TEMA 10

El teorema de Pitágoras y otros teoremas en el triángulo rectángulo.

10.1.- Los triángulos rectángulos.
10.2.- El teorema de Pitágoras.
10.3.- Proyecciones.
10.4.- Proporciones continuas.
10.5.- El teorema del cateto.
10.6.- El teorema de la altura.
10.7.- Aplicaciones del teorema de Pitágoras y ejemplos resueltos.
10.8.- Ejercicios y problemas para resolver

COMPLEMENTOS:

- **Modelos de controles:**
  - → Sobre áreas de figuras planas y teoremas, o sea, sobre los temas 9 y 10.
  - → Sobre los temas 7, 8, 9 y 10, es decir, los que llevamos en este libro.
  - → Sobre los temas 1 al 10 (1 al 6 de MATYVAL I y 7 al 10 de MATYVAL II).
  - → Y las soluciones de los tres controles.
- **Y, por supuesto, algunas reflexiones.**

Tema 10.- EL TEOREMA DE PITÁGORAS, el del cateto y el de la altura.

OBJETIVOS:

1) Desarrollar la intuición geométrica.
2) Resolver problemas geométricos reduciéndolos a otros más sencillos.
3) Mejorar la destreza en la representación de figuras planas.
4) Saber calcular las áreas de figuras planas aplicando, en aquellos casos necesarios, los teoremas de Pitágoras, del cateto y de la altura.
5) Aplicar el conocimiento de las fórmulas de las áreas de las figuras planas y de los teoremas estudiados a la resolución de problemas prácticos de la vida real.

CONTENIDOS:

De conceptos:

10.1.- Los triángulos rectángulos.
10.2.- El teorema de Pitágoras.
10.3.- Proyecciones.
10.4.- Proporciones continuas.
10.5.- El teorema del cateto.
10.6.- El teorema de la altura.
10.7.- Aplicaciones del teorema de Pitágoras.

De procedimientos:

1) Utilización de la descomposición de figuras planas en triángulos para el cálculo de áreas.
2) Valoración de la importancia del teorema de Pitágoras y sus aplicaciones en multitud de campos.
3) Uso de los teoremas del cateto y de la altura para resolver una gran diversidad de problemas geométricos.
4) Programación personal y en grupo de diversas tareas de medidas, utilizando los recursos precisos, adecuándose al nivel de precisión propuesto, secuenciando correctamente las operaciones de medición realizadas, anotando los datos y efectuando una puesta en común de todos los resultados obtenidos.

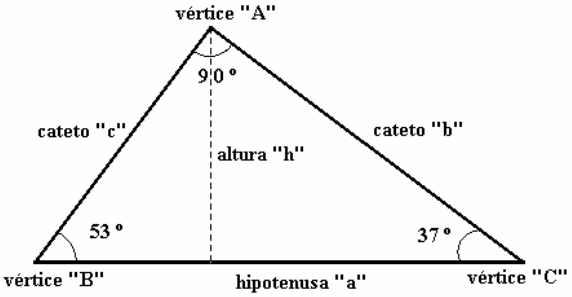
De actitudes:

1) Gusto por la exactitud en los dibujos y construcciones geométricas.
2) Disposición favorable para el cálculo de medidas de objetos cuando la ocasión lo requiere.
3) Rigor en el uso de argumentos geométricos.
4) Actitud positiva hacia la belleza de las formas geométricas.
5) Consideración de las relaciones y comparaciones entre formas geométricas.
6) Interés en recurrir a diversos métodos de resolución de problemas geométricos.
7) Reconocimiento de la utilidad de la geometría para resolver situaciones de la vida cotidiana.
8) Interés por la resolución de problemas de medida de la vida real que involucren figuras planas.
10) Interés por la correcta utilización y conservación de los instrumentos de medida y de dibujo.
11) Confianza en la capacidad propia para resolver situaciones problemáticas relacionadas con la vida.
12) Gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a la geometría.

10.1.- Los triángulos rectángulos.

La Geometría es una de las ramas de las Matemáticas más atractivas, tanto para profesores como para alumnos. Y dentro de la Geometría, el estudio del triángulo rectángulo es uno de los más interesantes y útiles.

Un triángulo rectángulo es todo aquel que tiene un ángulo recto, o sea, con uno de sus tres ángulos que mida 90º. Los otros dos ángulos agudos son complementarios, es decir, suman 90º. Al lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa (“a”). Los otros dos lados, que son perpendiculares, son los catetos (“b” y “c”).



TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS :

⊗ Ángulos:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ + 53^\circ + 37^\circ = 180^\circ$

⊗ Lados:

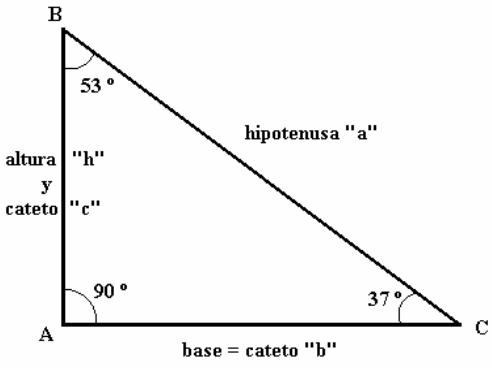
◦ Hipotenusa (lado mayor) → "a" = $\overline{BC}$

◦ Dos catetos → "b", "c" ($\overline{AC}$ y $\overline{AB}$)

⊗ Área cuando la base es la hipotenusa:

$$A_{\text{Triángulo rectángulo}} = \frac{a \cdot h}{2}$$

En la figura siguiente tienes un triángulo idéntico al anterior, pero dibujado en una posición diferente.

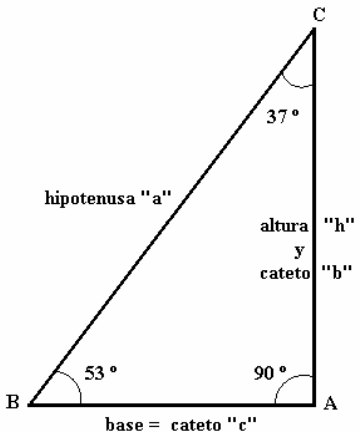


A veces hay alumnos –un pelín despitadillos, claro– que a causa de ver siempre los triángulos rectángulos en las mismas posiciones no los identifican en otras, como la anterior, por ejemplo, o la siguiente. Y conviene hacerles ver que los triángulos se pueden apoyar en cualquiera de sus tres lados. En la anterior figura, la base es el cateto “b” y la altura el cateto “c”. Por ello, la fórmula para calcular su área es la siguiente :

$$A_{\text{Triángulo rectángulo}} = \frac{b \cdot c}{2}$$

⊗ El área de cualquier triángulo rectángulo se puede calcular siempre dividiendo por 2 el producto de las medidas de sus catetos.

Otra posición del mismo triángulo:



$$A_{\text{Triángulo rectángulo}} = \frac{c \cdot b}{2}$$

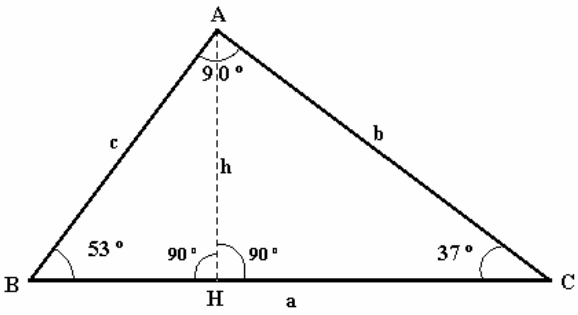
Al trazar la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo, éste queda dividido en otros dos triángulos rectángulos que son semejantes, porque tienen un ángulo agudo igual.

¡ C H U L E T A ! Sobre los criterios de semejanza de triángulos, que veremos en el próximo tema. Dos triángulos son semejantes cuando cumplen alguna de las siguientes condiciones :

Si tienen :

1) Dos ángulos iguales.
2) Los tres lados proporcionales.
3) Un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

(EXTRA : Demostrar que los triángulos AHB y AHC de la figura de la página siguiente tienen un ángulo agudo igual. Valor : + 0’15)



Triángulo BAC { Hipotenusa → "a" / Catetos → "b", "c" }

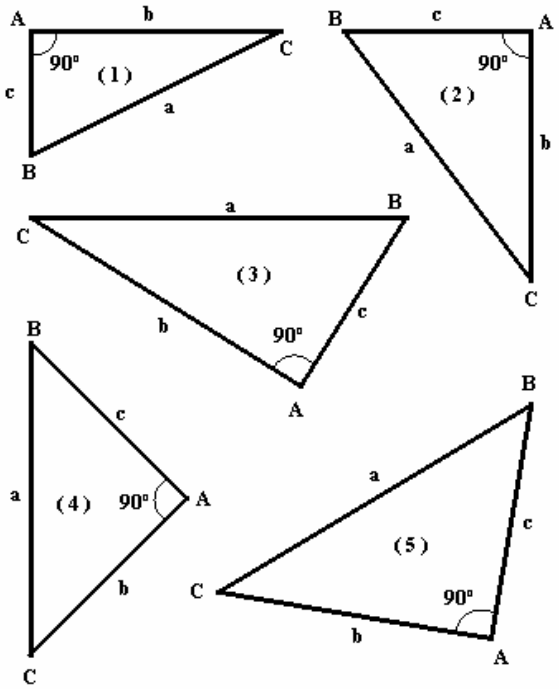
El triángulo rectángulo BAC se descompone en otros dos triángulos rectángulos:

Triángulo AHB ~ Triángulo AHC

Triángulo AHB { Hipotenusa → "c" / Catetos → "h", $\overline{HB}$ }

Triángulo AHC { Hipotenusa → "b" / Catetos → "h", $\overline{HC}$ }

Para acostumbrarte a reconocer los triángulos rectángulos en cualquier posición, fíjate en los triángulos que aparecen dibujados a continuación e identifica en cada uno a la hipotenusa y a los catetos.



¿Cuál de los triángulos anteriores es, además de rectángulo, isósceles?

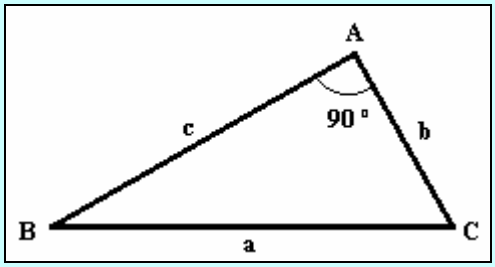
10.2.- El teorema de PITÁGORAS.

Pitágoras fue uno de los muchos sabios de la Grecia antigua. Se cree que vivió entre el año 582 y el 500 antes de Cristo. Destacó más como filósofo, pero es considerado como el primer gran matemático, porque se le atribuyen una enorme cantidad de conocimientos de geometría y astronomía. Nació en la isla de Samos, situada en la parte sureste de Grecia, en el mar Egeo, muy cerca de la costa de Turquía.

Los discípulos de Pitágoras formaron una comunidad llamada escuela pitagórica, de corte, sobre todo, religioso y filosófico, pero también dedicada al estudio de las Matemáticas.

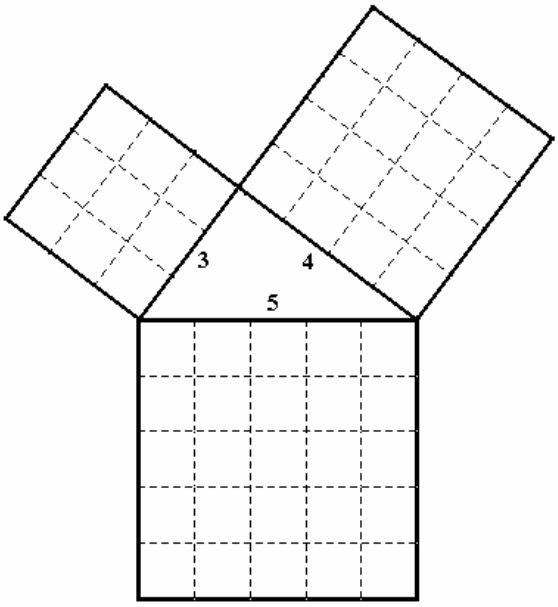
Bien, pues Pitágoras tiene la gran fama adquirida a lo largo de estos más de dos mil años a causa del famoso teorema que lleva su nombre, a saber, **EL TEOREMA DE PITÁGORAS**, que dice lo siguiente:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para comprender mejor el teorema de Pitágoras, vamos a realizar un dibujo en el que sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo dibujamos un cuadrado que tenga como lado a su lado respectivo.



Como fácilmente se puede observar, el cuadrado que se ha construido sobre la hipotenusa (5 . 5 = $\mathbf{5^2}$ = 25 cuadritos) tiene la misma superficie que la suma de los construidos sobre los catetos (3 . 3 + 4 . 4 = $\mathbf{3^2 + 4^2}$ = 9 + 16 cuadritos).

Y esto sucede siempre en cualquier triángulo que sea rectángulo, independientemente de las medidas de sus lados (hipotenusa y catetos).

El teorema de Pitágoras nos permite conocer la medida del tercer lado de cualquier triángulo rectángulo conociendo los otros dos lados. Para ello se utilizan las siguientes fórmulas que se deducen de la general del teorema.

FORMULA GENERAL :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

⊗ **Para calcular la hipotenusa "a" :**

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

⊗ **Para calcular el cateto "b" :**

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

⊗ **Para calcular el cateto "c" :**

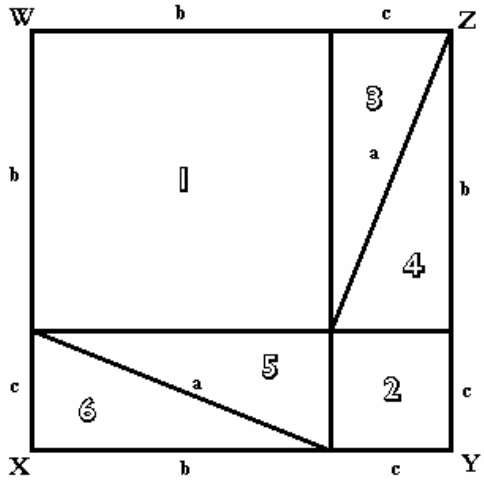
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

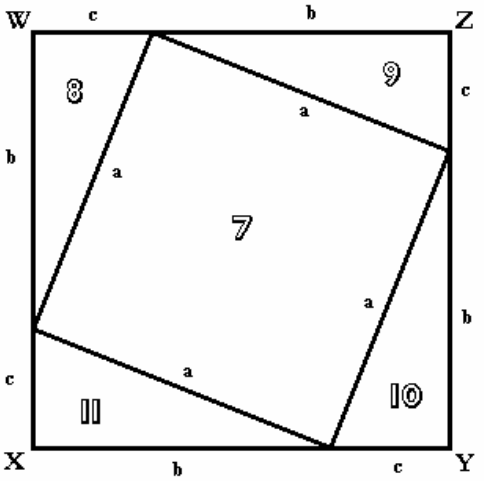
Veamos una demostración gráfica del teorema de Pitágoras.

A continuación aparecen dos cuadrados grandes iguales, **WXYZ**. En el primero hay dos cuadrados, los números 1 y 2, y cuatro triángulos iguales, los números 3, 4, 5 y 6. Observa que los cuatro triángulos son rectángulos, con el lado "a" como hipotenusa y los lados "b" y "c" como catetos, y también que el cuadrado número 1 tiene de lado al cateto "b" y el número 2 tiene de lado al cateto "c".

El segundo cuadrado grande, **WXYZ**, está formado por un cuadrado interior, el número 7, y otros cuatro triángulos rectángulos en las esquinas, los números 8, 9, 10 y 11.

Como los cuatro triángulos de las dos figuras son iguales, necesariamente los dos cuadrados 1 y 2 sumados tienen el mismo área que el cuadrado 7.

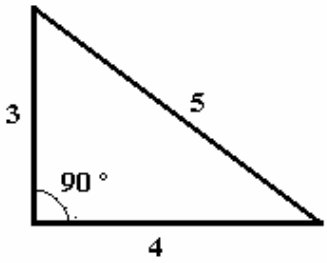




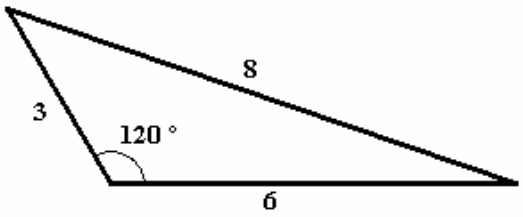
En los anteriores dibujos queda perfectamente demostrado que el cuadrado formado con la medida de la hipotenusa como lado es igual a la suma de los cuadrados formados teniendo como lados a los catetos.

Podemos saber si un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo, sin verlo, conociendo sólo la medida de sus tres lados. Veamos:

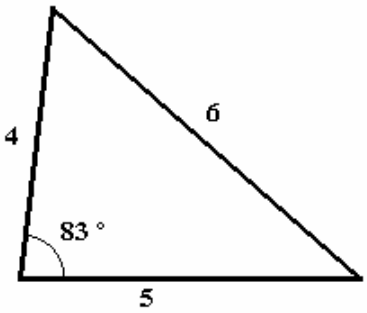
$5^2 = 4^2 + 3^2$; $25 = 16 + 9 = 25$



$8^2 > 3^2 + 6^2$; $64 > 9 + 36 = 45$



$6^2 < 4^2 + 5^2$; $36 < 16 + 25 = 41$



Si $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo es rectángulo.

Si $a^2 > b^2 + c^2$, el triángulo es obtusángulo.

Si $a^2 < b^2 + c^2$, el triángulo es acutángulo.

Como curiosidad, debes saber que tres **números** son **pitagóricos** cuando el cuadrado del mayor es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir, cuando en ellos se cumple el teorema de Pitágoras, o lo que es lo mismo, cuando los tres números son las medidas de los tres lados de un triángulo rectángulo. También se les suele llamar a los tres números **terna pitagórica.**

Con lo que llevamos de este tema, estamos ya preparados para hacer algunos ejercicios. Fíjate antes en los ejemplos resueltos de las dos páginas siguientes, y después haces éstos de aquí.

EJERCICIO Nº 1. ¿Qué tríos de números de la tabla siguiente son pitagóricos?

	Tríos de números		
Caso a)	15	8	17
Caso b)	13	11	5
Caso c)	7'5	10	12'5

EJERCICIO Nº 2.- Conociendo la medida de dos de los lados de un triángulo rectángulo, averigua el lado que falta en cada caso.

	hipotenusa "a"	cateto "b"	cateto "c"
Caso a)	a	3'2	2'4
Caso b)	65	52	c
Caso c)	22'5	b	13'5

✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳

Cuando una persona actúa de forma habitual con sentido común, posee capacidad de aprendizaje, tiene fuerza de voluntad, o sea, dominio de sí mismo, dispone de una considerable fortaleza mental, domina las habilidades sociales, casi nunca actúa de forma excitada, vehemente, insensata y/o alocada, se forma opinión de manera razonada y contrastada, suele estar a gusto consigo mismo, es decir, tiene una buena autoestima, en ocasiones saca a relucir su sentido del humor, tolera y valora en su medida a los demás, es educada, amante de su familia y amiga de sus amigos, solidaria, amena y sensible, bien, pues podemos decir entonces que posee una personalidad equilibrada, o mejor aún, muy equilibrada.

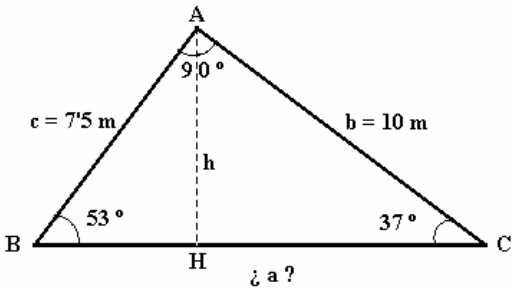
Esas personas –que desgraciadamente no abundan, porque poseer todas esas cualidades es muy difícil, casi inalcanzable para la gran mayoría– son a las que se les suele llamar de "cabezas bien amuebladas", y a las que todos deseamos tener a nuestro alrededor.

En realidad, conseguir una personalidad equilibrada en una persona es como hacer una excelente obra de artesanía, o sea, nada sencillo.

✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳✳

Veamos algunos ejemplos resueltos sobre el teorema de Pitágoras. En cada uno de los ejemplos hay una figura donde se conocen dos de los lados de cada triángulo rectángulo. Debes averiguar en todos la medida del tercer lado desconocido, que en unos casos será el cateto y en otros la hipotenusa.

EJEMPLO Nº 1.



⊗ Datos → ◦ Cateto "b" = 10 m ◦ Cateto "c" = 7'5 m ◦ ¿Hipotenusa "a"?

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras :

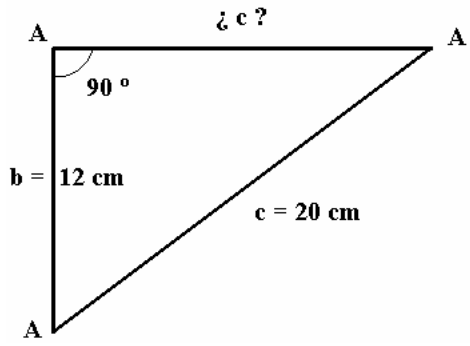
$a^2 = b^2 + c^2$

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{10^2 + 7'5^2} = \sqrt{100 + 56'25} =$

$= \sqrt{156'25} = 12'5 \text{ m}$

EJEMPLO Nº 2.



⊗ Datos → ◦ Hipotenusa "a" = 20 cm ◦ Cateto "b" = 12 cm ◦ ¿Cateto "c"?

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$a^2 = b^2 + c^2$

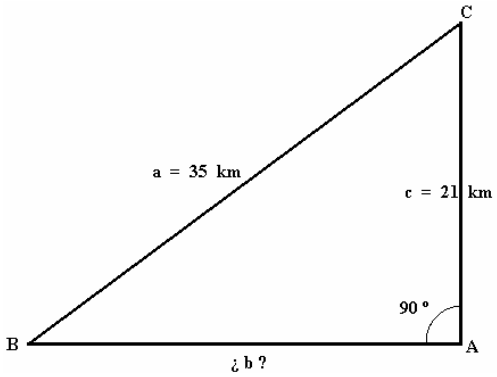
$a^2 - b^2 = c^2$

$\sqrt{a^2 - b^2} = c^2$

$c = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} =$

$= \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$

EJEMPLO Nº 3.



⊗ Datos → ◦ Hipotenusa "a" = 35 km ◦ Cateto "c" = 21 km ◦ ¿Cateto "b"?

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 - c^2 = b^2$

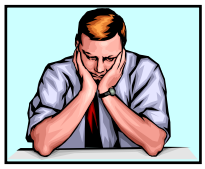
$\sqrt{a^2 - c^2} = b^2$

$b = \sqrt{35^2 - 21^2} = \sqrt{784} = 28 \text{ km}$

→ → → → → → → → → → → → → → → → →

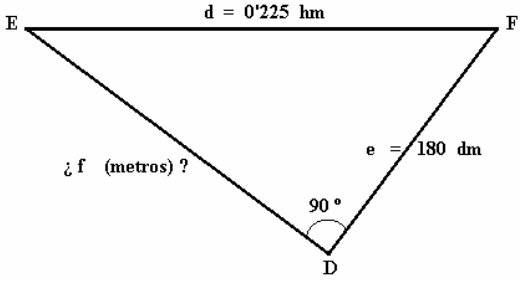
Los hábitos adquiridos, sean positivos o negativos, son difíciles de eliminar, y sobre todo aquellos que abundan en el quehacer cotidiano, sea éste referido a la convivencia familiar o a la profesional. Eso ha sido así toda la vida y, para bien y para mal, seguirá siendo.

Pero lo que nunca podremos decir, ejemplos hay por doquier para verificarlo, es que sea imposible ir cambiando ciertos hábitos de nuestra conducta hasta tal punto que parezca que casi los hemos invertido, es decir, que por encima de toda costumbre con fuerza enraizada en nuestra vida está nuestra voluntad de querer modificarla o cambiarla. Para ello, en primer lugar, se necesita mucha conciencia de que tenemos/debemos cambiarla, sea/n cual/es fuere/n la/s razón/es que nos impulsa/n a la modificación. Y, además de otras cosas, también es imprescindible una perseverancia y fortaleza que nos impulsen a no abandonar, a no dejarse vencer a pesar de las múltiples dificultades que las circunstancias de la vida nos presente para seguir sin cambio, con el hábito de siempre, con el peso negativo de esa/s costumbre/s impregnando nuestras vivencias.



Evidentemente, no todo lo negativo de nuestros hábitos podremos transformarlo; eso sería casi una perfección, y en la vida humana eso no existe; pero sí se pueden atajar para dirigirlos hacia el cambio positivo aquellos que son más significativos y nos minan más directamente en el día a día. Ésos, los que más influyen negativamente en nuestra vida, deben estar continuamente en el horizonte de nuestra mente para tratar de luchar contra su asentamiento en nuestra convivencia diaria.

EJEMPLO Nº 4.



⊗ Datos
- Hipotenusa "d" = 0'225 hm → 22'5 m
- Cateto "e" = 180 dm → 18 m
- ¿ Cateto "f" ?

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras :

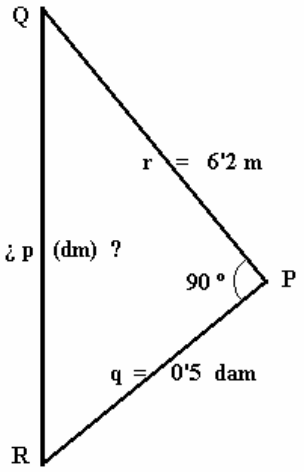
$$d^2 = e^2 + f^2$$

$$d^2 - e^2 = f^2$$

$$\sqrt{d^2 - e^2} = f^2$$

$$f = \sqrt{22'5^2 - 18^2} = \sqrt{506'25 - 324} = \sqrt{182'25} = 13'5 \text{ m}$$

EJEMPLO Nº 5.



⊗ Datos →
- Cateto "q" = 0'5 dam → 50 dm
- Cateto "r" = 6'2 m → 62 dm
- ¿ Hipotenusa "p" ?

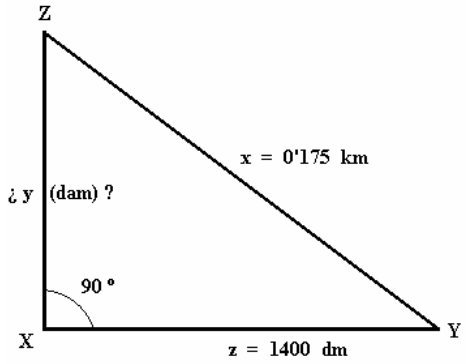
⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$$p^2 = q^2 + r^2$$

$$p = \sqrt{q^2 + r^2}$$

$$p = \sqrt{50^2 + 62^2} = \sqrt{2500 + 3844} = \sqrt{6344} = 79'6\ldots \text{ dm}$$

EJEMPLO Nº 6.



⊗ Datos →
- "x" = 0'175 km → 17'5 dam
- "z" = 1400 dm → 14 dam
- ¿ Cateto "y" ?

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$$x^2 = y^2 + z^2$$

$$x^2 - z^2 = y^2$$

$$\sqrt{x^2 - z^2} = y^2$$

$$y = \sqrt{17'5^2 - 14^2} = \sqrt{110'25} = 10'5 \text{ dam}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Desde bien pequeñitos no le damos ninguna importancia a las posturas que tenemos al sentarnos, al acostarnos, al hacer deporte o al realizar otras muy diversas actividades, y lo peor es que son pocas las familias que corrigen los vicios posturales de sus hijos, o si de vez en cuando lo hacen no son constantes en sus correcciones, seguramente porque tampoco le dan la importancia debida. Consecuentemente, con el paso de los años, a unos antes y a otros después, pero cada época con mayor aumento, se nos van presentando algunas de las muy diversas dolencias de espalda.

Estas molestias de espalda no suelen ser muy graves, pero indudablemente sí son siempre fastidiosas, inoportunas y a veces insoportables, si no se trata de otros problemas algo más graves que los habituales.

En nuestra espalda está la columna vertebral, formada por 33 vértebras (7 cervicales, 12 dorsales, 5 lumbares, 5 sacras y 4 coxígeas). Bueno esto te lo pongo para que te hagas la idea de la cantidad de huesos que movemos en los movimientos de nuestra espalda. Y esas vértebras se mueven diariamente quizás millares de veces, con lo que si las posturas que tomamos no son las más adecuadas, poco a poco se van deformando y algunos de los 23 discos intervertebrales que las separan se desgarran o se rompen, produciéndonos alguna fisura, protrusión o hernia que nos dará dolor repetido y persistente y nos reducirá nuestra calidad de vida.

¿Cómo te sientas habitualmente? En otra reflexión trataremos la forma correcta.

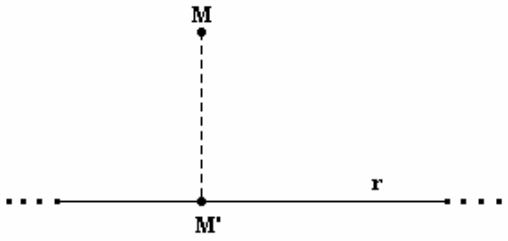
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

10.3.- Proyecciones.

❒ PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA.

La proyección de un punto sobre una recta es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta.

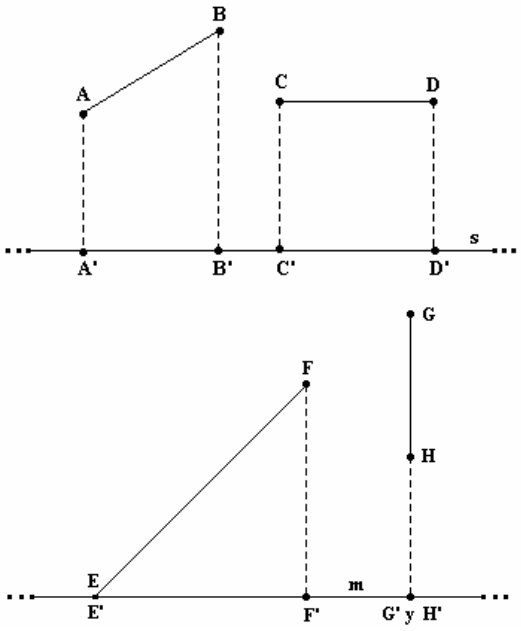
En la figura siguiente, la proyección del punto **M** sobre la recta **r** es el punto **M'**.



❒ PROYECCIÓN DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA.

La proyección de un segmento sobre una recta es la distancia entre las proyecciones de los extremos de dicho segmento.

En las figuras siguientes aparecen varios segmentos y sus proyecciones sobre las rectas "s" y "m".



Proyección de AB = A'B' ; Proyección de CD = C'D'
Proyección de EF = E'F' ; Proyección de GH = G' = H'

10.4.- Proporciones continuas.

Las proporciones continuas ya se han dado en el anterior libro **MATYVAL I** (tema 6). Aquí vamos a recordarlas brevemente:

Una proporción es una igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

⇒ Se llaman proporciones continuas a las que tienen los medios iguales.

⇒ En las proporciones continuas, a la letra o número que se repite se le llama "MEDIA/O PROPORCIONAL".

En la siguiente proporción, la media proporcional corresponde a la letra "x".

$$\text{En general} \Rightarrow \left\{\frac{a}{x} = \frac{x}{d}\right\} \rightarrow a \cdot d = x \cdot x$$

$$a \cdot d = x^2 \rightarrow x = \sqrt{a \cdot d} \rightarrow \text{para hallar la "x"}$$

$$\left\{\frac{4}{6} = \frac{6}{9}\right\} \rightarrow 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 \rightarrow 36 = 36$$

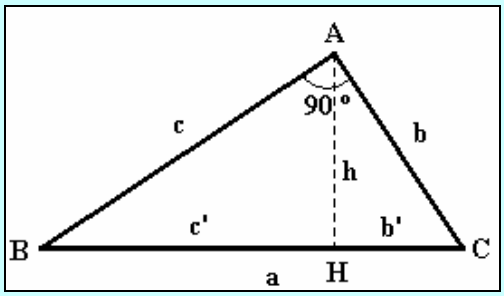
Es una proporción continua, y "6" es la MEDIA proporcional.

En los comienzos de este siglo XXI hay bastantes familias en las cuales el actuar de acuerdo con la palabra EXIGENCIA brilla por su ausencia. Si acaso existen unas exigencias mínimas impregnadas siempre de tanta amabilidad y envoltorio de delicadeza que en realidad son más bien sugerencias, consejos y peticiones que exigencias propiamente dichas.

Cuando desde la infancia no se ha educado correctamente en la exigencia, en el esfuerzo adecuado a cada edad, resulta que en los primeros años de adolescencia (1º, 2º y/o 3º de ESO) no estarán entrenados en esa fuerza de voluntad que les llevaría a la consecución de las metas propuestas. Y entonces la sensación de fracaso, generalmente inesperada, aparece, sobre todo en los padres. Si antes no se hubieran confundido los cariños y protecciones, necesarios y motivadores siempre pero acompañados de exigencias, con una buena educación y se hubiera ayudado y acompañado a los hijos a "sufrir" con el esfuerzo, probablemente esos hijos habrían aprendido a auto-ayudarse, sabiendo convivir con el esfuerzo y adquiriendo madurez, autonomía y responsabilidad.

10.5.- El teorema del cateto.

En un triángulo rectángulo, cada uno de los catetos es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.



Triángulo rectángulo → BAC

- Hipotenusa → "a" = $\overline{BC}$ (base)
- Catetos → "b" y "c" = $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$
- Altura → "h" = $\overline{AH}$
- **Proyecciones de los catetos :**
  - **Del cateto "c" → c' = $\overline{HB}$**
  - **Del cateto "b" → b' = $\overline{HC}$**
- a = c' + b' → $\overline{BC}$ = $\overline{HB}$ + $\overline{HC}$

Teorema del cateto :

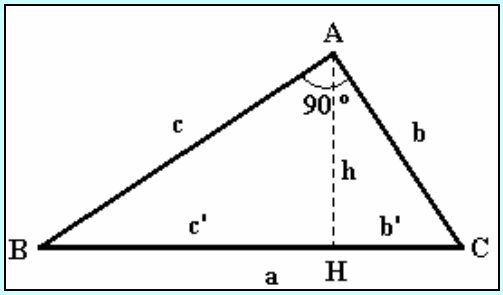
$$\left\{ \frac{\text{hipotenusa}}{\text{un cateto}} = \frac{\text{el mismo cateto}}{\text{proyección de ese cateto}} \right\}$$

Del cateto "c" : $\left[\frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \right] \rightarrow \begin{cases} a = \frac{c \cdot c}{c'} = \frac{c^2}{c'} \\ c = \sqrt{a \cdot c'} \\ c' = \frac{c \cdot c}{a} = \frac{c^2}{a} \end{cases}$

Del cateto "b" : $\left[\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} \right] \rightarrow \begin{cases} a = \frac{b \cdot b}{b'} = \frac{b^2}{b'} \\ b = \sqrt{a \cdot b'} \\ b' = \frac{b \cdot b}{a} = \frac{b^2}{a} \end{cases}$

10.6.- El teorema de la altura.

En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa, es decir, entre las proyecciones b' y c' de los dos catetos.



Triángulo rectángulo → BAC

- Hipotenusa → "a" = $\overline{BC}$ (base)
- Catetos → "b" y "c" = $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$
- Altura → "h" = $\overline{AH}$
- **Proyecciones de los catetos :**
  - **Del cateto "c" → c' = $\overline{HB}$**
  - **Del cateto "b" → b' = $\overline{HC}$**
- a = c' + b' → $\overline{BC}$ = $\overline{HB}$ + $\overline{HC}$

Teorema de la altura :

$$\left\{ \frac{\text{proyección b'}}{\text{altura}} = \frac{\text{altura}}{\text{proyección c'}} \right\}$$

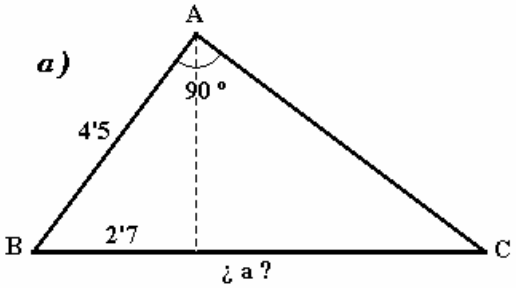
$\left[\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'} \right] \rightarrow \begin{cases} b' = \frac{h \cdot h}{c'} = \frac{h^2}{c'} \\ h = \sqrt{b' \cdot c'} \\ c' = \frac{h \cdot h}{b'} = \frac{h^2}{b'} \end{cases}$

No sirve de mucho aprenderse de memoria los tres teoremas, sino saber aplicarlos correctamente en cada uno de los ejercicios o problemas.

EJEMPLOS RESUELTOS:

Nº 1.- Aplicando el teorema del cateto, halla la medida de lo que te piden en cada figura.

a)



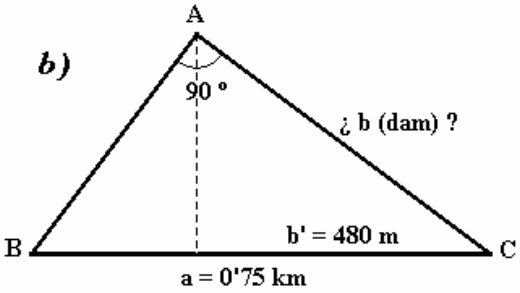
⊗ Datos → { c = 4'5 ; c' = 2'7 ; ¿ hipotenusa (a) ? }

[T. del cateto: $\frac{a}{c} = \frac{c}{c'}$] → $a \cdot c' = c \cdot c \rightarrow a = \frac{c^2}{c'}$

$$a = \frac{4'5^2}{2'7} = \frac{20'25}{2'7} = 7'5$$

---

b)



a = 0'75 km

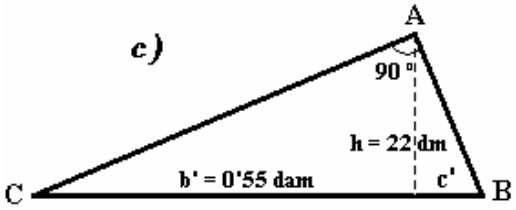
⊗ Datos → { a = 0'75 km = 75 dam ; b' = 480 m = 48 dam ; ¿ cateto (b), en "dam" ? }

[T. del cateto: $\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}$] → $a \cdot b' = b^2 \rightarrow \sqrt{a.b'} = b$

$$b = \sqrt{75.48} = \sqrt{3600} = 60\ dam$$

Nº 2.- Aplica el teorema de la altura para hallar lo que te piden en cada figura.

c)



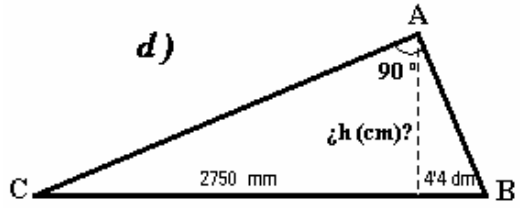
Calcular la proyección c' en metros

⊗ Datos → { h = 22 dm = 2'2 m ; b' = 0'55 dam = 5'5 m ; ¿ c' (metros) ? }

[T. de la altura: $\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'}$] → $c' = \frac{h^2}{b'} = \frac{2'2^2}{5'5} = 0'88\ m$

---

d)



⊗ Datos → { b' = 2750 mm = 275 cm ; c' = 4'4 dm = 44 cm ; ¿ h (centímetros) ? }

[T. de la altura: $\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'}$] → { $b'.c' = h.h \rightarrow h^2 = b'.c'$; $h = \sqrt{275.44} = 110\ cm$ }

¿Has observado alguna vez en televisión imágenes e informes sobre escuelas –mejor dicho, cabañas adaptadas– en las que se dan clases en los países del llamado tercer mundo, o sea, de las zonas subdesarrolladas del planeta? ¿Te fijaste en los medios de que disponen? ¿Reparaste si tenían calefacción o aire acondicionado? ¿Notaste si disponían de buenas mesas o pupitres? ¿Percibiste si tenían mochilas, libros y otros materiales? ¿Te percataste si disponían de mapas, televisión u ordenadores? ¿Advertiste si su ropa era de marca? ¿Distinguiste si había campos de deportes? Seguramente, la mayoría de tus respuestas serán negativas, porque había pocas de todas esas cosas.

¿Por qué piensas tú que a pesar de faltarles todos esos medios están tan atentos los alumnos de esos lugares? ¿Por qué piensas tú que poseen un excelente comportamiento y una envidiable disciplina en sus "aulas"? ¿Por qué piensas tú que tienen tanto afán y deseos de aprender? ¿Por qué piensas tú que tienen tanto respeto a sus profesores? ¿Por qué piensas tú que quizás se ponen tristes cuando les llegan las vacaciones y no pueden asistir a las clases? ¿Por qué piensas tú que están siempre dispuestos a esforzarse sin quejas ni lamentos?

Y ahora la pregunta del millón: ¿Por qué piensas tú que por aquí, en este mundo "superdesarrollado", faltan muchas, o casi todas, de esas virtudes y cualidades que tienen los alumnos de esas partes de "nuestro" planeta, a pesar de disponer de todos los medios de los que ellos carecen?

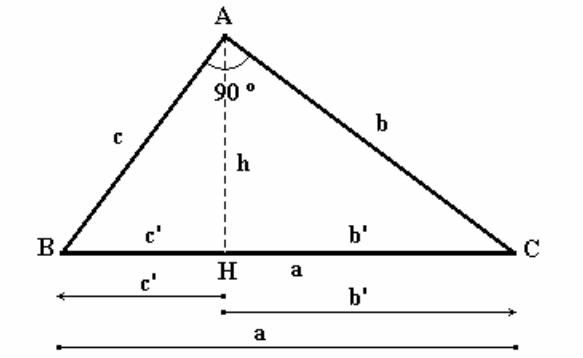
10.7.- Aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Y también de los teoremas del cateto y de la altura.

a) Calcular la medida de ocho datos de un triángulo rectángulo conociendo sólo dos.

En cualquier triángulo rectángulo podemos considerar, entre otros, estos **ocho datos** de medidas, a saber:

1. Hipotenusa "a".
2. Cateto "b".
3. Cateto "c".
4. Altura "h".
5. Proyección c'.
6. Proyección b'.
7. Perímetro.
8. Área.

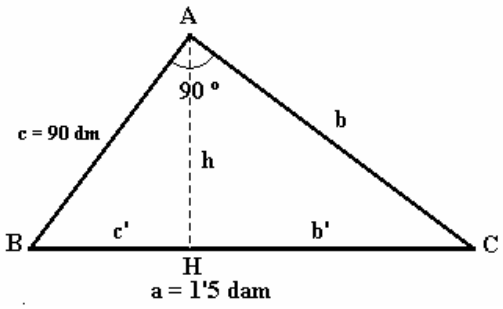


Los 8 datos citados son los siguientes:
LADOS: a (hipotenusa), b (cateto mayor), c (cateto menor).
ALTURA: h.
PROYECCIONES: b', c'.
PERÍMETRO = a + b + c
ÁREA = a.h / 2 , o también : b.c / 2

Bien, pues aplicando los teoremas explicados podemos calcular los ocho datos conociendo sólo dos de ellos. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO Nº 1.

Con la obligación de aplicar los tres teoremas (Pitágoras, cateto y altura), en el orden que desees, calcular la medida de los otros seis datos conociendo las medidas de la hipotenusa y un cateto. O sea, averiguar el otro cateto, las dos proyecciones, la altura, el perímetro y el área.



Ajustes previos: $\begin{cases} a = 1'5 \text{ dam} \rightarrow 1'5.10 = 15 \text{ m} \\ c = 90 \text{ dm} \rightarrow 90:10 = 9 \text{ m} \end{cases}$

⊗ Aplicamos el TEOREMA DE PITÁGORAS:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

⊗ Aplicamos el TEOREMA DEL CATETO:

$$\left[\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}\right] \rightarrow b' = \frac{b^2}{a} = \frac{12^2}{15} = 9'6 \text{ m}$$

$$\left[\frac{a}{c} = \frac{c}{c'}\right] \rightarrow c' = \frac{c^2}{a} = \frac{9^2}{15} = 5'4 \text{ m}$$

⊗ Aplicamos el TEOREMA DE LA ALTURA:

$$\left[\frac{b'}{h} = \frac{h}{c'}\right]; h = \sqrt{b'.c'} = \sqrt{9'6.5'4} = \sqrt{51'84} = 7'2 \text{ m}$$

⊗ Perímetro = a + b + c = 15 + 12 + 9 = 36 m

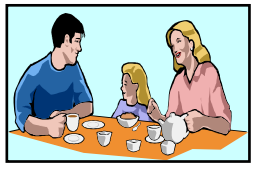
⊗ Área $= \frac{a \,.\, h}{2} = \frac{15 \,.\, 7'2}{2} = 54 \text{ m}^2$

⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩⇩

Veamos un ejemplo de conversación entre jóvenes sobre temas poco frecuentes, desgraciadamente.

JACINTO : *"Me comentaba mi novia que al entrar y salir de cualquier local se debe seguir siempre el refrán que dice lo siguiente: 'antes de entrar dejen salir'. Aunque una buena norma de educación, como ya hemos visto anteriormente, es ceder el paso a las personas mayores y señoritas, independientemente de que vayan a entrar o salir".*

LOURDES : *"Hablando de buenos hábitos: en mi casa a la hora de comer me recuerdan muchas veces que no se deben sorber (beber aspirando) las comidas líquidas, porque causa muy mal efecto".*



CARMEN : *"Yo no sabía hasta hace poco que cuando una se nombra entre otros debe hacerlo en último lugar".*

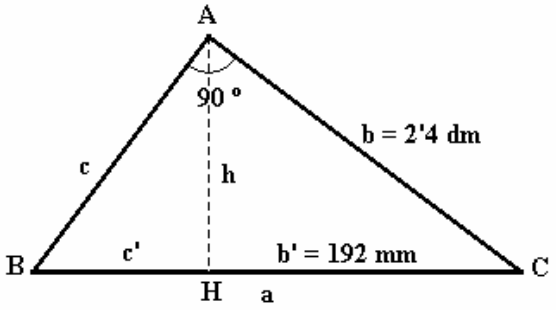
MARCELO : *"El otro día me enteré de que no es educado señalar a las personas, es decir, apuntar con nuestro dedo índice cuando nos estamos refiriendo a ellas desde una calle, un salón, etc".*

¿ Cosas raras, o
Urbanidad, buenos modales, buenas costumbres y buena educación ?

⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧⇧

EJEMPLO Nº 2.

Con la obligación de aplicar los tres teoremas (Pitágoras, cateto y altura), en el orden que desees, calcular la medida de los otros seis datos conociendo las medidas de un cateto y su proyección sobre la hipotenusa, o sea, hallar la hipotenusa, la otra proyección, la altura, el otro cateto, el perímetro y el área.



Datos → { b = 2'4 dm → 2'4.100 = 240 mm ; b' = 192 mm ; ¿a? ¿c'? ¿h? ¿c? ¿p? ¿A? }

⊗ Aplicamos el TEOREMA DEL CATETO :

$$\left[\frac{a}{b}=\frac{b}{b'}\right] \rightarrow a=\frac{b^2}{b'}=\frac{240^2}{192}=300\ mm$$

⊗ Aplicamos el SENTIDO COMÚN :

$$a = b' + c' \quad \begin{cases} c' = a - b' \\ c' = 300 - 192 = 108\ mm \end{cases}$$

⊗ Aplicamos el TEOREMA DE LA ALTURA :

$$\left[\frac{b'}{h}=\frac{h}{c'}\right] \rightarrow h=\sqrt{b'.c'}$$

$$h=\sqrt{192\,.\,108}=\sqrt{20736}=144\ mm$$

⊗ Aplicamos el TEOREMA DE PITÁGORAS :

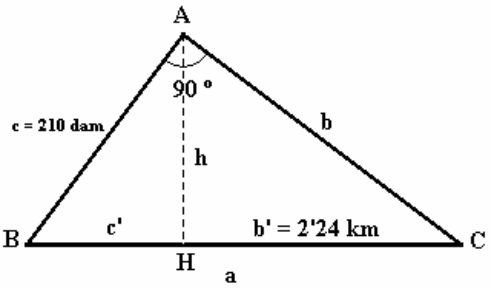
$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{300^2-240^2}=180\ mm$$

⊗ Perímetro = 300 + 240 + 180 = 720 mm

⊗ Área $=\frac{b\,.\,c}{2}=\frac{240\,.\,180}{2}=21.600\ mm^2$

EJEMPLO Nº 3.

Con la obligación de aplicar los tres teoremas (Pitágoras, cateto y altura), en el orden que desees, calcular la medida de los otros seis datos conociendo las medidas de un cateto y la proyección del otro, o sea, hallar la hipotenusa, la otra proyección, el otro cateto, la altura, el perímetro y el área.



Datos → { c = 210 dam → 210:10 = 21 hm ; b'=2'24 km → 2'24.10 = 22'4 hm ; ¿a? ¿c'? ¿b? ¿h? ¿p? ¿A? }

¡ OJO ! Más bien para 2º y 3º de E.S.O. Este ejercicio es bastante más difícil que los anteriores, porque no es posible aplicar al principio ningún teorema con el que conozcamos otro nuevo dato. En realidad, hay que aplicar dos teoremas para obtener una ecuación de 2º grado con la que calcular la hipotenusa. Después ya es más sencillo.

⊗ Aplicamos el TEOREMA DEL CATETO y el de PITÁGORAS.

$$\left[\frac{a}{b}=\frac{b}{b'}\right] \rightarrow b^2 = a.b' = a.22'4 = 22'4\ a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 22'4\ a + 441$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado :

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -22'4 \\ c = -441 \end{cases}$$

$$a=\frac{-(-22'4)\pm\sqrt{22'4^2-4.1.441}}{2a}=$$

$$a=\frac{22'4\pm\sqrt{2265'76}}{2a}=\frac{22'4+47'6}{2a}=$$

$$a=\frac{70}{2}=35\ hm$$

⊗ Aplicamos el SENTIDO COMÚN :

$$a = b' + c' \quad \begin{cases} c' = a - b' \\ c' = 35 - 22'4 = 12'6\ hm \end{cases}$$

⊗ Aplicamos el TEOREMA DE PITÁGORAS :

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{35^2-21^2}=28\ hm$$

⊗ Aplicamos el TEOREMA DE LA ALTURA :

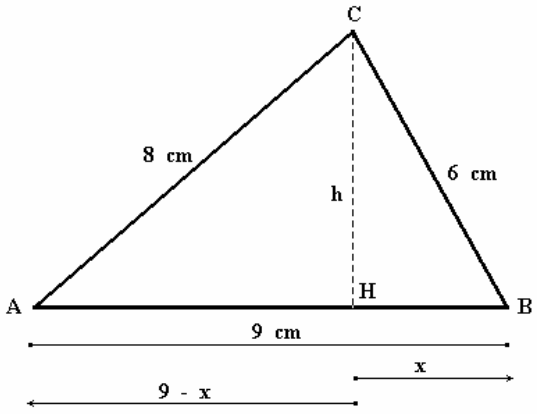
$$\left[\frac{b'}{h}=\frac{h}{c'}\right] \rightarrow h=\sqrt{b'.c'}$$

$$h=\sqrt{22'4\,.\,12'6}=\sqrt{282'24}=16'8\ hm$$

⊗ Perímetro = a + b + c = 35 + 28 + 21 = 84 hm

⊗ Área $=\frac{a\,.\,h}{2}=\frac{35\,.\,16'8}{2}=294$ "ha"

b) Calcular el área de triángulos no rectángulos conociendo sus lados.



Al trazar la altura sobre uno de los lados de cualquier triángulo no rectángulo, éste queda dividido en dos triángulos rectángulos que tienen como cateto común a dicha altura. Veamos como se llega, partiendo de los tres lados y aplicando el teorema de Pitágoras, a conocer la medida de la altura y, consecuentemente, el área de ABC.

Triángulo BHC → { Hipotenusa = 6 cm; Cateto 1 = h; Cateto 2 = x }

$6^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = 36 - x^2$

Triángulo AHC → { Hipotenusa = 8 cm; Cateto 1 = h; Cateto 2 = 9 – x }

$8^2 = h^2 + (9-x)^2 \Rightarrow h^2 = 64 - (9-x)^2$

Igualamos los 2os miembros de las ecuaciones:

$36 - x^2 = 64 - (9 - x)^2$

Resolvemos esta ecuación, de 2º grado en un principio, pero que se reduce a una de grado 1.

$36 - x^2 = 64 - 81 - x^2 + 18x$

$x^2 - x^2 - 18x = 64 - 81 - 36$

$-18x = -53$

$x = \frac{-53}{-18} = 2'94\ldots$ cm

Ahora, por Pitágoras, hallamos la altura:

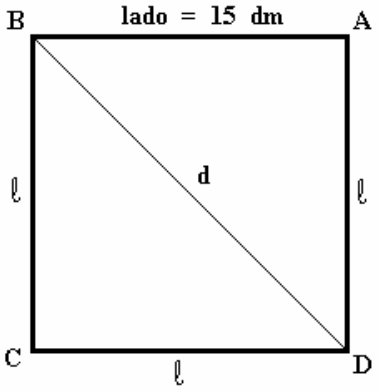
$h^2 = 6^2 - x^2 \Rightarrow h = \sqrt{36 - 2'94^2} = 5'23\ldots$ cm

Y ya sólo nos queda el área de ABC:

$A_{ABC} = \frac{c.h}{2} = \frac{9.5'23}{2} = 23'535\ cm^2$

Ha resultado bastante largo, verdad. Bueno, ha sido necesario para explicarlo bien con todos los pasos, pero cuando tengas que hacer uno parecido ya no será tan extenso.

c) Calcular la diagonal de un cuadrado.



Toda diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos rectángulos, BAD y BCD. En cualquiera de ellos se puede aplicar el teorema de Pitágoras y calcular la medida de la diagonal, que es la hipotenusa. Veamos:

Triangulo BCD → { hipotenusa → d; catetos → ℓ y ℓ = 15 dm }

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$

$d = \sqrt{2\ell^2}$

$d = \sqrt{2.15^2} = \sqrt{450} = 21'21\ldots$ dm

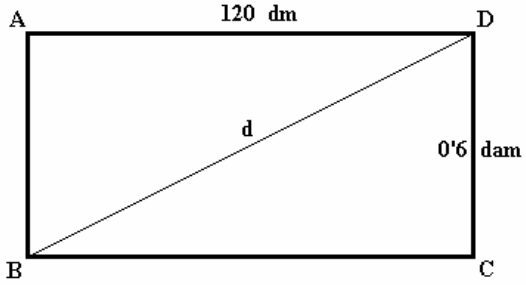
Lee detenidamente esta reflexión. Piensa en el significado de cada palabra. Medita si tienes algo que ver con algunas de ellas. Considera si en tu entorno (familia, amigos, compañeros, etc.) abundan, o todo lo contrario.

Sin diálogo con padres – Pocos esfuerzos – Pasotas del estudio – Mucha comodidad – Suspensos – Marcas y modas – Despilfarro – Maleducado – Acumular por acumular – Culto al cuerpo – Ser "borrego" – Discriminación – Aprovecharse de las personas – Moto para acá y para allá – Tabaco – Botellón – Alcohol – Violencia – Poca esperanza . . .

Si te sientes identificado con varios de todos estos "valores" negativos de la sociedad actual, sería muy conveniente poner remedio cuanto antes, al menos disminuyendo la cantidad y práctica, porque si no es así . . .

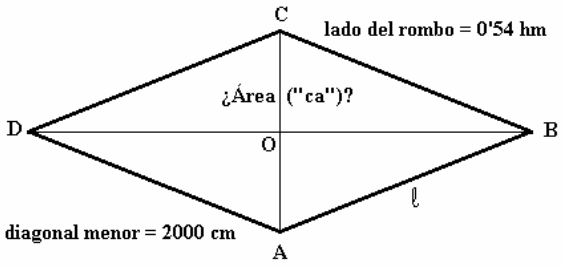
d) Calcular la diagonal de un rectángulo.

Sigue el mismo procedimiento que para la diagonal del cuadrado, a ver cómo te sale a ti averiguar cuántos metros mide la diagonal del rectángulo de la figura.



e) Calcular las diagonales, o el lado, de un rombo.

Si nos dan las diagonales, podemos calcular el lado, y si nos dan el lado y una diagonal calculamos la otra, que es el caso de la figura siguiente.



Datos → $\begin{cases} \ell = 0'54 \text{ hm} \rightarrow 0'54 \cdot 100 = 54 \text{ m} \\ \overline{AC} = 2000 \text{ cm} \rightarrow 2000 : 100 = 20 \text{ m} \\ ¿\overline{OA}? \; ¿\overline{OB}? \; ¿\overline{BD}? \; ¿\text{Área (ca)}? \end{cases}$

$$\overline{OA} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m}$$

Aplicamos Pitágoras en el triángulo AOB :

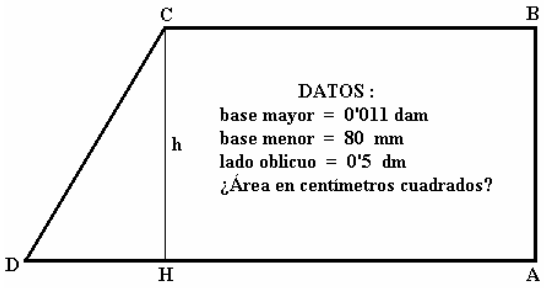
$$\overline{OB} = \sqrt{\ell^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{54^2 - 10^2} = \sqrt{2816} \simeq 53'1 \text{ m}$$

$$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot 53'1 = 106'2 \text{ m}$$

$$A_{\text{Rombo}} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{106'2 \cdot 20}{2} = 1.062 \text{ "ca"}$$

f) Calcular las diagonales, altura o lado oblicuo de un trapecio.

A partir de unos datos conocidos en un trapecio, sea isósceles o rectángulo, se pueden ir conociendo otros datos al aplicar el teorema de Pitágoras. Veamos un ejemplo con un trapecio rectángulo:



⊗ Ajustes iniciales :

$\begin{cases} \text{base mayor} = \overline{AD} \rightarrow 0'011 \cdot 1000 = 11 \text{ cm} \\ \text{base menor} = \overline{CB} \rightarrow 80 : 10 = 8 \text{ cm} \\ \text{lado oblicuo} = \overline{CD} \rightarrow 0'5 \cdot 10 = 5 \text{ cm} \\ \overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH} = \overline{AD} - \overline{CB} = 11 - 8 = 3 \text{ cm} \end{cases}$

El triángulo de la izquierda, CHD, es rectángulo. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura "h" :

$$h^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DH}^2$$

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2} =$$

$$\text{Área} = \frac{(11 + 8) \cdot 4}{2} = \frac{76}{2} = 38 \text{ cm}^2$$

A continuación aparecen palabras sobre las cuales me gustaría que reflexionaras. ¿Crees que abundan entre tus amistades? ¿Y en tu forma de vida?

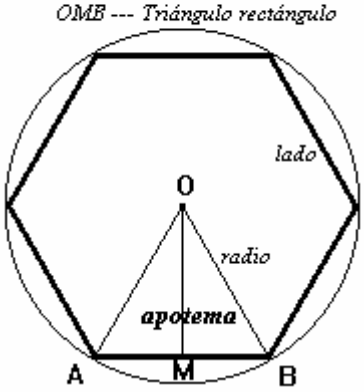
Buenas relaciones con padres – Diálogo –
Buena educación – Disciplina – Respeto –
Fuerza de voluntad – Horas de estudio – Deporte –
Afán de superación – Constancia –
Dominio de sí mismo – Autoestima –
Buenos m odales – Tolerancia –
Excelencia en el trabajo – Saber escuchar –
Solidaridad – Afecto – Tenacidad – Amabilidad –
Compañerismo – Honradez – Ser auténtico –Amor –
Esperanza en el futuro . . .

Tener todas estas cualidades y valores es muy difícil, casi imposible. Pero sería muy provechoso para ti intentar tener la mayor cantidad de ellos posible. Tu vida, de esa forma, se enriquecerá notablemente.

g) Calcular la apotema de un polígono regular.

El caso más conocido y aplicado es el cálculo de la apotema en un hexágono regular. Recuerda que el radio de la circunferencia circunscrita a un hexágono regular es igual al lado de dicho polígono. Sabiendo esto, vamos a ver que con sólo conocer el lado del hexágono regular o el radio de su circunferencia circunscrita y aplicando el teorema de Pitágoras se puede calcular la medida de la apotema.

OB --- Radio de la circunferencia circunscrita al hexágono regular.
OM --- Apotema del hexágono.
MB = AM = mitad del lado
OMB --- Triángulo rectángulo



⊗ Datos $\begin{cases} \circ \text{ lado } (\overline{AB}) = \text{radio } (\overline{OB}) = 24 \text{ dam} \\ \circ \text{ ¿apotema } (\overline{OM}) \text{ en "m" ?} \end{cases}$

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OMB :

$\langle$ hipotenusa = $\overline{OB}$ = 24 dam → radio
cateto mayor = $\overline{OM}$ = → apotema
cateto menor = $\overline{MB} = \frac{\text{lado}}{2} = \frac{24}{2} = 12$ dam $\rangle$

$\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2$

$\overline{OM}$ (apotema) = $\sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{MB}^2}$

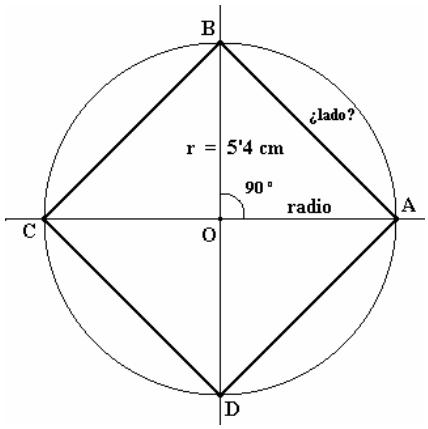
$a_p = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{432} = 20'78...$ dam

⊗ Ajuste final :

$a_p = 20'78...$ dam → $20'78 \cdot 10 =$ **207'8 m**

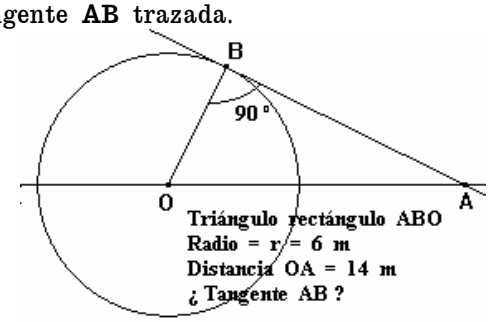
h) Calcular el lado de un cuadrado inscrito.

En la figura siguiente aparece un cuadrado, **ABCD**, inscrito en una circunferencia de radio 5'4 cm. Observa que hay un triángulo rectángulo, **AOB**, en el que aplicando el teorema de Pitágoras podemos calcular la medida del lado de cuadrado. Hazlo tú.



i) Calcular la tangente a una circunferencia por un punto exterior a ella.

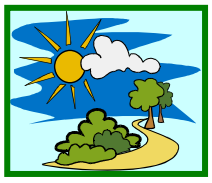
Averigua tú también la medida de la tangente **AB** trazada.



Ecología: Ciencia que estudia las relaciones de los seres vivos entre sí y con su entorno.

Creo que casi todos tenemos ya conciencia de los problemas que nuestra forma de vida actual está causando en el orden y equilibrio de la naturaleza.

¿Nos preocupamos todo lo que podemos, a nivel individual, del cuidado de la Tierra? Seguramente muchos pondremos objeciones a esta pregunta diciendo que quienes tienen que resolver estos graves problemas son los respectivos gobiernos de los países industrializados, y eso es verdad, pero no toda la verdad, porque uno puede hacer pequeñas cosas simples que antes no hacía para colaborar en el cuidado del medio ambiente.



Podríamos relacionar aquí muchas de ellas, pero basta que reflexiones un poco para que tú mismo descubras gran cantidad de pequeños detalles que puedes modificar en tu vida diaria para poner tu pequeño grano de arena en la solución de este grave problema que a todos nos concierne. Desde que nos levantamos hasta que nos acostamos (agua, papel, plásticos, luces, gas, ropas, fuegos, humos, basura, etc.) podemos mejorar la relación con nuestro entorno, sólo es cuestión de una actitud de compromiso y responsabilidad individual ante nuestro "viejo" planeta.

10.8.- Ejercicios y problemas para resolver.

1.- Calcula el lado que falta en cada uno de los siguientes apartados que corresponden a datos sobre triángulos rectángulos.

	hipotenusa	cateto 1	cateto 2
a)	¿...?	3 cm	4 cm
b)	15 dm	9 dm	¿...?
c)	25 m	¿...?	24 m
d)	¿ m ?	0'21 hm	280 dm
e)	0'8 m	400 mm	¿dm?
f)	¿km?	42 dam	5'6 m
g)	0'45 m	0'27 m	¿...?
h)	¿...?	143'7 cm	191'6 cm

2.- Calcula el dato que falta en cada uno de los siguientes apartados, sabiendo que los dos datos que se conocen corresponden a triángulos rectángulos. Debes aplicar el teorema del cateto o de la altura según convenga.

	hipotenusa	cateto 1	proyección
a)	500 mm	18 cm	¿ dm ?
c)	25 m	¿ m ?	16 m
e)	¿ ... ?	625 hm	0'5 km
g)	500 m	¿ dam ?	1'8 hm

	altura	proyección 1	proyección 2
b)	120 cm	2'4 m	¿ ... ?
d)	¿ mm ?	4'5 cm	5 mm
f)	410 dam	¿ hm ?	2'05 mam
h)	¿ cm ?	81 cm	0'09 m

3.- El lado de un triángulo equilátero mide 8 cm. Halla su altura.

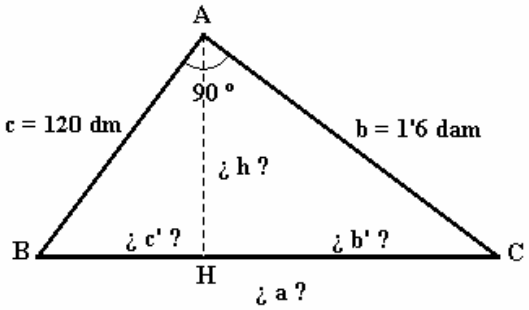
4.- Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 16 centímetros.

5.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 30 y 40 dm. ¿Cuánto miden sus proyecciones sobre la hipotenusa?

6.- Una escalera de mano está apoyada en la pared. El pie de la escalera está separado de la pared una distancia de 0'56 decímetros. Si la escalera mide 1'25 decámetros, ¿cuánto mide en "m" la altura del suelo a la parte superior de la pared donde se apoya la escalera?

7.- Un rectángulo tiene 100 mm de base y 0'6 dm de altura. Halla su diagonal en cm.

8.- Calcula todo lo que te piden en la figura siguiente, partiendo de los dos datos que te dan.



Además, el perímetro y el área.
Lo haces todo en metros. Bueno, el área en metros cuadrados.

Adolfo y Águeda visitan un hipermercado en épocas de rebaja. En un cartel de las múltiples ofertas con las que son "bombardeados" pone: "Zapatos de piel a 3'5 €". Adolfo se compró un par de zapatos, ya que no se dejó aconsejar por su amiga. Águeda hizo uso de su sentido común, porque no era lógico ni encajaba en sus valoraciones que pudieran vender unos verdaderos zapatos de piel por esa cantidad.

Tener sentido común es saber actuar de forma simple sin tener miedo a obrar de manera sencilla, sin que a uno le preocupe aparecer como persona tonta, sin buscarle excesivas dificultades a las cosas que no las presentan. Habitualmente, la gente que posee una mente más lúcida y ordenada es la que sabe actuar de forma más sencilla, o sea, la que posee un grado mayor de sentido común.

Muchas veces dudamos de nuestros pensamientos o decisiones porque imaginamos que cómo va a ser eso o aquello tan simple y sencillo, que cómo va a ser tan natural la respuesta, y muy frecuentemente complicamos de tal manera nuestra solución que dejamos a un lado el revulsivo contra ese temor a parecer obvio y llano: el sentido común. Sucede entonces que nuestra actuación se convierte en compleja, cuando en absoluto lo requería, lo que nos conduce a actuar sin sentido común.

9.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo e isósceles mide $\sqrt{128}$ dam. Calcula la longitud de los catetos y el área en "ca".

10.- Sabiendo que los catetos de un triángulo rectángulo miden 51 y 68 cm, ¿cuántos mm mide su altura sobre la hipotenusa?

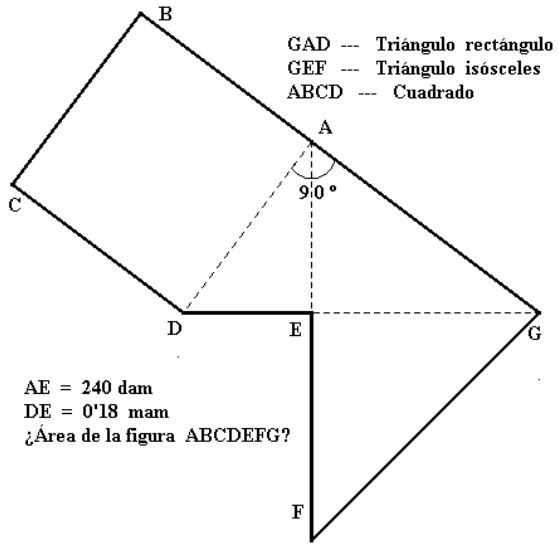
11.- ¿Cuántas "ha" mide un triángulo rectángulo cuyas proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 6'3 y 11'2 km?

12.- Si la diagonal de un cuadrado mide $\sqrt{162}$ m, ¿cuántos cm^2 tiene de superficie?

13.- El perímetro de un hexágono regular es de 144 cm. Calcula su área.

14.- Gabriel, el "profe" de "mate" en el Primer Ciclo de E.S.O., ha medido los lados de un triángulo obteniendo los siguientes datos: 37'5 cm, 62'5 cm y 50 cm. ¿Sabes clasificar, según sus lados y ángulos, de qué triángulo se trata?

15.- Calcula el precio de un terreno que viene representando en la figura siguiente, sabiendo que cuesta a razón de 50.000 € / "ha".
NOTA : Debes aplicar los tres teoremas estudiados.



16.- Expresa la altura de un triángulo equilátero en función del lado.

17.- ¿Cómo es posible calcular el área de un triángulo rectángulo sin conocer ni calcular la altura sobre la hipotenusa?

18.- Los lados de un triángulo isósceles miden 10, 10 y 20 cm, respectivamente. Calcula su área.

19.- Dibuja un trapecio rectángulo con los siguientes datos:
→ Base mayor = 8 cm.
→ Base menor = 5 cm.
→ Altura = 4 cm.
Calcula su perímetro y su área.

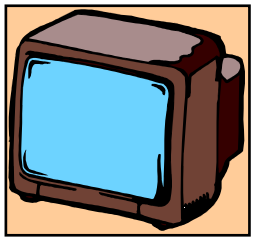
20.- La diagonal de un rectángulo mide 103'5 dam y su altura 8.280 dm. ¿Cuántas "ca" mide su superficie?

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Opiniones diversas sobre la televisión:

ELBA: *"Desde luego, sin la televisión me aburriría horas y horas cada noche".*

TEÓFILO: *"A mí no me atraía mucho antes, la verdad. Pero desde hace unos años, mejor dicho, desde el primer programa de "Gran hermano", me enganchó y no me los pierdo ninguno".*



PAULINO: *"Yo me cabreo mucho porque no ponen los buenos partidos en las cadenas que no son de pago, y hay que ir fuera de casa a verlos, con lo bien que se vería en casa".*

RUFINA: *"Yo paso de tele. La tele te emboba, te engancha, te adormece. No te permite conversar. Y a mí, con lo que me gusta leer, pues mejor que no tuviera tele en mi casa, para el uso que le doy...".*

ADELAIDA: *"Mira, si no tuviéramos tele, cuando estamos toda la familia en casa, nos aburriríamos enormemente. No tendríamos de qué hablar, y seguramente mi padre discutiría más con mi madre, y mis hermanos igual".*

TRINITARIO: *"En general, pienso que la tele es casi todo basura. Hay unos pocos programas que casi merecen la pena, pero son tan pocos... Los niños, chicos y jóvenes de hoy día están marcados –muy mal, por cierto- por la deformante caja tonta casi desde que nacen. Y encima nos dicen que ponen los programas que la gente quiere ver. ¡Qué gran falsedad! Si nos pusieran programas formativos, cultos, de valores humanos y de verdadera valía, la gente los vería mejor que la inmundicia que abunda ahora".*

DIOFANTA: *"Con los estupendos programas como "Gran Hermano", "El Bus", "Operación Triunfo", "Crónicas marcianas", etc., nos mantienen ilusionados a millones de personas durante varios meses. Y eso es un gran servicio a la sociedad".*

¿ Qué lugar ocupa para ti la televisión ?
Si tuvieras hijos, ¿ te gustaría que vieran mucha televisión para educarse mejor ?
¿ Qué opinas de ella, de la tele de nuestro tiempo ?

21.- Pregunta algo complicada: ¿Es posible que conociendo sólo la hipotenusa de un triángulo rectángulo podamos calcular su altura, los catetos, las proyecciones, el perímetro y su área? ¿Cómo tendría que ser? Explica brevemente, si es posible, cómo se haría.

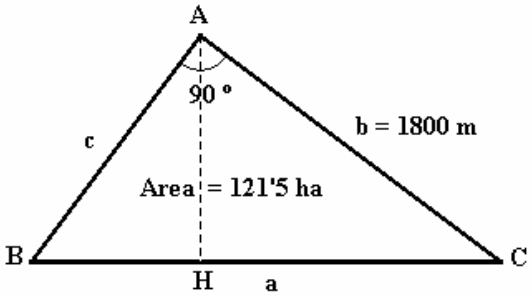
22.- De un triángulo rectángulo se conocen los siguientes datos :

- ❒ Un cateto = 71'2 dm
- ❒ Uno de sus ángulos = 1 º
- ❒ La hipotenusa, que mide en dm lo que el ángulo desconocido en grados.

Averigua el otro cateto, la altura, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, el perímetro y el área.

23.- Las diagonales de un rombo miden entre las dos 35 cm. Si una de ellas es ¾ de la otra, ¿cuánto mide su perímetro y su área?

24.- Ayudándote de los datos expuestos, averigua el perímetro del triángulo que aparece en la figura siguiente.



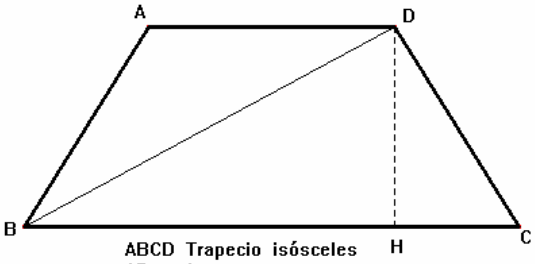
25.- ¿Cuántos cm^2 mide el área de un hexágono regular si el diámetro de la circunferencia circunscrita mide 20 dm?

26.- ¿Cuántos metros tiene la altura de una torre que está proyectando una sombra de 3'2 decámetros, si la distancia que hay entre el punto más alto de la torre y el extremo más distante de la sombra es de 400 decímetros?

27.- Se han construido sendos cuadrados sobre la hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo cuyas áreas respectivas son 108'16 dm^2 y 16 dm^2. ¿Cuántos cm tiene de perímetro dicho triángulo?

28.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 12 cm. ¿Cuántas "ca" tiene un cuadrado construido sobre uno de los catetos?

29.- Calcula el área del triángulo ABD de la figura siguiente en metros cuadrados.



ABCD Trapecio isósceles
AD = 4 m
BC = 1000 cm
CD = 0'5 dam
¿Área del triángulo ABD?

30.- Se va a embaldosar una sala rectangular de 10 metros de largo cuya diagonal mide 12'5 metros. Si cada m^2 de baldosas cuesta a razón de 17'50 €, ¿cuánto se importa la obra?

EXTRA "A".- Conociendo que la hipotenusa de un triángulo mide 24 cm y la altura sobre ella 50 cm, calcula lo siguiente:

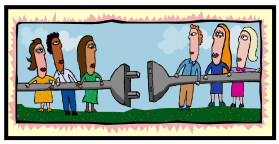
Los dos catetos – Las proyecciones – El perímetro.

EXTRA "B".- Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 12, 10 y 8 cm. ¿Qué clase de triángulo es?

[Cosecha de cada ejercicio extra para el 1º que lo presente bien hecho y sepa explicarlo correctamente = + 0'25]

❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒

Una persona es tolerante con las demás cuando posee una capacidad para saber escuchar y aceptar, cuando está dispuesta a valorar diversas formas de entender la vida, cuando admite que ante hechos y situaciones semejantes y/o muy diferentes se pueden dan también enfoques y puntos de vista distintos de los suyos, cuando reconoce que toda persona merece un respeto y una consideración independientemente de su posición social, de su cultura, de su religión, de su raza o sexo. Bien entendido que esa diversidad será aceptada y asumida siempre que no atente contra los derechos fundamentales de las personas. La persona tolerante debe aprender también a ser intolerante con todo aquello que lo merezca, al igual que hay opiniones que no merecen ser respetadas. ¿Qué con qué? Pues reflexiona tú, a ver qué cosas no merecen ser toleradas y qué opiniones no respetadas.

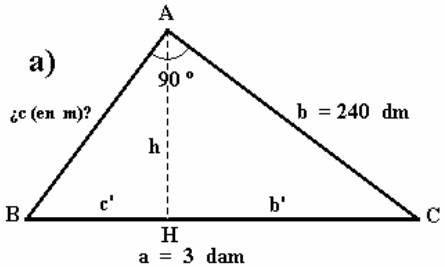


Ser tolerante no es nada fácil, como a diario podemos comprobar en nosotros mismos y en los demás. Supone un esfuerzo íntimo de gran calibre y una constante revisión de nuestros fallos y aciertos en dicho campo.

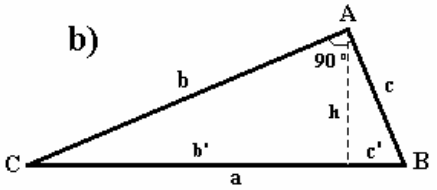
¿ Qué grado de tolerancia tienes tú ?

❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒❒

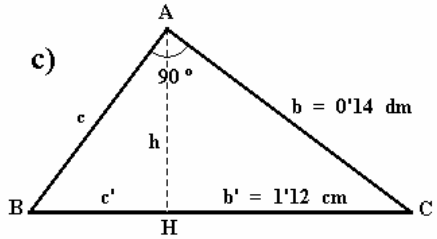
31.- Calcula el dato que te piden en cada una de las figuras siguientes :



a = 3 dam

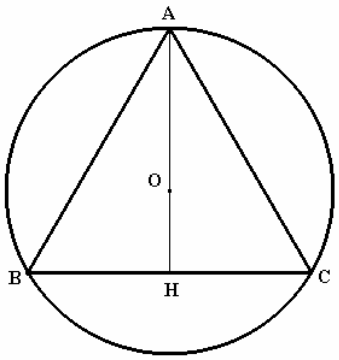


b' = 88 m ; c' = 22 m ; ¿ h ?



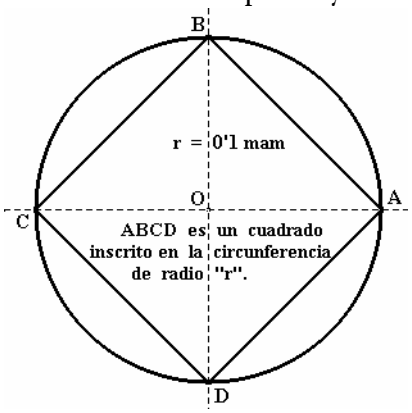
¿ a (en mm) ?

32.- Calcula el área de la parte rayada de la figura.

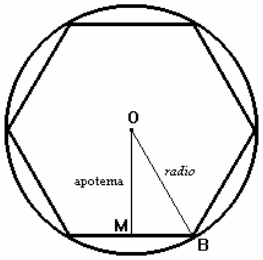


ABC es un triángulo equilátero cuyo lado mide 20 cm.

33.- ¿Cuántas "ha" mide la parte rayada?

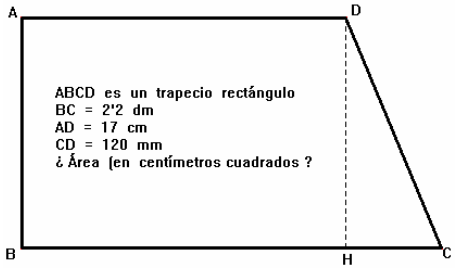


34.- Calcula lo que mide la superficie rayada.



lado del hexágono = 100 cm

35.- Averigua el área de la siguiente figura.

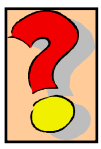


Estudiantes de E.S.O. Adolescencia. Muchos años de futuro, toda una vida por delante para formarse y labrarse un porvenir, un horizonte pleno de esperanza y que no falte la ilusión, mucha, toda la que seas capaz y más. Nunca te sobrará.

Años "difíciles", no cabe duda; en ellos se ponen quizás los mejores cimientos al edificio de tu vida; así que intenta no ponerlos débiles, ni quebradizos, ni muy porosos, ni inestables. Con principios compactos, firmes y persistentes estarás bien preparado para aguantar, enfrentar y solucionar los inevitables riesgos que la vida te irá presentando.

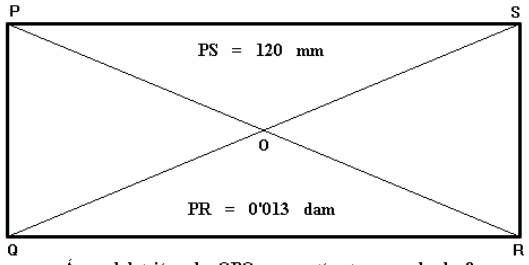
En tu camino te encontrarás de todo: alegrías, logros, fracasos, lucha, decepciones, derrotas, desánimo, afectos, enfrentamientos, triunfos, esperanza, amor, … En el bagaje que te suministre la experiencia no debe faltar la ilusión y un aprendizaje progresivo para tomar decisiones. Como todo, se aprende probando, y fallando, y dudando, y vuelta a probar, y otra vez errar, y titubear, y acertar. Y vuelta a empezar.

A veces las incertidumbres serán insuperables, y te equivocarás. Y a lo peor en muchas ocasiones. Pero si has aprendido del pasado, si valoras tu experiencia y analizas bien tu entorno te encontrarás a ti mismo y de tu interior sacarás la fuerza y sabiduría necesarias para acertar en los momentos de decisiones difíciles y para no ahogarte en el pesimismo y abandono. Así, esos errores, debidamente valorados y orientados, te darán preparación para no cometer otros, es decir, te prepararán para el riesgo que inevitablemente la vida te irá presentando.



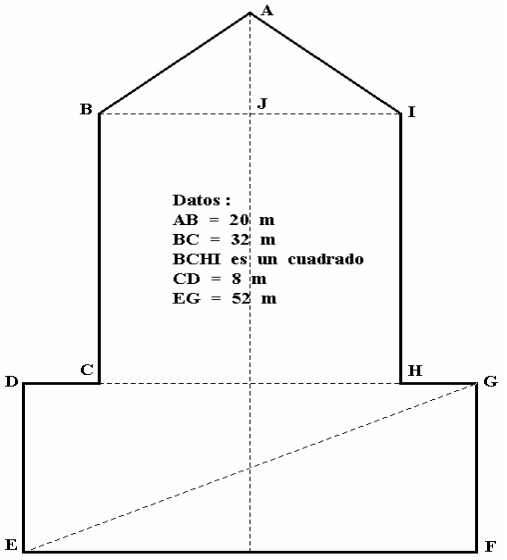
En la vida no encontrarás una panacea que te ayude a resolver tus riesgos, ni que dé respuestas siempre a tus problemas. Debes aprender a formarte, aceptándote a ti mismo, eligiendo tu propia escala de valores, con el espíritu presto a compartir, ayudándote de la experiencia y orientación de padres, profesores, familia y amigos que lo merezcan, y con mucha ilusión y esperanza por el futuro. Tú, tal y como eres, vales. Seguramente tu valía no es igual que la del otro, sino de otra forma, ni tampoco como la de aquel, sino de otro perfil, ni como la de tu amigo, sino diferente. Y a través de esos valores tuyos debes hacerte ver a los demás, apreciándote en primer lugar tú mismo e intentándolo transmitir a los demás. También, por supuesto, sabiendo valorar en su medida la apreciación de los demás.

36.- Calcula el área de la parte rayada de la figura.

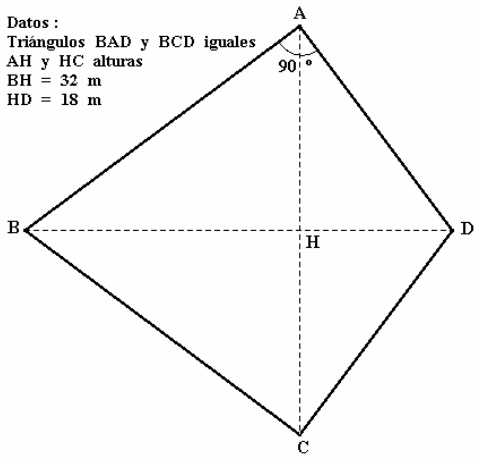


¿Área del triángulo OPQ en centímetros cuadrados?

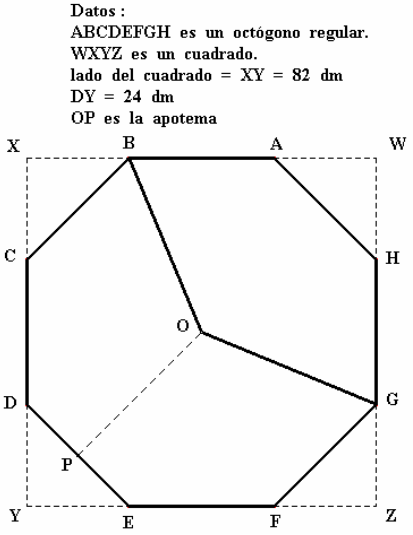
37.- Una lata de pintura de 5 kg cuesta 40 €. Con cada lata de pintura se pinta, aproximadamente, 128 m^2. Averigua lo que cuesta pintar la fachada representada en la siguiente figura.



38.- La figura siguiente representa un terreno en el que se va a plantar césped y se va a vallar. El césped cuesta a razón de 1'5 € / m^2, y la valla metálica con la que se va rodear el recinto cuesta a 2 € / m. Calcula el coste total de la plantación de césped y de la cerca del terreno.



39.- Calcula el área de la zona ABOGH de la figura.



40.- ¿Cuántas "ca" tiene de superficie un segmento circular de 90º si el radio del círculo que lo contiene mide 1 hectómetro?

Ya en varias reflexiones anteriores he indicado que por el hecho de que te escriba sobre tantas cosas no quiere decir que yo practique, domine o haga bien todo eso que te indico en las distintas reflexiones, y mucho menos que tenga tantos valores de los cuales se hablan en gran cantidad de páginas. ¡Ojalá, pero todavía tengo mucho que aprender, y más que mejorar! Tampoco quiere decir que hable o escriba sin idea, sin ni siquiera conocer lo que menciono, o tener algo de todo ello o de parte, o los deseos de intentar mejorar y poner en práctica el mayor número posible de las cosas positivas que se comentan.

Todo lo que escribo tiene, fundamentalmente, un objetivo: "HACERTE REFLEXIONAR". Y lo expresado en las reflexiones brota tanto de vivencias personales y valores que poco a poco y en algún grado he logrado como de otras experiencias negativas y otros valores que todavía están lejos de conseguir. Pero ello no quita que te dé a conocer tanto las experiencias que resultaron positivas como las otras, y los valores de los que quizás posea alguna señal *–que alguno creo que tendré–* como de aquellos que todavía tengo que luchar por conseguir. Espero y deseo que las leas, que a tu manera reflexiones y, si te apetece, pongas en práctica todo aquello que consideres oportuno.

En la vida de cada uno, sea a los doce, veinte, cuarenta o sesenta años, siempre hay algo que aprender. Yo, a mis 53 años, sigo intentándolo cada día, y tengo muy claro que todavía me quedan muchísimas cosas por asimilar y ejercitar, porque de eso, de aprender, no se debe uno nunca cansar ni jubilar.

¿ Amor… Amar… ?

Seguramente, entre las reflexiones de los dos libros se podrá echar de menos el no haber tratado ciertos valores o ciertos temas. Es muy posible, y ciertamente se me habrán olvidado algunos muy sustanciales y/o atrayentes. Pero no quiero terminar las reflexiones sin haber escrito, con toda la cautela posible por la subjetividad que el tema conlleva, unas líneas sobre el amor.

Hablar del amor es un tema muy manido, sobre todo en los tiempos actuales, donde se confunde frívola y frecuentemente el amor con tantas y tantas cosas que nada se identifican con los aromas que impregna su perfume, ni con las notas musicales que elevan y subliman su canto, ni con las espinas hirientes con las cuales el amar a veces, quizás muchas veces, al final, daña. Posiblemente, entre otras, son estas características, atracción-armonía-dolor, las que en esencia e inevitablemente identifican al amor en las personas que tienen la suerte de sentirlo, gozarlo, resistirlo, sobrellevarlo y perderlo.

El AMOR es ... No sé qué es; ¿o sí lo sé? Si amas, ¿te das? Si amas, ¿te llenas? Si amas, ¿gozas? Si amas, ¿sufres? Si amas, ¿no te rindes? Si amas, ¿persigues? Si amas, ¿luchas? ... Si amas, ¿dejas de ser tú mismo? ¿O no? O quizás dejamos de ser para ser en el OTRO. Y si amo y me aman, ¿mejor? ¿O mejor no ser amado y amar? ¿O quizás que te amen sin tú amar? ¿Y vivir para amar o amar para vivir? ¿O quizás no amar para poder vivir? ¡Qué dilema!

¿Es igual sentir el amor que vivir el amor?

¡Cuántas dudas!

A veces, a unos muchas y a otros pocas, duele el amor.

Como ves, casi todo preguntas en esta reflexión. Y dudas. Y es que el amor es TU AMOR, y el amor de otros es el de otros. ¿O son todos iguales?

Quizás sin amor vivamos muchos años de nuestra vida, pero lo peor es vivir con desamor, porque él trae desespero, llena de sombras, acarrea tristeza, ocasiona tormento, nos aprisiona, produce desdicha, nos mina, desemboca en soledad y nos deprime. Nos rompe. Y las astillas nos hieren hasta tal punto que nos derrota, a no ser que esa fuerza interior imprescindible nos recobre la mirada hacia la vida. Y nos aliente, aporte luz y alivie el alma.

El amor alumbra y da sombras, ofrece y quita, alienta y desespera, abraza y rompe, acepta y rechaza, muestra y ciega, riega y seca. **¿**Y si uno se da cuenta, al atardecer, o peor aún, al anochecer de su vida, de que el amor no visitó su morada, de que casi nunca siquiera le rondó, de que se refugió en tantas otras cosas que le impidieron el gozo pleno de sentirlo y el calor de la llama de su fuego, si no experimentó la aromática fragancia del darse a aquello que se ama, si no sufrió la huida de ese encanto y si no derramó lágrimas por la pérdida de ese hechizo que se fue**?** Entonces su vida habrá quedado mutilada de la esencia de su estancia en este mundo, de la sustancia de su existencia.

¿Se puede VIVIR sin amar**? ¿ . . . ?** Yo creo que no, pero lo peor, lo que es insufrible, lo que no es vivir, es el vivir deseando amar y no lograrlo.

Regar tu entorno de vida amando, aun sin ser amado, posiblemente no sea lo más atractivo, ni fascinante, pero quizás sea preferible a vivir sin amar a pesar de no ser amado. ¿O no?

Hay que sentir amor, y amar; entonces los conocerás, al amor y al amar.

Y volvamos a las inevitables dudas, porque al dudar nos adentramos en la hojarasca que nos impide ver el bosque. Y ellas, las dudas, nos conducen poco a poco hacia la luz; a veces con sólo ciertos destellos luminosos, en ocasiones con ráfagas de lucidez y otras con un resplandor que nos clarifica.

¿Amar es sentir, o ser atraído, o querer, o tener cariño, o buscar el bien? Quizás todo, ¿o algo de todo?

¿Amar es afecto, o valor, u ofrecerse, o franqueza, o humildad, o entrega, o compromiso, o esfuerzo, o caridad, o dejar, o respetar? Quizás todo, ¿o algo de todo?

¿Amar es poseer? ¿Amar es de alguna manera sentirse egoísta?

¿El amor es ese algo que penetra en todo nuestro cuerpo y nos pone a hervir la sangre o todavía algo mucho más que eso: un sentimiento íntimo que consigue que el alma se alerte y el corazón se agite? ¿Es esperar a recibir, o dar?

Si comparto, y tolero, y soy paciente, y escucho, y agrado, y perdono, ¿entonces amo? Y yo qué deseo: ¿qué me amen, o amar?

Y si amo, ¿me arriesgo? ¿Mejor amar a los demás que a mi mismo? ¿O mejor amarse a sí mismo? ¿O primero me quiero yo y después amaré a los demás?

¿Si me enamoro amo? ¿O amo cuando me enamoro? ¿Se ama sin querer, o es necesario querer amar para poder sentir el amor?

El amor se expresa con palabras y con gestos, y siempre acompañado de actos. El amor se comunica con la ternura, y aleja de la soledad, y tiene sus deberes. Y también, por qué no, el amor es a veces silencio. A través de él, del silencio, y, claro, también de la palabra, hacemos navegar nuestros propios sentimientos. Y el buen timón que conduce al horizonte deseado, a la felicidad, es el amor. Quizás, lo mejor es que tanto él como ella, el amor y la felicidad, siempre vayan de dentro a fuera, es decir, de nuestro interior al exterior, porque así es como más se contagian. Buscar ambos fuera de nosotros mismos sin haber intentado poner a tono nuestra alma y nuestro cuerpo para su encuentro es como querer oler el perfume de una flor y no acercarse.

Las respuestas a tantas dudas y preguntas de esta reflexión sobre algo tan inherente a la vida de un ser humano como es el amor y el amar te las tienes que dar a ti mismo. Precisamente esto es una reflexión, o sea, reflexiona, y tú mismo, a lo largo de tu vida, irás obteniendo tu propia vivencia y definición de amor.

Cuando existe comunicación con el ser amado, gestos que anuncian ese amor, algunos actos como la atención, el comportamiento, el cuidado, etc., y se conjuga el verbo compartir de forma activa, entonces, quizás, ese amor sea menos efímero y bastante más duradero.

. . .

Atracción. El alma se inunda. El alma se me va. Se dirige sola. Una sonrisa. Una caricia. Un beso. Una pasión. Una lágrima. Una angustia. Decepción. Lucha. Reconciliación. Y volver. ¿U olvidar? De cualquier modo, la vida sigue . . . , y . . .