se obtenga 2 de cociente y 84 de resto.
- 11) Entre dos obreros han cobrado por un trabajo 6.350 euros. El 1º trabajó 3 días y el 2º 5 días. Por otro trabajo cobraron 4.500 euros, trabajando 4 días el 1º y 2 días el 2º. Hallar el jornal diario de cada uno.
- 12) La señora Pacomia desea repartir una cantidad de dinero entre algunas organizaciones benéficas. Si da a cada asociación 250.000 euros, le faltan 100.000 euros, mientras que si da a cada una 200.000 euros, le sobran 250.000 euros. Averigua el nº de asociaciones y la cantidad que donó a cada una.
- 13) Por la mezcla de 8 kg de café con 2 kg de achicoria (planta amarga que, tostada y pulverizada, se utiliza para reforzar el color del café, y en algunos casos para adulterarlo) se han pagado 13.240 euros. Calcular el precio del kg de cada cosa, sabiendo que si se mezclase un kg de dicha mezcla costaría 1.820 euros.
- 14) Un estudiante se compromete a presentar a su padre 5 problemas resueltos cada día. El padre le da 7'50 euros por cada problema bien hecho y el hijo abona 1'20 euros por cada uno mal resuelto. ¿Cuántos problemas realizó correctamente al cabo de 15 días si el hijo ganó 45 euros?
- 15) Encontrar un número de dos cifras sabiendo que la de las decenas es el triple que la de las unidades y que dicho número disminuve en 54 unidades cuando se invierte el orden de sus cifras.
- 16) La suma de dos números es 37. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 3 y el resto es 5. Hallar ambos números.
- 17) Los 3/8 de un recipiente de vino equivalen a los 3/5 de otro y los 2/5 del 1º contienen 40 litros más que los 4/5 del 2º. ¿ Cuántas copas se pueden llenar con la capacidad de ambos recipientes si en cada copa caben 10 dl?



# 5.20.- Ecuaciones de segundo grado.

(Para alumnos más capacitados e interesados, o para 3º)

Son ecuaciones de 2º grado aquellas en que la incógnita está elevada al cuadrado.

### Una aclaración importante :

En una ecuación de 2º grado no puede estar una incógnita elevada al cubo o a otro exponente > 2, va que si así fuera no sería cuadrática (de segundo grado) sino de grado 3, 4 etc., o sea, del grado del mayor exponente que aparezca en la ecuación en la parte literal.

Observa las siguientes ecuaciones:

1) 
$$3x - 2x + 1 = -x + \frac{7x}{2} - \frac{-1}{3}$$

$$-\frac{2}{5}x + x^2 + x = 1 + 5x$$

$$3) -7(3-5y) + 1 = 2 - y$$

4) 
$$5x^2 - \frac{3x}{2} = \frac{5}{10}$$

6) 
$$6x^2 + 3x - 5 - x^2 = \frac{5x}{4} - 1$$

7) 
$$5x^4 - 3x + x^3 = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{5}$$

8) 
$$3a^2 + 5a - 10a - 1 = 8 - a^2$$

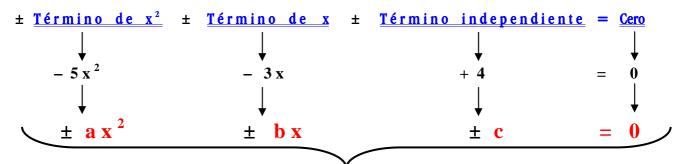
$$-5x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$2x^3 + 5x^2 - \frac{2x}{7} = 10$$

¿ Cuáles de ellas son de 2º grado? Es fácil, ¿no? Aquellas en las que el exponente mayor de la incógnita sea 2 (al cuadrado, de ahí que se llamen también cuadráticas), es decir, la nº 2, la nº 4, la nº 6, la nº 8 y la nº 9.

## <u>¿Cuál de las ecuaciones de 2º grado de la página anterior crees tú que está más ordenada que las demás?</u>

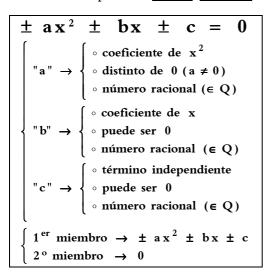
No sé cuáles habrás respondido, pero te diré que la más ordenada es la nº 9, porque es así como se deben presentar para resolverlas. A esa forma de ordenarlas se le llama: **ECUACIÓN DE 2º GRADO EN LA FORMA GENERAL**. Es decir, que siempre debemos colocarlas para resolverlas así:



Esta es la expresión que representa LA FORMA GENERAL DE UNA ECUACIÓN DE 2º GRADO.

**EXTRA "A".-** Coloca las ecuaciones 2, 4, 6 y 8 de la columna derecha de la página anterior en la forma general.

# Estudiemos un poco esa FORMA GENERAL:



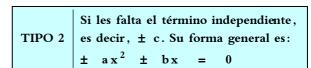
EXTRA "B".- ¿Por qué el coeficiente "a" tiene que ser distinto de cero?

Las ECUACIONES DE 2º GRADO COMPLETAS son aquellas que tienen todos sus términos.

$$\pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

Las <u>ECUACIONES</u> <u>DE 2º</u> <u>GRADO INCOMPLETAS</u> son aquellas a las que les falta algún término, que no sea el fundamental  $(ax^2)$ , claro, porque entonces no sería de 2º grado. Pueden ser de dos tipos:

```
Si les falta el término ± bx.
TIPO 1
        Su forma general es:
        \pm ax^2 \pm c =
```



RESOLVER UNA ECUACIÓN DE 2º GRADO es hallar los valores de la incógnita que hacen que la igualdad  $\pm a x^2 \pm b x \pm c = 0$  sea cierta. Para resolver las ecuaciones de 2º grado usaremos una fórmula que servirá para todas, completas o incompletas; no obstante, las incompletas pueden resolverse de otra forma, como veremos más adelante.

¿Qué tal te van saliendo los controles? Bueno, últimamente se están complicando, verdad.

••••••

Desde hace años, aproximadamente desde que nació la L.O.D.E. (investiga si no sabes qué significa), hay gente (los que hacen las leyes desde las nubes o desde ideologías partidistas, también profesionales docentes - "progres" ellos de la acepción

mejorable del término- e incluso no pocos padres -de esos que pretenden saber más que los profesores y aun decirles a veces cómo y qué deben hacer en su trabajoque no están muy de acuerdo en eso de los controles, de tanto evaluar y mucho menos de llamar con la "maldita" palabra examen a las pruebas con las que ciertos profesores "carrozas" -entre los cuales me incluyo, porque siempre éstos han



intentado impregnar de dignidad profesional su trabajo- hacemos "padecer" a los "pobres" alumnos.

En fin, qué le vamos hacer. No es que haya que realizar exámenes cada semana, pero toda la vida un examen será una inmejorable forma de evaluar la actitud, aptitud, conocimientos y asimilación que un alumno ha adquirido. Al menos eso pensamos muchos profesores "anticuados". Lo cual no excluye que se tengan siempre en cuenta, y de manera significativa, otros muchos aspectos educativos a la hora de evaluar.

# RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO. OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA GENERAL.

### o Partimos de la forma general:

$$\pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

$$4a \cdot ax^{2} + 4a \cdot bx + 4a \cdot c = 4a \cdot 0$$
  
 $4a^{2}x^{2} + 4abx + 4ac = 0$ 

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ac = 0 - 4ac$$

### • Se reducen los términos subrayados:

$$4a^{2}x^{2} + 4abx = -4ac$$

# • Sumamos "b<sup>2</sup>" en los dos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

### • Observamos que el 1 er miembro es:

Este trinomio es el desarrollo de 
$$(2ax + b)^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

### • Luego:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

• Seguimos despejando la "x":

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ésta es la fórmula para calcular las dos soluciones de las ecuaciones de 2º grado.

# Como ya vimos en el tema 4, las raíces cuadradas tienen dos soluciones, por eso colocamos delante de la raíz de esta fórmula los signos "±". Así que las dos soluciones de una ecuación de 2º grado son:

$$\mathbf{X}_{1} = \frac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{b}^{2} - 4ac}}{2a}$$
 •  $\mathbf{X}_{2} = \frac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{b}^{2} - 4ac}}{2a}$ 

# EJEMPLOS RESUELTOS "A".

**E**n primer lugar, de ecuaciones de 2º grado completas aplicando la fórmula general.

1) 
$$3x^2 + 3x + 6 = 2x^2 + 8x$$

Para poder aplicar la fórmula general, debemos colocar la ecuación en la forma general:

$$3x^2 - 2x^2 + 3x - 8x + 6 = 0$$

$$(3-2)x^2 + (3-8)x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Ahora ya podemos emplear la fórmula; pero antes definamos los coeficientes:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 5x + 6 & = & 0 \\ x^2 - 5x + 6 & = & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a = 1 \\ b = -5 \\ c = +6 \end{bmatrix}$$

Sustituimos los valores de cada coeficiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\mathbf{x} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = \frac{3}{2} \\ \mathbf{x}_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{2} \end{bmatrix}$$

Y éstas son las soluciones: 3 y 2.

# COMPRUEBA TÚ

**E**n los próximos ejemplos resolveremos con menos pasos y menos explicaciones.

2) 
$$\frac{1}{6}x + 1 - \frac{2x}{4} = \frac{4}{3} - \frac{12}{5}x + \frac{2x^2}{5}$$

Para poder aplicar la fórmula general debemos colocar la ecuación en la forma general. En este caso aplicamos el método del M. D. C. (m.c.m. = 60) y reducimos términos. Una vez hecho, nos queda:

$$6x^{2} - 31x + 5 = 0 \begin{cases} a = 6 \\ b = -31 \\ c = 5 \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula y sustituimos los valores:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-31) \pm \sqrt{(-31)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{+31 \pm \sqrt{961 - 120}}{12}$$

# <u>COMPRUEBA</u> <u>TÚ</u>

# $3) \quad -2x^2 + 14x - 24 = 0$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 192}}{-4}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-14 \pm \sqrt{4}}{-4} = \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \frac{-14 + 2}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3\\ \mathbf{x}_2 = \frac{-14 - 2}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4 \end{cases}$$

### COMPRUEBA TÚ

$$\frac{x^{2}}{3} - \frac{10}{3} = x \rightarrow \begin{vmatrix} \text{Ordenamos y quitamos denominadores} \\ \frac{x^{2}}{3} - x - \frac{10}{3} = 0 \rightarrow /.3 \\ x^{2} - 3x - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -10 \end{cases} \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} \\ x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^{2} - 4.1.(-10)}}{2.1} \\ \left\{ x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{bmatrix} x_{1} = 5 \\ x_{2} = -2 \end{bmatrix} \right\}$$

### COMPRUEBA TÚ



¿Qué posición tomas de entre las siguientes afirmaciones?

FAUSTINO: "Gran parte de <u>los alumnos de hoy día salen</u> <u>más preparados que antiguamente</u>, ya que están menos reprimidos, dan más asignaturas, están más informatizados y navegan en Internet".

AMBROSIA: "Bueno, yo tengo que decir que la realidad es que <u>la mayoría de los jóvenes viven de forma más cómoda y tranquila, sin muchas preocupaciones, con pocos objetivos y si tienen algunos sin esforzarse mucho por lograrlos. Como tienen de casi todo, pues...".</u>

ELISEO: "No tengo ninguna duda de que <u>una parte muy significativa de la juventud de este siglo XXI son más fácilmente</u> <u>manipulables</u> que en décadas anteriores. Además, pienso



que en el futuro lo serán aún más, porque su formación y preparación académica y su escala de valores cada año va en declive".

CLAUDIA: "Yo creo que <u>hoy día los alumnos son más</u> <u>libres</u> que lo eran nuestros padres, sabemos más de todo y nos defendemos mejor en la sociedad".



- **EJEMPLOS RESUELTOS** "B". Ahora algunas incompletas. Las resolveremos de dos formas: una con la fórmula general, y otra más rápida que debes dominar, ya que facilita los cálculos.
- $-8x = -2x^2$  Falta el término "<u>c</u>".
  - a) Con la fórmula:

Colocamos en la forma general:

$$2x^{2} - 8x = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

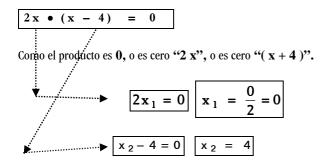
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 0}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{8+8}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ x_2 = \frac{8-8}{4} = \frac{0}{4} = 0 \end{cases}$$

**b)** Sin aplicar la fórmula :

$$2x^2 - 8x = 0$$
 Sacamos factor común:



Lógicamente, se obtienen las mismas soluciones que con la fórmula, pero más rápidamente.

- 7) Falta el término "b x".
  - a) Con la fórmula:

$$-5x^{2} + 20 = 0 \begin{cases} a = -5 \\ b = 0 \\ c = 20 \end{cases}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 20}}{2 \cdot (-5)}$$

$$\mathbf{x} = \frac{0 \pm \sqrt{400}}{-10} = \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \frac{+20}{-10} = -2\\ \mathbf{x}_2 = \frac{-20}{-10} = +2 \end{cases}$$

b) Sin aplicar la fórmula :

$$-5x^2 = -20$$

Despejamos "x":

$$\mathbf{x}^2 = \frac{-20}{-5}$$
;  $\mathbf{x} = \pm \sqrt{\frac{-20}{-5}} \begin{cases} \mathbf{x}_1 = +\sqrt{4} = 2\\ \mathbf{x}_2 = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$ 

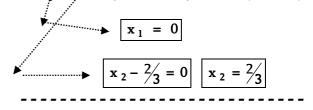
Se obtienen las mismas soluciones, pero de forma más rápida,

8) Falta el término "c". Sin aplicar la fórmula :

$$x^2 - \frac{2}{3}x = 0$$
 Sacamos factor común:

$$x \bullet (x - \frac{2}{3}) = 0$$

Como el producto es 0, o es cero "x", o es cero "(x-2/3)".



9) Falta el término "<u>b x</u>". Sin fórmula.

$$27 = 3 x^2$$

$$\mathbf{x}^2 = \frac{27}{3}$$
;  $\mathbf{x} = \pm \sqrt{9} \begin{cases} \mathbf{x}_1 = +\sqrt{9} = +3 \\ \mathbf{x}_2 = -\sqrt{9} = -3 \end{cases}$ 

# **SOLUCIONES** en las págs. 426 a 430

- 1) Resolver y comprobar las siguientes ecuaciones completas de 2º grado:
- 2) Ahora resuelve de las dos formas explicadas las siguientes incompletas:

$$\mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{x}^2 - 3\mathbf{x} - 10 = 0$$

$$b \rightarrow -5x^2 + 10x - 15 = 0$$

$$c \rightarrow 6x^2 + x = 1$$

$$\mathbf{d} \rightarrow 19x + 4 = 5x^2$$

$$e \rightarrow -7x^2 + x - 4 = -8x^2 - 4x + 10$$

$$f \rightarrow 15x^2 = 13x - 2$$

$$\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{7} \mathbf{x} - 10 = \mathbf{x}^2$$

$$h \rightarrow x^2 = \frac{x}{2} + 3$$

$$i \rightarrow x^2 + x = 6$$

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 6 = 0$$

$$k \rightarrow \frac{3}{x} - 1 = \frac{x - 3}{7}$$

$$1 \rightarrow 8x - 15x^2 = 1$$

$$\mathbf{m} \to \frac{\mathbf{x}^2}{2} + 4\mathbf{x} + 6 = 0$$

$$n \rightarrow 3x-x^2+2 = -3x^2-2x+5$$

$$\tilde{\mathbf{n}} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \mathbf{x} + \frac{10}{\mathbf{x}} = \frac{15}{\mathbf{x}} - \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$0 \rightarrow \frac{3 x^2 - 2}{5} = \frac{4(x^2 - 1)}{25} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{10}$$

$$p \rightarrow (x-3)^2 - 2(x^2 - 9) = 0$$

$$\mathbf{q} \rightarrow \frac{2x+6}{5} = \frac{6}{x+1}$$

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{x}^2 - 3\mathbf{x} = 0$$

$$b \rightarrow -5x^2 + 75 = 0$$

$$\mathbf{c} \rightarrow \begin{bmatrix} 6\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} &= 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} \rightarrow 80 = 5 \,\mathrm{x}^2$$

$$e \rightarrow -7 x^2 + x = -8 x^2 - 4 x$$

$$f \rightarrow 15 x^2 = -60 (i...!)$$

$$g \rightarrow 300 = -3x^2 (i...!)$$

$$h \rightarrow x^2 = \frac{x}{5}$$

$$i \rightarrow x^2 = 6$$

$$j \rightarrow 5x + 6 = 0 (i...!)$$

$$k \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{x-3}{x}$$

$$1 \rightarrow 8x = 15x^2$$

$$\mathbf{m} \to \begin{bmatrix} \frac{75 \, \mathbf{x}^2}{2} - 6 = 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 6x^2 = 3x^2 - 17x$$

$$\tilde{\mathbf{n}} \to \frac{10}{\mathbf{x}} = \frac{15 - 2\mathbf{x}}{\mathbf{x}}$$

$$0 \rightarrow \frac{3x^2}{5} = \frac{4x^2}{25} + \frac{x^2}{2} - \frac{15}{10}$$

$$p \rightarrow (x-3)^2 - 2(x^2 - 9) = 18 - 6x$$

$$\mathbf{q} \rightarrow \frac{2x^2}{4} = \frac{-3x}{-6}$$

# 5.21.- Problemas a resolver con ecuaciones de segundo grado.

(Para alumnos más capacitados e interesados, o para 3º)

1) Halla dos números positivos cuya diferencia sea 6 y su producto 40.

$$\#$$
 **E**l nº 1º  $\rightarrow$  "x"; el nº 2º  $\rightarrow$  "x  $-6$ ".

\* PLANTEAMIENTO:

$$x \cdot (x - 6) = 40$$

$$x^2 - 6x - 40 = 0$$

\* RESOLUCIÓN: Aplicamos la fórmula:

NOTA: Te recomiendo que escribas siempre la fórmula, es decir, que en cada ejercicio o problema sobre ecuaciones de 2º grado, aunque te la sepas muy bien, escribas la fórmula general. Es la mejor manera de aprenderla sin esfuerzo y no olvidarla. Recordemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{+6 \pm \sqrt{196}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6 + 14}{2} = \frac{20}{2} = 10 \\ x_2 = \frac{6 - 14}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Una solución sería la pareja de números  $\underline{10}$  y  $\underline{4}$  (10 – 6) y otra pues -4y-10 (-4-6), pero como nos pedían dos números positivos, se desecha la segunda solución ("x = -4") porque es negativa. Así que:

<u>S O L U C I Ó N</u>: Los números pedidos son 10 y 4.

COMPRUEBA TÚ



- 2) Melibea reparte entre sus hijos 36 caramelos en partes iguales. Si fuesen 3 hijos menos, recibiría cada uno 2 caramelos más. ¿Cuántos hijos tiene?
- # No de hijos  $\to$  "x"
- **★** Le corresponde a cada hijo →
- # Y con tres hijos menos  $\rightarrow \frac{36}{x-3}$

$$\frac{36}{x-3} - \frac{36}{x} = 2 / \text{m.c.m.} = x(x-3)$$

$$\frac{36 \cdot x \cdot (x-3)}{x-3} - \frac{36 \cdot x \cdot (x-3)}{x} = 2 \cdot x \cdot (x-3)$$

$$36 \cdot x - 36 \cdot (x-3) = 2x \cdot (x-3)$$

$$36 \cdot x - 36 \cdot x + 108 = 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x$$

$$0 = 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 108$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-108)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{900}}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{6+30}{4} = \frac{36}{4} = 9 \\ x_2 = \frac{6-30}{4} = \frac{-24}{4} = -6 \end{cases}$$

Como carece de significado un no negativo de hijos, se desecha la  $2^a$  solución ("x = -6").

Solución → Melibea tenía 9 hijos.

### COMPRUEBA TÚ



3) Halla un número tal que el doble de su cuadrado sea igual a seis veces dicho número.

### $2x^2 = 6x$

Es incompleta (le falta el término "c"), así que resolvemos de forma rápida en lugar de fórmula.

$$2x^2 - 6x = 0 \rightarrow \text{sacamos factor común}$$
:

$$\underbrace{2x}_{\text{primer factor}} \cdot \underbrace{(x - 3)}_{\text{segundo factor}} = 0$$

Si un producto de dos factores da 0, ó es cero el primer factor, o es cero el segundo. Luego:

$$1^{a} \text{ solución} \rightarrow \text{primer factor} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x_{1} = 0 \\ \frac{x_{1}}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

$$2^{a} \text{ solución} \rightarrow \text{segundo factor} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_{2} - 3 = 0 \\ x_{2} = 3 \end{cases}$$

Solución → El número pedido es

Como verás, la solución "x = 0" la hemos desechado.

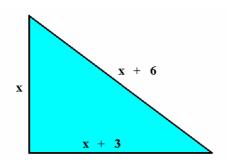
# COMPRUEBA TÚ



4) ¿Cuánto nos costará vallar de ladrillos una finca que tiene forma de triángulo rectángulo sabiendo que el cateto mayor mide 3 dam más que el otro y que la hipotenusa mide 3 dam más que el cateto mayor? La altura de la valla será de 15 decímetros y el metro cuadrado de valla vale a 9'50 euros.

Aplicamos el **TEOREMA DE PITÁGORAS**:

# $(hipotenusa)^2 = (cateto)^2 + (cateto)^2$



$$(x + 6)^{2} = x^{2} + (x + 3)^{2}$$

$$x^{2} + 12x + 36 = x^{2} + x^{2} + 6x + 9$$

$$x^{2} - 6x - 27 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^{2} - 4 \cdot 1 \cdot (-27)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2} \begin{cases} x_{1} = \frac{6+12}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ x_{2} = \frac{6-12}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Desechamos la solución "x = -3", porque no tiene sentido una longitud negativa de un lado.

Así que tenemos que

el cateto menor mide 9 dam.

<u>Dimensiones</u> (valla) → 360 · 1'5 = 540 m<sup>2</sup> <u>Coste</u>  $\stackrel{\square}{\longrightarrow}$  área de la valla = largo · alto = 540 · 9'50 = 5130 euros

Solución ⇔ <u>La valla costará 5130</u> €

<u>COMPRUEBA TÚ</u>



- 5) <u>Caricato tiene 5 años más que su</u> <u>hermano</u>, y <u>el producto de sus edades es 84. ¿Qué edades tienen los dos?</u>
- # Edad de Caricato  $\rightarrow$  " $\underline{x + 5}$ "
- # Edad del hermano  $\to$  " $\underline{x}$ "

$$x \cdot (x + 5) = 84$$

$$x^{2} + 5 x - 84 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{2} \begin{cases} x_{1} = \frac{-5 + 19}{2} = 7 \\ x_{2} = \frac{-5 - 19}{2} = -12 \end{cases}$$

Lógicamente, la solución negativa la desechamos. Así que si tomamos "x = 7", uno tiene 7 años y otro 5 más, o sea, 12 años.

SOLUCIÓN: Caricato 12 años y su hermano 7.

COMPRUEBA TÚ



6) <u>La suma de los cuadrados de dos números positivos es 269</u> y <u>la diferencia de sus cuadrados es 69. Hállalos</u>.

$$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 = 269 \\ x^2 - y^2 = 69 \end{bmatrix}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$2 x^2 = 338 \rightarrow x = \sqrt{\frac{338}{2}} = \pm 13$$

Sustituimos el valor de "x" (x = 13):

$$13^{2} + y^{2} = 269$$
  
 $y^{2} = 269 - 13^{2} = 100$   
 $y = \pm \sqrt{100} = \pm 10$ 

Las soluciones son:

$$\begin{bmatrix} x_1 = + 13 \\ x_2 = -13 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} y_1 = + 10 \\ y_2 = -10 \end{bmatrix}$$

Pero desechamos las negativas; luego:

Los números pedidos son 13 y 10.

COMPRUEBA TÚ



7) En una división entre números naturales, el cociente y el divisor son múltiplos de 5 consecutivos, y el resto es igual a la mitad del cociente. Halla el divisor si el dividendo es 1820.

- # Cociente  $\rightarrow$  "5x"; divisor  $\rightarrow$  "5x + 5".
- \* Resto  $\rightarrow$  "5x/2"
- \* Propiedad fundamental de la división:

$$D = d \cdot c + r$$

**S**ustituimos y resolvemos:

$$1820 = (5x + 5) \cdot 5x + \frac{5x}{2}$$

$$0 = 50x^{2} + 55x - 3640$$

$$x = \frac{-55 \pm \sqrt{731025}}{2.50} \begin{cases} x_{1} = \frac{-55 + 855}{100} = 8 \\ x_{2} = \frac{-55 - 855}{100} = \frac{-91}{10} \end{cases}$$

Desechamos la 2<sup>a</sup> solución porque no es un número natural (∉ N). Luego:

El cociente es 40, el divisor 45 y el resto 20.



- 8) Un polígono tiene 14 diagonales. ¿Cuántos lados tiene?
- \* Debemos conocer, o buscar, la fórmula que asocia el nº de diagonales de un polígono con el nº de lados. Puedes consultar la página 82 de MATYVAL II; allí verás que la fórmula para calcular el nº de diagonales de cualquier polígono es la siguiente:

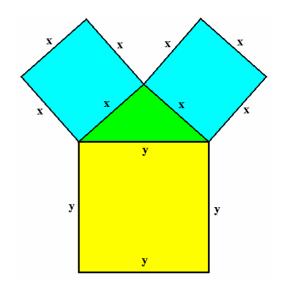
$$\frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - 3)}{2} = 14 \rightarrow (\text{siendo "n" el n° de lados})$$

$$\mathbf{n}^2 - 3 \mathbf{n} - 28 = 0$$

$$\mathbf{x} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{121}}{2.1} \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \frac{3+11}{2} = 7 \\ \mathbf{x}_2 = \frac{3-11}{2} = -4 \end{cases}$$

Solución: El polígono tiene 7 lados.

- 9) Calcula las medidas (en "cm") de los lados de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 7 m, sabiendo que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados es de 17 "ca".
- \* Nos ayudamos de un dibujo en el que a los lados del triángulo llamaremos "x", "x" e "y":



- ★ Área del cuadrado 1
   ★ Área del cuadrado 1
   ★ Área del cuadrado 1
- ★ Área del cuadrado 2
  ★ Área del cuadrado 3
  → "x²"
  ★ Área del cuadrado 3
  → "y²"
- **\* Suma de áreas**

$$\begin{bmatrix} 2x + y = 7 \\ x^2 + x^2 + y^2 = 17 \end{bmatrix}$$

Despejamos "y" en la 1ª ecuación y sustituimos en la 2 a ecuación:

$$y = 7 - 2x$$

$$x^{2} + x^{2} + (7 - 2x)^{2} = 17$$

$$x^{2} + x^{2} + 49 - 28x + 4x^{2} = 17$$

$$6x^{2} - 28x + 32 = 0$$

$$\mathbf{x} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{16}}{2.6} \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \frac{28+4}{12} = \frac{8}{3} \\ \mathbf{x}_2 = \frac{28-4}{12} = 2 \end{cases}$$

Desechamos la solución fraccionaria  $\frac{8}{3}$  y tomamos

como válida "x = 2".

Sustituyendo x = 2 metros, tenemos y = 3 metros.

Luego los lados del triángulo miden:

200 cm, 200 cm y 300 cm. (Comprueba)

\*\*\*\*\*\*

10) Si se añade 25 al cuadrado de un nº, la suma es igual al cuadrado de 13.

¿Cuál es el número?

$$x^{2} + 25 = 13^{2}$$
  
 $x^{2} = 169 - 25 = 144$ ;  $x = \pm \sqrt{144} = \pm 12$   
El número pedido es 12, ó también – 12.

# 11) El producto de dos números sucesivos es 210. ¿Cuáles son?

$$\#$$
 Los nos son  $\rightarrow$  "x" y "x + 1"

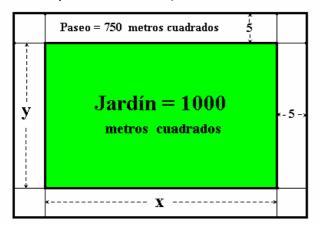
$$x \cdot (x + 1) = 210$$

$$x^{2} + x - 210 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{841}}{2.1} \begin{cases} x_{1} = \frac{-1 + 29}{2} = 14 \\ x_{2} = \frac{-1 - 29}{2} = -15 \end{cases}$$
Los números pueden ser 
$$\begin{cases} 14 \ y \ 15 \ ó \\ -15 \ y - 14 \end{cases}$$

- 12) Un jardín rectangular mide 1.000 m² y está rodeado por un paseo de 5 m de ancho. El área del paseo es de 750 m². ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?
- \* Nos ayudamos de un dibujo:



- # Área jardín  $\to$  "x . y"
- # Area total  $\to$  1000 + 750 = 1750
- # Dimensiones totales:  $\rightarrow$  " $(x + 10) \cdot (y + 10)$ "

Desarrollamos el producto (x + 10).(y + 10):

x.y + 10x + 10y + 100 = 1750

Como "x . y" es igual a 1000, sustituimos:

 $1000 + 10 x + 10 y + 100 = 1750 / \div 10$ 

100 + x + y + 10 = 175

x + y = 65

Y con la última y la primera, formamos un sistema:

$$x \cdot y = 1000$$

$$x + y = 65$$

Resolvemos el sistema anterior.

Despejamos "x" en la 2ª:

$$x = 65 - y$$

Sustituimos en la 1<sup>a</sup>:

$$(65 - y) \cdot y = 1000$$

Desarrollamos:

$$y^2 - 65y + 1000 = 0$$

$$y = \frac{-(-65) \pm \sqrt{225}}{2} \begin{cases} y_1 = \frac{65+15}{2} = 40 \\ y_2 = \frac{65-15}{2} = 25 \end{cases}$$

Son iguales, o sea, 40 y 25.

 $\text{Solución} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Las \ dimensiones \ del \ jard \text{in} \\ son \ 40 \ x \ 25 \ metros. \end{array} \right.$ 

- 13) Dos automóviles han de recorrer 300 km. Ambos viajan a velocidad constante, pero el 1º va a 10 km/h más que el 2º, y sabemos que el 1º ha empleado una hora menos que el 2º en hacer el recorrido. ¿A qué velocidades han circulado?
- \* Debemos saber/recordar/buscar las fórmulas del movimiento uniforme:

$$v = \frac{e}{t}$$
  $e = v \cdot t$   $t = \frac{e}{v}$ 

**™** Tiempo empleado por el 1º:

$$t_1 = \frac{e_1}{v_1} = \frac{e_1}{\|x\|} = \frac{300}{x \text{ (velocidad)}}$$

**™** Tiempo empleado por el 2º:

$$t_2 = \frac{e_2}{v_2} = \frac{e_2}{|x+10|} = \frac{300}{|x+10|}$$

Igualamos los tiempos, " $t_1 = t_2 + 1$ ":

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{x+10} + 1 / \cdot x \cdot (x+10)$$

$$x^{2} + 10 x - 3000 = 0$$
Al resolverla obtenemos "x = 50 km/h", luego

el 1° ha ido a 50 km/h y el 2° a 60 km/h .

ÉSTE HA SIDO BASTANTE COMPLICADO, ¿VERDAD?

- 14) Dos obreros, trabajando juntos, realizan una obra en 9 días. ¿Cuánto tardaría cada uno en realizarla, sabiendo que el 1º emplearía 24 días menos que el 2º?
- Tiempo que tarda el  $1^{\circ} \rightarrow \text{"x"}$
- Tiempo que tarda el  $2^{\circ} \rightarrow \text{"x} + 24\text{"}$
- En 1 día : > El 1º hace 1 / x > El 2º llena 1 / x+24 > Juntos : 1/9 (de la obra)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+24} = \frac{1}{9} / \text{m.c.m.} = x. (x+24).9$$

$$\frac{x. (x+24).9}{x} + \frac{x. (x+24).9}{x+24} = \frac{x. (x+24).9}{9}$$

$$(x+24).9 + x.9 = x. (x+24)$$

$$x^{2} + 6x - 216 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{900}}{2.1} \begin{cases} x_{1} = \frac{-6+30}{2} = 12 \\ x_{2} = \frac{-6-30}{2} = -18 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa, ya que no tiene sentido, y tenemos que:

El 1º tarda 12 días y el 2º 36 días.

15) <u>Descomponer el número 15 en dos</u> partes cuyo producto sea 54.

$$\begin{bmatrix} x \cdot y &= 54 \\ x + y &= 15 \end{bmatrix} \rightarrow y = 15 - x$$

$$x \cdot (15 - x) &= 54$$

$$x^{2} - 15x + 54 &= 0$$

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{9}}{2.1} \begin{cases} x_{1} = \frac{15 + 3}{2} = 9 \\ x_{2} = \frac{15 - 3}{2} = 6 \end{cases}$$
Los números pedidos son 9 y 6.

- 16) <u>La suma de los inversos de dos números enteros consecutivos es 5/6. Calcula dichos números.</u>
- Números pedidos  $\rightarrow$  "x", "x + 1"
- Sus inversos  $\Rightarrow$  El 1º hace 1/x $\Rightarrow$  El 2º llena 1/x+1

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6} / \text{m.c.m.} = \text{x.} (x+1).6$$

$$\frac{x.(x+1).6}{x} + \frac{x.(x+1).6}{x+1} = \frac{x.(x+1).6}{6}$$

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{169}}{2.5} \begin{cases} x_1 = \frac{7+13}{10} = 2\\ x_2 = \frac{7-13}{2} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Como nos pedían números enteros, desechamos la solución fraccionaria.

Solución: los números pedidos son 2 y 3.

# \*\*\*\*\*\*

# PROBLEMAS SOBRE ECUACIONES DE 2º GRADO

- 1) Halla un número tal que el doble de su cuadrado sea igual a seis veces dicho número.
- 2) Divide 20 en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea igual a  $15^2 23$ .
- 3) Un jardín rectangular mide 50 x 25 m. A su alrededor hay un paseo que tiene de área 6 . 10<sup>-4</sup> "ha". ¿Cuántos metros tiene de ancho el paseo?
- 4) La suma de los cuadrados de dos números 394 y su diferencia de cuadrados es igual al cuadrado de 7 más 7. Halla dichos números.
- 5) Si de un número se resta **8** y también se le añade **5**, el producto de estos resultados es 75. ¿Cuáles son esos números?
- 6) Calcula un número tal que al sumarle 3 y multiplicar dicha suma por el número que resulta de restarle 4, dé como resultado 44.
- 7) El área de una finca es de 48 "ha" y su longitud es 4/3 de su anchura. Hallar sus dimensiones en metros.
- 8) Halla dos números cuya suma es 20 y su producto es el triple de 5 al cuadrado.
- 9) Halla dos números enteros consecutivos tales que su producto sea 7 unidades mayor que el cuadrado del menor.

- 10) ¿Qué números suman 5 y sus inversos 5 / 6?
- **11)** La suma de dos números es igual a **18** y la diferencia de sus cuadrados es igual a **72**. Hállalos.
- **E**l perímetro del fondo cuadrado de un depósito es de **96** metros menor que el número de metros cuadrados del mismo fondo del depósito. ¿Cuántas "a (dam²)" tiene el fondo del depósito?
- 13) Hallas dos números cuya suma sea (- 3) <sup>2</sup> y la suma de sus cubos es 189.
- 14) Un terreno rectangular tiene una superficie de 26. 0'0371 "ha". Si la base mide 100 metros que la altura, ¿cuáles son las medidas de dicho terreno?
- 15) Un cuarto cuadrangular aumenta su área en 16 metros cuadrados si alargamos su lado en 2 metros. ¿Cuántos cm mide el lado?
- **H**alla dos números enteros cuya diferencia es 1 y que al multiplicarlos dé **650**.
- 17) El área de una piscina rectangular es 600 metros cuadrados y el perímetro es 1 hm. ¿Cuáles son sus dimensiones?
- 18) ¿Cuál es el número que excede a su raíz cuadrada positiva en 6 unidades?
- 19) Un estanque se llena con dos grifos, y estando uno solo de los dos abierto tarda en llenarse 3 horas que estando abierto sólo el otro. ¿Cuánto tarda en llenar el estanque cada uno por separado?
- **20)** ¿Qué ecuación de 2º grado tiene por raíces (soluciones) la media aritmética y la media geométrica de las raíces de la siguiente ecuación:

$$x^2 - 20 = 90 x$$
?

- **21)** Dada la ecuación  $4 x^2 + 37 x + 9 = 0$ , escribe otra ecuación de  $2^{\circ}$  grado que tenga por raíces la media aritmética y la media geométrica de las raíces de la ecuación dada.
- **E**n un triángulo rectángulo se sabe que los catetos miden **20** cm y **10** cm menos que la hipotenusa. Calcula su perímetro y su área.



# 5.22.- Otros conceptos importantes sobre ecuaciones de segundo grado.

(Para alumnos más capacitados e interesados, o para 3º)

# 1) La discusión.

**H**acer una discusión de una ecuación de 2º grado consiste en estudiar dicha ecuación observando los valores que toman sus soluciones dependiendo de los valores de los coeficientes (a, b, c).

**E**mpecemos diciendo que la expresión origen a partir de la cual girará el estudio es la que se destaca entre la llave, o sea, el radicando en la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b - \sqrt{\frac{discrimin ante}{b^2 - 4ac}}}{2a}$$

A la expresión  $b^2 - 4ac$  de esta fórmula la llamaremos discriminante de la ecuación de 2º grado. Nos servirá para diferenciar la naturaleza de la raíces (soluciones).

**D**ebemos señalar dos consideraciones:

- a) **Q**ue "a" no puede ser **0**, ya que no habría entonces ecuación de 2º grado.
- b) Que "a" lo consideraremos siempre mayor de 0 (a < 0), porque si fuera negativo, multiplicaríamos por -1.

**E**studiemos por partes:

a) Cuando el discriminante es mayor de 0

$$(b^2 - 4ac) > 0$$

La ecuación tiene dos raíces distintas.

**b**) Cuando el discriminante es 0

$$(b^2 - 4ac) = 0$$

La ecuación tiene una solución única, que es doble.

c) Cuando el discriminante es menor de 0

$$(b^2 - 4ac) < 0$$

<u>La ecuación</u> <u>no tiene</u> <u>solución</u>. (Son imaginarias, porque no podemos calcular la raíz cuadrada de un número negativo, como ya explicamos en el tema 4)

**EJEMPLOS.** Estudiemos la naturaleza de las soluciones:

a) 
$$\rightarrow$$
  $x^2 - 3x - 10 = 0$ 

Tiene dos soluciones distintas, porque:

$$(b^2 - 4ac) = (-3)^2 - 4.1.(-10) = 9 + 40 = 49 > 0$$

b) 
$$\rightarrow$$
  $2x^2 - 16x + 32 = 0$ 

**T**iene solución única (doble), porque:

$$(b^2 - 4ac) = (-16)^2 - 4.2.32 = 256 - 256 = 0$$

c) 
$$\rightarrow$$
  $x^2 + 5x + 8 = 0$ 

No tiene soluciones (son imaginarias), porque:

$$(b^2 - 4ac) = 5^2 - 4.1.8 = 25 - 32 = -7 < 0$$

# 000000000000000

# 2) <u>La suma de las raíces de la ecuación de 2º grado</u>.

**P**odemos saber cuánto suman las raíces (soluciones) de una ecuación de 2º grado conociendo sólo la ecuación. Lo haremos con esta fórmula:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

**C**uya demostración es la siguiente. Partimos de:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

$$x_{1} + x_{2} = \frac{-b + \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

**EJEMPLO.** Hallar la suma de las soluciones de la ecuación siguiente:

$$x^{2} - 3x - 10 = 0$$
  
Solución  $\rightarrow x_{1} + x_{2} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3$ 

# 3) El producto de las raíces de la ecuación de 2º grado.

**P**odemos saber cuánto es el producto de las raíces (soluciones) de una ecuación de 2º grado conociendo sólo la ecuación. Lo haremos con esta fórmula:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

**C**uya demostración es la siguiente. Partimos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

$$x_{1} \cdot x_{2} = \left(\frac{-b + \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}\right) = \frac{\left(-b + \sqrt{b^{2} - 4ac}\right) \cdot \left(-b - \sqrt{b^{2} - 4ac}\right)}{2a \cdot 2a} \Rightarrow \frac{\text{cuadrado del } 1^{\circ} - \text{cuadrado del } 2^{\circ}}{4a^{2}} \Rightarrow \frac{\text{cuadrado del } 1^{\circ} - \text{cuadrado del } 2^{\circ}}{4a^{2}} \Rightarrow \frac{\left(-b\right)^{2} - \left(\sqrt{b^{2} - 4ac}\right)^{2}}{4a^{2}} \Rightarrow \text{desarrollando} \Rightarrow \frac{b^{2} - b^{2} + 4ac}{4 \cdot a \cdot a} = \frac{4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a \cdot a} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{a}}$$

**EJEMPLO.** Hallar el producto de las soluciones de esta ecuación:

$$3x^{2}-2x-12=0$$
  
Solución  $\rightarrow x_{1} \cdot x_{2} = \frac{c}{a} = \frac{-12}{3} = -4$ 

# 000000000000000

4) <u>Hallar una ecuación de 2º grado conociendo la suma y el producto de sus raíces, o conociendo sus raíces.</u>

Podemos saber una ecuación de 2º grado conociendo la suma y el producto de sus raíces o las mismas raíces.

$$x^2 - sx + p = 0$$

**D**onde "s" es " $x_1 + x_2$ " y "p" es " $x_1 + x_2$ ". La demostración en la página siguiente.

**P**artimos de la forma general de la ecuación de 2º grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividimos por "a" 
$$\rightarrow \frac{a x^2 + b x + c}{a} = \frac{0}{a}$$

Y obtenemos 
$$\rightarrow \frac{a x^2}{a} + \frac{b x}{a} + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow$$

Hacemos una sustitución de "+" por -(-) →

$$\rightarrow x^2 - \underbrace{\left(-\frac{b}{a}\right)}_{S} x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{P} = 0$$

Obteniendo la fórmula  $\rightarrow x^2 - \underline{s} x + p = 0$ 

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{donde "s" es la suma } (x_1 + x_2) \ y \\ \text{"p" es el producto } (x_1 \cdot x_2). \end{array} \right.$$

**EJEMPLO** 1. Hallar la ecuación de 2º grado cuyas soluciones son:

$$x_1 = -6$$
  $y$   $x_2 = -5$ 

Hallamos la suma y el producto →

$$x_1 + x_2 = -6 + (-5) = -11 = s$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-6) \cdot (-5) = 30 = p$$

Y sustituimos en la fórmula -

$$x^{2} - sx + p = 0$$
  
 $x^{2} + 11x + 30 = 0$ 

**EJEMPLO 2.** Hallar la ecuación de 2º grado si conocemos:

suma 
$$\rightarrow$$
 s = -4 y producto  $\rightarrow$  p =  $\frac{2}{3}$ 

$$x^{2} - sx + p = 0$$

$$x^{2} - (-4)x + \frac{2}{3} = 0 /.3$$

$$3x^{2} + 12x + 2 = 0$$

# 000000000000000

# 5) Descomposición en factores.

La expresión algebraica que representa una ecuación de 2º grado en la forma general, que es un trinomio de 2º grado, se puede factorizar, es decir, es posible expresarla en forma de producto de factores sencillos. La fórmula que nos sirve para ello es la siguiente:

$$a x^{2} + b x + c \Rightarrow$$
  
en forma de factores  $\Rightarrow$   
 $a \cdot (x - x_{1}) \cdot (x - x_{2})$ 

Donde "x 1" y "x 2" son las raíces (soluciones) que resultan de la ecuación al igualar el trinomio a  ${f 0}$ .

Esta fórmula será, en próximos cursos, muy útil.

Su demostración es la siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sacamos factor común al coeficiente "a" →

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Aplicamos lo conocido de la "s" y "p" de raíces:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \left[ x^2 - \left( -\frac{b}{a} \right) x + \frac{c}{a} \right] \\ a \left[ x^2 - \left( x_1 + x_2 \right) x + \left( x_1 \cdot x_2 \right) \right] \end{bmatrix}$$

Aplicamos la propiedad distributiva →

$$a \left[ x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 \right]$$

Modificamos algo:

a 
$$(x.x - x_1.x - x_2.x + x_1.x_2)$$
  
a  $[x.x - x_1.x - x_2.x - x_1.(-x_2)]$ 

Ahora sacamos factor común a "x" en los dos primeros términos, y a "-x2" en los dos últimos:

$$a \left[ x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) \right]$$

Otra vez factor común de  $(x - x_1)$ :

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Aunque algo largo, hemos obtenido la fórmula de la descomposición factorial de un trinomio de 2º grado.

$$ax^{2} + bx + c = a.(x-x_{1}).(x-x_{2})$$

donde "a" será el coeficiente de " $\mathbf{x}^2$ " y " $\mathbf{x}_1$ " y " $\mathbf{x}_2$ "

las dos soluciones de la ecuación.

**EJEMPLO.** Descomponer en factores este trinomio:

Trinomio  $\rightarrow 2x^2 + 10x -$ Igualamos a 0 para resolver:

$$2x^2 + 10x - 28 = 0$$

Una vez resuelta 
$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Sustituimos en la fórmula de factorización:

$$a.(x - x_1).(x - x_2)$$

$$2 \cdot [x - 2] \cdot [x - (-7)]$$

Solución  $\rightarrow 2 \cdot [x-2] \cdot [x+7]$ 

# 6) La representación y resolución gráfica.

Para representar gráficamente una ecuación de 2º grado en unos ejes de coordenadas seguiremos los mismos pasos que para las ecuaciones de primer grado con una incógnita y para los sistemas, es decir, tomaremos valores de la variable independiente ("x") para ir obteniendo otros de la variable dependiente ("y"). Así vamos sacando pares de valores (x, y) cuyas representaciones son puntos, que unidos nos darán la gráfica de la ecuación.

**P**ara la resolución gráfica de una ecuación de  $2^{\circ}$  grado es necesario representar la ecuación y determinar los puntos de corte (intersección) con el eje de abscisas (eje X'X').

En general, podemos resumir así:

# \* La representación gráfica es una PARÁBOLA

**B**ueno, esto es mucho aprendizaje, pero para aquellos que quieran y puedan les diré que una parábola es una sección plana de una superficie cónica que resulta al cortar ésta por un plano paralelo a una generatriz; o también: el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto y una recta dados, que se llaman, respectivamente, foco y directriz.

# \* El vértice está situado en un punto cuyas coordenadas son:

$$\left[ -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$$

(Estas expresiones se demuestran también, igual que lo hemos hecho con las anteriores de otro apartados, pero creo que no es necesario hacerlo aquí)

- \* Es simétrica respecto a una recta que es paralela al eje de ordenadas y pasa por el vértice definido anteriormente.
- \* Si el coeficiente "a" es positivo, la parábola es abierta hacia arriba, y si "a" es negativo, estará abierta hacia abaio.

**EJEMPLO.** Representar y resolver gráficamente esta función (ecuación) de 2º grado:

$$x^2 - 2x - 8 = y$$

Averiguamos las coordenadas del vértice de la parábola:

$$x^{2} - 2x - 8 = y \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -8 \end{cases}$$

Vértice 
$$\rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[-\frac{-2}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-8) - (-2)^2}{4 \cdot 1}\right]$$

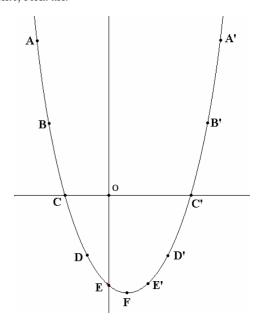
$$\rightarrow \left[\frac{2}{2}, \frac{-36}{4}\right] \rightarrow \left[1, -9\right] \rightarrow [x, y]$$

Hallamos ahora una tabla de valores:

	TABLA DE VALORES										
x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5	6
у	16	7	0	- 5	- 8	- 9	- 8	- 5	0	7	16
Puntos	Α	В	С	D	Е	F	E'	D'	C'	B'	A'

Existe otra forma más útil y sencilla de realizar la resolución gráfica de una ecuación de 2º grado. Consiste en cambiar la forma general en otra en la que aparece en el primer miembro "x²" y en el segundo miembro los otros dos términos ("x²" e "independiente") y considerar cada miembro como funciones diferentes de "x²", con lo cual siempre tendremos la parábola representativa de la función "x²" —podemos tener una plantilla de ella, ya que siempre será igual - y una recta representando el 2º miembro. LOS PUNTOS DE CORTES DE LA RECTA Y LA PARÁBOLA SON LAS SOLUCIONES. Pero este método, si Dios quiere, ya lo verás en su curso correspondiente.

**E**videntemente, nos falta lo esencial, es decir, la representación gráfica, pero ésta, si es que hay algunos alumnos en algunas clases en 2º ó 3º que se "atreven" con estas páginas sobre la ecuación de 2º grado, pues la haremos en la pizarra en una clase determinada y la explicaremos más detenidamente. Para que te hagas una idea, más o menos, aproximadamente, sería así:



# EJERCICIOS SOBRE LOS CONCEPTOS EXPLICADOS DE LA ECUACIÓN DE 2º GRADO.

- 1) Realiza la discusión de las siguientes ecuaciones, estudiando la naturaleza de sus raíces a través de sus discriminantes.
- a)  $x^2 5x 75 = 0$
- b)  $4x^2 4x + 1 = 0$
- c)  $x^2 + x + 2 = 0$
- **2)** Averigua las sumas y los productos de las soluciones de las siguientes ecuaciones de 2º grado.
- a)  $x^2 5x 75 = 0$
- b)  $4x^2 4x + 1 = 0$
- c)  $x^2 + x + 2 = 0$
- **3)** Halla las ecuaciones de 2º grado que tienen como soluciones:
- a)  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = -5$
- **b)**  $\mathbf{x}_1 = \frac{-2}{5}$ ;  $\mathbf{x}_2 = 4$
- c)  $x_1 = \frac{-1}{-2}$ ;  $x_2 = \frac{3}{-5}$
- **4)** Halla las ecuaciones de 2º grado que tienen como sumas y productos los siguientes:
- a) s = -6; p = 2
- b)  $s = -\frac{3}{4}$ ; p = -6
- c)  $s = \frac{5}{6}$ ;  $p = \frac{-3}{10}$

- 5) Realiza la descomposición en factores de las siguientes funciones:
- a)  $y = x^2 16$
- $b) y = x^2 + 5x$
- c)  $y = 2x^2 + 4x 12$
- 6) Hacer la representación y resolución gráfica de las siguientes ecuaciones, comprobando después las soluciones resolviéndolas con la fórmula.
- a)  $y = 2x^2 4x 40$
- **b)**  $y = 3x^2 6x + 3$
- c)  $y = 4x^2 12x + 16$
- 7) Calcula el valor del término independiente "h" para que la ecuación tenga una solución doble que la otra.

$$2x^2 - 540x + h = 0$$

8) Calcula el valor de "g" para que en la siguiente ecuación las dos raíces sean iguales.

$$3x^2 = -75 - gx$$

9) ¿En qué puntos corta el eje de abscisas a la parábola siguiente?

$$(x-5).(x+3) = 0$$

**10)** Si en la representación y resolución gráfica de una función de 2º grado con una incógnita la parábola no corta al eje X'X, ¿qué podemos decir de sus soluciones?

Reitero que todo esto es para alumnos muy capacitados de 2º y 3º, porque estos contenidos corresponden a un nivel bastante alto.

# 5.23.- Representación gráfica de ecuaciones.

(Para alumnos más capacitados e interesados, o para 3º)

Para representar gráficamente una función (expresada por una ecuación) utilizaremos los ejes de coordenadas cartesianas. Lo haremos representando puntos en ellos. Esos puntos, definidos por un par de valores, los iremos obteniendo al dar valores arbitrarios a la incógnita "x" e ir sacando los correspondientes valores de la ecuación (función).

Lo mejor, como casi siempre, hacer ejemplos resueltos para enterarse.

(Antes será conveniente repasar la página 25 donde se explica cómo representar puntos en unos ejes de coordenadas)

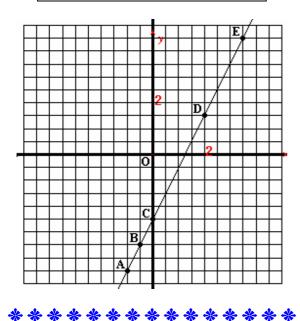
Veamos ejemplos de representaciones gráficas:

1) Función 
$$\rightarrow y = 2x - 5$$

### CÁLCULO DE LOS VALORES

- Para  $\frac{x = -2}{2} \rightarrow y = 2 \cdot (-2) 5 = -9$
- Para "x = -1"  $\rightarrow y = 2.(-1) 5 = -7$
- Para "x = 0"  $\rightarrow y = 2.0 5$
- Para  $"x = +4" \rightarrow y = 2.4 5$
- **Para** "x = 7"  $\rightarrow$  y = 2.7 - 5

Tabla de valores: 1ª ecuación							
X	<b>-2</b>	- 1	0	+ 4	7		
y	<b>-9</b>	<b>-7</b>	- 5	3	9		

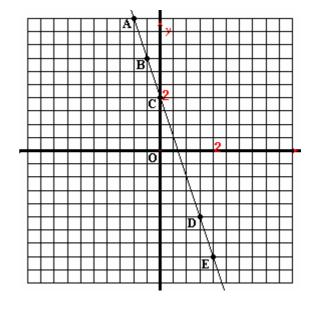


2) Función 
$$\rightarrow$$
  $f(x) = 4 - 3x$ 

### TABLA DE VALORES

- Para "x = -2"  $\rightarrow y = 4 3 \cdot (-2) = 10$
- Para "x = -1"  $\rightarrow y = 4 3 \cdot (-1) =$
- $\rightarrow$  y = 4 3.0
- Para "x = 3"  $\rightarrow$  y = 4 – 3.3
- Para "x = +4"  $\rightarrow y = 4 3.4$

Tabla de valores: 2ª ecuación							
X	<b>-2</b>	- 1	0	3	+ 4		
y	10	7	4	- 5	-8		





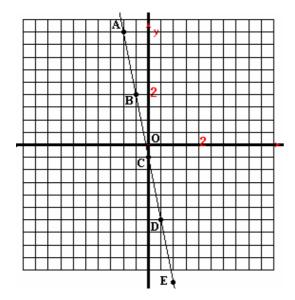
3) Función 
$$\rightarrow$$
  $f(x) = -5x - 1$ 

### CÁLCULO DE LOS VALORES

- Para "x = -2"  $\rightarrow y = -5 \cdot (-2) 1 = 9$
- Para  $\frac{(x-1)^2}{2}$   $\rightarrow$   $y = -5 \cdot (-1) 1 = 4$
- $\rightarrow y = -5.0 1 = -1$
- Para "x = 1"  $\rightarrow y = -5.1 - 1 = -6$ Para "x = 2"  $\rightarrow y = -5.2 - 1 = -11$

Tabla de valores: 3ª ecuación							
X	<b>-2</b>	- 1	0	1	2		
y	9	4	- 1	-6	- 11		

Tema 5  $\rightarrow$ Iniciación al Álgebra. Ecuaciones y problemas.

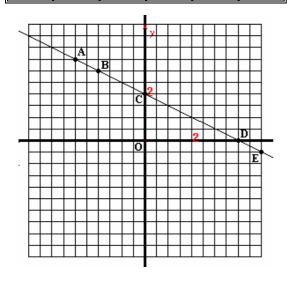




# <u>CALCULO</u> <u>DE</u> <u>LOS</u> <u>VALORES</u>

- Para  $\frac{x = -6}{2} \rightarrow y = [8 (-6)] : 2 = \frac{7}{2}$  $\rightarrow v = [8 - (-4)] : 2 = 6$
- $\rightarrow$  y = (8-0):2=4Para
- $\rightarrow$  y = (8-8):2=0Para
- $\rightarrow$  y = [8-10]:2=-1Para

Tabla de valores: 4ª ecuación							
X	x -6 -4 0 8 10						
y	7	6	4	0	- 1		
Puntos	" A "	"B"	" C "	"D"	"E"		



Como podemos observar en las cuatro gráficas anteriores, la REPRESENTACIÓN GRÁFICA de una ECUACIÓN (función) de PRIMER GRADO con UNA INCÓGNITA es UNA LÍNEA RECTA. En este tema sólo veremos esto sobre la representación gráfica de funciones. Te habrás fijado que unas rectas pasan por el origen de coordenadas y otras no. En el tema 13 del otro tomo (MATYVAL II) explicaremos las clases de funciones y sus representaciones gráficas, por ejemplo: función constante, función lineal, función afín, etc.

EJERCICIOS. Representa gráficamente
las funciones dadas por estas ecuaciones:
1) y = x - 7
VALORES: -3, -1, 0, 10, 7.
2)   f(x) = 4x + 1
VALORES: -2, -1, 0, 2, 1.
3) $y = -x - 6$
VALORES: - 10, - 6, 0, 2, 4.
4) $f(x) = (3x - 2):4$
VALORES: - 2, -1, 0, 4, 2.
5) y = -4 - 2x
VALORES: -7, -2, 0, 3, 1.
6) $f(x) = 3x/-3$
VALORES: -9, -6, 0, 1, 3.
7) y = 6x - 5
VALORES: -1, 0, 1, 2, 3.
8) $f(x) = -4x/-2$
VALORES: -5, -3, 0, 4, 1.
9) $y = (x - 5):2$
<b>VALORES</b> : -9, -5, 0, 5, 10.

Parece ser que actualmente muchas cosas que funcionaban antaño además de calificarlas de caducas y trasnochadas no son bien vistas por una parte significativa de la "progresía" imperante. Esta impresión se acrecienta cuando se habla de Normas de Urbanidad.

Ciertamente habrá aspectos de aquella Urbanidad de hace varias décadas que deban ser revisados y actualizados, y que dudosas formas de Urbanidad de otras épocas estuvieron impregnadas de matices negativos supuestamente superados hoy día, como machismo, clasismo, etc., y otras,

aunque sin tanto matiz negativo, se hayan quedado anticuadas. Pero es indudable que la convivencia de TODOS, y esencialmente la de nuestros adolescentes y jóvenes, necesita de unas NORMAS impres-



cindibles sobre las que sustentar el verdadero y esencial concepto de ciudadanía. Llámesele o no de Urbanidad, lo que está meridianamente claro es que esas normas, las <u>que sean, constituirán el código de una civilizada</u> "<u>circulación</u>" <u>en la convivencia</u>. Con ellas, el correcto funcionamiento de la sociedad actual en este nuevo milenio estará más garantizado que con la reinante falta de VALORES en tanta población y sectores de la vida en este siglo XXI.

# <u>ALGUNOS CONCEPTOS IMPORTANTES SOBRE SISTEMAS</u>

# 1) La representación gráfica.

Para representar sistemas de ecuaciones usamos unos ejes de coordenadas cartesianas donde gráficamente veremos cada una de las rectas de cada ecuación.

En los ejemplos de las dos fichas anteriores hemos hallado cinco valores de la "y", de f (x), por otros tantos que tomábamos de "x". Y con esos cinco pares de valores (x, y) hemos obtenido cinco puntos alineados -si no nos hemos equivocado- que nos definen la recta de la ecuación. En realidad, bastan solo dos puntos, es decir, dos valores de "x" y otros dos de "y" para determinar la recta que representa una ecuación. Sin embargo, yo tengo la costumbre de dar y calcular cinco para repasar cálculos de valores numéricos con negativos (dos), con el cero (0) y con positivos (dos), además de que hay mayor riesgo de equivocarnos si sólo hallamos dos puntos, ya que si está mal podemos no darnos cuenta, cuando si hallamos más de dos y nos equivocamos lo percibimos de forma clara y sin repasar, porque los puntos no salen alineados.

# 2) La resolución gráfica.

Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones es representar las ecuaciones que forman el sistema en unos ejes de coordenadas y hallar las coordenadas del punto de corte de las rectas representadas

# Discusión del sistema.

**D**iscutir un sistema de ecuaciones consiste en comprobar numérica y gráficamente a qué clase de las siguientes pertenece el sistema:

- A) Sistemas con una sola solución, es decir, que sólo existe un valor para la "x" y otro para la "y" que satisface el sistema. SUS RECTAS REPRESENTATIVAS SE CORTAN EN UN PUNTO. EN ESTOS CASOS SE DICE QUE LOS **SISTEMAS SON COMPATIBLES.**
- B) Sistemas con infinitas soluciones, que en realidad no son sistemas sino dos ecuaciones equivalentes que tienen dos incógnitas, o sea, que podemos darle todos los valores que deseemos y satisfacen las ecuaciones. SUS RECTAS REPRESENTATIVAS SON COINCIDENTES, ES DECIR, LA MISMA. EN ESTOS CASOS LOS COEFICIENTES DE LAS INCÓGNITAS Y LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES SON PROPORCIONALES. SE DICE ENTONCES QUE ES UN SISTEMA INDETERMINADO.
- C) Sistema sin solución. Aquellos en los que es imposible hallar valores de "x" e "y". SUS RECTAS REPRESEN-TATIVAS SON PARALELAS. EN ESTOS CASOS SÓLO SON PROPORCIONALES LOS COEFICIENTES DE LAS INCÓG-NITAS Y NO DE LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES. SE DICE ENTONCES QUE EL SISTEMA ES INCOMPATIBLE.

### **EJERCICIOS**

Representa y resuelve gráficamente los siguientes sistemas y los clasificas.

1) 
$$\begin{bmatrix} 2x + y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y = 4 - 2x \\ y = \frac{7 - x}{3} \end{bmatrix}$$

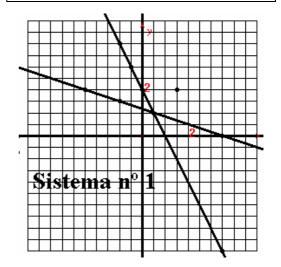
#### Cálculo de los valores:

- Para "x = -2"  $\rightarrow y = 4 2 \cdot (-2) = +8$
- Para "x = -1"  $\rightarrow y = 4 2 \cdot (-1) = +6$
- Para "x = 0"  $\rightarrow y = 4 2.0 = 4$
- Para  $\frac{x = 2}{2} \rightarrow y = 4 2 \cdot 2 = 0$
- Para "x = 7"  $\rightarrow y = 4 2.7 = -10$

Tabla de valores: 1ª ecuación							
X	$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $						
y	8	6	4	0	- 10		
Puntos	" A "		" C "	"D"	"E"		

- Para  $"x = -2" \rightarrow y = (7 (-2)) : 3 = 3$
- Para  $\frac{(x 5)}{3} \rightarrow y = [7 (-5)] : 3 = 4$
- Para "x = 1"  $\rightarrow y = (7-1): 3 = 2$
- Para  $"x = 7" \rightarrow y = (7-7): 3 = 0$
- Para "x = 10"  $\rightarrow y = [7 10] : 3 = -1$

Tabla de valores: 2ª ecuación							
X	-2     -5     1     7     10						
y	3	4	2	0	- 1		
Puntos		В'	C'	D'	E'		



### ESTUDIO DEL SISTEMA:

- La representación gráfica nos permite ver que el punto de corte está en el punto (1, 2). Y ésa es la solución del sistema, ya que las coordenadas "x = 1" e "y = 2" satisfacen a las dos ecuaciones, porque pertenecen a las dos rectas. (Comprueba tú dos cosas: 1ª.- Que los valores "x = 1" e "y = 2" son válidos para las dos ecuaciones, y 2<sup>a</sup>.- Que resolviendo el sistema se verifican estas soluciones )
- El <u>sistema es compatible</u>, porque tiene una sola solución:

$$x = 1 \quad ; \quad y = 2$$



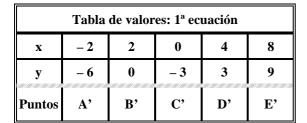
2) 
$$\begin{bmatrix} 3x - 2y = 6 \\ 4y - 6x = -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y = \frac{6 - 3x}{-2} \\ y = \frac{-12 + 6x}{4} \end{bmatrix}$$

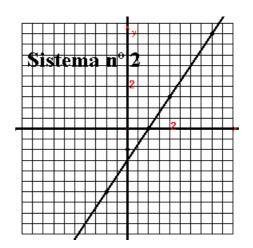
### Cálculo de los valores

- Para "x=-2"  $\rightarrow y = (6-3.(-2)):(-2) = -6$
- Para "x=2"  $\rightarrow y = (6-3.2):(-2) = 0$
- Para "x=0"  $\rightarrow y = (6-3.0):(-2) = -3$
- Para "x=4"  $\rightarrow y = (6-3.4):(-2) = 3$
- Para "x=8"  $\rightarrow y = (6-3.8):(-2) = 9$

Tabla de valores: 1ª ecuación							
X	<b>-2</b>	2	0	4	8		
y	- 6	0	-3	3	9		
Puntos		В	C	D	E		

- Para "x=-2"  $\rightarrow y = [-12 + 6.(-2)]: 4 = -6$
- Para "x=2"  $\rightarrow y = (-12 + 6.2): 4 = 0$
- Para "x=0"  $\rightarrow y = [-12 + 6.0] : 4 = -3$
- Para "x=4"  $\rightarrow y = [-12 + 6.4]: 4 = 3$
- Para "x=8"  $\rightarrow y = (-12 + 6.8) : 4 = 9$





# ESTUDIO DEL SISTEMA:

En esta representación gráfica observamos que no hay dos rectas, sino sólo una, porque todos los pares de valores (x, y) satisfacen a las dos ecuaciones del sistema, o sea, que hay infinitas soluciones, porque las representaciones de estas ecuaciones son coincidentes, es decir, la misma recta. No hay un solo punto de corte, sino infinitos al ser ecuaciones equivalentes.

EXTRA. Comprueba tú dos cosas: 1ª) Que no puede resolverse el sistema por ser ecuaciones equivalentes con todos sus coeficientes proporcionales, y 2ª) Que cualesquiera pares de valores que elijas y satisfagan una de las dos ecuaciones, siempre satisface también la otra.

El sistema es indeterminado, porque tiene infinitas soluciones.

(Fíjate que los **puntos A, B, C, D, E** son **los** mismos que A', B', C', D', E')

#### 

3) 
$$\begin{bmatrix} x + y = -3 \\ 2x + 2y = 4 \end{bmatrix}$$
  $\begin{bmatrix} y = -3 - x \\ y = \frac{4 - 2x}{2} \end{bmatrix}$ 

#### Cálculo de los valores

- Para "x = -10"  $\rightarrow y = -3 (-10) = 7$
- Para "x = -3"  $\rightarrow y = -3 (-3) = 0$
- Para "x = 0"  $\rightarrow$  y = -3-0
- Para "x = 2"  $\rightarrow$  y = -3-2
- $\rightarrow$  y = -3-7 = -10

Tabla de valores: 1ª ecuación								
X	x -10 -3 0 2 7							
y	7	0	-3	- 5	- 10			
Puntos	A	В	C	D	E			

• Para 
$$\frac{\text{"x}=-3\text{"}}{}$$
  $\rightarrow$  y = [4 - 2.(-3)]: 2 =  $\underline{5}$ 

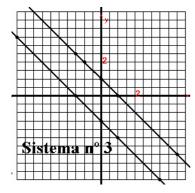
• Para "
$$x=-2$$
"  $\rightarrow y = [4 - 2.(-2)]: 2 = 4$ 

• Para "
$$x=0$$
"  $\rightarrow y = (4-2.0)$ ): 2 = 2

• Para "
$$x=2$$
"  $\rightarrow y = (4-2.2):2 = 0$ 

• Para "x=9" 
$$\rightarrow$$
 y = (4 - 2.9):2 = -8

Tabla de valores: 2ª ecuación								
X	-3	-3   -2   0   2   9						
y	5	4	2	0	- 7			
Puntos	A'	В'	C'	D'	E'			



### ESTUDIO DEL SISTEMA:

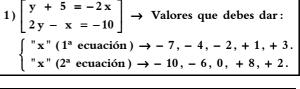
• Al representar en los ejes de coordenadas las dos ecuaciones de este sistema obtenemos dos líneas rectas paralelas, que evidentemente no se cortan en ningún punto. Lo que quiere decir que no hay puntos comunes en las ecuaciones, o sea, que no hay solución del sistema. No existe ningún par de valores (x, y) que satisfaga a ambas ecuaciones.

**EXTRA.** Comprueba tú dos cosas: 1ª.- Que no puedes resolver el sistema por ser ecuaciones equivalentes que tienen proporcionales los coeficientes de las incógnitas —no los independientes-, y 2ª.- Que los coeficientes de las incógnitas son proporcionales y los independientes no.

• <u>El sistema es incompatible,</u> porque <u>no tiene</u> solución.

# \*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* <u>E</u> J <u>E</u> <u>R</u> <u>C</u> <u>I</u> <u>C</u> <u>I</u> <u>O</u> <u>S</u>

**R**esolver numérica y gráficamente y clasificar los sistemas siguientes. Puedes dar valores libres a las incógnitas, pero para poder corregir todos en clase igual, sería conveniente que dieras los valores expresados en cada cuadro.



$$2) \begin{bmatrix} 3x - y = 6 \\ 6x = 12 + 2y \end{bmatrix} \rightarrow \text{Valores que debes dar}:$$

$$\begin{cases} "x" (1^a \text{ ecuación}) \rightarrow -2, 0, 1, 2, 6. \\ "x" (2^a \text{ ecuación}) \rightarrow -1, 0, 3, 4, 5. \end{cases}$$

3) 
$$\begin{bmatrix} 9 - 3y = -x \\ 2x - 6y = 6y \end{bmatrix}$$
  $\rightarrow$  Valores que debes dar: 
$$\begin{cases} "x" (1^a \text{ ecuación}) \rightarrow -9, -6, 0, 3, 9. \\ "x" (2^a \text{ ecuación}) \rightarrow -9, -6, -3, 0, 3. \end{cases}$$

4) 
$$\begin{bmatrix} y + 2 = -x \\ 3x - 4 = 2y \end{bmatrix}$$
  $\rightarrow$  Valores que debes dar: 
$$\begin{cases} "x" (1^a \text{ ecuación}) \rightarrow -8, -5, 0, 4, 7. \\ "x" (2^a \text{ ecuación}) \rightarrow -4, -2, 2, 4, 8. \end{cases}$$

5) 
$$\begin{bmatrix} 2x = 4 + 2y \\ y + 3x = -10 \end{bmatrix}$$
  $\rightarrow$  Valores que debes dar:  $\begin{bmatrix} x^{n} & (1^{a} \text{ ecuación}) \rightarrow -8, -5, -1, 2, 6. \\ x^{n} & (2^{a} \text{ ecuación}) \rightarrow -7, -4, -2, 0, 1. \end{bmatrix}$ 

Los siguientes ejercicios están referidos a las gráficas de la parte inferior de esta página:

- 6) ¿Cuál es la solución de la representación gráfica nº 1?
- 7) ¿Qué puedes decir de la representación gráfica nº 2?
- 8) Escribe un sistema cuyas ecuaciones estén representadas en el gráfico nº 3.
- 9) ¿Tiene solución el sistema que se ha representado en la gráfica nº 4? ¿Por qué sí o por qué no? Si contestas que sí tiene, ¿cuál es la solución?



