# TEMA 8

# Geometría Plana

**8.1.- Introducción.**

**8.2.- Conceptos elementales de Geometría Plana.**
Punto – Recta – Plano.

**8.3.- Segmentos.**
Definición – Clases – Operaciones con segmentos – Ejercicios.

**8.4.- Ángulos.**
Definición – Sistema sexagesimal y centesimal de medida – Bisectriz – Clases de ángulos – Ejercicios.

**8.5.- Polígonos.**
Definición – Clases de polígonos – Elementos – Ejercicios.

**8.6.- Triángulos.**
Elementos de un triángulo – Suma de los ángulos de un triángulo – Clasificación de triángulos – Igualdad de triángulos – Rectas y puntos notables en los triángulos – Ejercicios.

**8.7.- Cuadriláteros.**
Elementos de los cuadriláteros – Suma de los ángulos de un cuadrilátero – Clasificación de los cuadriláteros.

**8.8.- Polígonos de más de cuatro lados.**
Elementos de los polígonos - Clasificación – Fórmula de cálculo del número de diagonales – Suma de los ángulos de un polígono – Construcción de polígonos regulares – Ejercicios.

**8.9.- Circunferencia y círculo.**
Definiciones – Sus elementos o partes – Posiciones relativas de dos circunferencias – Recta tangente a una circunferencia en un punto de ella – Ángulos en la circunferencia – Propiedades de los ángulos en la circunferencia – Lugares geométricos – Longitud de la circunferencia – Determinación de una circunferencia – Longitud de una arco de circunferencia – El radián – Ejercicios y problemas.

**8.10.- Ejercicios y problemas diversos.**

**COMPLEMENTOS:**

- Dos modelos de controles de los temas 7 y 8, con las soluciones.
- Ejercicios de repaso de los temas 1 al 8, con las soluciones.
- Y, por supuesto, algunas reflexiones.

# Tema 8.- GEOMETRÍA PLANA.

## OBJETIVOS:

1. Desarrollar la intuición geométrica.
2. Conocer la clasificación de los cuadriláteros.
3. Resolver problemas geométricos reduciéndolos a otros más sencillos.
4. Comprender y utilizar el concepto de ángulo y su medida.
5. Conocer la clasificación de los ángulos según su amplitud.
6. Saber clasificar un triángulo en función de sus lados y sus ángulos.
7. Conocer la clasificación de los polígonos.
8. Reducir el apoyo en los objetos para razonar sobre las formas geométricas.
9. Consolidar los conceptos y el vocabulario geométrico.
10. Adquirir destreza en el manejo de la regla, escuadra y el transportador de ángulos.
11. Conocer el número $\pi$ (pi).
12. Mejorar la destreza en la representación de figuras planas.
13. Conocer los criterios de igualdad de triángulos.
14. Conocer los elementos de la circunferencia y el círculo.

## CONTENIDOS:

### De conceptos:

## De procedimientos:

1. Construcción, con regla y escuadra, de rectas perpendiculares y paralelas y, con regla y compás, de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
2. Medición de la distancia de un punto a una recta con regla y escuadra.
3. Construcción a mano alzada de cuadriláteros.
4. Construcción con regla, escuadra y transportador de triángulos, cuadriláteros y polígonos.
5. Cálculo del perímetro de un cuadrilátero.
6. Construcción de la suma de los ángulos de un polígono.
7. Uso del transportador para medir y construir ángulos.
8. Construcción de la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento utilizando regla y compás.
9. Construcción de las rectas notables de un triángulo con la regla y compás.
10. Construcción de un triángulo a partir de distintos tipos de datos iniciales.
11. Clasificar polígonos según el número de lados o ángulos.
12. Cálculo de la suma de los ángulos de un polígono.
13. Construcción de un polígono regular a partir del radio.
14. Construcción con regla y compás del triángulo, hexágono y dodecágono regulares.
15. Construcción de un polígono regular a partir del lado.
16. Representación gráfica de los elementos de la circunferencia y el círculo.
17. Utilizar tablas para deducir la relación entre el “ r “ o el “ d “ y la longitud de una circunferencia.
18. Uso del compás para trazar circunferencias.
19. Construcción de circunferencias a partir de distintos tipos de datos iniciales.
20. Deducción de propiedades geométricas a partir de gráficos.
21. Resolución de problemas de medida de la vida cotidiana mediante las técnicas aprendidas.
22. Construcción de triángulos iguales.
23. Identificación de triángulos iguales.

## De actitudes:

1. Gusto por la exactitud en los dibujos y construcciones geométricas.
2. Rigor en el uso de argumentos geométricos.
3. Actitud positiva hacia la belleza de las formas geométricas.
4. Consideración de las relaciones y comparaciones entre formas geométricas.
5. Interés en recurrir a diversos métodos de resolución de problemas geométricos.
6. Reconocimiento de la utilidad de la geometría para resolver situaciones de la vida cotidiana.
7. Valoración de la importancia del número $\pi$ (pi).
8. Apreciación de la precisión y claridad en el trazado de figuras circulares.
9. Interés por la resolución de problemas de medida de la vida real que involucren figuras circulares.
10. Reconocimiento y valoración de la utilidad del lenguaje gráfico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.
11. Interés por la correcta utilización y conservación de los instrumentos de medida y de dibujo.
12. Confianza en la capacidad propia para resolver situaciones problemáticas relacionadas con la vida.
13. Gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a la geometría.

# 8.1.- INTRODUCCIÓN.

La **GEOMETRÍA** es una rama de las MATEMÁTICAS que estudia las propiedades del espacio y las relaciones existentes entre **puntos, líneas, ángulos, superficies y cuerpos**.

En esta unidad vamos a estudiar la Geometría llamada plana, que se ocupa del estudio de las figuras planas, aquellas que tienen dos dimensiones y se encuentran situadas en un plano.

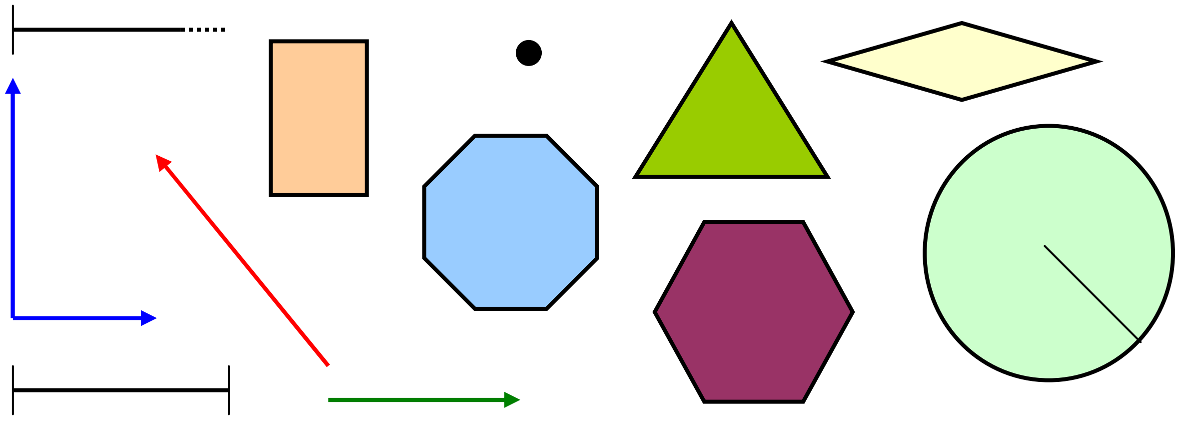
La Geometría es, de las ramas de las Matemáticas, la que más cambios ha tenido a lo largo de la historia. Los primeros conocimientos geométricos se remontan a los egipcios y babilonios, allá por el siglo XVII antes de Jesucristo. Pero los conocimientos de estos pueblos más antiguos se limitaban a regirse por reglas, es decir, que no tenían pruebas y demostraciones.

Un estudio más organizado y racional de la Geometría se produce en Grecia, donde los sabios griegos **Thales de Mileto** (624 a 548 a. de C.), **Pitágoras** de Samos (580 a 500 a. de C.), **Euclides** (¿365 a 300 a. de C.?), etc., ampliaron y perfeccionaron los conocimientos de las Matemáticas en general y dentro de ellas de la Geometría. Estos sabios griegos emplearon no sólo reglas, como sus antecesores egipcios y babilonios, sino pruebas y demostraciones que realizaban por medio de métodos deductivos.

En realidad, fue **Euclides de Alejandría el matemático griego** que estudió de una forma sistemática y extensa todos los conocimientos matemáticos de la época, escribiendo más de una docena de volúmenes en su obra llamada ***Elementos***. Tan importante, estudiada y científica fue la obra de Euclides que ha sido utilizada como libro de texto durante dos milenios. Y hoy día, en colegios e institutos, la enseñanza de la geometría plana es una interpretación modificada de la obra del famoso sabio griego.

La palabra geometría proviene de otras dos palabras griegas: ***"geo"***, que significa **"tierra"**, y ***"metro"***, que significa **"medida"**.

Dentro de las Matemáticas, la Geometría es una parte que suele gustar bastante a los alumnos, si te lo tomas con interés, claro. Si no es así ...



# 8.2.- CONCEPTOS ELEMENTALES DE GEOMETRÍA PLANA.

Toda figura geométrica es un conjunto de puntos, rectas y planos, de modo que se les pueden aplicar todas las ideas que conocemos sobre conjuntos. Estos tres conceptos sobre los que se construye la geometría, como todo concepto primario, no admiten una definición, por consiguiente tenemos que recurrir a la intuición.

La cabeza de un alfiler, la señal que deja un lápiz afilado en un folio, una estrella lejana en el cielo, etc., nos sugieren la idea o concepto de **punto**.

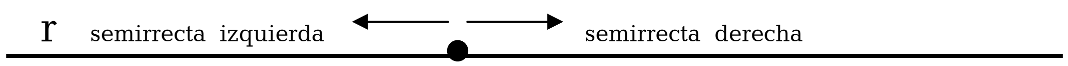
Una cuerda tensa, un cable de la luz, una estrella fugaz que atraviesa el cielo, etc., nos dan la idea o concepto de **línea recta**.

Un suelo pulimentado, una pared lisa, un folio, etc., nos dan la idea de **plano**.

Hagamos un ejercicio para comprobar que has adquirido la idea intuitiva de punto, recta y plano. Debes copiarlo en tu cuaderno e ir indicando si representa un punto, una recta o un plano.

1.- La pared de un edificio → representa un plano.
2.- El borde de una caja →
3.- Un lunar pequeñito de la cara →
4.- Un rayo láser →
5.- Un campo de balonmano →
6.- Una mesa →
7.- El cable de teléfono.
8.- Una pastilla medicinal muy pequeña →
9.- Una pizarra →
10.- Las alambres de tender la ropa →

Si dibujamos un punto en una línea recta, ésta queda dividida en dos partes. A cada una de esas partes la llamaremos **semirrecta**. Del punto **A** hacia un lado se origina una semirrecta, y del punto **A** hacia el otro lado se forma otra semirrecta. Al punto **A** se le llama **origen** de ambas semirrectas.




Si en lugar de un punto dibujamos dos, entonces formamos un **segmento**, que va desde el punto **A** hasta el punto **B**, a los que se llaman extremos.

Debes tener en cuenta lo siguiente:

- ***Un punto divide a una recta en dos partes.***
- ***Las líneas rectas no tienen origen ni extremos, son ilimitadas en los dos sentidos.***
- ***Una semirrecta tiene un punto de origen y no tiene extremo por el otro lado, o sea, es ilimitada en un sentido.***
- ***Un segmento tiene dos extremos, que son los puntos que lo limitan.***
- ***A los puntos los nombraremos siempre con letras mayúsculas, y a las líneas rectas con letras minúsculas.***

Hagamos una tabla esquemática de los conceptos elementales de la geometría plana:

| LA IDEA DE: | LA REPRESENTAMOS ASÍ: | LO ESCRIBIMOS ASÍ: | LEEMOS ASÍ: |
|---|---|---|---|
| punto | A • | **A**, **B**, **R**, **T**, etc. | punto **A**, punto **B**, punto **R**, punto **T**. |
| recta | m ——— | **m**, **s**, etc. | recta **m**, recta **s**. |
| semirrecta | O ├——— X | **O X**, **O Y**, etc. | semirrecta **OX**, semirrecta **OY**. |
| segmento | A ├———┤ B | **A B**, **M N**, etc. | segmento **AB**, segmento **MN**. |

Una vez explicados los conceptos anteriores, diremos las dos propiedades esenciales de las rectas:

**1ª PROPIEDAD DE LAS RECTAS**

**Por un solo punto pasan infinitas rectas.** *(Ver figura 1)*

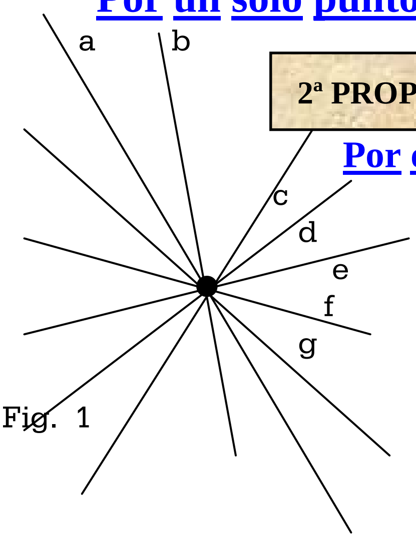



Fig. 1

**2ª PROPIEDAD DE LAS RECTAS**

**Por dos puntos pasa solamente una recta.** *(Ver figura 2)*

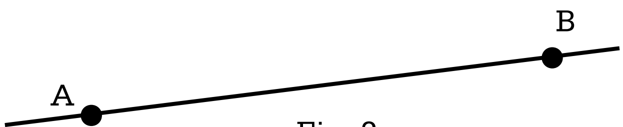



Fig. 2

Habitualmente los alumnos tienen bastante dificultades en comprender la idea de plano, pero como dijimos al principio de esta pregunta, es necesario hacerse una idea intuitiva del concepto de plano.

**UN PLANO ES UNA SUPERFICIE PLANA ILIMITADA.**

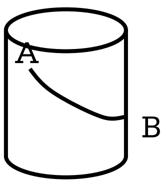
Para entender mejor esta definición, imaginemos una gran lámina que se va aplastando cada vez más con una máquina, hasta que llegue a ser tan fina que no tenga espesor (grosor), e imaginemos también que no tiene límites, es decir, que se extiende hacia todos lados ilimitadamente, hacia la derecha, la izquierda, al frente y atrás. Bien, pues eso nos da una idea mejor y más aproximada de lo que es un plano.

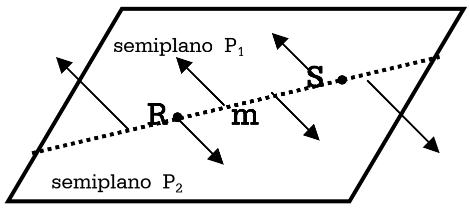
Además, la superficie de la lámina debe ser plana, no curva, como es la superficie de un cubo de fregar o un balón. Por ello, aquellas cosas que tienen superficies curvas no nos dan la idea de plano.

## Propiedad fundamental del plano

**Dos puntos en un plano determinan una recta contenida en dicho plano.**
*( Observar que con una regla que toque en dos puntos a una superficie curva la recta que une esos dos puntos no está contenida en dicha superficie curva, sin embargo, haciendo lo mismo en una mesa, cuaderno, etc., o sea, en una superficie plana, entonces sí se cumple la propiedad fundamental del plano )* **EXTRA**.- Si dos puntos en un plano determinan una recta, ¿cómo queda determinado un plano?

Una recta situada en un plano divide a éste en dos partes llamadas **semiplanos.**




Las posiciones relativas de dos rectas en un plano pueden ser:

- **SECANTES**, cuando las dos rectas tienen un punto en común. *(Ver figura 1)*
  *Un caso particular de rectas secantes son las llamadas* **RECTAS PERPENDICULARES**, *que son aquellas que dividen al plano en cuatro regiones iguales. (Esas regiones, como veremos más adelante, miden 90º)*
- **PARALELAS**, cuando las dos rectas no tienen ningún punto en común. *(Ver figura 2)*
- **COINCIDENTES**, cuando las dos rectas tienen todos los puntos comunes. *(Ver figura 3)*

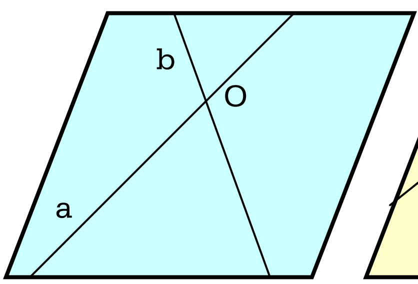



**Fig. 1**

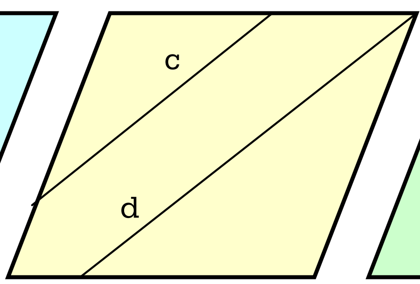



**Fig. 2**

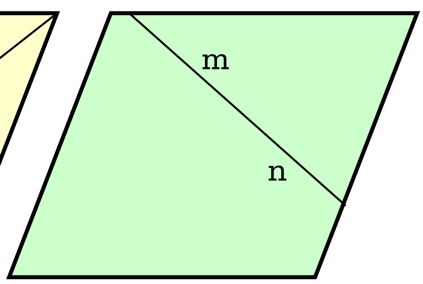
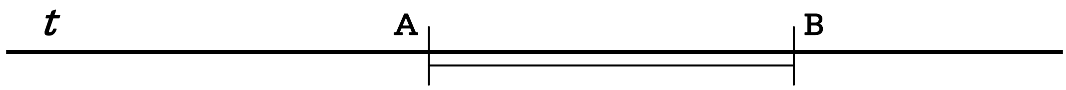



**Fig. 3**

# 8.3.- SEGMENTOS.

Como hemos dicho anteriormente, un segmento es la parte de una recta que queda comprendida entre dos puntos **A** y **B** a los que llamamos extremos.




- **SEGMENTOS IGUALES** son aquellos que al superponerlos coinciden. *(Ver figura nº 1)*

- **SEGMENTOS CONSECUTIVOS** son aquellos que tienen un extremo común y están situados sobre la misma recta. *(Ver figura nº 2)*

- **SEGMENTOS CONCATENADOS** son aquellos que tienen un extremo común y están situados en distintas rectas. *(Ver figura nº 3)*

- **MEDICIÓN DE SEGMENTOS**. Para medir segmentos puedes utilizar la regla (midiendo de un extremo a otro) o el compás (colocando cada una de sus puntas en los extremos). *(Ver figura nº 4)*

- **TRANSPORTE DE SEGMENTOS**. Para transportar segmentos de un lado a otro se puede hacer también con regla y compás, pero es más rápido y práctico hacerlo con el compás. *(Ver figura nº 5)*

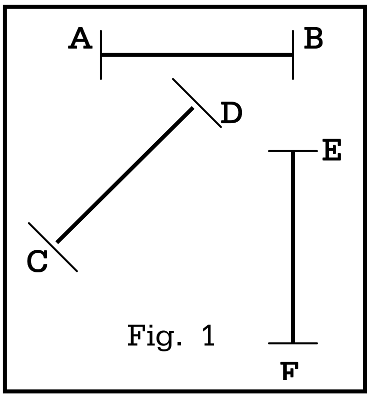


Fig. 1

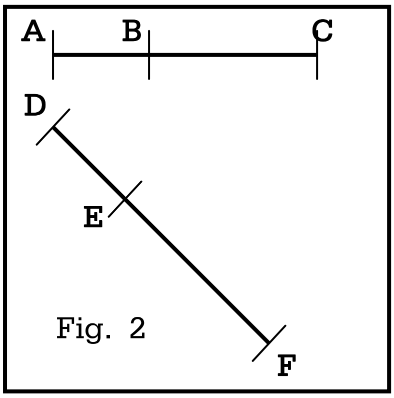


Fig. 2

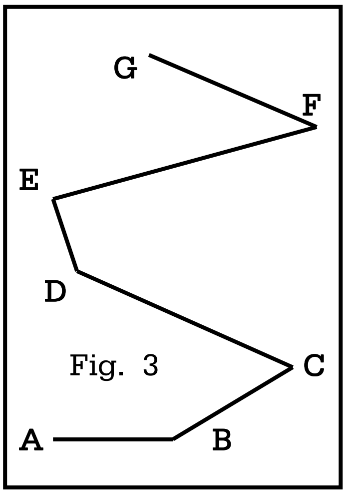


Fig. 3

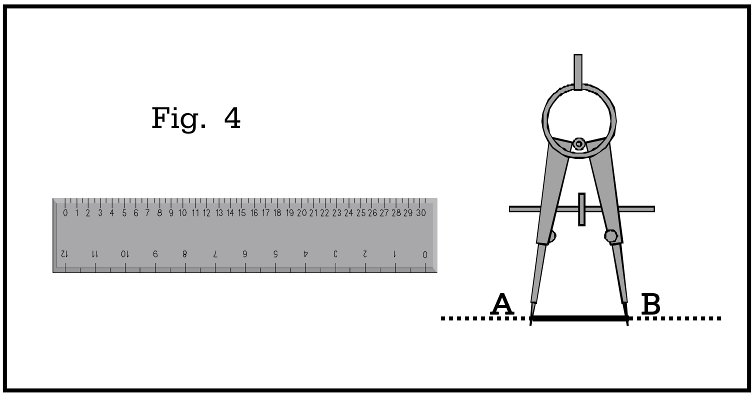


Fig. 4

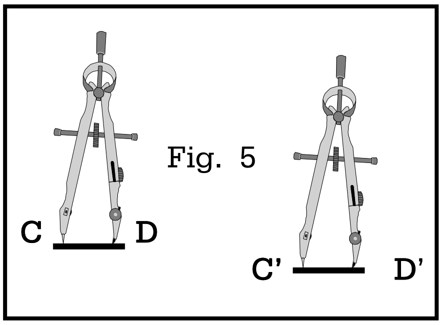


Fig. 5

## OPERACIONES CON SEGMENTOS:

- Para ***sumar*** dos o más segmentos los transportamos sobre una misma línea recta hasta ponerlos consecutivos, siendo la suma el segmento que va desde el primer extremo hasta el último extremo transportado. *(Fig. 6)*
- Para ***restar*** segmentos los transportamos sobre una misma línea recta de tal forma que tengan un extremo común y que el segmento menor quede dentro del mayor, así la diferencia será el segmento restante. *(Fig. 7))*
- Para ***multiplicar*** un segmento por un número natural lo transportamos sobre una línea recta de forma consecutiva las veces que indique el número natural. *( Ver figura nº 8 )*
- Para ***dividir*** un segmento por un número natural lo dividimos en tantas partes como indique dicho número. *( Ver figura nº 9 )*

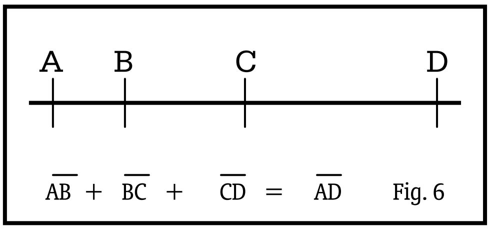


Fig. 6

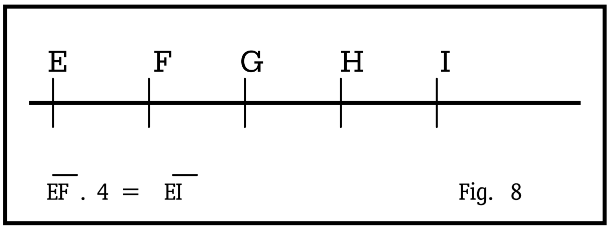


Fig. 8

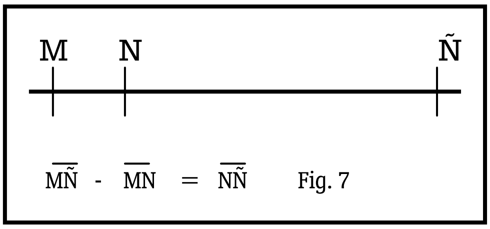


Fig. 7

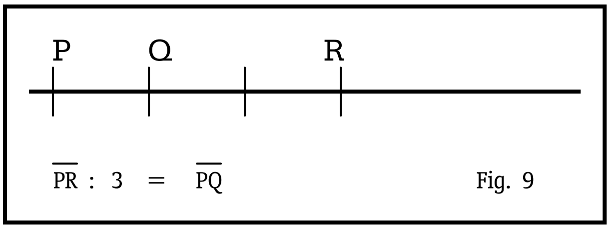
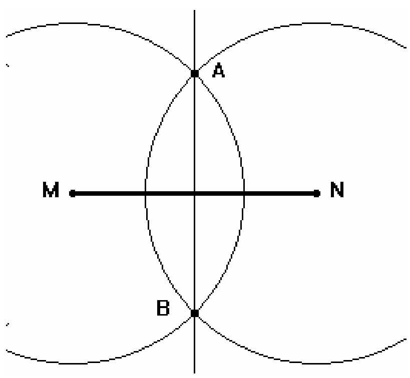


Fig. 9

## MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

**MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO** es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento. *( Ver figura siguiente, en la que puedes observar cómo se traza una mediatriz )*

1º) Con un compás, haciendo centro en uno de sus extremos (M), y con una abertura mayor que la mitad del segmento (MN), se trazan dos arcos a ambos lados del segmento.
2º) Con centro en el otro extremo (N), se hace lo mismo, con lo que los dos arcos dibujados se cortarán en dos puntos (A y B).
3º) Se unen esos dos puntos de corte (A y B) y se obtiene la mediatriz (m) del segmento MN.



# 8.4.- ÁNGULOS.

**ÁNGULO** es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo origen. *(Ver figura nº 11)*

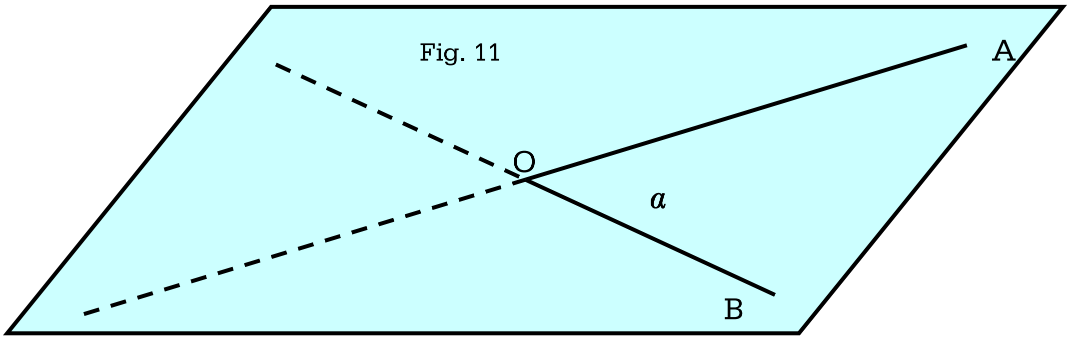


Fig. 11

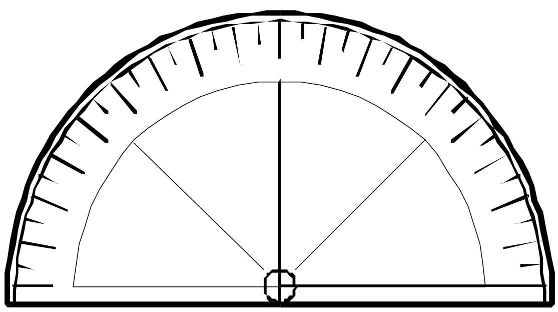
☞ Los ángulos se pueden designar de varias formas:

- Nombrando los lados y el vértice : **AOB**
- Nombrando el vértice solamente : $\widehat{O}$
- Nombrándolo con una letra griega : $\widehat{\alpha}$ *(alfa)*

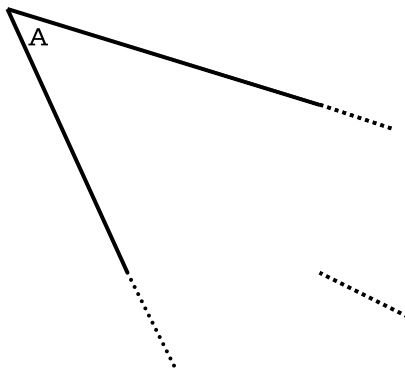
*Nota: colocando el llamado sombrerito, que es el símbolo del ángulo.*

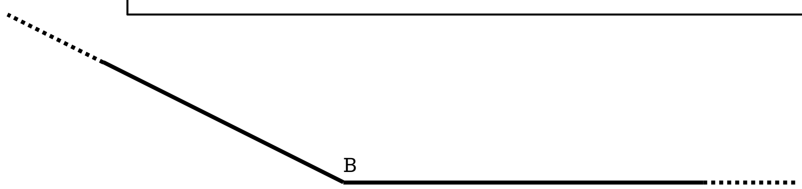
☞ Para medir los ángulos se utiliza el llamado **transportador de ángulos**, *(Ver figura nº 12)*, que es un semicírculo graduado como el de la figura siguiente. Se utiliza colocando el centro del semicírculo en el vértice del ángulo y el diámetro del mismo sobre un lado, con lo cual el otro lado nos indicará la graduación (medida en grados) correspondiente del ángulo que estamos midiendo.

Fig. 12



*Mide con tu transportador los ángulos dibujados.*



☞ La unidad de medida de ángulos más usual es el GRADO SEXAGESIMAL. Para que comprendas lo que es un grado sexagesimal es necesario dividir una circunferencia en 360 partes o unidades angulares iguales *( Ver figura nº 13 )*, así mediremos en lo que se llama EL SISTEMA SEXAGESIMAL, en el que una de esas 360 partes mide 1 grado sexagesimal, que se escribe así → 1 º, poniéndole un cerito pequeño arriba y a la derecha. En este sistema sexagesimal de medida, ¼ de la circunferencia mide 90 º, que es la medida angular de lo que llamaremos un ángulo recto.

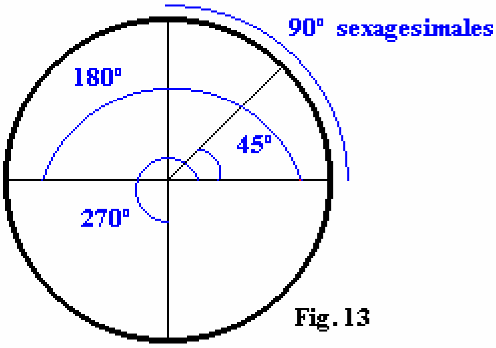



Fig. 13

SISTEMA SEXAGESIMAL

> Circunferencia completa = 360 g
> Ángulo recto (cuadrante) = 90 g
> Los grados sexagesimales se notifican con una "o" pequeñita de exponente.
> Es el que usaremos de forma habitual.

***NOTA** : El sistema sexagesimal es el que usaremos habitualmente para medir ángulos, pero debes saber que hay otro sistema, llamado SISTEMA CENTESIMAL, en el que la unidad de medida es el GRADO CENTESIMAL, que sería la medida que resulta de dividir la circunferencia en 400 partes iguales, en lugar de 360 como antes. ( Ver figura nº 14 )*

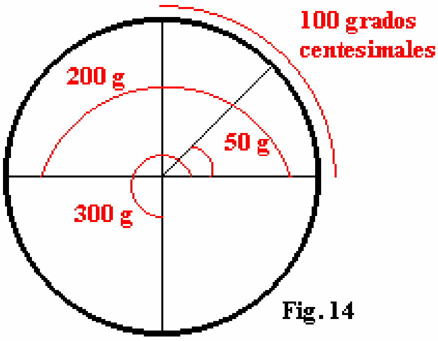



Fig. 14

SISTEMA CENTESIMAL

> Circunferencia completa = 400 g
> Ángulo recto (cuadrante) = 100 g
> No lo usaremos habitualmente.
> Los grados centesimales se notifican con una "g" de exponente, en lugar de una "o" pequeñita.

En las páginas siguientes veremos las operaciones con medidas angulares, referidas principalmente al Sistema Sexagesimal, donde las unidades que emplearemos para la medición de ángulos son :

⊗ El grado sexagesimal → { Se notifica con una "o" pequeñita en la parte donde se colocan los exponentes. Un ángulo recto tiene de medida 90°.

⊗ El minuto sexagesimal → { Se notifica con una "comita" en la parte donde se colocan los exponentes. Equivale a una sesentaava parte de 1° sexagesimal → $1' = \dfrac{1^\circ}{60}$ ⇒ O lo que es lo mismo : 1° (un grado) = 60' (sesenta minutos)

⊗ El segundo sexagesimal → { Se notifica con dos "comitas" en la parte donde se colocan los exponentes. Equivale a una sesentaava parte de 1' sexagesimal → $1'' = \dfrac{1'}{60}$ ⇒ O lo que es lo mismo : 1' (un minuto) = 60'' (sesenta segundos)

## Normas para operar con medidas angulares sexagesimales

### SUMA DE ÁNGULOS

Para sumar dos o más medidas angulares expresadas en grados, minutos y segundos sexagesimales, sumamos por separado los grados, los minutos y los segundos. Después, reducimos las cantidades que necesitemos. Así, las cantidades de los segundos que pasen de 59", se dividen entre 60 para convertirlas en minutos, con lo cual, el cociente pasa a sumarse en la cantidad de los minutos y el resto se queda como cantidad de los segundos. Igual procederemos con las cantidades de los minutos para convertirlas en grados. Veamos un ejemplo:

Realizar la suma de tres ángulos cuyas medidas son 37º 54' 49", 50º 46' 21" y 108º 37' 2".

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 37º | 54' | 49" |
| + | 50º | 46' | 21" |
| + | 108º | 37' | 2" |
| | 195º | 137' | 72" |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 195º | 137' | 72" |
| + | | 1' | 12" |
| | 195º | 138' | 12" |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 195º | 138' | 12" |
| + | 2º | 1' | 12" |
| | **197º** | **18'** | **12''** |

### RESTA DE ÁNGULOS

Para restar medidas de ángulos, se restan los segundos con los segundos, minutos con minutos y grados con grados. Si al restar una de las cantidades el sustraendo es mayor que el minuendo, convertimos un grado o un minuto de las cantidades del minuendo, según necesitemos, en la unidad inferior, o sea, 1º en 60' ó 1' en 60" que sumamos al minuendo que era menor para poder efectuar la resta. Veamos un ejemplo:

Restar la amplitud de un ángulo que mide 213º 8' 25" a la de otro que mide 37º 26' 30".

213º 8' 25" = 212º (60 + 8)' 25" = 212º 68' 25" = 212º 67' (60 + 25)" = 212º 67' 85"

Y ahora ya realizamos la resta:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 212º | 67' | 85" |
| - | 37º | 26' | 30" |
| | **175º** | **41'** | **55''** |

### PRODUCTO DE UN ÁNGULO POR UN NÚMERO ENTERO

Se hacen los respectivos productos de grados, minutos y segundos por dicho número y a continuación se realizan las transformaciones que sean necesarias. Veamos un ejemplo:

( 28º 53' 41" ) . 9 = 252º 477' 369" ⇒ 252º 483' 9"

| | | |
|---|---|---|
| 252º | 477' | 369" |
| | 6' | 9" |
| 252º | 483' | 9" |

| | | |
|---|---|---|
| 252º | 483' | 9" |
| 8º | 3' | |
| **260º** | **3'** | **9''** |

### DIVISIÓN DE UN ÁNGULO ENTRE UN NÚMERO ENTERO

Se empieza dividiendo los grados entre el número, y se convierte el resto de grados en minutos. Se suma esa cantidad convertida a los minutos; se divide el resultado entre el número, e igualmente el resto de los minutos se convierten en segundos. Esa cantidad se suma a los segundos y, por último, se hace la división entre el nº.

¿Qué ángulo se obtiene al dividir uno de medida 98º 35' 24" en 6 partes?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98º | 35' | 24" | 6 |
| 2º ⇒ | 120' | | **16º 25' 54''** |
| | 155' | 300" ( 5' ) | |
| | | 324" | |

# OPERACIONES CON MEDIDAS SEXAGESIMALES

Ya hemos visto que la unidad de medida que utilizaremos más frecuentemente es el **GRADO SEXAGESIMAL**. Como en muchas ocasiones las medidas de ángulos no serán enteras, es decir, que habrá decimales, por ello se usan otras medidas que son divisores del grado sexagesimal. El grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales, y se obtiene el **MINUTO SEXAGESIMAL**, y el minuto sexagesimal se divide en otras 60 partes iguales y se obtiene el **SEGUNDO SEXAGESIMAL**.

## SISTEMA SEXAGESIMAL DE MEDIDAS ANGULARES

- ⊗ 1 ángulo recto = 90 grados sexagesimales = $90^\circ$
- ⊗ 1 grado sexagesimal = $1^\circ$ = 60 minutos sexagesimales = $60'$
- ⊗ 1 minuto sexagesimal = $1'$ = 60 segundos sexagesimales = $60''$
- ⊗ $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$
- ⊗ $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$
- ⊗ $1^\circ = 60' = 3600''$
- ⊗ **Conversión de medidas angulares complejas a incomplejas:**

Ejemplo 1: $51^\circ\,47' \rightarrow$ 51 grados 47 minutos

$51^\circ\,47' = 51 \cdot 60 + 47 = 3060 + 47 = \mathit{3107}'$

Ejemplo 2: $34^\circ\,15'\,28'' \rightarrow$ 34 grados 15 minutos 28 segundos

$34^\circ\,15'\,28'' = 34 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 + 28 = \mathit{123328}''$

- ⊗ **Conversión de medidas angulares incomplejas a complejas:**

Ejemplo 3: $7084'' \rightarrow$ 7084 segundos $\rightarrow 1^\circ\,48'\,4''$

$$\begin{array}{l|l}
7084'' & 60 \\ \hline
108 & 118' \;\big|\; 60 \\
484 & 48' \quad 1^\circ \\
4'' &
\end{array}$$

Ejemplo 4: $27209'' \rightarrow$ 27209 segundos $\rightarrow 7^\circ\,33'\,29''$

$$\begin{array}{l|l}
27209'' & 60 \\ \hline
320 & 453' \;\big|\; 60 \\
209 & 33' \quad 7^\circ \\
29'' &
\end{array}$$

- ⊗ **Operaciones con medidas de ángulos en forma compleja:** (Ejemplos 5 al 8)

SUMA: $35^\circ\,41'\,57'' + 9^\circ\,19'\,8'' + 46^\circ\,7'\,20''$; RESTA: $112^\circ\,5'\,47'' - 40^\circ\,16'\,51'' =$

$$\begin{array}{rrr}
 & 35^\circ & 41' & 57'' \\
+ & 9^\circ & 19' & 8'' \\
+ & 46^\circ & 7' & 20'' \\ \hline
 & 90^\circ & 67' & 85''
\end{array}$$

$90^\circ\,67'\,85'' = 90^\circ\,68'\,25'' = 91^\circ\;8'\;25''$

$112^\circ\,5'\,47'' \rightarrow 111^\circ\,64'\,107''$

$40^\circ\,16'\,51'' \rightarrow \underline{40^\circ\,16'\,51''}$

$61'\,48'\,56''$

MULTIPLICACIÓN: $(10^\circ\,35'\,56'') \cdot 7 = 70^\circ\,245'\,392'' =$

$= 70^\circ\,(60 \cdot 4 + 5)'\,(60 \cdot 6 + 32)'' = 74^\circ\;11'\;32''$

DIVISIÓN: $(33^\circ\,47'\,12'') : 6 \rightarrow$

$$\begin{array}{llll|l}
33^\circ & 47' & 12'' & & 6 \\ \hline
3^\circ = & 180' & & & 5^\circ\;37'\;52'' \\
 & 227' & & & \\
 & 47' & & & \\
 & 5' = & 300'' & & \\
 & & 312'' & & \\
 & & 12'' & & \\
 & & 0'' & &
\end{array}$$

# EJERCICIOS

Nº 1.- ¿Cómo se haría la suma de un ángulo cuya amplitud es de 35º 28‘ y 46’’ con otro de amplitud 40º 50’ y 39’’?

Nº 2.- ¿Cómo multiplicarías por 6 un ángulo agudo cuya medida es de 27º 45’ y 50’’?

Nº 3.- ¿Qué medida tendría la quinta parte de un ángulo que mide 152º 21’ y 10’’?

Nº 4.- ¿Cuántos grados sexagesimales y cuántos centesimales tienen tres ángulos rectos?

Nº 5.- Completa la siguiente tabla de medidas angulares:

| MEDIDAS DE ÁNGULOS | Grados | Minutos | Segundos |
|---|---|---|---|
| Datos para realizar conversiones en el SISTEMA SEXAGESIMAL de medidas angulares | 42º | | |
| | | 120' | |
| | | | 25200" |
| Datos para realizar conversiones en el SISTEMA CENTESIMAL de medidas angulares | | | 4000s |
| | | 3700 | |
| | 3g | | |

Nº 6.- Expresa en forma compleja las siguientes medidas angulares.
a) 458’’
b) 6.709’
c) 95.186º

Nº 7.- Expresa en forma incompleja las siguientes medidas:
a) 4º 45’ 7’’
b) 20º 2’ 58’’
c) 23’ 6’’

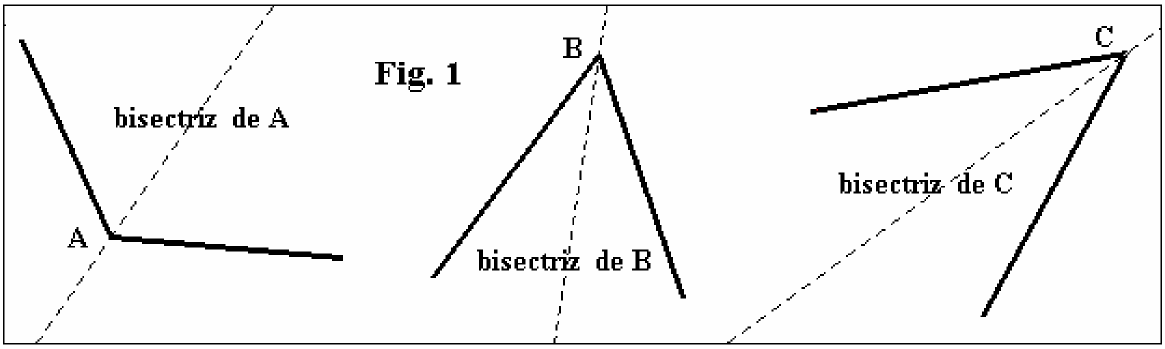
Nº 8.- Realiza las siguientes operaciones:
a) 89º 56’ 36’’ + 3º 4’ 23’’ + 12º 47’ 1’’ =
b) 38º 18’ - 29º 50’’ =
c) (27º 52’ 43’’) . 8 =
d) (304º 3’ 16’’) : 4 =
e) (5º 10’) . 6 + 53º 38’’ - 2º 41’ =

Nº 9.- ¿Cómo se expresa el complejo 15º 43’ 6’’ como medida de sólo grados sexagesimales en forma de número decimal, o sea, en medida incompleja?

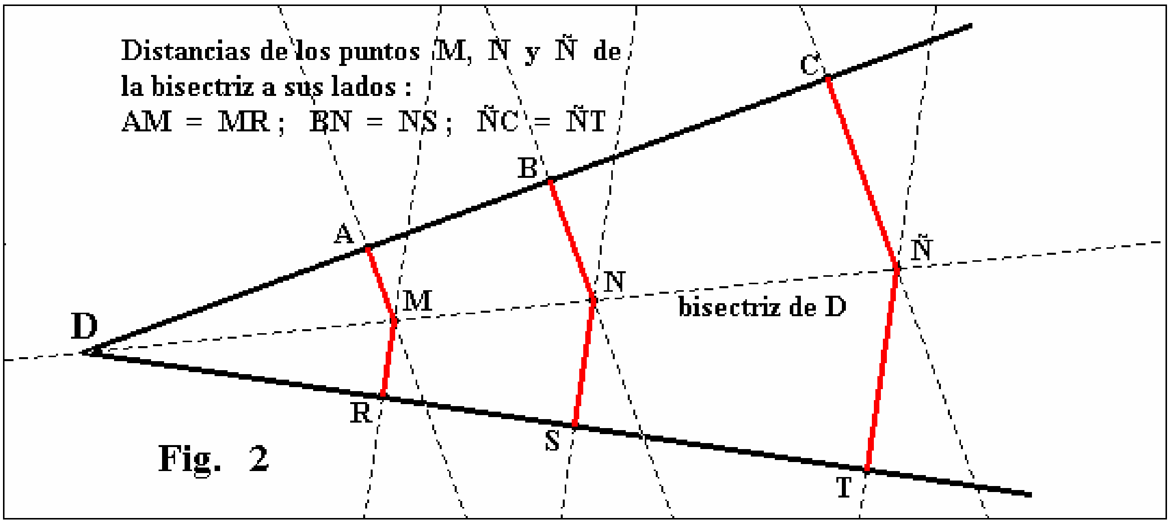
Nº 10.-¿Cómo se expresa el complejo $7^{g}$ $28^{m}$ $52^{s}$ como medida incompleja de grados centesimales con números decimales?

# BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.

Es la semirrecta que parte del vértice y divide al ángulo en dos partes iguales. *(Ver figura)*




Los puntos de la bisectriz están a la misma distancia de cada lado del ángulo. *(Ver figura)*




Para construir la bisectriz de un ángulo, debemos hacerlo así:

- → Cogemos un compás.
- → Haciendo centro en el vértice (D) del ángulo, señalamos dos cortes (A y R) con un mismo radio en los dos lados.
- → Desde esos dos puntos (A y R) de corte, trazamos dos arcos también con un mismo radio hasta que se corten ambos arcos en un punto (M).
- → Unimos el vértice (D) con el punto M y ya tenemos la bisectriz.

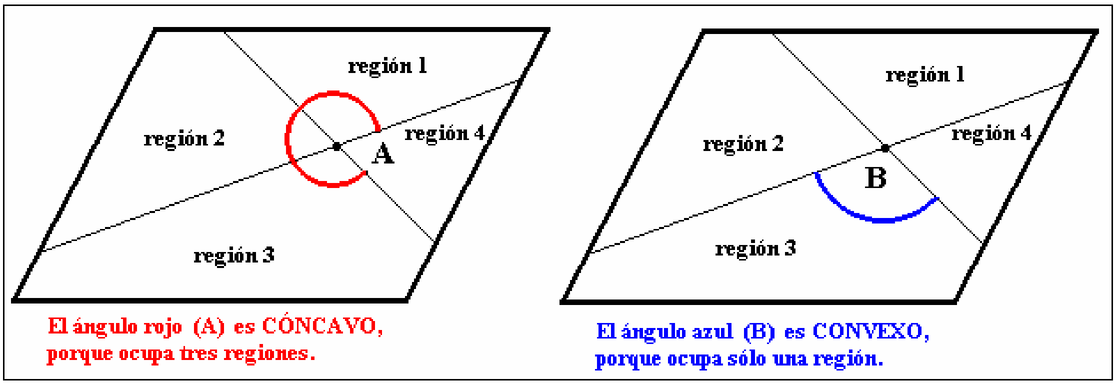
**NOTA :** realiza en tu cuaderno el dibujo de las bisectrices de varios ángulos, por ejemplo, uno menor de 90º, otro de 90º y otro mayor de 90º. Desgraciadamente, hay alumnos que terminan su estancia *–nunca mejor empleada la palabra–* en la E.S.O. y no saben trazar la bisectriz de un ángulo. A ver si tú no eres de ésos.

☞ *A continuación iremos conociendo las diversas* **<u>clases de ángulos.</u>** *Estudiaremos las siguientes: ángulos cóncavos y convexos, ángulos opuestos por el vértice, ángulos consecutivos y adyacentes, ángulos rectos, agudos, llanos, obtusos y completos, ángulos complementarios y suplementarios y ángulos formados por una recta que corta a dos paralelas.*

## ÁNGULOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS:

**ÁNGULO CÓNCAVO** es el que ocupa tres regiones angulares.
*( Ver figura )*

**ÁNGULO CONVEXO** es el que ocupa una o dos regiones angulares.
*( Ver figura )*

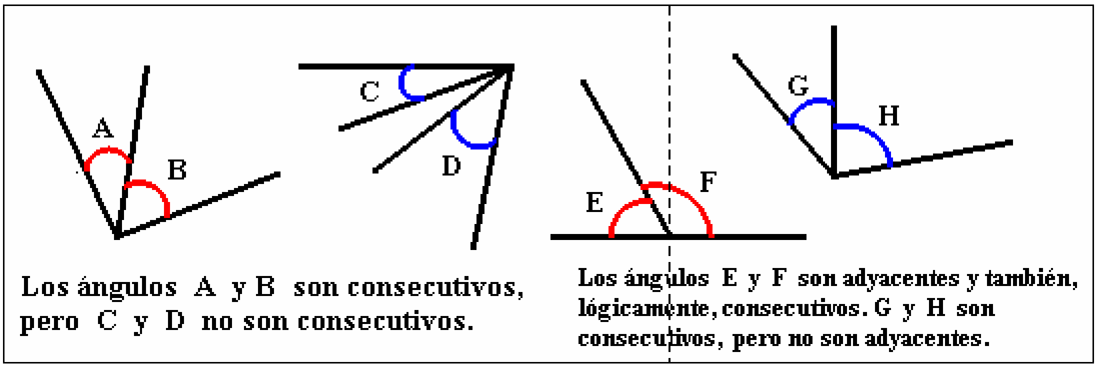



## ÁNGULOS CONSECUTIVOS Y ADYACENTES:

**ÁNGULOS CONSECUTIVOS** son los que tienen el vértice común y uno de sus lados es coincidente. *( Ver figura )*

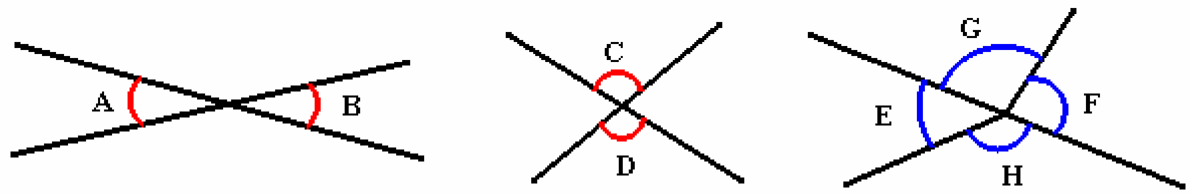
**ÁNGULOS ADYACENTES** son los que tienen un lado común y los otros dos lados están uno a continuación del otro y sobre una misma línea recta. Lógicamente, como puedes observar, los ángulos adyacentes son siempre consecutivos.

***<u>NOTA:</u>*** *Aunque aún no hemos explicado el concepto de ángulo recto y el de ángulos suplementarios, no está demás indicar ahora que los ángulos adyacentes sumados miden siempre 180º, o que equivalen a dos rectos, o que son suplementarios. ( Ver figura )*



## ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE:

**ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE** son aquellos que tienen un vértice común y cada uno de sus lados pertenece a la misma recta. Estos ángulos son siempre iguales. *( Ver figura )*




**Los ángulos A y B y los ángulos C y D son opuestos por el vértice. Sin embargo, ninguna pareja formada por los ángulos E, F, G y H son opuestos por el vértice.**

## ÁNGULOS RECTOS, AGUDOS, LLANOS, OBTUSOS Y COMPLETOS:

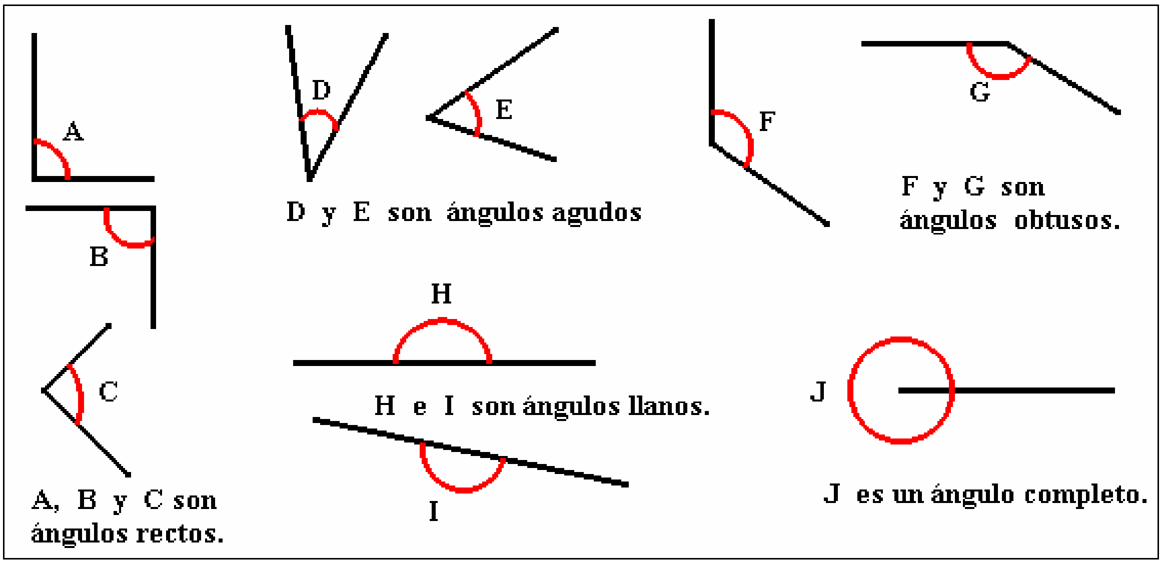
**ÁNGULO RECTO** ( = 90º ) es la región angular comprendida entre dos semirrectas perpendiculares. Un ángulo recto mide <u>90 º</u> sexagesimales, o 100 grados centesimales. *( Ver figura )*

**ÁNGULO AGUDO** ( < 90º ) es el que mide menos que un recto, o sea, <u>menos de 90 º</u> sexagesimales. *( Ver figura )*

**ÁNGULO OBTUSO** ( > 90º ) es el que mide más que un recto, o sea, <u>más de 90 º y menos de 180 º</u> sexagesimales. *( Ver figura )*

**ÁNGULO LLANO** ( = 180º ) es el que mide dos rectos, o sea, <u>180 º</u> **sexagesimales.** *( Ver figura )*

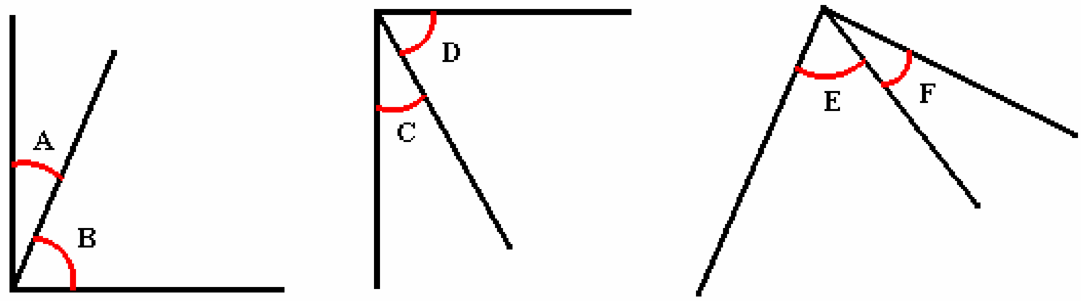
**ÁNGULO COMPLETO** ( = 360º ) es el que mide cuatro rectos, o sea, <u>360º</u> **sexagesimales.** Es llamado ángulo de un giro o vuelta. *( Ver figura )*



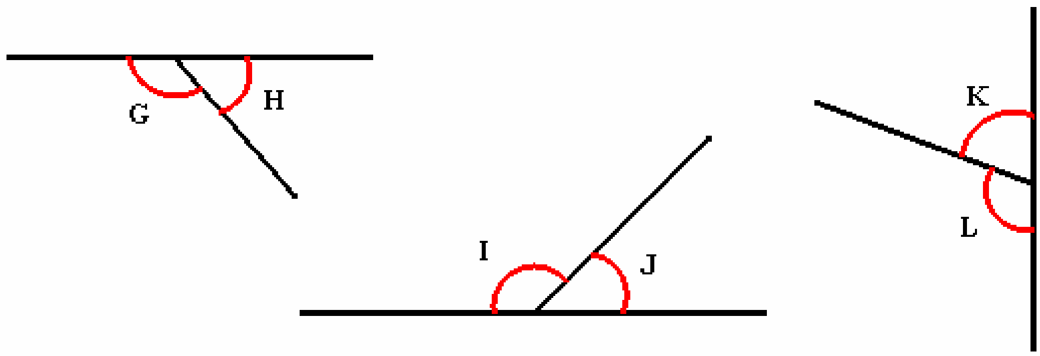
## ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS:

**ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS** son aquellos que sumados valen un ángulo recto, es decir, los que suman 90 º. *( Ver figura )*

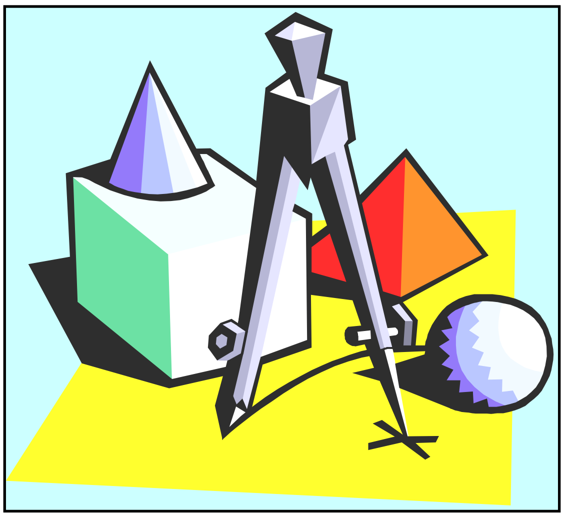
**ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS** son aquellos que sumados valen dos rectos, es decir, que suman 180 º. *( Ver figura )*

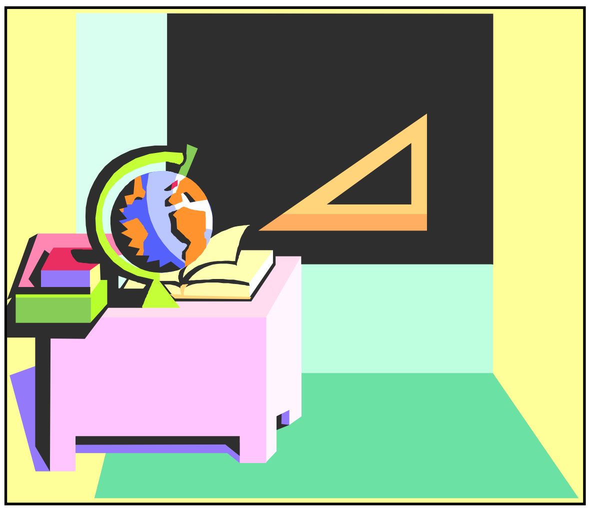



**Los pares de ángulos (A y B), (C y D) y (E y F) son ángulos complementarios, porque la suma de cada par de ángulos es de 90º.**



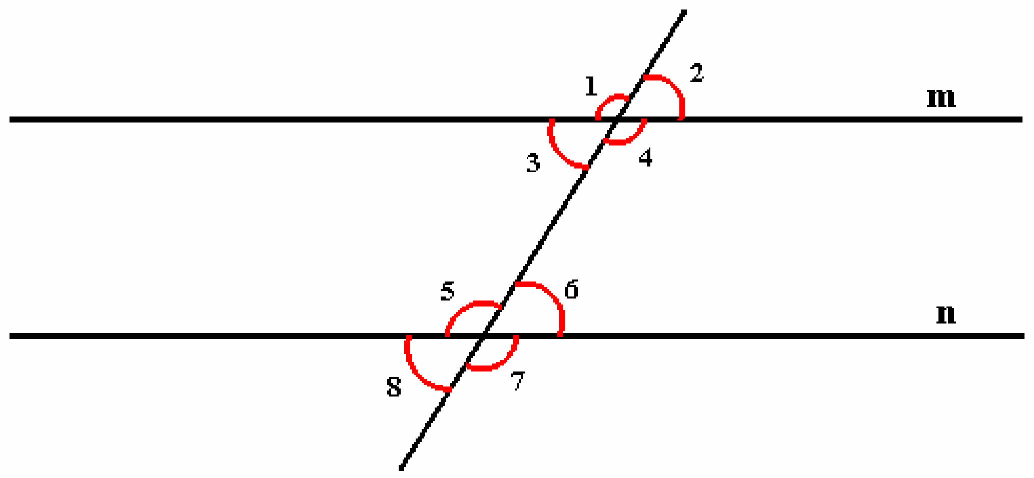

**Los pares de ángulos (G y H), (I y J) y (K y L) son ángulos suplementarios, porque la suma de cada par de ángulos es de 180º.**





## ÁNGULOS FORMADOS POR UNA RECTA SECANTE QUE CORTA A DOS PARALELAS:

***Una línea recta que corta a otras dos paralelas determina ocho ángulos que se clasifican de la forma siguiente :*** *( Ver figura )*




- Ángulos **ALTERNOS INTERNOS** → 3 y 6 → 4 y 5
- Ángulos **ALTERNOS EXTERNOS** → 1 y 7 → 2 y 8
- Ángulos **CORRESPONDIENTES** → 2 y 6 → 1 y 5
  → 4 y 7 → 3 y 8
- Ángulos **OPUESTOS POR EL VÉRTICE** → 1 y 4 → 2 y 3
  → 5 y 7 → 6 y 8
- Ángulos **CONJUGADOS EXTERNOS** → 1 y 8 → 2 y 7
- Ángulos **CONJUGADOS INTERNOS** → 3 y 5 → 4 y 6

**Observa** que los ángulos alternos, correspondientes y opuestos por el vértice son iguales –*entre cada pareja, claro*–, y que los conjugados son suplementarios.

**EXTRA**.- Entre otros, hay algunos profesionales llamados topógrafos *(Topografía es el arte de describir y delinear detalladamente la superficie de un terreno)* y astrónomos *(Astronomía es la ciencia que trata de cuanto se refiere a los astros, y principalmente a las leyes de sus movimientos)* que necesitan medir ángulos habitualmente en su trabajo. ¿Cómo se llama el aparato más usual que utilizan para sus mediciones?

# FICHA DE REPASO

**Cuando realices esta ficha en tu cuaderno, debes hacerlo en una página apaisada, intentando que todas las líneas de cada pregunta terminen con una raya a la misma altura, y desde el final de cada raya se traza una línea hasta el punto que está delante de cada una de las respuestas de los cuadros de la derecha.**

**Hazlo de 10 en 10, o sea, relacionando las 10 primeras con el primer recuadro de la derecha, las 10 segundas con el segundo recuadro y las otras con el último.**

1.- El suelo de una gran habitación me da idea de ....................................
2.- Los planos y las líneas rectas son.........................................................
3.- Una línea recta divide a un plano en dos.............................................
4.- El estudio de los puntos, las rectas, los ángulos y superficies planas se hace mediante la ......................................................................................
5.- Por un solo punto pasan.........................................................................
6.- Por dos puntos pasa ...............................................................................
7.- Un plano queda definido por .................................................................
8.- Un segmento está limitado por ..............................................................
9.- La recta que divide al segmento en dos partes iguales es ....................
10.- Un punto divide a una recta en dos .....................................................

- dos puntos.
- la mediatriz.
- semirrectas.
- tres puntos.
- una sola recta.
- infinitas rectas.
- Geometría.
- plano.
- ilimitadas.
- semiplanos.

11.- La parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen un mismo origen la denominamos ........................................................
12.- El sistema que usaremos para medir ángulos es el ..........................
13.- Un ángulo recto tiene ..........................................................................
14.- Para medir ángulos utilizamos ............................................................
15.- Los ángulos convexos son los que tienen .........................................
16.- Los ángulos que tienen 180 º se llaman .............................................
17.- Si un ángulo mide 35 º y otro 55º, se dice que son ...........................
18.- Los ángulos mayores de 180 º se llaman ...........................................
19.- Aquellos ángulos que tienen un vértice y un lado común son ...........
20.- Ángulo agudo es el que mide ..............................................................

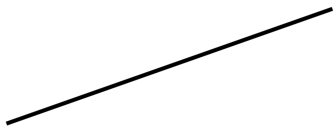
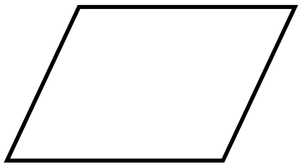
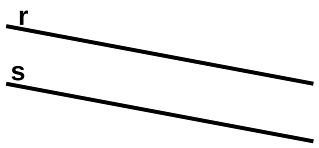
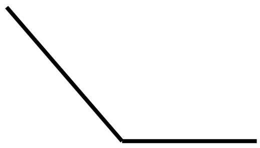
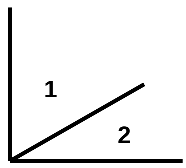
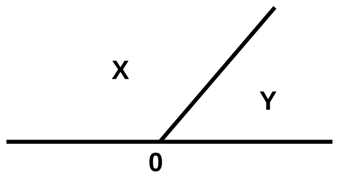
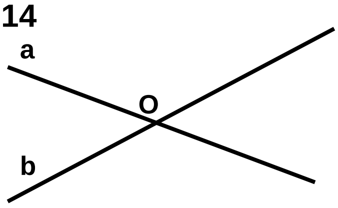
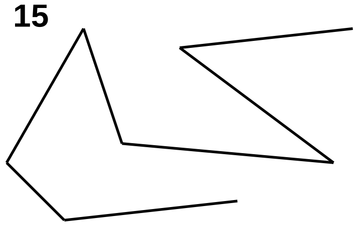
- consecutivos.
- complementarios.
- el transportador.
- menos de 90 º.
- ángulo.
- sexagesimal.
- cóncavos.
- 90 º.
- llanos.
- menos de 180º.

21.- Una recta que corta a dos paralelas forma ..........................................
22.- Los ángulos suplementarios y/o adyacentes suman ..........................
23.- Todo ángulo mayor de 90º y menor de 180º se llama ........................
24.- La semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales es ..........
25.- El ángulo completo mide .....................................................................
26.- Las líneas que se cortan formando 4 ángulos rectos son ..................
27.- Las rectas paralelas son aquellas que nunca .....................................
28.- Los segmentos que tienen vértice común y se sitúan en distintas líneas rectas se llaman ..........................................................................
29.- Dos ángulos que sean opuestos por el vértice son siempre ................
30.- Un rayo láser da idea de una .............................................................

- perpendiculares.
- se cortan.
- 180 º.
- línea recta.
- 8 ángulos.
- concatenados.
- la bisectriz.
- obtuso.
- 360 º.
- iguales.

**EJERCICIOS:** Dibuja en tu cuaderno una tabla con cuadros semejantes a éstos, copiando las figuras y su nombre debajo o copiando los nombres y dibujando encima las figuras, según indique cada cuadro.

¡ OJO ! La tabla con los cuadros, las líneas y todas las figuras deben estar realizadas CON REGLA, DESPACIO Y CON INTERÉS. Si no es así, mejor que no la hagas.

| | | |
|---|---|---|
| 1  | 2  | 3  |
| 4 Un segmento RS | 5 Un semiplano ( r , A ) | 6 Dos rectas perpendiculares |
| 7   | 8  | 9   |
| 10 Un ángulo agudo | 11 Un ángulo recto | 12 Dos ángulos alternos internos |
| 13   | 14   | 15  |

**16**

**Varios puntos**

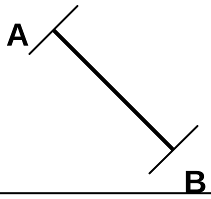
**17**

**Una semirrecta**

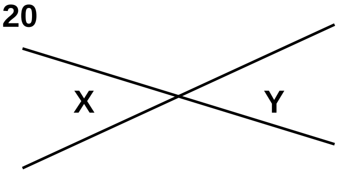
**18**

**Segmentos consecutivos**

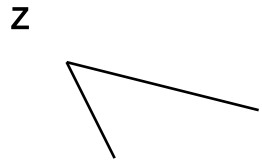
**19**




**20**



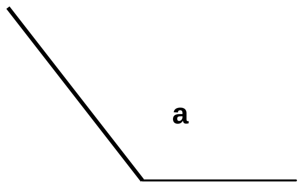

**21**




**22**

**Mediatriz de un segmento**

**23**




**¿ Cuántos grados ?**

**24**

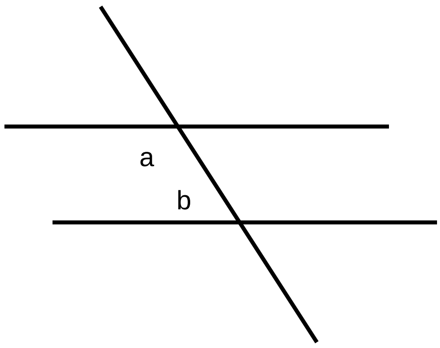
**Dos ángulos adyacentes o suplementarios**

**25**

**26**

**27**

**28**




**29**

**Un ángulo llano**

**30**

**Dos rectas secantes**

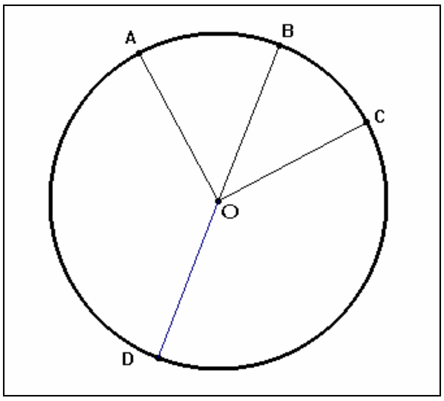
# EJERCICIOS

1.- Dibuja una recta y en ella un punto. Notifica todo, o sea, llámale con letras. ¿En cuántas partes divide el punto dibujado a la recta? ¿Cómo se llaman estas partes?

2.- Dibuja tres rectas. La 1ª de ellas que sea paralela a la 2ª y perpendicular a la 3ª. ¿Cómo es la tercera recta respecto de la segunda?

3.- Escribe adecuadamente los nombres de los siguientes ángulos que tú veas en la siguiente figura:

a) Un ángulo agudo.
b) Un ángulo recto.
c) Un ángulo obtuso.
d) Un ángulo llano.
e) Un ángulo cóncavo.
f) Un ángulo completo.




4.- Dibuja en cada uno de los apartados un reloj donde las agujas formen, exactamente, el ángulo expresado, indicando qué hora es en esa posición de las agujas.

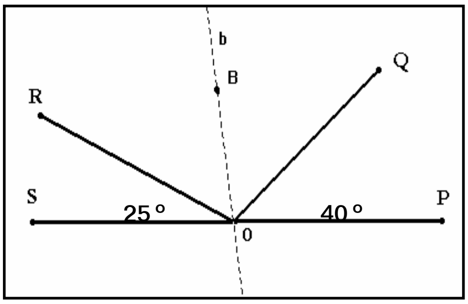
a) Un ángulo de 90 º.
b) Un ángulo de 60 º.
c) Un ángulo de 180 º.
d) Un ángulo de 120 º.
e) Un ángulo de 255 º.

5.- Uno dificililllo. A las 5 y 10 minutos, ¿qué mide exactamente el ángulo cóncavo que forman las agujas del reloj?

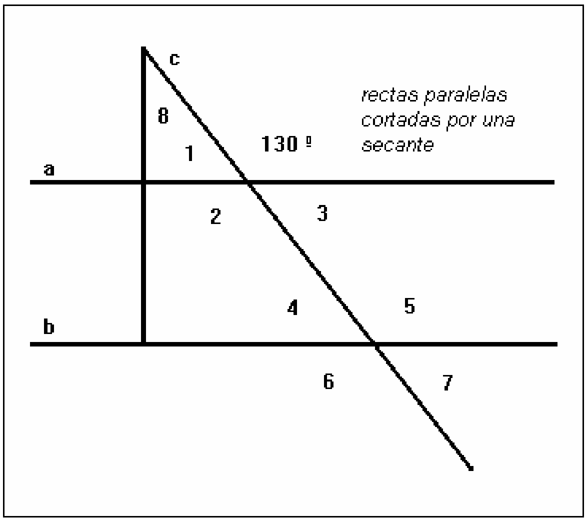
6.- Señala, explicando el por qué, si es verdadero o falso lo que se dice en cada apartado:

a) Para conocer la situación de una recta nos basta con dos puntos situados en ella.
b) Dos rectas perpendiculares determinan en el plano cuatro ángulos rectos.
c) Los segmentos se miden con un transportador.
d) Un ángulo llano tiene 180 grados centesimales.
e) Un ángulo cóncavo puede medir 85º.

7.- La recta 'b' es bisectriz de los segmentos 'OQ' y 'OR'. Averigua la amplitud del ángulo 'QOB'.




8.- Averigua la medida de los ángulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 de la figura siguiente.



# 8.5.- LOS POLÍGONOS.

- Un **polígono** es una figura plana limitada por una **línea poligonal cerrada.**
- Los segmentos de la línea poligonal se llaman **lados.**
- **Según el número de lados,** los polígonos se clasifican en :
  - Los de 3 lados → TRIÁNGULOS.
  - Los de 4 lados → CUADRILÁTEROS.
  - Los de 5 lados → PENTÁGONOS.
  - Los de 6 lados → HEXÁGONOS.
  - Los de 7 lados → HEPTÁGONOS.
  - Los de 8 lados → OCTÓGONOS.
  - Los de 9 lados → ENEÁGONOS.
  - Los de 10 lados → DECÁGONOS.
  - . . .

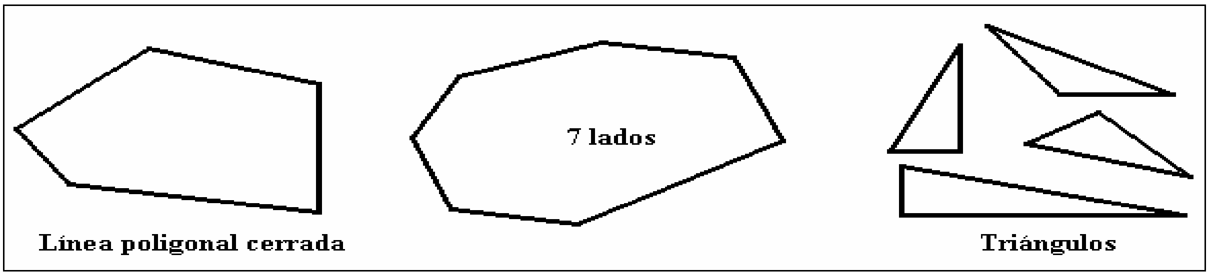
  **EXTRA .-** ¿ Cómo se llaman los polígonos de 12 lados ? ¿ Y los de 15 lados?

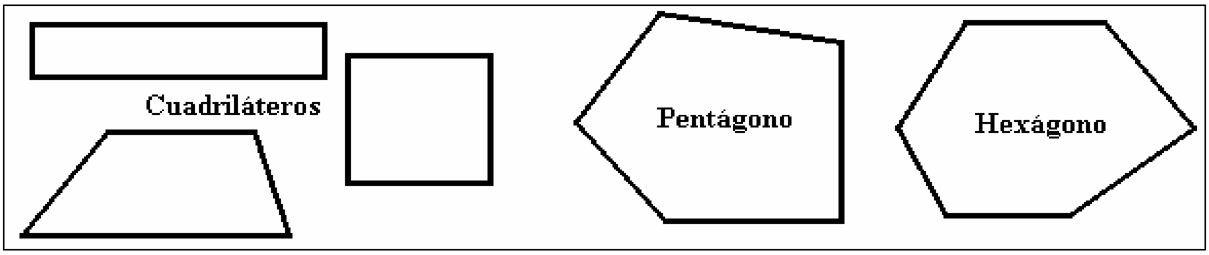
- **Según la longitud de sus lados,** los polígonos se clasifican en :
  - Los que tienen los lados iguales → ***REGULARES.***
  - Los que **no** tienen los lados iguales → ***IRREGULARES.***

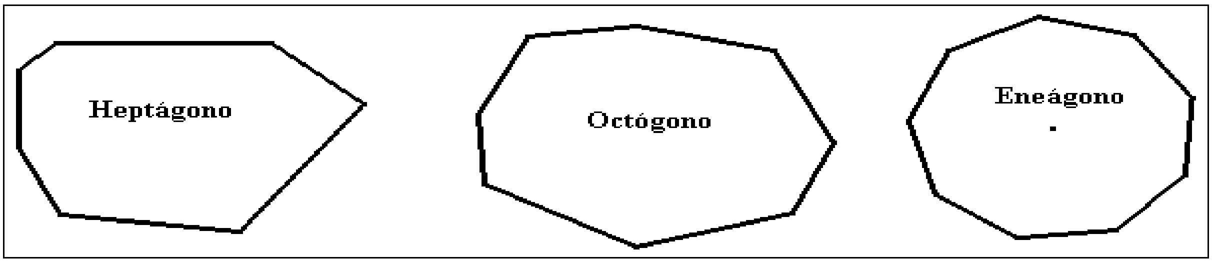
- **Según sus ángulos interiores,** los polígonos se clasifican en :
  - Los que tienen todos los **ángulos interiores convexos,** es decir, menores de 180 º → **CONVEXOS.**
  - Los que tienen **algún/os ángulo/s interior/es cóncavo/s**, es decir, mayor de 180 º → **CÓNCAVOS.**

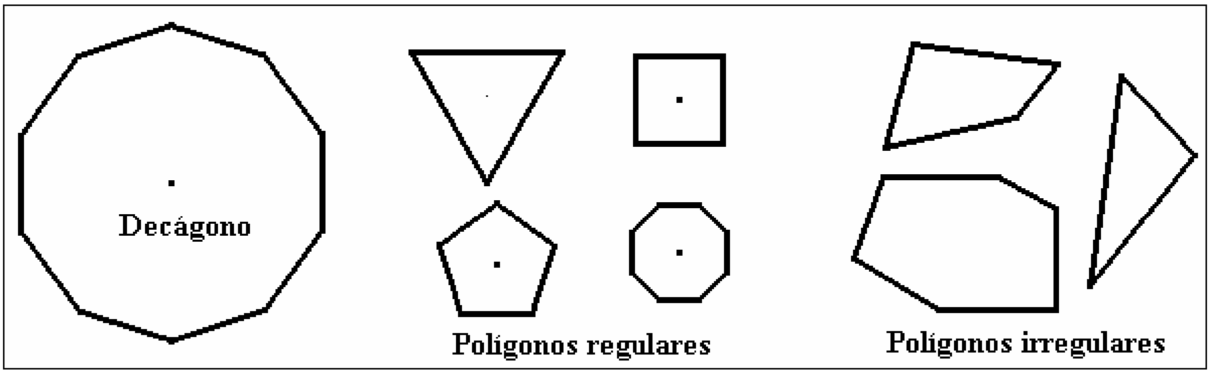
- En todos los polígonos hay que distinguir los siguientes **elementos** :
  - Los **ángulos.** Nos fijaremos en los interiores.
  - Los **vértices.**
  - Las **diagonales.** *(Menos en los triángulos)*
  - El **perímetro,** que es la suma de todos sus lados.

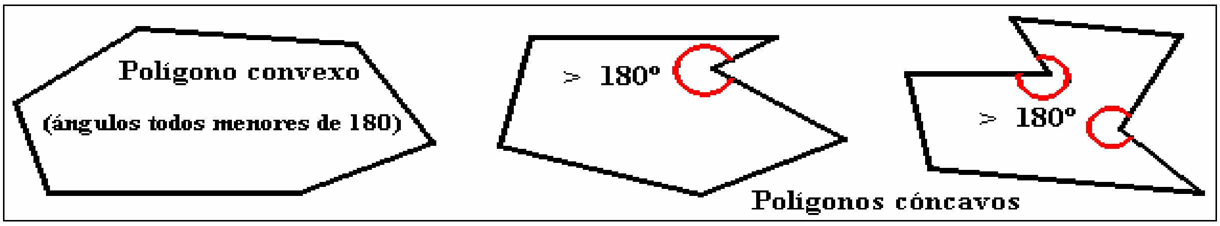
NOTA: *Ver la página siguiente, donde aparece dibujado todo lo explicado en esta página relativo a los polígonos.*

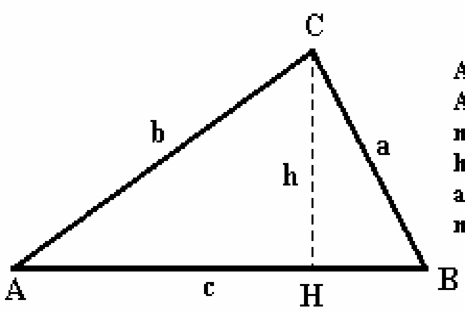


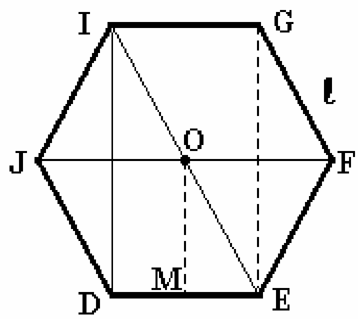




A, B, C --- ángulos --- D, E, F, G, I, J.
A, B, C --- vértices --- D, E, F, G, I, J.
no --- diagonales --- EI, DI, FJ, etc.
h = CH --- altura --- DI = EG
a + b + c --- perímetro --- 6 . FG
no --- apotema --- OM



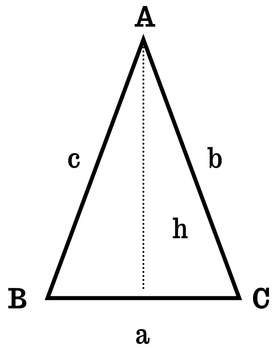
# 8.6.- LOS TRIÁNGULOS.

## 8.6.1.- Elementos de un triángulo.

- **LADOS** → $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} = b \\ \overline{CB} = a \\ \overline{BA} = c \end{array} \right.$

En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

- **ÁNGULOS** → $\left\{ \begin{array}{l} B\hat{A}C = \hat{A} \\ A\hat{B}C = \hat{B} \\ B\hat{C}A = \hat{C} \end{array} \right.$
- **ALTURA (S)** → h = $\overline{AH}$
- **BASE (S)** → lado a = $\overline{BC}$ .




Los vértices se suelen nombrar con letras mayúsculas, y los lados con letras minúsculas, teniendo en cuenta que cada lado se nombra con la letra minúscula que coincide con el vértice opuesto. Así, el lado "a" es el opuesto al vértice $\hat{A}$ .

El lado sobre el que se apoya el triángulo se llama base. En el dibujado, la base es el lado "a" = $\overline{BC}$ .

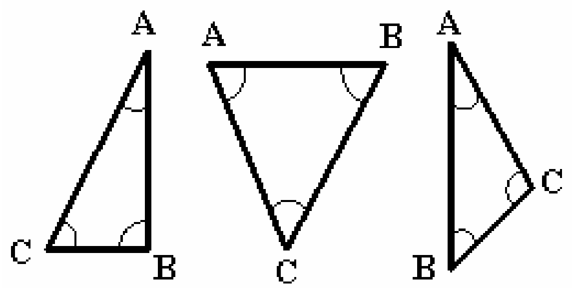
Altura de un triángulo es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto. La altura sobre el lado "a" es "h".

Debes tener en cuenta que un mismo triángulo se puede apoyar sobre cualquiera de sus tres lados, y así como el dibujado está apoyado en el lado "a", que es la base, pudiera apoyarse sobre los otros lados, que serían entonces su base. Lógicamente, si se apoya en los lados "b" o "c", la altura no sería la misma. *(Sólo tendría las mismas alturas si el triángulo fuera equilátero)*

## 8.6.2.- Suma de los ángulos de un triángulo.

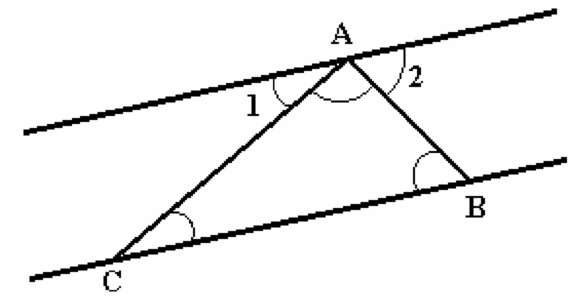
La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180 º. Es decir :

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ}$$




Veamos cómo se puede demostrar :

Tenemos el triángulo **ABC**. Trazamos, por uno de sus vértices, una paralela al lado opuesto a ese vértice. En nuestro caso, lo hacemos por el vértice $\hat{A}$ , y paralela al lado $\overline{BC}$ .




Observamos en el dibujo que los ángulos $\hat{1} + \hat{A} + \hat{2} = 180^\circ$ (ángulo llano)

Y como $\hat{1} = \hat{C}$ y $\hat{2} = \hat{B}$ , por ser ángulos alternos internos, pues queda demostrado que:

$$\boxed{\hat{C} + \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ}$$

EXTRA.- A quien se le ocurra una manera manipulativa de demostrarlo, se ganará unas notas, dependiendo de la ocurrencia y de la forma de explicarlo.

# 8.6.3.- Clasificación de los triángulos.

❒ *Según sus lados, los triángulos se clasifican en :*

➠ Triángulo **EQUILÁTERO**, el que tiene los tres lados iguales. *( Ver figura )*

➠ Triángulo **ISÓSCELES**, el que tiene dos lados iguales y uno desigual. *( Ver figura )*

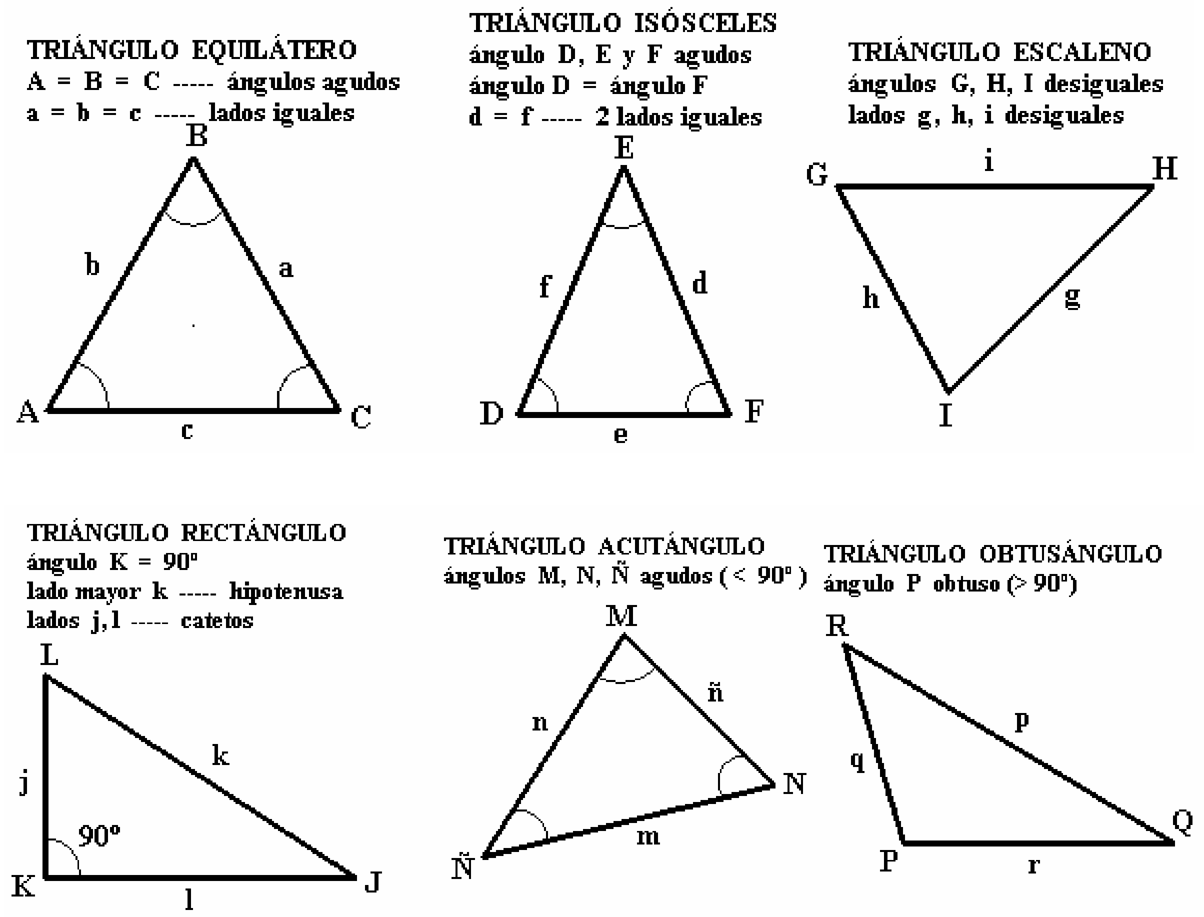
➠ Triángulo **ESCALENO**, el que tiene sus tres lados desiguales. *( Ver figura )*

❒ *Según sus ángulos. los triángulos se clasifican en :*

➠ Triángulo **RECTÁNGULO**, el que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 º. *( Ver figura )*

➠ Triángulo **ACUTÁNGULO**, el que tiene los tres ángulos agudos. *( Ver figura )*

➠ Triángulo **OBTUSÁNGULO**, el que tiene un ángulo obtuso, o sea, uno mayor de 90 º. *( Ver figura )*



## 8.6.4.- Igualdad de triángulos.

Dos triángulos son iguales si al superponerlos coinciden.

Para saber si dos triángulos son iguales no es necesario comprobar que todos sus elementos son iguales, basta que se cumpla cualquiera de estos tres casos:

a) *Que tengan los tres lados iguales.*
b) *Que tengan dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos.*
c) *Que tengan un lado igual y también sean iguales sus ángulos contiguos.*

REPETIMOS: *en todos los triángulos se debe cumplir que cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

EXTRA.- ¿Son siempre iguales dos triángulos que tengan sus tres ángulos iguales? Ayúdate de un dibujo y explícalo.

## 8.6.5.- Rectas y puntos notables en un triángulo.

Las rectas notables de los triángulos son: ***altura, mediatriz, bisectriz y mediana.***

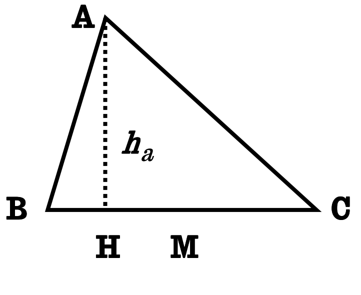
Los puntos notables de los triángulos son: ***ortocentro, circuncentro, incentro y baricentro.***

Veamos qué es cada recta y cómo se obtienen los puntos notables:

### ALTURA

Es la perpendicular desde cada vértice a su lado opuesto. Hay tres alturas, que llamaremos $h_a$, $h_b$ y $h_c$.

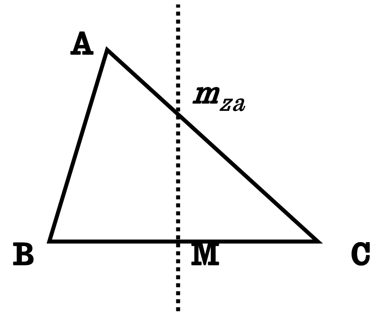
En la figura vemos la altura sobre el lado "a" = $\overline{BC}$ (base).




### MEDIATRIZ

Es la perpendicular a un lado en su punto medio. Hay tres mediatrices. Las llamaremos $m_{za}$, $m_{zb}$, $m_{zc}$.

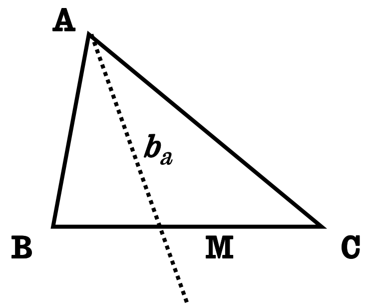
Aquí vemos la mediana sobre el lado "a" ($\overline{BC}$, la base), que es $m_{za}$. El punto medio de $\overline{BC}$ es M.




### BISECTRIZ

Es la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales. Hay tres bisectrices, que llamaremos $b_a$, $b_b$ y $b_c$.

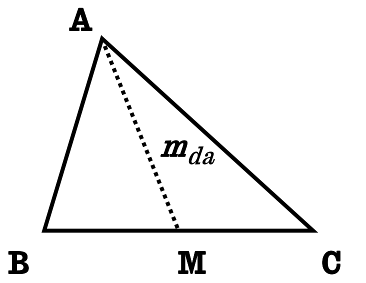
Aquí vemos la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.




### MEDIANA

Es el segmento que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Hay tres medianas. Las llamaremos $m_{da}$, $m_{db}$, $m_{dc}$.

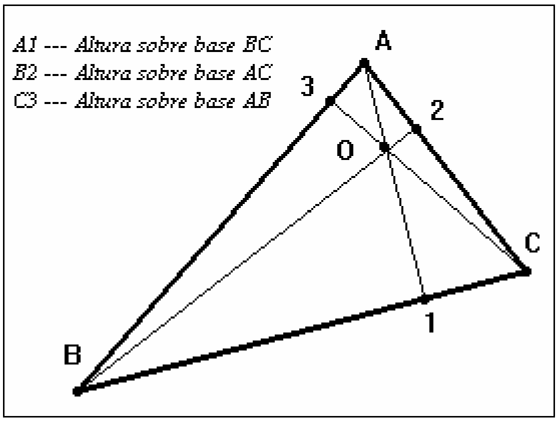
Aquí vemos la mediana sobre el lado "a" ($\overline{BC}$, la base ), que es $m_{da}$. El punto medio de $\overline{BC}$ es M.



Ahora veremos cuáles son las puntos notables de los triángulos:

## ORTOCENTRO

Si dibujamos las tres ***alturas*** de un triángulo cualquiera, observaremos que se cortan en un mismo punto. A ese punto O se le llama **ORTOCENTRO.**

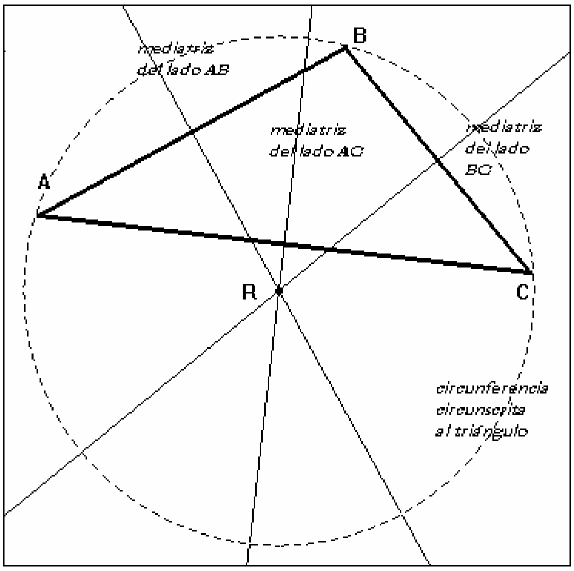



## CIRCUNCENTRO

Las ***mediatrices*** de todos los triángulos se cortan en un mismo punto llamado **CIRCUNCENTRO.**

El punto R (circuncentro) equidista de los vértices del triángulo, es decir, que hay la misma distancia desde el punto 0 hasta cada uno de los vértices A, B y C.

El circuncentro es el ***centro de la circunferencia CIRCUNSCRITA*** a ese triángulo, o sea, a la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

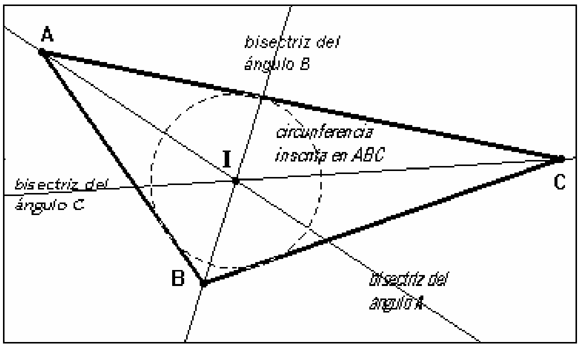



## INCENTRO

Al trazar las tres ***bisectrices*** de un triángulo veremos que se cortan en un mismo punto, que llamaremos **INCENTRO.**

El punto I (incentro) equidista de los tres lados del triángulo. Es decir, que hay las misma distancia del punto O a cada uno de los lados. *(Recuerda que la distancia de un punto a una recta es la perpendicular del punto a la recta)*

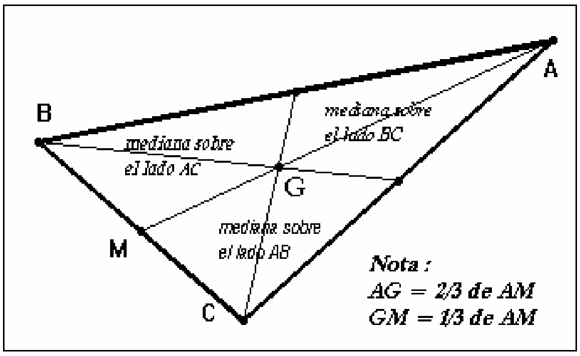
El incentro es el ***centro de la circunferencia inscrita*** al triángulo, o sea, de la circunferencia interior que tiene a cada lado como tangente.




## BARICENTRO

Las tres ***medianas*** de cualquier triángulo se cortan siempre en un mismo punto, el punto G, llamado **BARICENTRO.**

Comprueba que desde el baricentro (G) al punto medio de cada lado hay la mitad de la distancia que al vértice opuesto.




| RECTAS | | PUNTOS |
|---|---|---|
| Alturas | ① | Ortocentro |
| Mediatrices | ① | Circuncentro |
| Bisetrices | ① | Incentro |
| Medianas | ① | Baricentro |
| Regla nemotécnica: ALOR - METRICI - BIN - MENABA. | | |
| ALOR (**al**tura-**or**tocentro) ; METRICI (**me**dia**tri**z-**ci**rcuncentro) | | |
| BIN (**bi**sectriz-**in**centro) ; MENABA (**me**dia**na**-**ba**ricentro) | | |

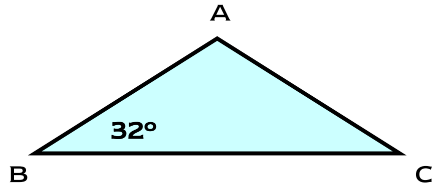
# Ejercicios, actividades y cuestiones sobre triángulos

***NOTA:*** *Todas las líneas y figuras deben estar realizadas con regla, escuadra o cartabón.*

1.- ¿Cómo se llama el lado sobre el que se supone descansa un triángulo?

2.- Dibuja un triángulo escaleno-rectángulo y nombras a todos sus elementos correctamente.

3.- Averigua, sin transportador, cuántos grados sexagesimales miden los ángulos de este triángulo isósceles :




4.- Para dibujar un triángulo determinado me dan la medida de sus tres ángulos. ¿Es posible hacerlo con exactitud? Explícalo ayudándote de un dibujo.

5.- Dibuja un triángulo equilátero y sus tres alturas, mediatrices, bisectrices y medianas. ¿Qué sucede?

6.- Dibuja los siguientes triángulos:
a) Isósceles-rectángulo.
b) Escaleno-obtusángulo.
Después, en el primero dibujas su ortocentro y baricentro, y en el segundo su circuncentro e incentro.

7.- Agapito, alumno de 1º de ESO, mide con su transportador de ángulos una figura triangular y obtiene los siguientes resultados:

$\hat{A} = 65^\circ$ , $\hat{B} = 38^\circ$ , $\hat{C} = 59^\circ$ .

¿Qué tienes que decir al respecto?

8.- Dibuja en tu cuaderno una circunferencia de diámetro 8 cm. Después, trazas un triángulo inscrito en ella. Por último, traza las mediatrices de los lados del triángulo. ¿Qué descubres? ¿Cómo se llama ese punto?

9.- Bibiana tiene los siguientes datos:
- Se trata de un triángulo isósceles.
- Un lado mide 10 cm y otro 6 cm.

¿Cuántos triángulos puede dibujar que cumplan esos datos? Explícalo y haz los dibujos.

10.- Calixto, al realizar la medición de los ángulos de un triángulo obtusángulo, obtiene las siguientes medidas:

$\hat{A} = 88^\circ$ , $\hat{B} = 50^\circ$ , $\hat{C} = 42^\circ$ .

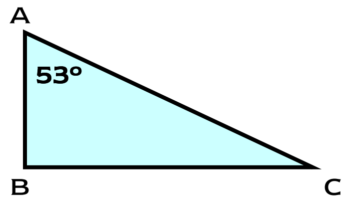
¿Qué se te ocurre comentar?

11.- Dibuja un triángulo con las siguientes medidas:
a= 9 cm , b = 6 cm , c = 12 cm .

12.- Dibuja los siguientes triángulos:
a) Equilátero-obtusángulo. (i)
b) Rectángulo-escaleno.
c) Isósceles-acutángulo.
d) Rectángulo-equilátero. (i)
e) Escaleno-obtusángulo.

13.- Heriberto dice que sabiendo solamente que un triángulo es isósceles-rectángulo ya le es suficiente para saber la medida de sus tres ángulos. ¿Es verdad? Explícalo y haz un dibujo.

14.- ¿ Cuánto mide el ángulo $\hat{C}$ ?




15.- ¿Qué harías para dibujar una circunferencia inscrita en un triángulo? Recuerda que inscrita quiere decir que es tangente a sus lados, y que tangente quiere decir que toca solamente en un punto.

16.- Hortensia, alumna poco trabajadora de 2º de ESO, escribe en su cuaderno los siguientes datos:

Datos del triángulo $\begin{cases} \text{Lados : } A = 8 \text{ cm}, \ B = 10 \text{ cm}, \ C = 6 \text{ cm}. \\ \text{Ángulos : } a = 40^\circ, \ b = 90^\circ, \ c = 50^\circ. \end{cases}$

¿Qué se te ocurre comentar de estas anotaciones?

17.- Señala si es verdadero o falso en cada apartado, pero explicando el por qué:
a) Los triángulos tienen sólo una altura.
b) Yo puedo dibujar un triángulo cuyos lados midan 11, 4 y 6 cm.
c) Dos triángulos son iguales si tienen sus tres ángulos iguales.
d) Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60 º.
e) Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro.
f) El punto donde se cortan las bisectrices de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita.
g) Si un triángulo tiene unos lados muy largos, sus tres ángulos sumados pueden llegar a medir hasta 200 º.

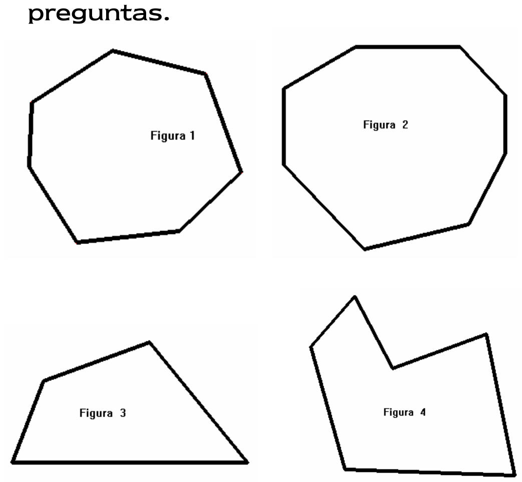
# Continuación de ejercicios sobre triángulos y polígonos.

***NOTA**: Todas las líneas y figuras deben estar realizadas con regla, escuadra o cartabón.*

18.- Dibuja un triángulo cuyos lados midan 4’5 cm, 6 cm y 7’5 cm.

a) Clasifícalo según sus lados y según sus ángulos.
b) Calcula su perímetro en metros.
c) Ponle nombres a sus ángulos y a sus vértices.
d) Traza la mediatriz del lado mayor.
e) Dibuja la bisectriz del ángulo menor.
f) ¿Sabes cómo se llama a cada uno de los lados de todos los triángulos que tienen la misma clasificación que éste según sus ángulos?
g) Con el transportador de ángulos, mide sus tres ángulos.
h) Según la medida de cada ángulo, ¿cómo se llama a cada uno de ellos?
i) ¿Cuántos ángulos cóncavos hay en el triángulo? (i)
j) ¿La figura que has dibujado es un polígono?

19.- Dibuja las siguientes figuras en tu cuaderno, de forma aproximada, y después contestas a las siguientes preguntas.

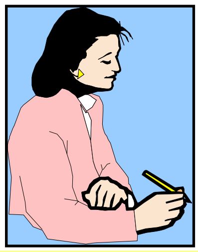



a) ¿Cómo se llaman cada una de las siguientes figuras exactamente?
b) Dibuja tres diagonales en cada una de ellas. (i)
c) ¿Miden lo mismo las apotemas de la figura nº 1?
d) ¿Qué figura tiene algún ángulo cóncavo? ¿Por qué?
e) ¿Cuántos grados sexagesimales miden la suma de todos los ángulos de cada una de las figuras? ¿Y cuántos grados centesimales?
f) Realiza, dibujándola, la triangulación de cada figura desde el vértice más alto de cada una.
g) Una algo más complicada. ¿Cuántas diagonales se podrían dibujar en cada una de las figuras?
h) ¿Cuál de las figuras dibujadas es regular?
i) Ayudándote del transportador de ángulos, averigua cuánto mide el ángulo mayor de cada una de las figuras.
j) Si has realizado el apartado anterior, ¿estas seguro de que ésos son los ángulos mayores de esas figuras? ¿Sí o no? Seguro que dirás sí, pero tú has averiguado los mayores interiores. ¿Cuáles serían los mayores ángulos exteriores?

----------------------------------------------------------

**<u>Responsabilidad</u>: obligación de responder de una cosa. Capacidad para responder de ciertos actos.**

**Todos oímos alguna que otra vez decir lo siguiente de alguien: “Es una persona muy responsable”. O también esto otro: “Es un irresponsable”. Así, en general, decimos que una persona es responsable cuando cumple bien con su deber. Por ello, al estudiante que estudia, y bien, al albañil que hace bien su trabajo, al comerciante que sabe vender, el juez que juzga “con venda”, el político que cumple, etc., las catalogamos como responsables. Y al médico que no actúa con dignidad profesional, o al político que se sirve de la política para sus intereses, o al padre que no dedica el tiempo necesario a sus hijos y esposa, etc., los señalamos como personas irresponsables.**



**<u>Ser responsable es aceptar el papel que nos ha tocado o nos han dado, hacerlo de la mejor manera que uno puede y sentirse orgulloso de su actuación sin pensar que su trabajo ha sido una carga para él.</u> Por eso, la responsabilidad lleva implícita una motivación por realizar bien su trabajo, el cumplir los objetivos propuestos, ejercer su papel con eficacia y confianza y sentir, después, la impagable satisfacción del deber cumplido.**

**<u>La persona que es responsable no se cansa a las primeras de cambio, sino que lucha y persiste en sus propósitos,</u> y <u>necesita siempre de un gran esfuerzo, por ello no es nada fácil</u>. Ser responsable va íntimamente ligado a la madurez de la persona, de ahí que todos tenemos siempre mucha confianza en las personas de nuestro alrededor que son responsables. Y así ellas cada día se sienten más responsables y más queridas.**

**¿<u>Qué grado de responsabilidad tienes tú en tu vida</u>?**

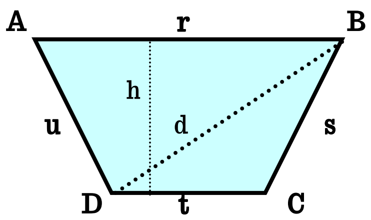
# 8.7.- LOS CUADRILÁTEROS.

## 8.7.1.- Elementos de los cuadriláteros.

Como ya sabes, los cuadriláteros son polígonos que tienen cuatro lados.

Los elementos de todo cuadrilátero son:

- **LADOS** → r, s, t, u.
- **ÁNGULOS** → $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$.
- **ALTURA** → h
- **BASE** → lado t = $\overline{DC}$
- **DIAGONAL** → segmento d = $\overline{DB}$




Los vértices se suelen nombrar con letras mayúsculas, y los lados con letras minúsculas.

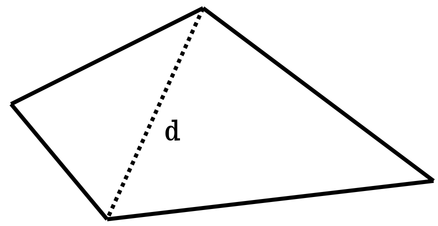
El lado sobre el que se apoya el cuadrilátero se llama base. En el dibujado, la base es el lado "t" = $\overline{DC}$.

Altura de un cuadrilátero es la perpendicular trazada desde el lado superior a la base. Si los lados no son paralelos, se traza la perpendicular desde el vértice más alto a la base. La altura del anterior, tal y como está dibujado, es "h".

Debes tener en cuenta que un mismo cuadrilátero se puede apoyar sobre cualquiera de sus cuatro lados, y así como el dibujado está apoyado en el lado $\overline{DC}$, que es la base, pudiera apoyarse sobre los otros lados, que serían entonces su base. Lógicamente, si se apoya en otros lados, la altura puede variar su medida. *(Sólo tendría las mismas alturas si el cuadrilátero dibujado fuera un cuadrado)*

## 8.7.2.- Suma de los ángulos de los cuadriláteros.

La suma de los cuatro ángulos de ***todos*** los cuadriláteros es siempre 360º.




Como puedes observar, cualquier cuadrilátero se puede dividir, mediante una diagonal (d), en dos triángulos. Luego ***la suma de todos sus ángulos será siempre de 360º*** (180º de un triángulo y 180º del otro).

❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑❑

**NOTA**:

*Todos los dibujos que realices, como ya sabes, deben estar hechos con regla, escuadra o cartabón. Si no lo haces así, no te puntuará nada aquellos que resuelvas correctamente.*

EXTRA nº 1.- Dibuja un triángulo en el que al dibujar la altura ésta no quede en el interior del triángulo.

EXTRA nº 2.- Dibuja un cuadrilátero que sólo tenga una diagonal. ( ¡ )

EXTRA nº 3.- ¿Es posible que la longitud de la altura de un cuadrilátero sea mayor que cualquiera de sus cuatro lados? Si la respuesta es afirmativa, dibuja un cuadrilátero que cumpla dicha condición. Y si es negativa, explícalo razonadamente.

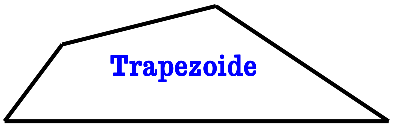
EXTRA nº 4.- Dibuja un cuadrilátero que tenga tres ángulos agudos.

EXTRA nº 5.- Dibuja un cuadrilátero que tenga tres ángulos obtusos.

## 8.7.3.- Clasificación de los cuadriláteros.

⊗ Cuadriláteros que tienen sus lados paralelos:
**PARALELOGRAMOS**
⊗ Cuadriláteros que sólo tienen dos de sus lados paralelos:
**TRAPECIOS**
⊗ Cuadriláteros que no tienen lados papalelos:
**TRAPEZOIDES**

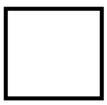





### *Clases de Paralelogramos:*

- **CUADRADO.**

Tiene {
4 lados iguales.
4 ángulos rectos.
2 diagonales iguales.
Es un cuadrilátero regular.

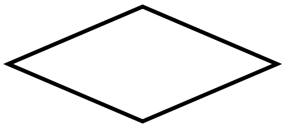


- **RECTÁNGULO.**

Tiene {
4 lados, iguales dos a dos.
4 ángulos rectos.
2 diagonales iguales.
Es un cuadrilátero irregular.

- **ROMBO.**
-

Tiene {
4 lados iguales.
4 ángulos (2 agudos y 2 obtusos).
2 diagonales desiguales.
Es un cuadrilátero regular.



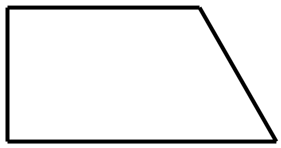
- **ROMBOIDE.**

Tiene {
4 lados, iguales dos a dos.
4 ángulos (2 agudos y 2 obtusos).
2 diagonales desiguales.
Es un cuadrilátero irregular.

### *Clase de Trapecios:*

- **TRAPECIO RECTÁNGULO.**

Tiene {
4 lados desiguales.
4 ángulos, dos de ellos rectos.
2 diagonales desiguales.
Es un cuadrilátero irregular.

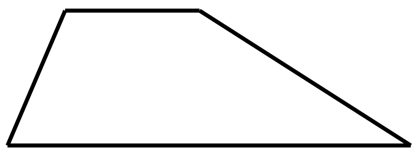


- **TRAPECIO ISÓSCELES.**

Tiene {
4 lados, dos de ellos iguales.
4 ángulos (2 agudos y 2 obtusos).
2 diagonales iguales.
Es un cuadrilátero irregular.

- **TRAPECIO ESCALENO.**

Tiene {
4 lados desiguales.
4 ángulos (2 agudos y 2 obtusos).
2 diagonales desiguales.
Es un cuadrilátero irregular.



# 8.8.- POLÍGONOS DE MÁS DE 4 LADOS.

## 8.8.1.- Clasificación.

- Según el número de lados.

| | | |
|---|---|---|
| * PENTÁGONO | → | 5 lados. |
| * HEXÁGONO | → | 6 lados. |
| * HEPTÁGONO | → | 7 lados. |
| * OCTÓGONO | → | 8 lados. |
| * ENEÁGONO | → | 9 lados. |
| * DECÁGONO | → | 10 lados. |
| * . . . | | |

- Según la longitud de sus lados.

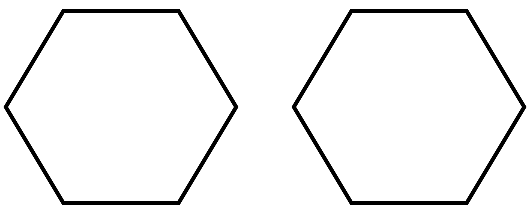
* Polígonos **REGULARES** son los que tienen todos sus lados y ángulos iguales.
* Polígonos **IRREGULARES** son los que no tienen todos sus lados y ángulos iguales.

## 8.8.2.- Fórmula para calcular el número de diagonales de un polígono cualquiera.

De cada uno de los vértices de cualquier polígono salen tantas diagonales como vértices hay menos tres, ya que hay que restar el vértice desde donde sale y los dos próximos. Pero también hay que tener en cuenta que cada diagonal la contamos dos veces, una por cada vértice de los que sale. De ello se deduce que hay que restar tres al nº de vértices (o lados), multiplicar por el nº de lados y dividir por dos. Así, la fórmula para calcular las diagonales de cualquier polígono es la siguiente:

$$\text{Nº de diagonales} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

*Siendo "n" el número de lados.*

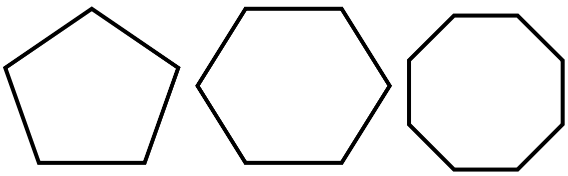


Como vemos, en un hexágono hay tres diagonales por cada vértice, y en total hay nueve. Aplicando la fórmula sería así:

$$\text{Nº de diagonales} = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = \boldsymbol{9}$$

## 8.8.3.- Suma de los ángulos de un polígono.

Si por cada vértice de un polígono se pueden trazar tantas diagonales como vértices menos tres, o sea, "n – 3" *(n = nº de lados o vértices)* podemos observar claramente (ver las figuras) que esas diagonales trazadas desde un solo vértice dividen a cada polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos.



- En el pentágono → n – 2= 5 – 2 = ***3 triángulos***
- En el hexágono → n – 2 = 6 – 2 = ***4 triángulos***
- En el octógono → n – 2 = 8 – 2 = ***6 triángulos***

Ya sabemos que los ángulos de un triángulo suman 180 º, luego en un polígono la suma de los ángulos será la del nº de triángulos en que se descomponga por 180º.

La fórmula para calcular la suma de los ángulos de cualquier polígono es:

$$\text{Suma de los ángulos de un polígono} = 180^\circ \cdot (n - 2)$$

*Siendo "n" el número de lados.*

Calculemos los de las figuras anteriores:

- <u>En el pentágono</u> :

→ 180 . (n – 2) = 180 . (5 – 2) = 180 . 3 = ***540 º***

- <u>En el hexágono</u> :

→ 180 . (n – 2) = 180 . (6 – 2) = 180 . 4 = ***720 º***

- <u>En el octógono</u> :

→ 180 . (n – 2)= 180 . (8 – 2) =180 . 6 = ***1080 º***

## 8.8.4.- Elementos de los polígonos regulares.

Como ya sabemos, son polígonos regulares aquellos que tienen todos sus lados y ángulos iguales. Entre sus elementos podemos señalar los siguientes:

- **PERÍMETRO** de cualquier polígono regular es la suma de la longitud de todos sus lados.

- **CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA** *(alrededor de)* de un polígono regular es la circunferencia que tiene como centro ( 0 ) el centro del polígono y que pasa por todos sus vértices. En este caso, el polígono está inscrito en ella.

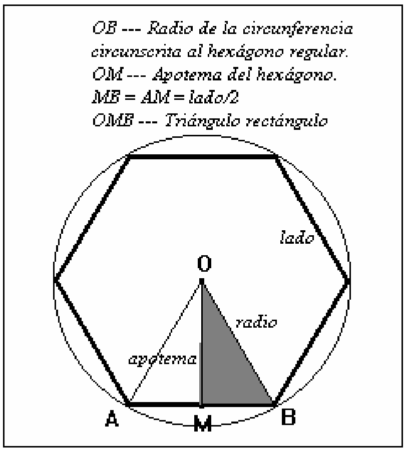
- **RADIO** ( r ) de un polígono regular es el radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono.

- **CIRCUNFERENCIA INSCRITA** *(en el interior)* de un polígono regular es la que es tangente en el punto medio de cada lado y tiene como centro ( **O** ) el mismo que el polígono. En este caso, el polígono está circunscrito a ella.

- **APOTEMA** ( $a_p$ ) de un polígono regular es el segmento perpendicular trazado desde el centro ( **O** ) al punto medio de un lado cualquiera. La apotema es el radio de la circunferencia inscrita al polígono. Lógicamente, todas las apotemas de un polígono regular tienen la misma longitud, y hay tantas apotemas como lados.

- **ÁNGULO CENTRAL** ( α ) de un polígono regular es el que tiene como lados dos radios consecutivos. Su valor se calcula dividiendo 360º entre el número de lados.

$$\alpha = \frac{360^{o}}{n} \rightarrow \text{"n" es el número de lados}$$



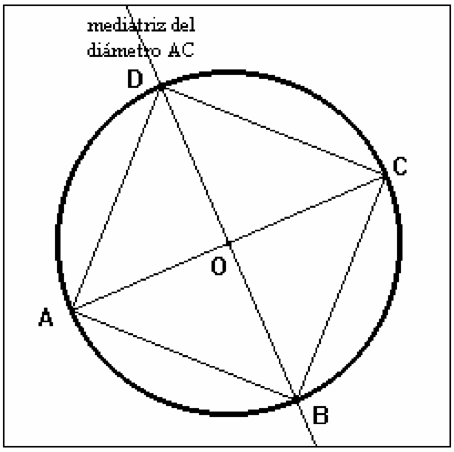

Se puede observar que el radio ( r ), la apotema ( $a_p$ ) y la mitad del lado ( $\ell / 2$ ) al que toca forman un triángulo rectángulo (zona sombreada) en el que es posible aplicar el teorema de Pitágoras, como ya veremos temas próximos.

## 8.8.5.- Construcción de polígonos regulares.

Para construir algunos de los polígonos regulares más conocidos y sencillos lo podemos hacer con una regla y un compás.

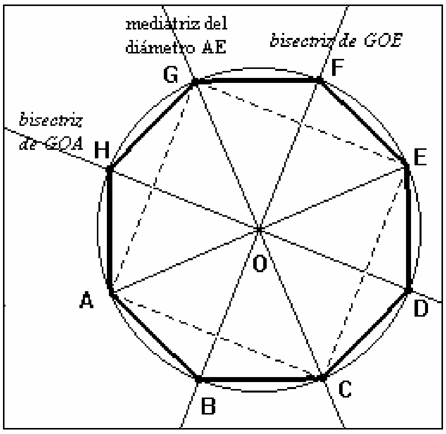
**EL CUADRADO :** *( ver dibujo )*

1º) Trazamos una circunferencia.
2º) Con una regla trazamos cualquier diámetro. (Recuerda que debe pasar por el centro).
3º) Trazamos la mediatriz de ese diámetro.
4º) Prolongamos la mediatriz hasta que corte a la circunferencia.
5º) Uniendo los cuatro puntos de corte de los dos diámetros con la circunferencia hemos construido el cuadrado.



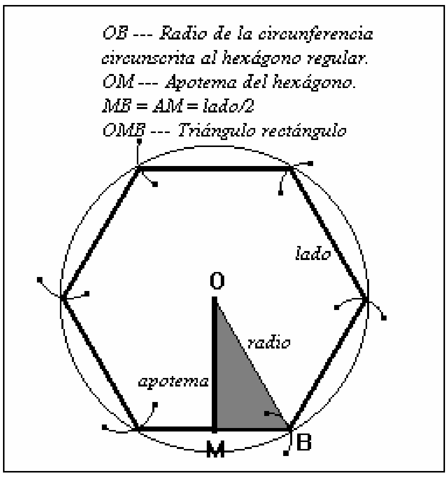
## EL OCTÓGONO REGULAR : *( ver dibujo )*

Seguimos los pasos descritos para la construcción de un cuadrado, y en lugar de unir los cuatro puntos obtenidos en la circunferencia trazamos las bisectrices de los cuatro ángulos centrales que se forman. De esa forma la circunferencia quedará dividida en ocho partes iguales, con lo que uniendo esos ocho puntos de corte quedará construido el octógono regular.



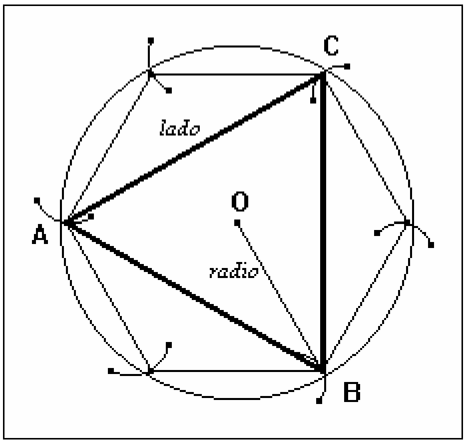

## EL HEXÁGONO REGULAR : *(ver dibujo)*

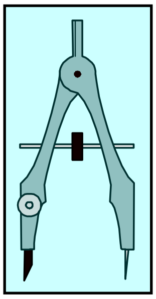
1º) Con un radio cualquiera, dependiendo de lo mayor o menor que queramos, se traza una circunferencia.
2º) Marcamos un punto cualquiera de la circunferencia, y desde él marcamos una cuerda –con la misma abertura del compás– igual al radio.
3º) Una vez obtenidos esos dos puntos en la circunferencia, vamos colocando la punta del compás en el punto obtenido y marcamos otro, y así hasta tener los seis vértices del hexágono regular.

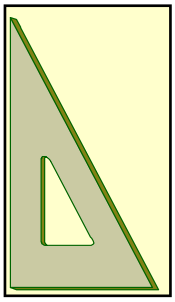



## EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO : *(ver dibujo)*

Seguimos todos los pasos descritos para el hexágono regular, pero en lugar de unir los seis puntos obtenidos sólo unimos tres, quedando uno en medio de cada dos unidos. Y tendremos así construido un triángulo equilátero.



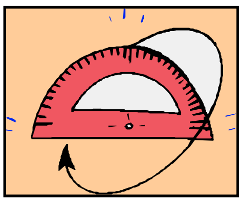



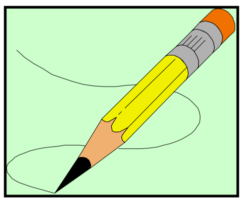


**EXTRA nº 1.-** ¿Es posible dibujar un trapezoide que tenga dos ángulos obtusos y uno recto? Razona la respuesta, y si fuera posible, dibuja uno.

**EXTRA nº 2.-** Con una regla, escuadra o cartabón, dibuja un eneágono irregular cóncavo.

**EXTRA nº 3.-** ¿Qué método se te ocurre para poder construir (dibujar) un polígono regular que no sea el cuadrado, hexágono u octógono?





# Ejercicios, actividades y cuestiones sobre polígonos de más de tres lados.

***NOTA:*** *Todas las líneas y figuras deben estar realizadas con regla, escuadra o cartabón.*

1.- Realiza un esquema de los cuadriláteros.

2.- Se sabe que un rombo tiene 172 mm. Averigua cuántos cm mide su lado.

3.- Dibuja un romboide cuya altura mida más que el lado mayor.

4.- Dibuja una rectángulo y un trapecio rectángulo, de tal forma que la suma de los ángulos del 1º no sea igual a la suma de los del 2º. ( ¡ )

5.- Utilizando regla, compás y transportador de ángulos, dibuja un pentágono regular, su circunferencia circunscrita, su radio, su circunferencia inscrita y su apotema. *( Daré una buena nota a las tres mejores presentaciones de este ejercicio en la clase )*

6.- ¿Cuánto suman los ángulos de un paralelogramo? Dibuja uno de cada clase.

7.- Realiza la construcción de un octógono regular cuyo radio de la circunferencia circunscrita mida 6 cm. Después intenta dibujar todas sus diagonales. Y cuando termines, averigua mediante la fórmula correspondiente si las has dibujado todas o te falta alguna. ¿Cuántas son en total?

8.- ¿Cuántos grados miden los ángulos de un heptágono irregular? Dibuja uno y realiza su triangulación. ¿Cuántos triángulos se obtienen de ella?

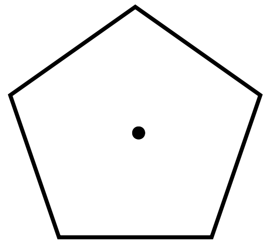
9.- Utilizando el transportador, dibuja un trapecio isósceles en el que uno de los ángulos agudos sea de 60º. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?

10.- Dibuja un rectángulo de perímetro 42 cm y de base 16 cm. Después, en su interior, y con buena letra, escribes una de las frases del libro Matyval I que más te haya impactado, gustado o servido. *( Daré una buena nota a las cinco mejores presentaciones de este ejercicio que haya en la clase )*

11.- Uno más dificilillo. Si se sabe que los ángulos de un polígono regular suman 16 rectos, ¿de qué polígono se trata?

12.- Dibuja un hexágono regular y tres de sus apotemas, de tal forma que los dos ángulos que forman la del medio con las otras dos apotemas uno sea agudo y otro obtuso.

13.- Calcula la medida de los ángulos exteriores de este pentágono:



14.- Señala si lo que se dice en cada apartado es verdadero o falso, explicando el por qué.

a) Todos los cuadriláteros tienen sus lados paralelos.

b) Un trapezoide puede tener uno de sus ángulos recto.

c) La apotema de un octógono regular es el radio de su circunferencia circunscrita.

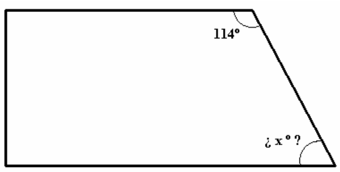
d) El ángulo central de un pentágono regular es de 60º.

e) El perímetro de un hexágono regular es de 25 cm.

f) El lado de un hexágono regular mide lo mismo que el radio de su circunferencia circunscrita.

g) En un decágono irregular se pueden dibujar 35 diagonales.

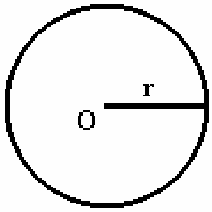
15.- ¿Cómo se llama el siguiente cuadrilátero dibujado? Averigua la medida del ángulo señalado.



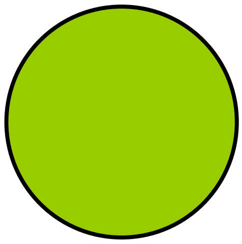
# 8.9.- CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO.

## 8.9.1.- Definiciones.

- **CIRCUNFERENCIA** es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos equidistan de uno interior llamado centro.




- **CÍRCULO** es la parte del plano limitada por una circunferencia.



Hay bastantes alumnos que confunden los conceptos de circunferencia y círculo. La *circunferencia* es el ***BORDE*** y el *círculo* es el ***INTERIOR***. O sea, la *circunferencia* es la *línea de fuera* y el *círculo* es la *superficie de dentro.* Para que no te equivoques, recuerda lo siguiente: la circunferencia es el borde del vaso, por donde bebes, y el círculo la base *(el "culo" donde se asienta)* .

## 8.9.2.- Sus elementos o partes.

- **DE LA CIRCUNFERENCIA :**

***El CENTRO*** *(O )* es el punto interior de la circunferencia del cual equidistan todos sus puntos.

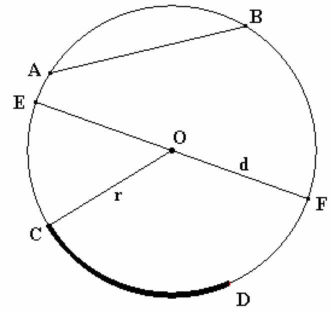
***El RADIO*** *(r)* es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

***El DIÁMETRO*** *(d)* es el segmento que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia y pasa por el centro.

***La CUERDA*** *( AB )* es el segmento que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

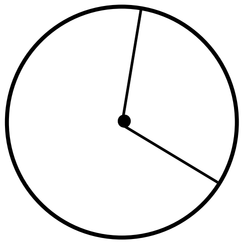
***El ARCO*** *( CD )* es la parte de la circunferencia limitada por una cuerda.

***La SEMICIRCUNFERENCIA*** *( EF )* es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

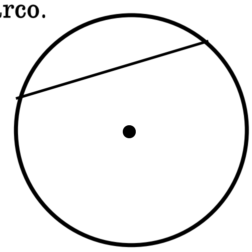



- **DEL CÍRCULO :**

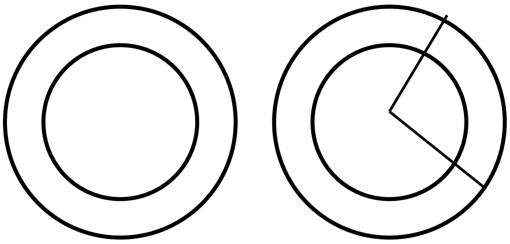
**El sector circular :**
Es la parte del círculo limitada por un arco de circunferencia y sus dos radios.



**El segmento circular :**
Es la parte del círculo limitada por una cuerda y su arco.



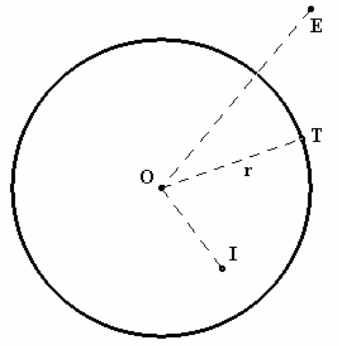
**La corona y el trapecio circular :**
Corona circular es la parte del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.
Trapecio circular es la diferencia entre las áreas de dos sectores circulares.



## 8.9.3.- Posiciones relativas de :

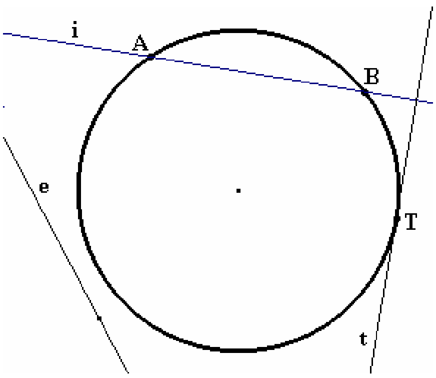
### a) Puntos y circunferencia.

- **PUNTO EXTERIOR** a ella. Como el ***punto E***, cuya distancia al centro (O) de la circunferencia es mayor que el radio (r).
- **PUNTO TANGENTE** a ella. Como el ***punto T***, cuya distancia al centro (O) de la circunferencia es igual al radio (r). Este punto **T** pertenece a la circunferencia.
- **PUNTO INTERIOR** a ella. Como el ***punto I***, cuya distancia al centro (O) de la circunferencia es menor que el radio (r).




### b) Rectas y circunferencia.

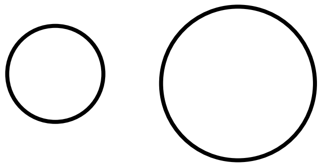
- **RECTA EXTERIOR** a ella. Como la ***recta e***, que no tiene ningún punto en común con la circunferencia.
- **RECTA TANGENTE** a ella. Como la ***recta t***, que tiene un punto (T) en común con la circunferencia.
- **RECTA INTERIOR** a ella. Como la ***recta i***, que tiene dos puntos (A y B) en común con la circunferencia.



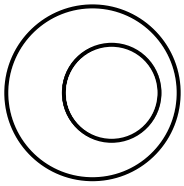

### c) Dos circunferencias.

*Sin puntos comunes :*

- **CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES**. Todos los puntos de cada una de ellas son exteriores a la otra.

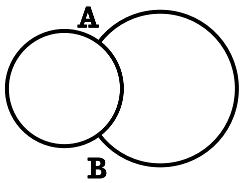


- **CIRCUNFERENCIAS INTERIORES**. Todos los puntos de cada una de ellas son interiores a la otra.



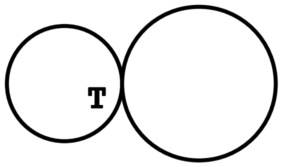
*Con algún/os punto/s común/es :*

- **CIRCUNFERENCIAS SECANTES**. Se cortan en dos puntos (**A** y **B**).

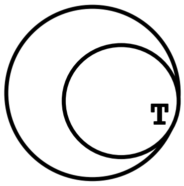



- **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES**.

a) **TANGENTES EXTERIORES**.
Tienen un punto en común, el de tangencia **T**, pero una está fuera de la otra.

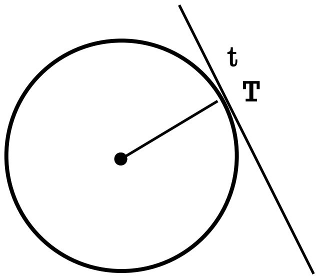



b) **TANGENTES INTERIORES**.
Tienen un punto en común, el de tangencia **T**, pero una está dentro de la otra.



## 8.9.4.- Recta tangente a una circunferencia en un punto dado de ella.

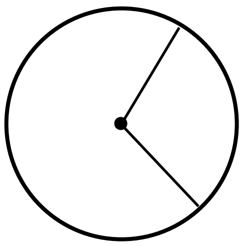
La recta tangente a una circunferencia en un punto dado es perpendicular al radio de la circunferencia correspondiente a dicho punto. Así, para trazar una tangente a la circunferencia en un punto dado debemos dibujar el radio que termina en dicho punto y trazar la perpendicular al radio en ese punto.




## 8.9.5.- Ángulos en la circunferencia.

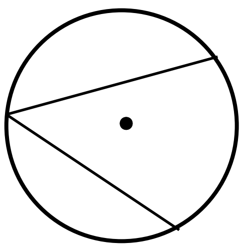
*Con el vértice en el centro :*

- **ÁNGULO CENTRAL** :
  Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.

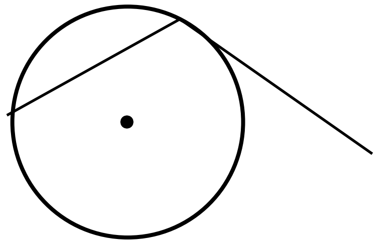


*Con el vértice en la circunferencia :*

- **ÁNGULO INSCRITO** :
  Es el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

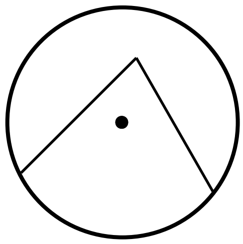


- **ÁNGULO SEMIINSCRITO** :
  Tiene su vértice en la circunferencia, un lado es una tangente y otro secante.



*Con el vértice en el interior de la circ. :*

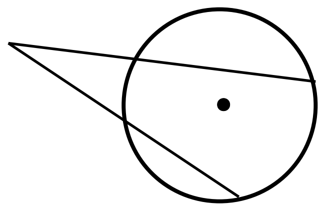
- **ÁNGULO INTERIOR** :



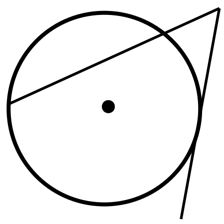
*Con el vértice en el exterior de la circ. :*

- **ÁNGULOS EXTERIORES**.
  Tienen el vértice fuera de la circunferencia y sus lados son :

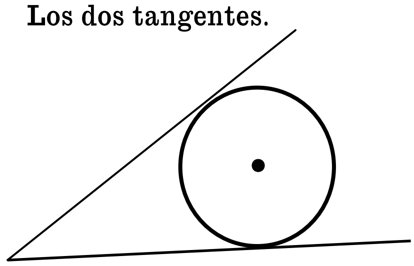
  a) Secantes a ella :



  b) Uno secante y otro tangente.

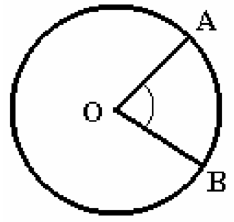


  c) Los dos tangentes.



## 8.9.6.- Algunas propiedades de los ángulos en la circunferencia.

a) **L**os ángulos centrales miden igual que su arco correspondiente.

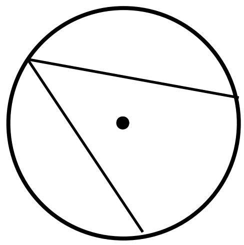



La medida del ángulo central AOB

es igual a la del arco AB.

b) **L**os ángulos inscritos miden la mitad del arco que abarcan.

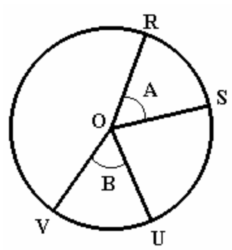
*( EXTRA.- Esta propiedad se puede demostrar. Así que aquellos alumnos que acepten el reto de intentar lograr esta demostración, y lo consigan, tendrán su nota correspondiente. )*



La medida del ángulo inscrito ABC

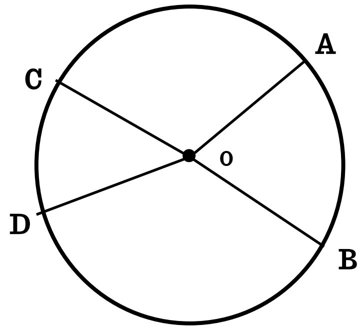
es la mitad del arco AC

c) **D**os ángulos centrales son iguales si lo son los arcos correspondientes, o viceversa, si dos ángulos centrales son iguales, lo son también sus arcos correspondientes.




Los ángulos centrales $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son iguales porque sus arcos RS y UV son iguales.
O también: los arcos RS y UV son iguales porque sus ángulos centrales son iguales.

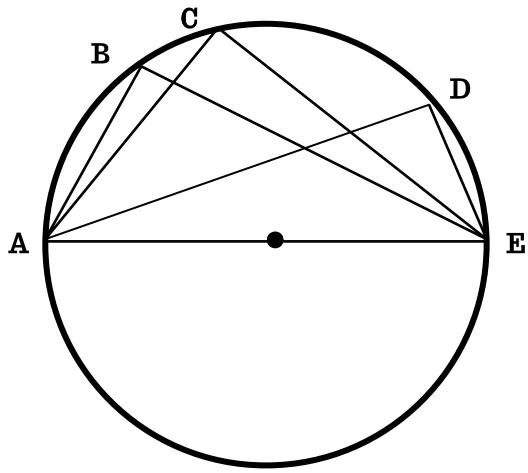
d) **L**a suma o la diferencia de los ángulos centrales, por tanto, es igual a la suma o diferencia de sus arcos.




ángulo AOB + ángulo COD = arco AB + arco CD

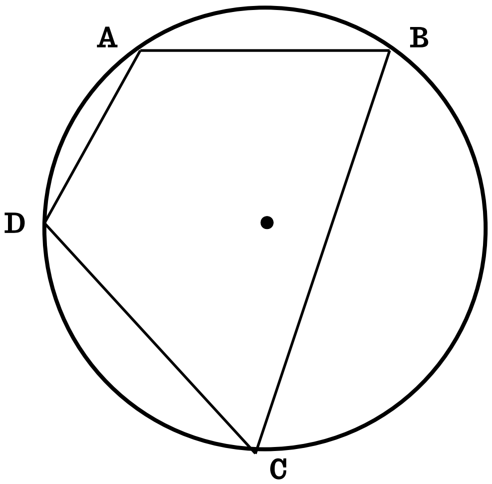
ángulo AOB − ángulo COD = arco AB − arco CD

e) **C**onsecuencia de lo anterior es que los ángulos que abarcan la mitad de la circunferencia son todos iguales, y como su medida es la mitad de ese arco ***(mitad de 180 º, que es media circunferencia),*** resulta que todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia miden 90º, o sea, que son ángulos rectos, y los triángulos formados por sus lados y el diámetro son triángulos rectángulos.



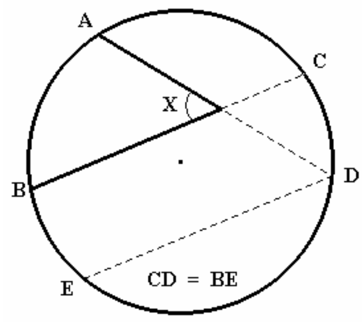

Los ángulos $\hat{B}$, $\hat{C}$, y $\hat{D}$ son todos rectos, porque sus arcos abarcan 180º y, por tanto, al ser inscritos miden la mitad de sus arcos, es decir, todos miden 90º. Consecuentemente, los triángulos ABE, ACE y ADE son triángulos rectángulos.

f) **Los** ángulos opuestos de los cuadriláteros inscritos en una circunferencia son ángulos suplementarios, es decir, suman 180º.
*( EXTRA.- Esta propiedad se puede demostrar. Así que aquellos alumnos que acepten el reto de intentar lograr esta demostración, y lo consigan, tendrán su nota correspondiente. )*



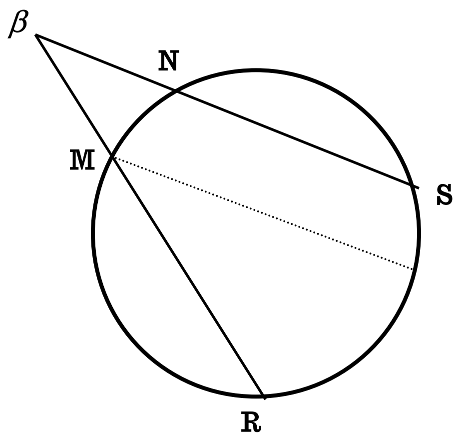

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$
$$\hat{D} + \hat{B} = 180^\circ$$

g) **Los** ángulos interiores se pueden transformar en otros ángulos inscritos iguales prolongando uno de sus lados y trazando una paralela al otro lado en el punto donde se cortan la prolongación y la circunferencia. **La** medida de los ángulos interiores es igual a la semisuma de los arcos **AB** y **CD**.
*( EXTRA.- Esta propiedad se puede demostrar. Así que aquellos alumnos que acepten el reto de intentar lograr esta demostración, y lo consigan, tendrán su nota correspondiente. )*




$$X = \frac{AB + CD}{2}$$

h) **Los** ángulos exteriores se pueden transformar en otros ángulos inscritos iguales trazando una paralela en uno de sus puntos de corte con la circunferencia. **La** medida de los ángulos interiores es igual a la semidiferencia de los arcos **RS** y **MN** .
*( EXTRA.- Esta propiedad se puede demostrar. Así que aquellos alumnos que acepten el reto de intentar lograr esta demostración, y lo consigan, tendrán su nota correspondiente. )*




$$\beta = \frac{RS - MN}{2}$$

## 8.9.7.- Lugares geométricos.

Se llama **LUGAR GEOMÉTRICO a un conjunto de puntos que satisfacen una determinada condición**.

Veamos algunos ejemplos :

- La **CIRCUNFERENCIA** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de otro punto llamado centro.

- La **MEDIATRIZ** de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos **A** y **B**.

- La **BISECTRIZ** de un ángulo $\hat{A}$ es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de dicho ángulo.

## 8.9.8.- Longitud de la circunferencia.

La longitud de una circunferencia es, en realidad, su perímetro.

Podemos llegar a comprender *(demostrar)* la fórmula con la que se calcula la longitud de cualquier circunferencia realizando diversas experiencias :

→ Midiendo los diámetros de una lata redonda de conservas, el de un vaso, el de un aro, el de una rueda, el de una moneda de 2 euros, el de un depósito de agua, etc., con una regla y a continuación medir rodeando con una cinta métrica las longitudes de sus circunferencias. Una vez hecho esto, hallamos las relaciones existentes entre las medidas de los diámetros y de sus circunferencias respectivas. Si lo hacemos detenidamente y no nos equivocamos, observaremos que las divisiones obtenidas entre las medidas de cada diámetro y su circunferencia dan como resultado siempre un mismo número decimal ilimitado, es decir, siempre se obtiene en el cociente de la división el número 3'1416 ...

$$\text{Relación (razón)} \Rightarrow \frac{\text{Perímetro de la C.}}{\text{Diámetro}} = 3'14...$$

→ O sea, en realidad, lo que deducimos de estas experiencias es que la longitud de una circunferencia es de tres veces y pico la de su diámetro respectivo.

→ Los sabios matemáticos se han encargado de demostrar que el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y la longitud de su diámetro es siempre el mismo. Ese cociente se designa con una letra griega "π" (se lee "pi").

$$\frac{L}{d} = 3'14159265 ... = \pi$$

Lógicamente, en los cálculos de ejercicios y problemas sería muy engorroso trabajar con un número de tantos decimales, por tanto, se suelen tomar solamente sus dos primeras cifras decimales. Su valor, para operar, lo tomaremos así :

- 14 rectos.
- perímetro.
- la apotema.

Y de todo lo anterior vamos a sacar ya la fórmula con la que calcularemos la longitud de cualquier circunferencia.

$$\frac{L}{d} = 3'14 = \pi \Rightarrow \frac{L}{d} = \pi$$

⊗ Despejamos "L":

$$L = d \cdot \pi = 3'14\,d$$

⊗ Como el diámetro es igual a 2 radios:

$$L = 2 \cdot r \cdot \pi = 2\pi r = 6'28\,r$$

***La longitud de una circunferencia es igual al diámetro multiplicado por π .***

**Veamos algunos ejercicios resueltos :**

1.- ¿Cuántos "cm" tiene la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 2'5 dm?

⊗ $L = \pi d = 3'14 \cdot 2'5 = 7'85$ dm

⊗ Ajuste final:

7'85 dm ⇒ $7'85 \cdot 10 = 78'5$ cm

⊗ SOLUCIÖN :

***Su longitud es de 78'5 cm***

2.- Averigua cuántos metros tiene el radio de un depósito circular cuya circunferencia mide 5338 cm.

⊗ $L = 2\pi r$ ; despejamos "r" → $\frac{L}{2\pi} = r$

⊗ $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{5338}{2 \cdot 3'14} = \frac{5338}{6'28} = 850$ cm

⊗ Ajuste final:

850 cm ⇒ 850 : 100 = 8'5 m

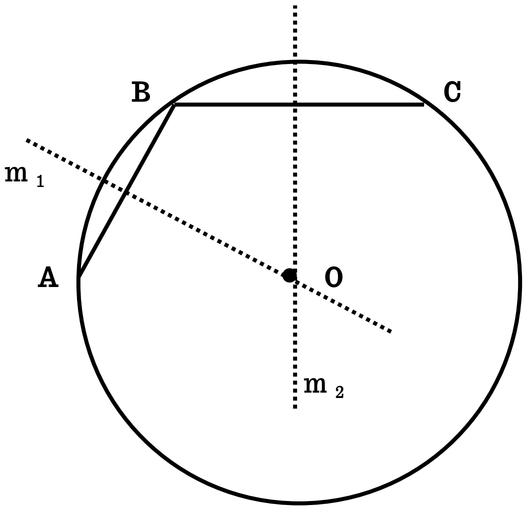
⊗ SOLUCIÖN :

***El radio mide 8'5 m***

## 8.9.8.- Determinación de una circunferencia.

Si conocemos tres puntos no alineados de una circunferencia la podemos determinar (dibujar) con total exactitud. Para ello, una vez dados los tres puntos **A**, **B** y **C**, debemos hacer lo siguiente:

- Unimos los tres puntos mediante dos segmentos **AB** y **BC**.
- Trazamos las mediatrices de dichos segmentos.
- Dibujamos la circunferencia que tiene su centro en el punto de corte de las dos mediatrices y de radio desde ese punto hasta cualquiera de los tres puntos iniciales dados




Lógicamente, los puntos "A" y "B" distan lo mismo del punto "O" por estar "O" situado en la mediatriz de ambos. También, los puntos "B" y "C" distan lo mismo del punto "O" por estar situado en la mediatriz de ambos. O sea, que desde el punto "O" hay la misma distancia a los tres puntos dados, por tanto, con centro en "O" se traza una circunferencia de radio **OA** = **OB** = **OC**, y hemos construido una circunferencia conociendo sólo tres puntos de ella

**EXTRA**.- Fíjate que decimos con tres puntos que no estén alineados. ¿ ***Sabrías explicar por qué no sucedería lo mismo si estuvieran alineados*** ?

## 8.9.10.- Longitud de un arco de circunferencia.

Como ya sabemos cómo se calcula la longitud de una circunferencia, nos resultará sencillo averiguar la longitud de cualquier arco de circunferencia.

Si una circunferencia tiene ***360 º*** y su longitud es $2\pi r$, para calcular la longitud correspondiente a un arco de tan solo 1º dividimos lo que mide toda la circunferencia entre 360 º.

Longitud de un arco de C. de 1º :

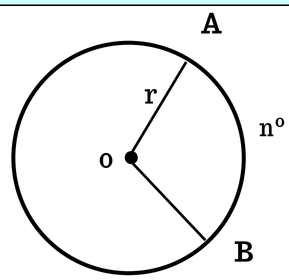
$$= \frac{\text{Longitud de C.}}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot r}{180^\circ}$$

Se puede obtener con una regla de tres:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 360^\circ & \rightarrow\rightarrow\rightarrow & 2\pi r \\ 1^\circ & \rightarrow\rightarrow\rightarrow & \text{"x"} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 360^\circ & \rightarrow\rightarrow\rightarrow & 2\pi r \\ n^\circ & \rightarrow\rightarrow\rightarrow & \text{"x"} \end{array} \right\}$$

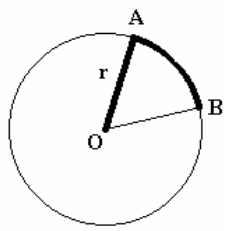
Luego para calcular la longitud de cualquier arco de circunferencia deberemos multiplicar la fórmula del cuadro anterior por el nº de grados que tenga dicho arco.

$$L.\,de\ arco\ de\ n^o = \frac{\pi \cdot r \cdot n^o}{180^\circ}$$




## 8.9.11.- El radián.

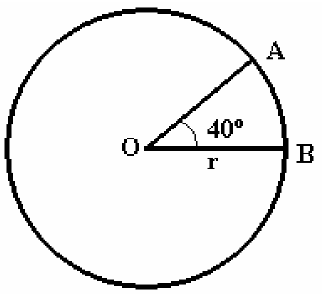
Se llama **RADIÁN a una medida de ángulos que equivale a un ángulo que tiene el vértice en el centro de la circunferencia y abarca un arco cuya longitud es igual al radio**.




El arco AB mide un radián porque la longitud de dicho arco es igual a la del radio.

## Algunos ejercicios resueltos :

1.- ¿Cuántos "km" distan entre sí dos puntos de la superficie de la Tierra que abarcan un arco de 40º ?




⊗ Conocimientos previos:

Radio de la Tierra → 6.378 km

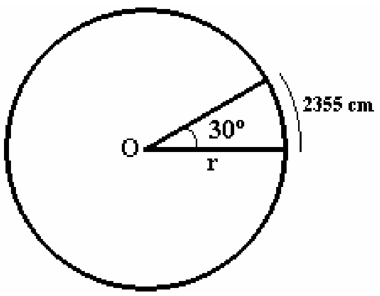
⊗ Averiguamos la longitud del arco:

$$L = \frac{\pi \,.\, r \,.\, n^{o}}{180} = \frac{3'14 . 6378 . 40}{180} = 4450'42 \text{ km}$$

⊗ SOLUCIÓN :

*Los puntos A y B están a una distancia de **4450'42 km***

2.- Averigua cuántos metros tiene el radio de una plaza de toros si se sabe que un arco de 30º tiene una longitud de 2355 cm.




⊗ Ajuste previo:

2355 cm → 2355 : 100 = 23'55 m

⊗ Despejar en la fórmula el radio:

$$L = \frac{\pi \,.\, r \,.\, n^{o}}{180^{o}} \Rightarrow L . 180^{o} = \pi \,.\, r \,.\, n^{o}$$

$$\frac{L \,.\, 180^{o}}{\pi \,.\, n^{o}} = r$$

⊗ $r = \frac{23'55 . 180}{3'14 . 30} = \frac{4239}{94'2} = 45$ m

⊗ SOLUCIÖN :

*El radio de la plaza de toros mide **45 m**.*

3.- ¿Cuántos radianes miden los ángulos de 30º y de 108º?

Sabemos que para medir ángulos se utilizan :

→ Los grados sexagesimales.

→ Los grados centesimales.

→ Los radianes.

También sabemos que la longitud de una circunferencia es, aproximadamente, 6'28 veces la de un radio ($L = 2\pi r = 2 . 3'14 . r = 6'28\, r$), por tanto :

⊗ Un ángulo de 360° medirá 6'28 radianes.

⊗ Uno de 180° → 3'14 radianes

⊗ Un radián ≃ 57º ( 180° : 3'14).

O sea, que para saber la medida en radianes de un ángulo expresado en grados sexagesimales debemos multiplicar por 3'14 ($\pi$) y dividir entre 180.

Si no comprendes por qué es esto así, basta con hacer un regla de tres como vimos en el tema 6.

Resolvemos ya el ejercicio :

a) Si 180° ........................... 3'14 radianes
30° ........................... "x" radianes

$$x = \frac{30 \,.\, 3'14}{180} = 0'52 \ldots \text{ radianes}$$

Solución → El ángulo mide 0'52 radianes.

b) Si 180° ........................... 3'14 radianes
108° ........................... "x" radianes

$$x = \frac{108 \,.\, 3'14}{180} = 1'884 \text{ radianes}$$

Es decir, que si no quieres hacer la regla de tres basta que multipliques los grados del ángulo que te den por 3'14 ($\pi$) y dividir entre 180.

La medida de un radián no depende del radio elegido; es, por consiguiente, una unidad de medida para ángulos.

4.- En las fiestas de un pueblo se quiere rodear la plaza para la realización de concursos y pruebas. La soga que van a poner cuesta a 3 euros y 15 céntimos cada metro. Si la plaza tiene un diámetro de 250 dm, ¿cuánto le devolverán al encargado que pague con un billete de 500 euros?

⊗ Ajuste inicial:

250 dm → 250 : 10 = 25 m

⊗ $L = \pi d = 3'14 . 25 = 78'5$ m

⊗ 78'5 . 3'14 = 246'49 euros

⊗ 500 – 246'49 = 253' 51 euros

*Le devolverán 253 euros y 51 céntimos.*

# Ejercicios, actividades y cuestiones sobre LA CIRCUNFERENCIA.

***NOTA**: Todas las líneas, rectas y/o curvas, de las figuras deben estar realizadas con compás y/o regla.*

1.- Explica brevemente qué diferencia hay entre una circunferencia y un círculo. Ayúdate, además, de un ejemplo que no sea un vaso.

2.- Dibuja en tu cuaderno, con un compás, una circunferencia de radio 3 cm. Después dibujas sus seis elementos, poniendo las letras adecuadas a cada uno de ellos.

3.- Dibuja, con compás, cuatro círculos. Y en cada uno de ellos haces respectivamente un sector circular, un segmento circular, una corona circular y un trapecio circular.

4.- Dibuja lo siguiente:

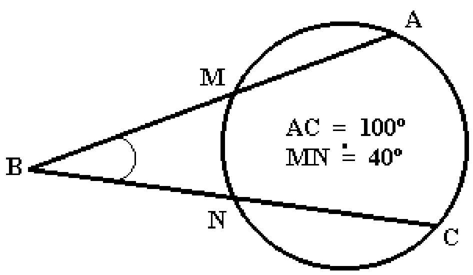
a) Tres circunferencias concéntricas.

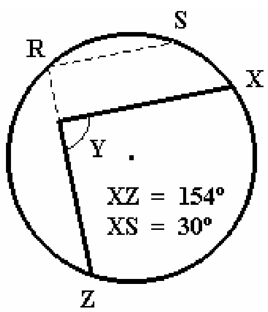
b) Dos circunferencias interiores y tangentes que una tenga de radio el doble que la otra.

c) Tres circunferencias en las que una de ellas sea secante con las otras dos.

5.- ¿Qué diferencia hay entre un ángulo central y otro inscrito? Dibuja uno de cada teniendo en cuenta que el inscrito debe medir igual que el central.

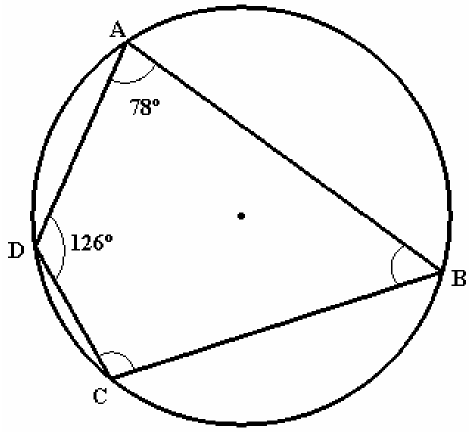
6.- Averigua la medida los ángulos ABC y XYZ de las siguientes figuras.



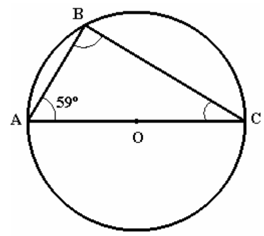




7.- ¿Qué son lugares geométricos? Cita ejemplos.

8.- ¿ Qué miden los ángulos B y C ?




9.- Averigua la medida del ángulo C del triángulo inscrito en la circunferencia.

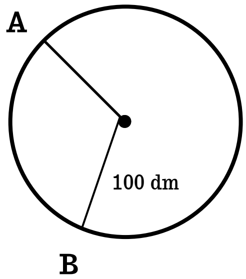



10.-¿Cuántos "dm" mide la longitud de una circunferencia de radio 50 mm?

11.-Calcula cuántos "hm" mide el diámetro de una plaza circular cuya longitud es de 329'7 metros.

12.-Un arco de circunferencia tiene 15º, y el diámetro de dicha circunferencia mide 24 "dam". Averigua los metros que tiene dicho arco.

13.-¿Cuántos grados sexagesimales mide el arco AB si tiene una longitud de 17'27 metros?



# FICHA DE REPASO

**Cuando realices esta ficha en tu cuaderno, debes hacerlo en una página apaisada, intentando que todas las líneas de cada pregunta terminen con una raya a la misma altura, y desde el final de cada raya se traza una línea hasta el punto que está delante de cada una de las respuestas de los cuadros de la derecha.**

**Hazlo de 10 en 10, o sea, relacionando las 10 primeras con el primer recuadro de la derecha, las 10 segundas con el segundo recuadro y las otras con el último.**

1.- Los polígonos que tienen siete lados son ...........................................
2.- Los polígonos que tienen sus lados iguales se llaman........................
3.- El polígono que tiene un ángulo interior de 195 º es un ..................
4.- La suma de los ángulos de todo triángulo es ...................................
5.- Se suelen designar con letras mayúsculas a......................................
6.- Triángulos con un ángulo recto son los ...........................................
7.- Triángulos con sólo dos lados iguales son los ..................................
8.- La perpendicular a un lado de un triángulo en su punto medio es la.
9.- Las tres medianas de un triángulo se cortan en el ...........................
10.- Todos los ángulos quedan divididos en dos partes iguales por las......

- bisectrices.
- baricentro.
- mediatriz.
- los vértices.
- rectángulos.
- heptágonos.
- polígonos regulares.
- polígono cóncavo.
- 180 º.
- isósceles.

11.- Cuadriláteros de sólo dos lados paralelos ..........................................
12.- Trapezoide es un polígono de 4 lados que no tiene lados ..................
13.- Es un polígono que tiene 35 diagonales ............................................
14.- Los ángulos interiores del eneágono suman .....................................
15.- La suma de los lados de cualquier polígono es el ..............................
16.- Segmento que une el centro de un polígono con el medio de un lado ........
17.- La parte interior de una circunferencia hecha en el suelo es un ........
18.- Segmento que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia ...
19.- Recta que sólo toca a la circunferencia en un punto .........................
20.- Ángulo que tiene el vértice en la circunferencia y sus lados secantes..

- 14 rectos.
- perímetro.
- la apotema.
- decágono.
- tangente.
- inscrito.
- trapecios.
- paralelos.
- círculo.
- cuerda.

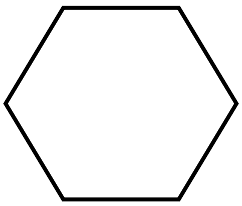
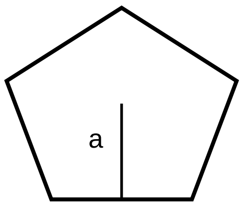
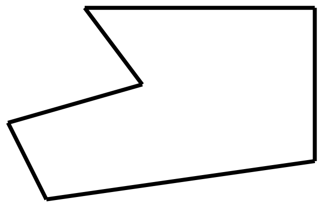
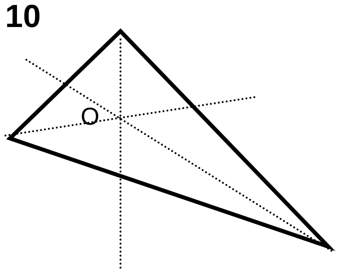
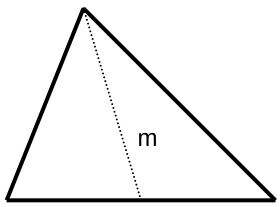
21.- Es el lugar geométrico de los puntos que distan de otro llamado centro ......
22.- Su medida es la mitad del arco que abarca ........................................
23.- Fórmula para calcular la longitud de una circunferencia ...................
24.- Relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro..........
25.- Fórmula que mide la longitud de un arco de circunferencia ..............
26.- Medida de los ángulos centrales con arcos de igual longitud que el radio.....
27.- Triángulo de lados y ángulos iguales ................................................
28.- Punto donde se cortan las alturas de todo triángulo ..........................
29.- Suma de todos los ángulos de cualquier cuadrilátero ........................
30.- Circunferencias que tienen de radio la apotema de los polígonos .......

- $2 \pi r$.
- $\pi$.
- circunferencia.
- ángulo inscrito.
- 360 º.
- inscritas.
- equilátero.
- ortocentro.
- $2 \pi r n^o : 360^o$
- radián.

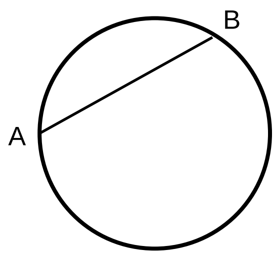
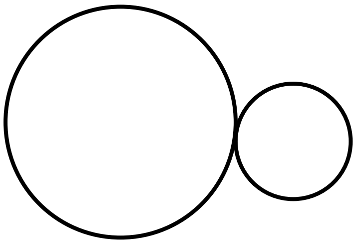
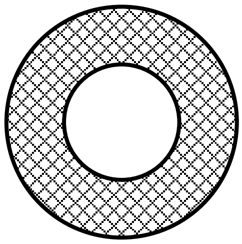
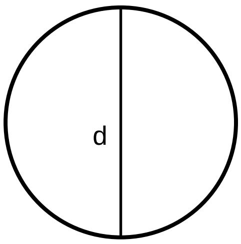
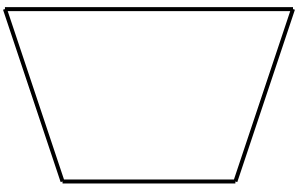
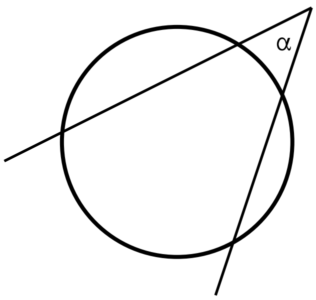
# E J E R C I C I O S :

Dibuja en tu cuaderno una tabla con cuadros semejantes a éstos, copiando las figuras y su nombre debajo o copiando los nombres y dibujando encima las figuras, según indique cada cuadro.

¡ O J O ! La tabla con los cuadros, las líneas y todas las figuras deben estar realizadas CON REGLA Y/O COMPÁS, DESPACIO Y CON INTERÉS .

| | | |
|---|---|---|
| 1<br>Línea poligonal | 2<br>Heptágono irregular | 3<br>Trapecio rectángulo |
| 4<br> | 5<br> | 6<br> |
| 7<br>Trapezoide | 8<br>Triángulo isósceles | 9<br>Altura en romboide |
| 10<br> | 11<br> | 12<br> |
| 13<br>Octógono cóncavo | 14<br>Circuncentro | 15<br>2 diagonales en pentágono |

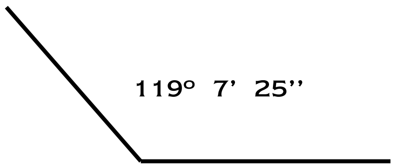
## Continuación de ejercicios de la página anterior :

| | | |
|---|---|---|
| **16** Altura en trapecio escaleno | **17** Circunferencia circunscrita en hexágono regular | **18** Un cuadrado, y hallar su perímetro exacto |
| **19**   | **20**  | **21**  |
| **22** Sector circular de 90º | **23** 2 rectas tangentes a una circunferencia | **24** 2 circunferencias secantes |
| **25**   | **26**  | **27**   |
| **28** Altura en un triángulo equilátero | **29** Ángulo inscrito en una circunferencia | **30** Arco de circunferencia mayor de 90 º |

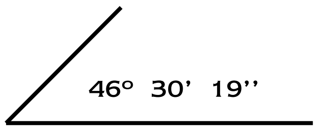
# Ejercicios y problemas sobre el tema 8 :

1.- Calcula la suma de estos tres ángulos:
A = 21º 35' 40''
B = 46º 9' 38''
C = 5º 43' 19''
¿Cuánto mide el ángulo complementario de la suma?

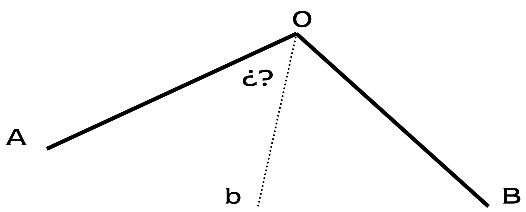
2.- ¿Cuánto mide el ángulo suplementario del de la figura?



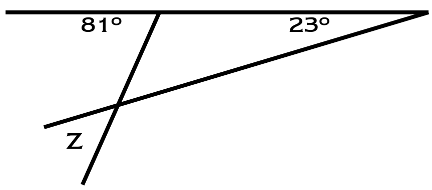

3.- ¿Cuánto medirán 5 ángulos como el que aparece en la figura?




4.- El ángulo AOB mide 116º 37'. Averigua cuánto miden cada uno de los dos ángulos en que la bisectriz "b" lo divide.
*NOTA: El resultado no puede expresarse en decimales.*




5.- Calcula la medida del ángulo "Z".

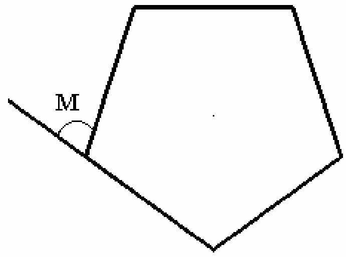



6.- En un triángulo isósceles se sabe que el ángulo desigual es el triple que cualquiera de los otros dos. Averigua cuánto mide cada ángulo.

7.- ¿Puedes dibujar un triángulo con estas medidas: 4 cm, 7 cm y 12 cm? Debes explicar por qué sí o por qué no.

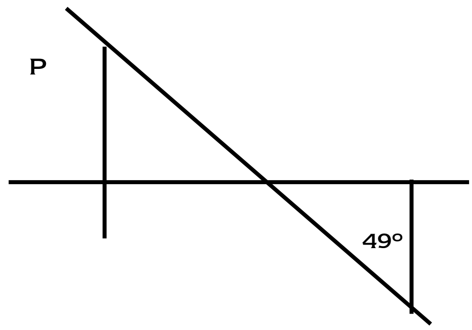
8.- ¿Cuánto minutos sexagesimales miden los ángulos de un triángulo equilátero?

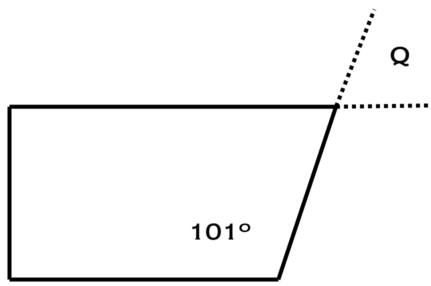
9.- Averigua la medida del ángulo exterior "M" dibujado en el pentágono regular.

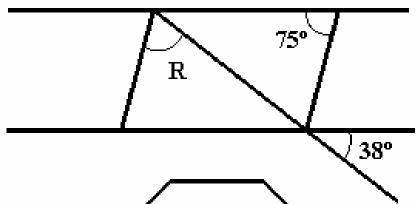


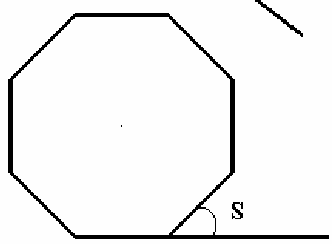

10.- Dibuja, con total exactitud, un triángulo rectángulo isósceles de perímetro igual a 12 cm , sabiendo que el lado mayor mide el doble que cada uno de los menores.

11.-¿Qué amplitud tienen los ángulos "P", "Q", "R" y "S" de las siguientes figuras?



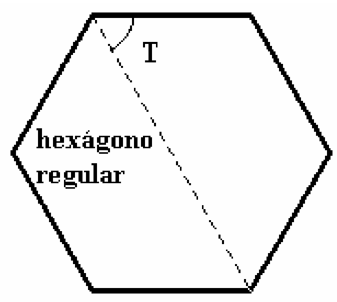
12.- Resuelve este problema analizando muy detenidamente el enunciado. Vamos, más o menos como un buen policía o detective.
1º) Tenemos un ángulo de 60º.
2º) Una circunferencia tangente a los lados del ángulo.
3º) El radio mide 3 cm.
4º) ¿A cuántos mm se encuentra el vértice del ángulo del centro de la circunferencia?

13.- ¿Cuántas diagonales tiene un heptágono regular?

14.- Calcula cuánto mide la suma de todos los ángulos *exteriores* de un polígono de 11 lados.

15.- ¿Cómo debe ser un triángulo para que los cuatro puntos notables (ortocentro, circuncentro, incentro y baricentro) coincidan?

16.- Calcula la amplitud del ángulo "T".



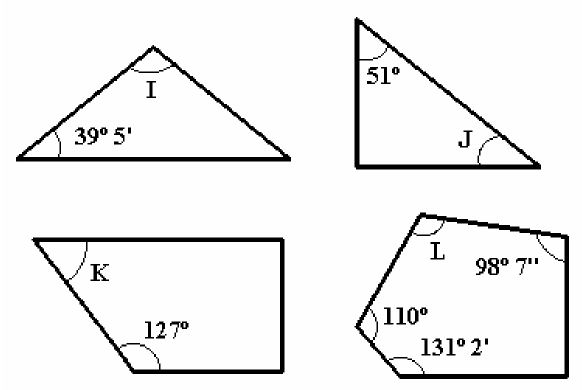

17.- Dibuja en tu cuaderno, con toda la exactitud posible, un trapecio isósceles que cumpla estas condiciones:
1º) Uno de los lados iguales mide 25 mm.
2º) De los lados desiguales, el menor es 2/3 del mayor.
3º) La altura mide la tercera parte del lado de mayor longitud.
4º) El perímetro es de 0'15 m.

18.- ¿Cómo debe ser un triángulo para que el ortocentro y circuncentro no estén en su interior? Dibuja un caso.

19.- Si sabemos que el lado mayor de un triángulo es el diámetro de su circunferencia circunscrita, ¿cómo es ese triángulo?

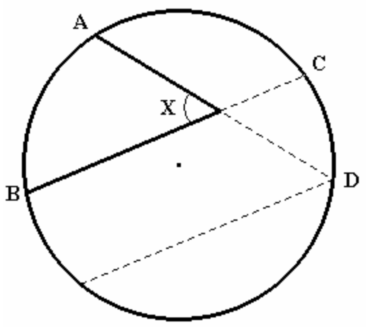
20.- Convierte la amplitud de un ángulo de 15º 37' 8'' en segundos sexagesimales.

21.- Calcula la amplitud de los ángulos "I", "J", "K" y "L" de las siguientes figuras.

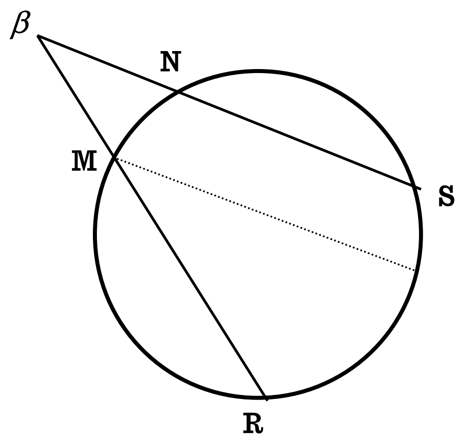



22.- ¿Qué significa **ALOR–METRICI–BIN–MENABA**? Repasa la teoría del tema si no te acuerdas.

23.- Calcula la amplitud de los ángulos *"α"* y *"β"* de las figuras siguientes:




El arco AB = 79º y CD = 25º .

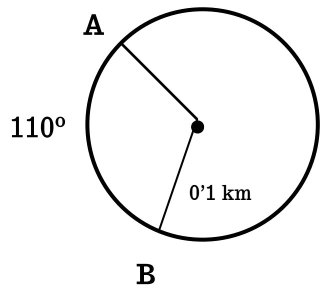



El arco MN = 30º y RS = 102º .

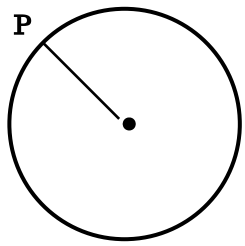
24.- Averigua la medida de dos ángulos adyacentes sabiendo que la diferencia entre sus amplitudes es de 25º 10''.

25.- Calcula, en "dam", la longitud de una circunferencia de diámetro 0'5 hm.

26.- La parte menor del arco de circunferencia comprendido entre los puntos A y B de una gran plaza circular se va a vallar. Vale a 7 euros y 25 céntimos cada metro de valla construido. ¿Cuánto costará vallarlo?




27.- ¿Cuántos céntimos de euro habrá que pagar por la construcción de un pasillo de losetas, desde el centro al punto P, si sabemos que la longitud de la circunferencia mide 502'4 dm y cada metro de pasillo vale a 5 euros y 7 céntimos?

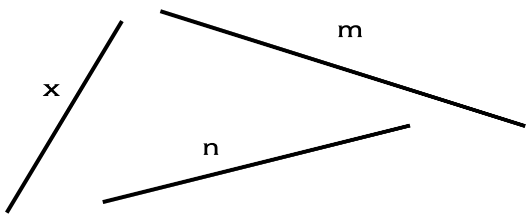



28.- Si sabemos que un ángulo exterior de un polígono regular mide 210º, ¿podremos averiguar de qué polígono se trata? ¿Cómo?

29.- Un polígono que tiene 27 diagonales, ¿cómo se llama?

30.- ¿Qué fórmula debes emplear para calcular el diámetro de una circunferencia si conocemos la longitud de un arco y su amplitud?

31.- Halla el punto de la recta "x" desde donde hay la misma distancia a las rectas "m" y "n". Explica cómo lo haces.



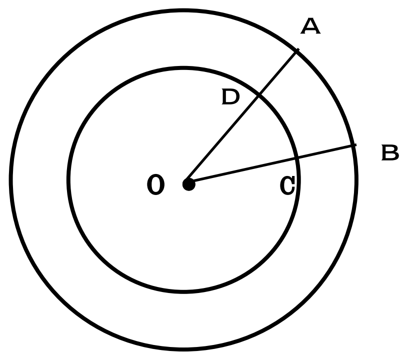

32.- ¿Dónde está situado siempre el circuncentro de cualquier triángulo rectángulo? Haz el dibujo y explícalo.

33.- Señala si es verdadero o falso lo que se dice en cada apartado. Si aciertas, pero no lo explicas, no valdrá nada.

a) Las medidas de los lados de un triángulo son 3, 7 y 11 cm.
b) El baricentro de algunos triángulos se puede encontrar fuera de ellos.
c) Un cuadrilátero no puede tener los 4 ángulos obtusos.
d) El ortocentro de los triángulos obtusángulos se encuentra fuera de ellos.
e) Puedo dibujar una circunferencia conociendo tres puntos de ella.
f) Un trapezoide no puede tener un ángulo recto.

34.- Calcula los "mm" del segmento $\overline{AD}$ conociendo los siguientes datos :

→ Longitud del arco AB = 47'1 cm
→ Longitud del arco CD = 3'297 dm
→ Radio mayor = 1 m

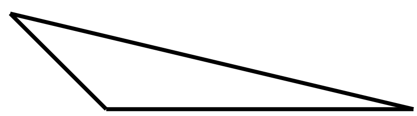



35.- Si dos ángulos son suplementarios y uno de ellos es la cuarta parte del otro, ¿cuánto mide cada uno?

36.- Dibuja un triángulo equilátero de 0,4 dm de lado.

37.- Dado el ángulo A = 35º 12' 57', calcula la amplitud de otros dos ángulos, uno que fuera el triple y otro la tercera parte.

38.- Dibuja el circuncentro de un triángulo semejante al de la figura:



**ÚLTIMA PÁGINAS DE EJERCICIOS CON UN POCO DE CONTENIDOS DE TODO EL TEMA**

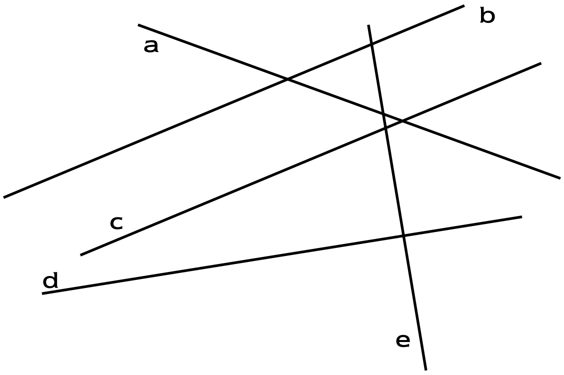
39.- Dibuja en tu cuaderno tres puntos que no estén alineados, traza y nombra las líneas rectas que quedan determinadas por estos puntos y averigua cuántas semirrectas se forman con origen en dichos puntos.

40.- Dibuja un punto en tu cuaderno. ¿Cuántas líneas rectas puedes hacer pasar por él?

41.- ¿Qué es necesario para determinar una línea recta?

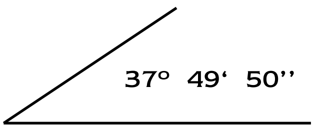
42.- Dibuja en tu cuaderno 5 segmentos concatenados de tal forma que los dos primeros y los dos últimos sean iguales.

43.- Señala qué rectas de las siguientes son paralelas y cuáles perpendiculares.

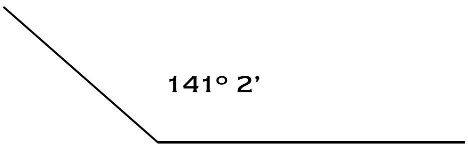



44.- Señala la diferencia entre grados sexagesimales y grados centesimales.

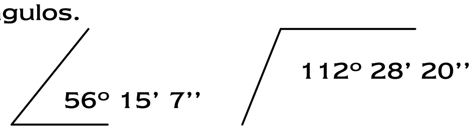
45.- Averigua la medida de un ángulo que contiene 5 veces al de la figura.



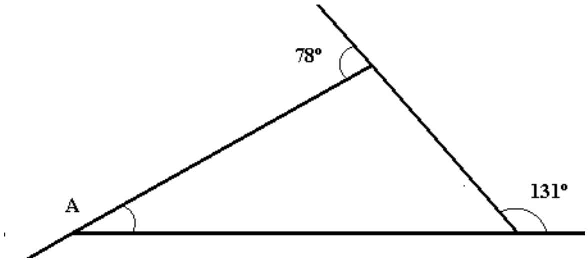

46.- Ahora la de otro ángulo cuya medida sea la cuarta parte del de la figura.



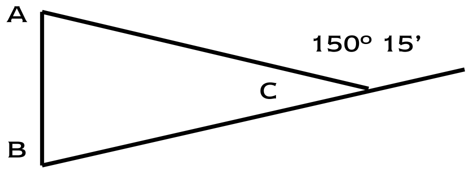

47.- Aquí halla la diferencia entre los dos ángulos.



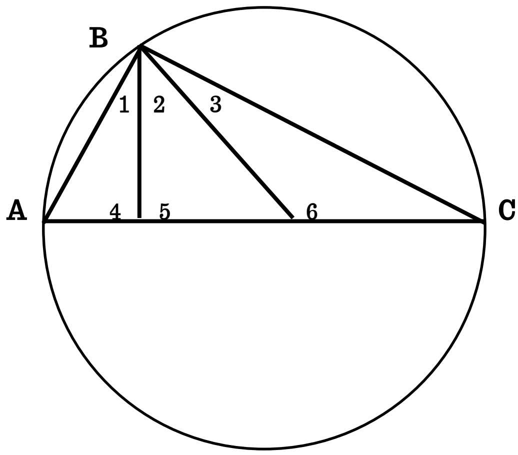

48.- Calcula la medida del ángulo A de la figura.



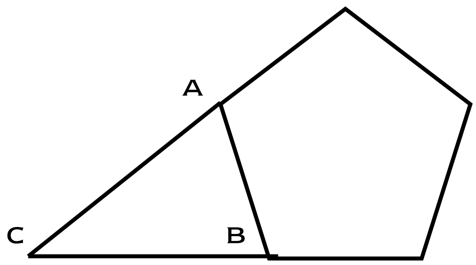

49.- El triángulo de la figura es isósceles. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?




50.- Calcula la medida de los ángulos B, C, 1, 2, 3, 4, 5, y 6, sabiendo que el ángulo A mide 65º. AC es un diámetro. ¿Puedes hacerlo?




51.- Calcula la medida de los tres ángulos del triángulo adosado al pentágono regular.




52.- Si la rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 65 cm, ¿cuántos metros avanza después de dar 250 vueltas?

53.- El radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6368 Km. Calcula la longitud del Ecuador terrestre.

| ESQUEMA DEL TEMA 8 : GEOMETRÍA PLANA. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| punto | | | | |
| recta | | | | |
| semirrecta | | | | |
| segmento | mediatriz de un segmento | | | |
| plano | | | | |
| ángulos | medida de ángulos | sexagesimales | | |
| | | centesimales | | |
| | bisectriz de un ángulo | | | |
| | ángulos convexos | | | |
| | ángulos cóncavos | | | |
| | ángulos consecutivos | | | |
| | ángulos adyacentes | | | |
| | ángulos opuestos por el vértice | | | |
| | ángulos rectos | | | |
| | ángulos agudos | | | |
| | ángulos llanos | | | |
| | ángulos obtusos | | | |
| | ángulos completos | | | |
| | ángulos complementarios | | | |
| | ángulos suplementarios | | | |
| | ángulos formados por recta que corta a dos paralelas | | | |
| polígonos | polígonos regulares | sus elementos | | |
| | polígonos irregulares | | | |
| | suma de los ángulos de un polígono | | | |
| | construcción de polígonos regulares | | | |
| | triángulos | sus elementos | | |
| | | suma de sus ángulos | | |
| | | triángulo equilátero | | |
| | | triángulo isósceles | | |
| | | triángulo escaleno | | |
| | | triángulo rectángulo | | |
| | | triángulo acutángulo | | |
| | | triángulo obtusángulo | | |
| | | Rectas notables del tr. | alturas | ortocentro |
| | | (regla nemotécnica: | mediatrices | circuncentro |
| | | ALOR-METRICI | bisectrices | incentro |
| | | BIN-MENABA) | medianas | baricentro |
| | cuadriláteros | sus elementos | | |
| | | suma de sus ángulos | | |
| | | paralelogramos | cuadrado | |
| | | | rectángulo | |
| | | | rombo | |
| | | | romboide | |
| | | trapecios | trapecio rectángulo | |
| | | | trapecio isósceles | |
| | | | trapecio escaleno | |
| | | trapezoides | | |
| | pentágono | | | |
| | hexágono | | | |
| | heptágono | | | |
| | octógono | | | |
| | eneágono | | | |
| | decágono | | | |
| | etc. | | | |
| circunferencia | sus elementos | | | |
| | posiciones relativas de puntos y circ. | | | |
| | posiciones relativas de rectas y circ. | | | |
| | posiciones relativas de dos circ. | | | |
| | recta tangente a una circ. | | | |
| | ángulos en la circunferencia | ángulo central | | |
| | | ángulo inscrito | | |
| | | ángulo semiinscrito | | |
| | | ángulo interior | | |
| | | ángulo exterior | | |
| | determinación de una circ. | | | |
| | longitud de la circ. | | | |
| | longitud de un arco de circ. | | | |
| | radían | | | |
| círculo | sector circular | | | |
| | segmento circular | | | |
| | corona circular | | | |
| lugares geometricos | mediatriz | | | |
| | bisectriz | | | |
| | circunferencia | | | |

## Relaciones PADRES ☞ ☺ 👌 ☝ 😐 👍 👎 ☹ ☜ HIJOS

**¿Alguna vez te han dicho o escrito tus padres algo parecido a lo que se dice en esta carta?**

**Este fin de semana has perdido muchos de los puntos que te habías ganado en nuestras apreciaciones hacia ti.**

Ya te comentamos que era muy necesario e imprescindible aprovechar al máximo todas las horas de las que pudieras disponer, sobre todo que los fines de semana, aunque hay que descansar algo, había que aprovecharlos bien: trabajando lo que no se puede a lo largo de la semana y repasando lo atrasado.

Creemos que no ha sido así; has estudiado, pero no has aprovechado todo lo que podías y debías para conseguir llegar al objetivo principal y esencial de tu vida ahora mismo, que es el aprobar bien tu curso de estudios.

Ten muy en cuenta las siguientes cosas:

1ª) Si no apruebas todo este trimestre no tendrás ese dinero para los CD's de música y otras cosas que te gustan tanto. *(Si hubiéramos observado que has estudiado todo lo que podías y no hubieras hecho otras cosas, ya que era el fin de semana último antes de los controles finales de trimestre, pues entonces habríamos tenido cierta consideración para algún fallo, pero viendo lo que hemos visto, no)*

2ª) No salgas esta noche, ni pierdas más tiempo en los dos días que te quedan para sacar el fruto de tu estudio.

3ª) No te daremos tu aparato reproductor de CD's ni tu ordenador si no apruebas, porque volvemos a repetirte que hubiéramos sido comprensivos si tú hubieras estudiado a tope y duro, pero para nosotros no lo has hecho así. El fin de semana tiene muchas horas. Ya saldrías, te divertirías y disfrutarías del descanso a partir de la finalización de los controles. Esos esfuerzos finales que demuestran fuerza de voluntad y madurez son los que dan los frutos y los buenos resultados en los estudios.

4ª) Te daremos algo de dinero, pero no todo lo que necesites, si no . . . , y volvemos a repetir todo lo anterior.

Esta mañana, al verte a las 8 y pico de la mañana de un domingo estudiando, **nos diste mucha alegría, pero** toda ella desapareció cuando te fuiste a esas otras cosas que está bien que hagas pero en su momento, no restándole tiempo a estos días esenciales, porque debes saber que el estudio es lo principal de tu vida ahora mismo. Más sabiendo que tienes suspensos y te hace mucha falta el tiempo para poder recuperar, porque como tú mismo dices, no debemos exigirte la misma capacidad que a los demás, y es verdad; pero lo que sí podemos exigirte es horas de estudio, concentración y trabajo, que para eso no es necesario la inteligencia ni la capacidad, y sin embargo ese tiempo si suple a la falta de inteligencia y comprensión de ciertas materias.

En resumen: **casi siempre, en casi todo en la vida, la voluntad es la de uno mismo; lo que tú quieras, será; lo que no quieras, no será. Siempre teniendo en cuenta que existan posibilidades de aquello que pretendes, y para aprobar bien el curso SÍ tienes posibilidades.**

**¿Qué piensas de todo esto? ¿Pasas? ¿Te interesa? ¿Te ves reflejado en algo, en mucho, en todo o en nada?**