TEMA 11

La proporcionalidad geométrica.

COMPLEMENTOS:

- ❒ Ejercicios de repaso de todos los temas dados hasta éste, es decir, de los temas 1 al 6 de MATYVAL I y de los temas 7 al 11 de MATYVAL II.
- ❒ Y, por supuesto, algunas reflexiones.

Tema 11 :
LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA.

OBJETIVOS:

1. Saber dividir un segmento en partes proporcionales.
2. Saber representar con precisión figuras geométricas semejantes utilizando los instrumentos de medida y dibujo.
3. Saber deducir la existencia de semejanza a través del estudio de las magnitudes de figuras geométricas.
4. Criticar y valorar las habilidades propias para resolver las situaciones problemáticas que se presentan.
5. Saber reconocer triángulos semejantes aplicando los criterios de semejanza correspondientes.
6. Resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana relacionadas con la representación a escala de la realidad.
7. Calcular magnitudes de figuras geométricas que representan situaciones problemáticas de la vida real aplicando la semejanza y el teorema de Thales.
8. Saber representar e interpretar planos con sus correspondientes escalas.

CONTENIDOS:

De conceptos:

11.1.- **Introducción.**
11.2.- **Razones y proporciones entre segmentos.**
11.3.- **Rectas secantes cortadas por rectas paralelas equidistantes.**
11.4.- **El teorema de Thales.**
11.5.- **Aplicaciones del teorema de Thales.**
11.7.- **Semejanza de triángulos.**
11.9.- **Semejanza de polígonos.**
11.10.- **Planos y escalas.**
11.11.- **La homotecia.**

De procedimientos:

1. Conocer el teorema de Thales y aplicarlo correctamente.
2. Reconocimiento de elementos homólogos en figuras semejantes.
3. División de un segmento en partes iguales o proporcionales.
4. Aplicación del test de semejanza para determinar la semejanza entre polígonos.
5. Cálculo de la razón de semejanza.
6. Aplicación de los criterios de semejanza para reconocer triángulos semejantes.
7. Cálculo indirecto de distancias aplicando la semejanza.
8. Cálculo de distancias en planos y mapas, y de escalas en planos y mapas.
9. Resolución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana aplicando las propiedades de las figuras semejantes.

De actitudes:

1. Valoración de la utilidad de la geometría para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.
2. Interés por la descripción de las figuras geométricas utilizando el vocabulario específico preciso.
3. Curiosidad por investigar relaciones geométricas entre figuras semejantes.
4. Confianza en la propia capacidad para interpretar las representaciones geométricas planas y para resolver problemas geométricos.
5. Conservación y utilización correcta de los instrumentos de medida y de dibujo.
6. Flexibilidad a la hora de buscar soluciones a situaciones problemáticas relacionadas con la semejanza de figuras geométricas.
7. Gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados.

11.1.- Introducción.

Muchos de los conocimientos de geometría que se estudian hoy día fueron descubiertos por los sabios de la Grecia clásica. De entre esos sabios podemos destacar a Thales de Mileto. De él se cuentan muchas cosas muy interesantes y diversas. No se tienen obras escritas de este sabio, pero lo cierto es que destacó en conocimientos de geometría y de astronomía.

Thales de Mileto nació en Mileto (Asia Menor, la zona que ocupa hoy Turquía). Su vida transcurrió desde el año 640 al 545 a. de C. Fue uno de los siete sabios de Grecia. Destacó sobre todo en filosofía, pero dominaba los conocimientos de astronomía y de geometría.

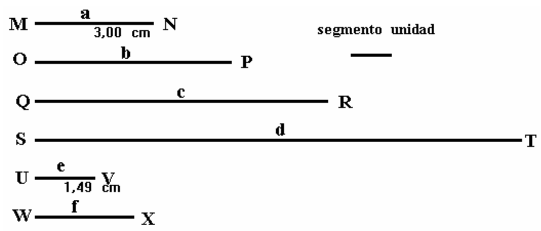
Entre las cosas que se cuentan de Thales de Mileto están las siguientes:

a) *Predecir el eclipse de Sol que ocurrió en el año 585 a. de C.*
b) *Comparar la magnitud del Sol con la Luna.*
c) *Medir la altura de las pirámides con ayuda de un bastón. Para ello comparaba las sombras proyectadas por el bastón y la pirámide que iba a medir.*
d) *Como filósofo pensaba que el principio de todas las cosas era el agua.*
e) *Algunos en su tiempo le consideraron brujo, ya que era tan sabio y tan diverso en sus conocimientos que no lo aceptaban más que como "brujerías".*
f) *Se le consideraba filósofo, científico, hombre práctico, ingeniero y, por supuesto, matemático.*

Bien, pues en este tema de la proporcionalidad geométrica estudiaremos uno de los teoremas, junto con el de Pitágoras, más famosos de las Matemáticas, el llamado teorema de Thales, de múltiples y prácticas aplicaciones no sólo en Matemáticas sino en la vida real y cotidiana.

11.2.- Razones y proporciones entre segmentos.

Observa los segmentos siguientes:



La **razón** de dos segmentos, al igual que en la proporcionalidad numérica (ver tema 6, en **MATYVAL I**), es igual al cociente de sus medidas, pero teniendo siempre en cuenta que estas medidas de los segmentos deben estar referidas a la misma unidad.

$$\left\{\begin{matrix}\text{Razón de los} \\ \text{segmentos "a" y "b"}\end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{MN}{OP} = \frac{3}{5} = 0'6$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Razón de los} \\ \text{segmentos "c" y "d"}\end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{QR}{ST} = \frac{7'5}{12'5} = 0'6$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Razón de los} \\ \text{segmentos "e" y "f"}\end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{UV}{WX} = \frac{1'5}{2'5} = 0'6$$

Como podemos observar, cada uno de los pares de segmentos seleccionados tiene la misma razón, lo que quiere decir que podemos igualarlas y formar **proporciones** con ellas.

$$\frac{MN}{OP} = \frac{QR}{ST} = \frac{UV}{WX} \rightarrow \text{serie de razones iguales}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{7'5}{12'5} = \frac{1'5}{2'5} = 0'6$$

Se pueden formar proporciones :

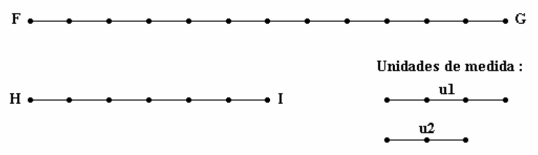
$$\left[\frac{3}{5} = \frac{7'5}{12'5}\right] \quad \left[\frac{7'5}{12'5} = \frac{1'5}{2'5}\right] \quad \left[\frac{3}{5} = \frac{1'5}{2'5}\right]$$

Dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando los números que expresan sus medidas *(expresadas en la misma unidad)* forman una proporción.

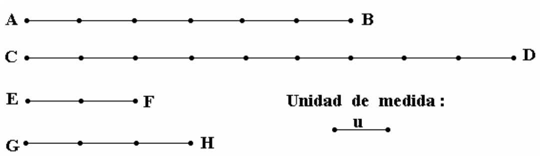
Por consiguiente, diremos que los segmentos **"a"** y **"b"** son proporcionales a los segmentos **"c"** y **"d"**, y también a los segmentos **"e"** y **"f"**.

EJERCICIOS:

1) Debes calcular la razón de los segmentos **FG** y **HI**, midiendo en primer lugar con la unidad **"u1"** y después con la unidad **"u2"**.



2) Comprueba si los pares de segmentos **AB** y **CD** con **EF** y **GH** son proporcionales. Usa la unidad de medida **"u"**.

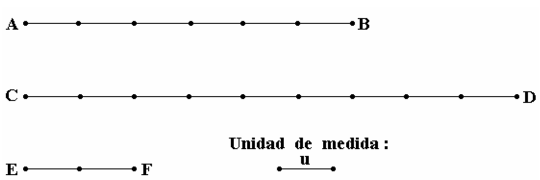


3) Dibuja en tu cuaderno los siguientes segmentos:

a = 8 cm,
b = 0'4 dm,
c = 60 mm,
d = 0'00003 km.

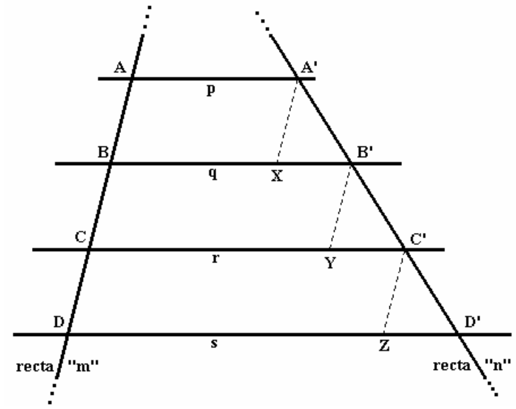
¿Son proporcionales los segmentos **"a"** y **"b"** con los segmentos **"c"** y **"d"**?

4) ¿Recuerdas cómo se hallaba el cuarto término de una proporción? Lo llamábamos cuarto proporcional.
A continuación te presento tres segmentos. ¿Sabrías dibujar cuál es el segmento **GH** que junto con el segmento **EF** son proporcionales a los primeros **AB** y **CD**?
Como pista, primero mídelos, y después con los números de sus medidas ya podrás hallar el cuarto segmento proporcional.



11.3.- Rectas secantes cortadas por rectas paralelas quidistantes.

Si varias rectas paralelas y equidistantes (**p, q, r, s**) determinan en otra recta **"m"** partes (segmentos) iguales, entonces estas paralelas también determinan segmentos iguales en otra recta cualquiera **"n"** que sea secante con **"m"**.



Si se cumple que : **AB = BC = CD ,**
entonces también : **A'B' = B'C' = C'D'**

Demostración de la conclusión de esta pregunta:

1º) Las rectas "m" y "n" son secantes.

2º) Las rectas "p", "q", "r" y "s" son paralelas equidistantes que cortan a las dos rectas secantes "m" y "n".

3º) Se verifica que los triángulos rayados, o sea, A'XB', B'YC' y C'ZD', son iguales, ya que tienen los ángulos (A', B', C') iguales, por ser ángulos correspondientes entre paralelas – ver la página 69 de este libro–.

4º) También, los ángulos X, Y, Z son iguales por tener sus lados paralelos.

5º) Los lados A'X, B'Y y C'Z son iguales, por ser iguales a los lados AB, BC y CD, ya que todos los paralelogramos tienen sus lados opuestos iguales, o porque son segmentos entre paralelas.

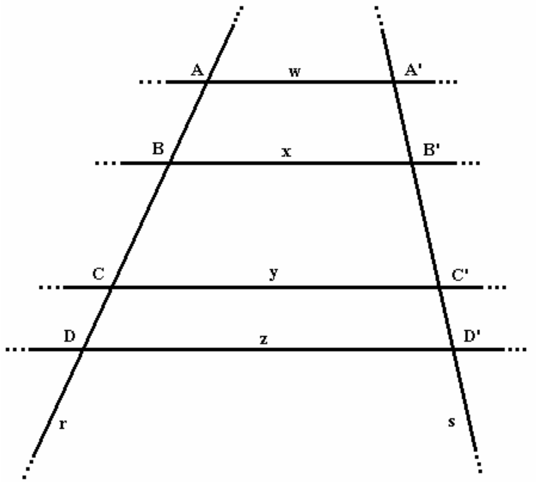
6º) Como ha quedado demostrado que los triángulos rayados tienen todos un ángulo igual (A',B',C') y un lado igual (A'X, B'Y, C'Z), los tres triángulos rayados son iguales. Por consiguiente, deducimos que :

7º) También son iguales :

A'B' = B'C' = C'D'

11.4.- El teorema de T H A L E S.

Si dos rectas secantes (**"r"**, **"s"**) son cortadas por varias paralelas (**"w"**, **"x"**, **"y"**, **"z"**, **etc.**), los segmentos que determinan sobre una de las rectas secantes (**"r"**) son proporcionales a los segmentos que determinan en la otra secante (**"s"**).



Segmentos **determinados** por la recta "r" entre las paralelas "w", "x", "y", "z" :
AB, BC, CD.
Segmentos **determinados** por la recta "s" entre las paralelas "w", "x", "y", "z" :
A'B', B'C', C'D'.
Y el teorema de Tales dice que son proporcionales :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Esto se puede demostrar. Si alguno lo intenta y lo consigue, que me lo enseñe para recibir su "cosecha". Te puedes orientar por la pregunta anterior.

Lógicamente, podríamos establecer también otras proporciones si tenemos en cuenta otros segmentos en lugar de los anteriores, por ejemplo :

$$\left[\frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'}\right] \text{ ó } \left[\frac{AD}{A'D'} = \frac{CD}{C'D'}\right]$$

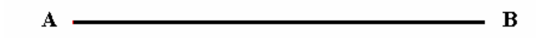
En ejercicios y problemas de aplicación del teorema de Tales, nos encontraremos proporciones en las que habrá que despejar incógnitas. Repasemos :

$$\left[\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right] \rightarrow a \cdot b = c \cdot d \rightarrow a = \frac{c \cdot d}{b}$$

11.5.- Aplicaciones del teorema de T H A L E S.

a) División de un segmento en partes iguales.

Vamos a dividir el segmento **AB** en tres partes iguales.

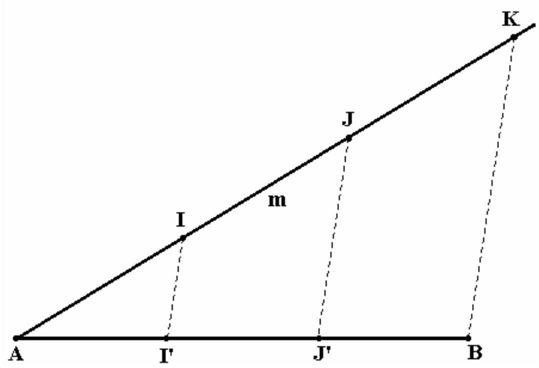


El procedimiento que vamos a seguir es el siguiente.

1º) **Trazamos una semirrecta cualquiera**, por ejemplo **"m"**, con origen en el extremo **"A"** y que forme con el segmento **AB** *-que lo hemos colocado horizontal-* un ángulo menor de 180º, o mejor aún, menor de 90º.

2º) **Elegimos un segmento unidad ("u")** arbitrario *(de medida libre, pero adecuado a las dimensiones de un cuaderno)* que se lleva sobre la semirrecta **"m"** tantas veces como queramos dividir el segmento, que en nuestro caso es de tres veces. **Observa** que desde el vértice **"A"** hasta **"K"** se ha llevado tres veces la distancia elegida libremente *(**AI** = segmento unidad = **"u"**).*

3º) **Unimos el punto "K" con el punto "B"**, el otro extremo del segmento que hay que dividir en partes iguales. **A continuación trazamos paralelas** por los puntos **"J"** e **"I"** al segmento **KB** obtenido. De esta forma tenemos los puntos **J'** e **I'**, que como puedes observar son justamente los puntos que dividen al segmento **AB** en tres partes iguales.

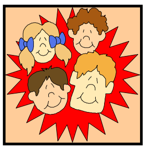


Como dice el teorema de Thales, los segmentos que se determinan en dos rectas secantes *(en nuestro caso el segmento **AB** y la semirrecta "**m**")* al ser cortadas por rectas paralelas son proporcionales. Y como los segmentos **AI, IJ** y **JK** los hemos elegido iguales, entonces los segmentos correspondientes **AI', I'J'** y **J'B** son también iguales, con lo que queda dividido el segmento inicial dado **AB** en tres partes iguales.

Si en lugar de ser el segmento **AB** fuera otro cualquiera, y si en lugar de dividirlo en tres fueran cuatro, cinco, seis, etc., partes iguales, seguiríamos el mismo procedimiento, pero en lugar de medir tres segmentos iguales sobre la semirrecta mediríamos cuatro, cinco, etc.

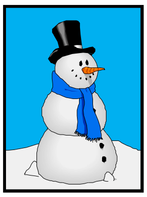
☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

Tanto los conocimientos más antiguos como las más recientes investigaciones nos llevan a decir con total claridad y certeza que tener sentido del humor, es decir, saber reírse adecuadamente y tomarse los avatares que presenta la vida de forma positiva es excelente para la salud.



Es muy habitual ver día tras día rostros serios, tristes, personas con gestos hoscos, actitudes despreciativas, gente altiva, expresiones indolentes, ... Sin embargo, encontrar personas sonrientes, cordiales, alegres, con buen humor no sucede todos los días. Quizás, aunque mejor decir seguro, el buen reír y el buen humor serán cualidades de las que más necesitemos en este nuevo milenio.

Tener buen sentido del humor es un estupendo "vehículo para viajar socialmente" y, además, conseguir caer bien y cautivar más a la gente que habitualmente nos rodea. Pero no debemos olvidar nunca que el buen sentido del humor comienza por saber reírse de uno mismo, lo que ya es un grado bastante más difícil de conseguir.



Cuando nos vamos conociendo suficientemente a nosotros mismos, observamos nuestros defectos y sabemos reírnos de ellos, incluso reírnos de esos puntos débiles que tenemos ante los demás, entonces podremos decir que nuestro grado de humor es bueno. Claro, eso no es nada fácil. Primero tenemos que aceptarnos a nosotros mismos tal y como somos, asumir nuestras propias virtudes y defectos, y después llegar a poseer un buen sentido del humor que hará que podamos reírnos de nosotros mismos y tomar siempre o casi siempre las vicisitudes de la vida por el lado positivo.

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

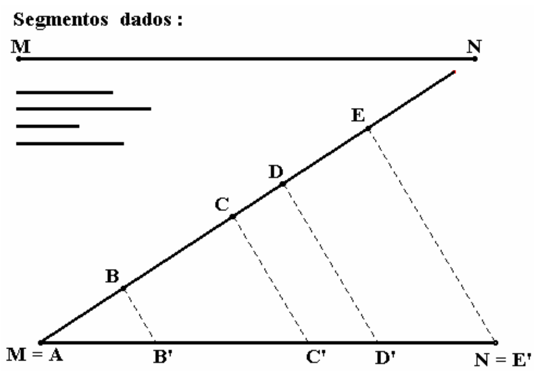
b) División de un segmento en partes proporcionales a otros segmentos dados.

Vamos a dividir el segmento **MN** en partes proporcionales a los segmentos **AB, BC, CD y DE.**

Es conveniente recordar que esto se puede hacer numéricamente, como hemos visto en el tema 6 del anterior libro **MATYVAL I** *(La proporcionalidad numérica; repartos proporcionales).* Para ello bastaría repartir la medida del segmento **MN** entre las medidas de los segmentos **AB, BC, CD y DE.**

En este tema lo vamos a resolver geométricamente, *de ahí el nombre de este tema 11: La proporcionalidad geométrica,* aplicando el teorema de Thales.

El procedimiento a seguir es semejante al anterior. Dibujamos una semirrecta, con origen en **"M"**, sobre la que dibujaremos los segmentos dados (**AB, BC, CD y DE**) uno a continuación de otro. Desde el punto **"M"**, formando un cierto ángulo con la semirrecta anterior, trazamos un segmento igual al **MN** dado. Unimos el punto "**E**" de la semirrecta anterior con el punto **"N"**, extremo del segmento **MN.** A continuación trazamos paralelas al segmento **EN** por los puntos **"B"**, **"C"** y **"D"**, con lo que obtenemos las cuatro partes del segmento **MN** que son proporcionales a los cuatro segmentos dados, o sea, obtenemos **A'B', B'C', C'D' y D'E'.**



Los segmentos AB, BC, CD y DE son proporcionales a los segmentos A'B', B'C', C'D' y D'E', ya que están formados por rectas paralelas que cortan a dos rectas secantes (pregunta 11.3).

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$$

El mismo procedimiento emplearemos para dividir cualquier segmento en partes proporcionales a cualesquiera otros segmentos dados.

c) Hallar el segmento cuarto proporcional a otros tres dados.

Dados tres segmentos, "a", "b" y "c", llamamos cuarto proporcional de "a", "b" y "c" a otro segmento "x" que cumple la siguiente proporción:

$$\left[\frac{a}{b} = \frac{c}{¿x?}\right]$$

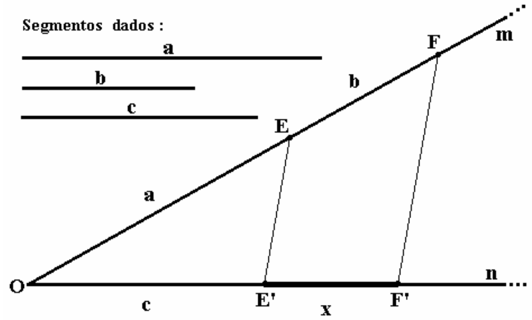
Sabiendo las medidas de los segmentos dados ya sabemos hallar numéricamente la cuarta proporcional *(ver tema 6 de MATYVAL I, "La proporcionalidad numérica").*

$$\left[\frac{64}{8} = \frac{40}{x}\right] \rightarrow 64 . x = 8 . 40 \rightarrow x = \frac{320}{64} = 5$$

Y "5" es la cuarta proporcional.

Pero ahora, en este tema 11 *(La proporcionalidad geométrica),* se trata de hallar ese segmento cuarto proporcional pero gráficamente, o sea, aplicando el teorema de Thales.

Para realizarlo dibujamos dos semirrectas de origen el punto **"O"** y sobre ellas llevamos los segmentos dados como se observa en la siguiente figura. Después unimos el extremo del segmento **"a" (E)** con el extremo del segmento **"c" (E')** y seguidamente trazamos desde el extremo del segmento **"b" (F)** una paralela a **EE'** hasta que corte a la semirrecta **"n"**. Con esto ya tenemos el segmento cuarto proporcional, o sea, **E'F'** o segmento **"x"**, que es el segmento pedido. Veamos :



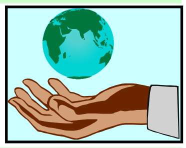
El segmento "x" es el cuarto proporcional a los tres dados ("a","b","c") porque forma proporción con ellos tres.

$$\left[\frac{a}{b} = \frac{c}{"x"}\right]$$

$\left\{\text{La misma proporción se puede escribir así :}\right\} \rightarrow \left[\frac{OE}{OE'} = \frac{EF}{E'F'}\right]$

Cualquiera de vosotros podría formularse las siguientes preguntas:

¿Cómo encontrará el mundo dentro de 50 años un posible nieto que yo tenga?
¿Encontrará en el cielo ese mismo tono azul que tenemos ahora?
¿Habrá nieves en las mismas montañas o cordilleras que ahora?
¿Las aguas de los ríos correrán puras y limpias y no se habrán extinguido algunas especies de peces que hoy podemos pescar?
¿El aire que respiren será saludable?
¿Podrá disfrutar de un paseo por los bosques, oír el canto de los pájaros o ver correr a los animales?
¿Los alimentos no tendrán productos químicos que perjudiquen su salud?
A pesar del inevitable, necesario y continuo progreso tecnológico, ¿sabrá escribir una afectuosa carta, deleitarse con la lectura de una poesía, escuchar a un amigo, tener sentimientos, poseer unos buenos valores y tener tolerancia y solidaridad para con sus semejantes?
¿En su interior todavía quedará el cariño, el afecto, el amor?
¿Llegará él a una edad madura en unas condiciones físicas y mentales adecuadas?



Difíciles, muy difíciles de responder, ¿verdad? Pues en tus manos y en las de todos nosotros está el dejarle nuestro mundo lo mejor posible para que la mayoría de las respuestas sean positivas. Así que manos a la obra desde ya mismo...

d) Hallar el segmento tercero proporcional a otros dos dados.

Dados dos segmentos **"a"** y **"b"**, llamamos tercero proporcional de **"a"** y **"b"** a otro segmento **"x"** que cumple la siguiente proporción:

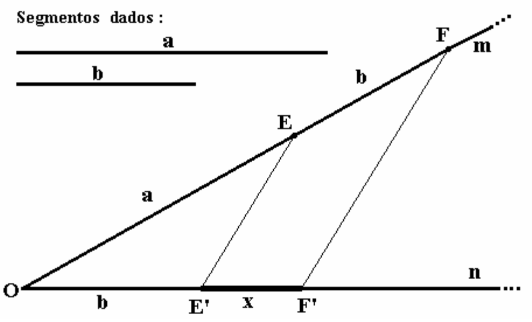
$$\left[\frac{a}{b}=\frac{b}{¿x?}\right]$$

Conviene recordar cómo se halla la tercera proporcional de forma numérica. Para ello repasa el tema 6 de **MATYVAL I** (La proporcionalidad numérica). La tercera proporcional es el cuarto término de una proporción continua (de medios repetidos), por ello basta conocer dos números para hallar el tercero, ya que el segundo de los conocidos se repite en los medios.

$$\left[\frac{27}{9}=\frac{9}{x}\right] \rightarrow 27.x = 9.9 \rightarrow x = \frac{81}{27} = 3$$

Y "3" es la tercera proporcional.

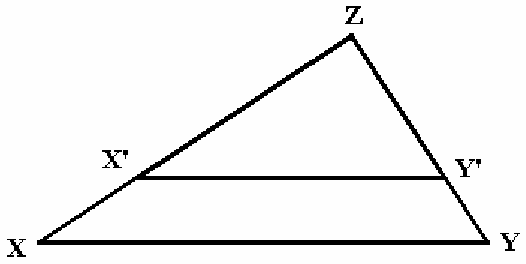
Para realizarlo gráficamente, o sea, de forma geométrica, seguimos el mismo procedimiento que para hallar el cuarto proporcional *–página anterior-,* pero en lugar del segmento **"c"** llevado en la semirrecta **"n"** medimos otra vez el segmento **"b"**, que se lleva en las dos semirrectas. Veamos :



El segmento "x" es el tercero proporcional a los dos dados ("a","b") porque forma proporción continua con ellos dos.

$$\left[\frac{a}{b}=\frac{b}{"x"}\right]$$

e) Triángulos en posición de Thales.



Observando la figura vemos que :

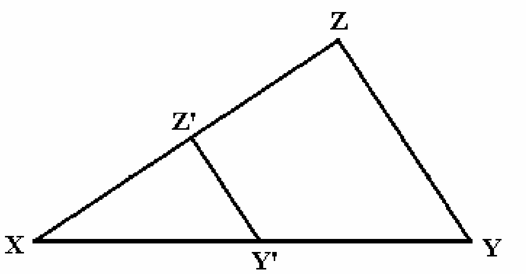
1º) El segmento **X'Y'** es paralelo a la base del triángulo mayor, **XY**.

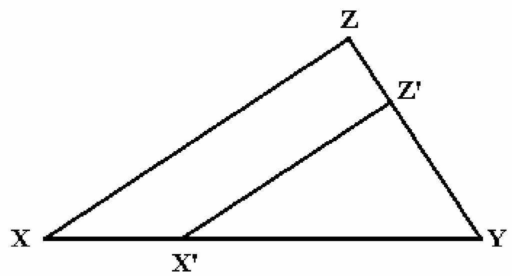
2º) Hay un triángulo mayor, **XYZ**, y otro menor dentro de él, **X'Y'Z**, que se ha formado al trazar un segmento paralelo a la base del mayor.

3º) Los dos triángulos mencionados tienen un ángulo común, el ángulo **Z**, y los lados opuestos a este ángulo son paralelos.

4º) A los triángulos formados dentro de otro al trazar una paralela a uno de sus lados se les dice que están **EN POSICIÓN DE THALES.**

Veamos otros triángulos en posición de Thales dentro del mismo **XYZ**:





Bien, pues **dos triángulos que están en posición de Thales son siempre SEMEJANTES. Es decir, que tienen sus ángulos iguales y sus lados son proporcionales.**

Para la mayoría de alumnos, las demostraciones en Matemáticas son siempre muy difíciles. Entre otras, las razones son:

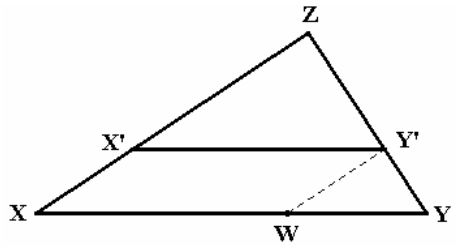
- *La falta de comprensión de los distintos conceptos que se van explicando.*
- *La falta de hábito de estudio para repasar y asimilar esos conceptos cuando el inevitable olvido acude a las neuronas.*

Ya hemos visto en este tema una demostración, en la pregunta 11.3. Ahora hacemos otra para demostrar que siempre que dos triángulos están en posición de Thales, entonces sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales. Fijémonos en el primer ejemplo de la 2ª columna de la página anterior y :

a) El ángulo **Z** es el mismo para los dos triángulos.

b) El ángulo **X** es igual al ángulo **X'** y el ángulo **Y** es igual al ángulo **Y'** por ser ángulos correspondientes entre paralelas –*ver página 69*-.

c) Para comprobar la proporcionalidad de los lados, observemos en primer lugar la siguiente figura:



Hemos trazado un segmento paralelo al lado **XZ**; es el segmento **WY'**. Por ser lados opuestos de un paralelogramo, los segmentos **XX'** y **WY'** son iguales.

d) Aplicamos ahora el teorema de Thales, porque al tener dos rectas secantes (**XZ** e **YZ**) cortadas por rectas paralelas (**XY** y **X'Y'**) sus lados son proporcionales. **E** Igual hacemos otra vez, pero ahora siendo las rectas secantes **XY** e **YZ** y las paralelas **XZ** y **WY'**.

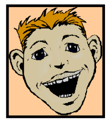
$$\boxed{\frac{XZ}{X'Z} = \frac{YZ}{Y'Z}} \qquad \boxed{\frac{XY}{X'Y'} = \frac{YZ}{Y'Z}}$$

e) Y con las dos proporciones anteriores resulta esta serie de razones iguales:

$$\boxed{\frac{XZ}{X'Z} = \frac{YZ}{Y'Z} = \frac{XY}{X'Y'}}$$

Así queda demostrado que los lados de los triángulos en posición de Thales son proporcionales *(apartados c, d, e, f)* y sus ángulos iguales *(apartados a, b).*

La halitosis es el olor desagradable producido por un mal aliento. Casi la mitad de la población padece este problema. Bastantes personas que tienen halitosis pasan años y años sin llegar a enterarse siquiera de que la padecen, o sin tener verdadera conciencia de lo que supone sufrirla, unas porque no son conscientes de ello, ya que nadie de su entorno se atreve nunca a decírselo por temor a que se enfade o a perder su amistad, y otras porque no alcanzan a observar el rechazo que sufren en sus relaciones con los demás, ya que el mal aliento es un factor que afecta de manera muy negativa en la convivencia diaria al que lo padece.



Las personas que tienen mal aliento son, de forma habitual y desgraciadamente para ellas, poco atractivas para los demás, incluso para los mismos familiares a veces. Frecuentemente, sus relaciones interpersonales se ven mermadas, porque de una u otra forma sus amistades eluden casi siempre la cercanía con ellas debido al olor fétido que despide su aliento al conversar, cuando por la causa que sea su boca no está todo lo fresca y saludable que debiera, sin que en muchas ocasiones adviertan tales situaciones. Así que no hay más remedio, para aquellas personas que padezcan esta afección de la halitosis, que tomar conciencia de que lo tienen e intentar solucionarlo o mejorarlo; si no lo hacen, es casi seguro que a lo largo de su vida se encontrarán con ciertos problemas de tipo social, o laborales, o incluso sexuales. ¿Y qué hacer? Bien, primero veamos cómo se produce:

a) *La mayoría de las halitosis se originan en la boca, y no en el estómago u otros órganos internos como muchas veces se piensa.*

b) *La producen las partículas de alimentos que se quedan entre los dientes, los cigarrillos, el alcohol, las encías en mal estado, la lengua no limpia, las caries, el sarro, puentes mal diseñados o faltos de limpieza, la sequedad de boca, etc. O sea, que casi el 90 % de las halitosis son causadas por una higiene deficiente de la boca.*

c) *También son causa de halitosis otras enfermedades de la garganta, nariz, estómago o bronquios, pero éstas sólo constituyen un 10 %, o sea, muy pocas.*

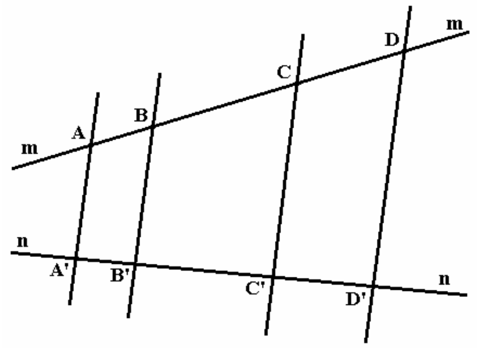
Y segundo, veamos de forma resumida algunas pautas muy convenientes para curarla o mejorarla:

1) *El mejor tratamiento consiste en eliminar las bacterias que causan el mal aliento. Y esto sólo se consigue con una extremada limpieza diaria. El usar enjuagues, chicles, sprays y otras cosas son buenas, pero sólo ocultarán el problema si no hay una excelente higiene bucal.*
2) *Una buena dieta de comidas mejorará el problema.*
3) *Come pocos azúcares y grasas.*
4) *Bebe entre uno y dos litros diarios de agua.*
5) *Mastica algo de chicle sin azúcar entre comidas.*
6) *Cepíllate los dientes y la lengua al levantarte, después de la comida y, sobre todo, después de la cena. Enjuágate bien tu boca y tus encías. Usa un buen cepillo y un buen dentífrico. Y si no mejoras:*
7) *Visita al médico especialista.*

Si te lo propones y sigues estas normas, seguro que mejora el olor de tu aliento, tu confianza en ti mismo y tu imagen ante los demás.

Ejercicios para resolver.

1) **E**scribe correctamente tres proporciones entre segmentos de la siguiente figura:

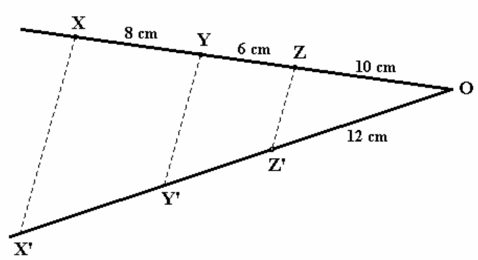


2) **D**ibuja un segmento de 85 mm y lo divides en seis partes iguales según se explica en el apartado a) de las aplicaciones del Teorema de Thales.

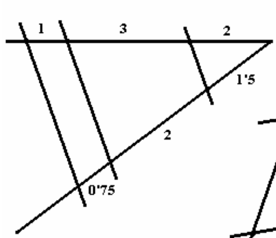
3) **D**ibuja un segmento **MN,** de 0'6 dm, tres veces, con una cierta separación entre ellas. Después divides cada uno de ellos en 2/3, en 1/5 y en 4/9, respectivamente. Lo haces siguiendo los pasos de la pregunta 11.5.a.

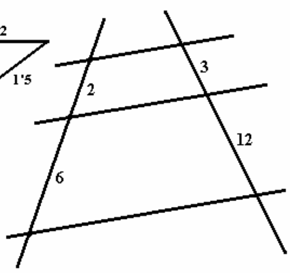
4) **C**onstruye un segmento que sea cuarto proporcional a otros tres que miden 2 cm, 7 cm y 3'5 cm.

5) **A**verigua cuánto miden los segmentos **X'Y'** e **Y'Z'**.



6) **¿S**on correctos los datos (medidas) de las siguientes figuras? ¿Cuáles sí o no y por qué?



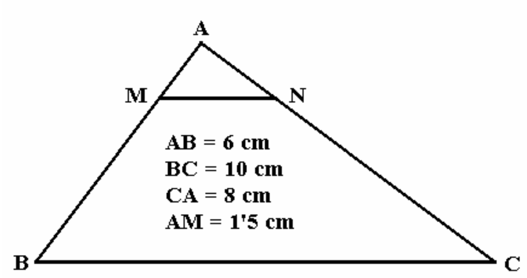


7) **D**ibuja el segmento que es tercero proporcional a 35 mm y 0'05 m.

8) **D**ibuja un triángulo **(ABC)** cuya base **(AB)** mida 4'5 cm. Y en él dibujas otro triángulo interior de modo que estén colocados en posición de Thales. Después contesta :

a) ¿Qué ángulos son iguales en esos dos triángulos?
b) ¿Tienen algún lado igual?
c) ¿Tienen algún vértice común?
d) ¿Qué relación tienen los lados de esos triángulos? Escribe las expresiones que reflejan esa relación.

9) **C**alcula la medida de los segmentos **MN** y **NA** de la figura siguiente.



10) **D**ibuja de color azul un segmento AB de 0'09 m y de rojo los 4/6 de él.

Varios chicos conversando de manera poco habitual entre la juventud, por lo menos en ciertos grupos :

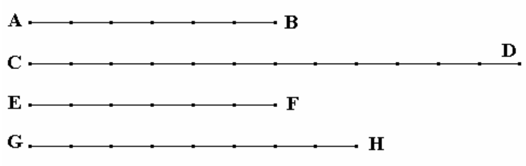
VICTORIA : *"Muchas veces me doy cuenta de lo maleducado que queda el interrumpir constantemente las explicaciones de los demás, no dejándoles concluir sus exposiciones, argumentos y razones".*

PATRICIO : *"Hay muchas personas que tienen por costumbre muy reiterada el hurgarse en la nariz; eso cae fatal. No está bien hacerlo en ninguna ocasión, pero desde luego hacerlo en público es grosero".*

CARMELA : *"Es de muy mala educación hablar con la boca llena cuando se está comiendo. Mi padre me lo ha reprendido tantas veces en la mesa que ya no se me olvida esta norma".*

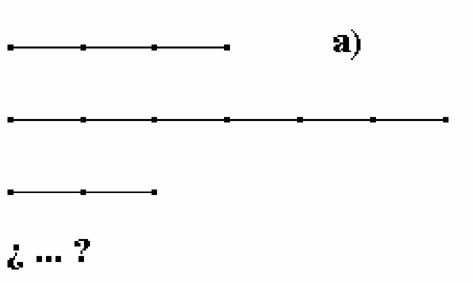
¿ Cosas raras, o Urbanidad, buenos modales, buenas costumbres y buena educación ?

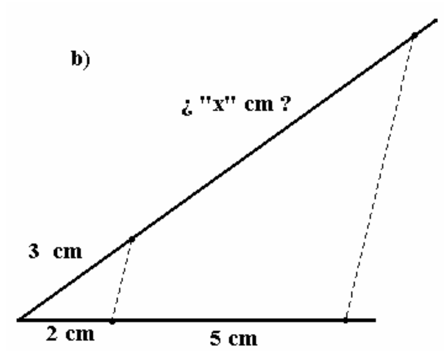
11) Averigua si los segmentos **AB, CD, EF y GH** son proporcionales.

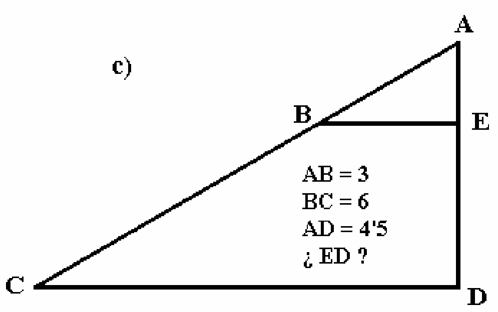


12) Calcula numérica y gráficamente el segmento que sea tercero proporcional de los segmentos de longitudes 90 mm y 0'6 dm.

13) Aplica el teorema de Thales para calcular la medida de los segmentos que te piden en los siguientes apartados:







14) En cada apartado, divide geométricamente en partes proporcionales según se te indica:

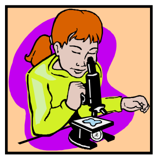
a) Un segmento de 0'1 m entre 1'5, 2'6 y 4 cm.
b) Un segmento de 90 mm entre 20, 35 y 10 mm.
c) Un segmento de 0'0045 dam entre 0'3, 0'18 y 0'4 dm.

15) Calcula numérica y gráficamente el segmento cuarto proporcional de los segmentos siguientes: x = 5 cm, y = 4 cm, z = 10 cm.

Quizás seas tú de esos chicos que reflexionan sobre ellos mismos y de vez en cuando se preguntan: ¿Qué puedo yo hacer para tener más fuerza de voluntad? Bien pues haremos unas cuantas reflexiones para intentar ayudarte.

Como en todo aprendizaje, será necesario efectuar ejercicios prácticos para lograrlo. Te cito algunos de ellos en esta reflexión:

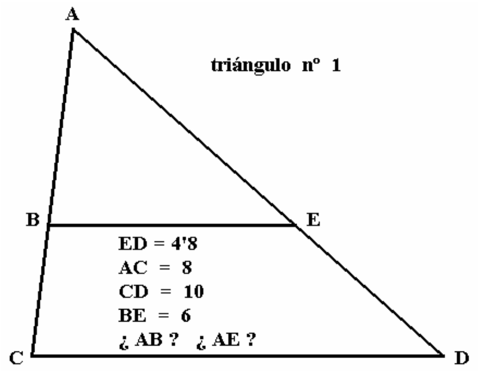
1) *Si tienes costumbre de ponerte a jugar, ver la tele, navegar por el ordenador, etc., antes de ponerte a estudiar, debes intentar cada día empezar a estudiar antes, y después hacer lo demás, hasta que lo consigas de forma habitual. Así educarás tu fuerza de voluntad.*

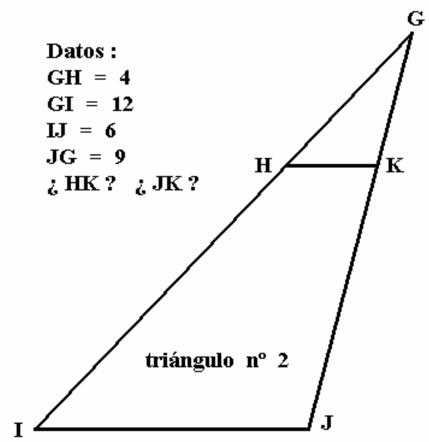


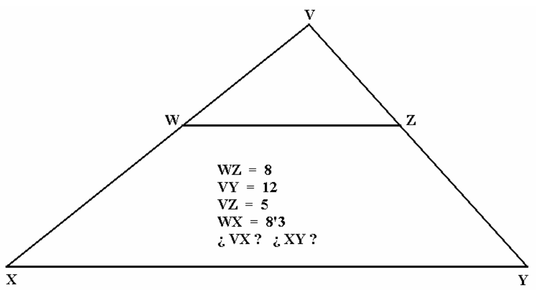
2) *Si en las horas de estudio tienes por costumbre tomarte un yogur cuando te apetece, pues de vez en cuando debes conseguir aguantar tiempo suficiente sin tomártelo. Eso fortalecerá tu voluntad.*
3) *Si al despertarte por la mañana sueles quedarte cinco o diez minutos en la cama antes de levantarte, pues a ver si logras, si no para siempre sí para varios días a la semana, levantarte en cuanto te despiertas y no esperar esos minutos en la cama. No será nada fácil, pero te dará dominio sobre la pereza.*
4) *Si cuando te vas a poner a comer no tienes ganas de lavarte las manos porque piensas que no están muy sucias, te fuerzas y dejas la comodidad lavándote las manos aunque las tuvieras medio aseadas, porque así forjarás tu voluntad.*

Seguiremos en otras reflexiones, pero empieza a practicar, verás como te encontrarás más seguro de ti mismo.

16) Los pares de triángulos siguientes están dibujados en posición en Thales. Calcula los segmentos que te piden en cada una de las figuras.

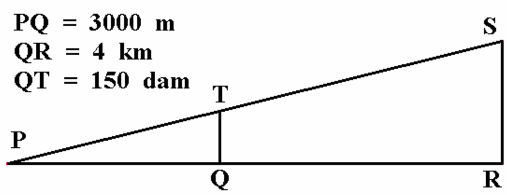






17) ¿Qué área tiene el triángulo mayor de los tres del ejercicio anterior? (Ver pág. 156)

18) ¿Cuánto costará un terreno representado con la figura **PRS** si cuesta a razón de 16.500 **€** / ha?



19) Dibuja un segmento de 10 cm y lo divides gráficamente en seis partes iguales.

20) Los tres lados de un triángulo miden 72, 60 y 45 mm. Si a partir del vértice que forman los dos lados primeros se toma sobre el primero de ellos un segmento de 24 mm, ¿qué distancia habrá que tomar sobre el segundo lado para que la recta que una los dos puntos extremos de los nuevos segmentos sea paralela al tercer lado del triángulo? ¿Cuál será la longitud de ese nuevo tercer segmento?

Justicia: Una de las cuatro virtudes cardinales, que inclina a dar a cada uno lo que le corresponde o pertenece. Derecho, razón, equidad. Conjunto de todas las virtudes, por el que es bueno quien las tiene. Lo que debe hacerse según derecho o razón. Pena o castigo público. Ministro o tribunal que ejerce justicia. La que regula la igualdad o proporción que debe haber entre las cosas, cuando se dan o cambian unas por otras. La que establece la proporción con que deben distribuirse las recompensas y los castigos.

Bueno, todo lo anterior son las diversas acepciones que el diccionario nos da de la palabra justicia. ¿Qué te parecen? ¿Tienes claro el concepto de lo que es justicia para ti?

En los últimos años, por unos u otros motivos (políticos, banqueros, narcotráficos, influencias, terrorismos, medios de comunicación, etc.) tenemos constantemente en candelero a los jueces y a la palabra justicia en "boca" de todos los medios de comunicación. Pienso que no es buena la opinión que tiene la gente hoy día de la justicia, entre otras cosas, porque una parte significativa de jueces, en sus pronunciamientos y/o sentencias, se ganan a pulso un cierto descrédito de la población en general.

En esencia, la virtud de la justicia consiste en dar a cada uno lo que le corresponde, independientemente de su poder, su afiliación política, su riqueza, su influencia, su raza, su sexo, etc. Y desgraciadamente la forma de impartir justicia de algunos jueces en los últimos tiempos no se parece en nada a este concepto. En mi opinión, lo primero que debemos pedir y exigir a los jueces es que sean independientes, y en último lugar también.

Por cierto, ¿sabes por qué en la imagen se le pone esa venda a la diosa griega Themis, que representa a la justicia?

11.6.- Semejanza de triángulos.

Comencemos con saber a qué llamaremos figuras semejantes, y para ello debemos conocer qué son **puntos homólogos**.

Imaginemos dos mapas de España: uno grande, de los que usáis en la clase de Ciencias Sociales y se colocan colgados de la pared o de la pizarra, y otro más pequeño, por ejemplo, el que viene en tu libro de texto. Bueno, pues si señalamos con un punto rojo en ambos mapas la ciudad de Badajoz, diremos de esos dos puntos que son homólogos, porque son puntos que corresponden al mismo lugar en la realidad. Igualmente, si unimos con un trazo azul, en ambos mapas, la distancia que hay entre las ciudades de Mérida y Cáceres, tendremos dos segmentos, uno en cada mapa, a los que llamaremos **segmentos homólogos**, porque los dos –aunque uno sea de menor longitud que el otro- representan en la realidad a la misma longitud.

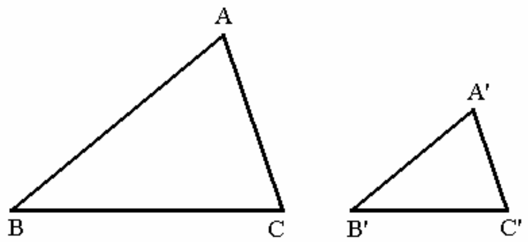
Si trazáramos otro segmento que fuera desde Mérida a Villafranca, nos resultarían otros dos segmentos homólogos. Y, lógicamente, en cada uno de los mapas anteriormente citados aparecerían dos segmentos con un extremo (vértice) común (la ciudad de Mérida) que formarían un ángulo con vértice en Mérida. Pues el ángulo que aparecería en el mapa grande sería el **ángulo homólogo** del que se dibujara en el mapa pequeño.

Y con estos conocimientos ya podemos decir que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, los ángulos homólogos son iguales y los lados homólogos son proporcionales.

Dicho esto, ¿cuándo dos triángulos son semejantes?

Pues dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados son proporcionales.

Los triángulos de las figuras siguientes son semejantes.



Al ser triángulos semejantes, podemos escribir estas expresiones:

⊗ Ángulos → $\begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ C = C' \end{cases}$

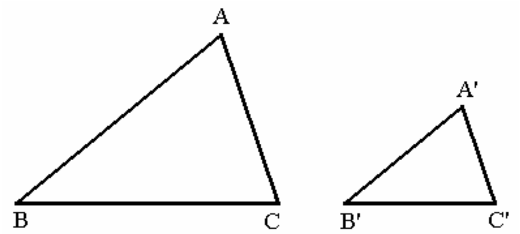
⊗ Lados → $\left\{ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} \right.$

CASOS DE SEMEJANZAS DE TRIÁNGULOS

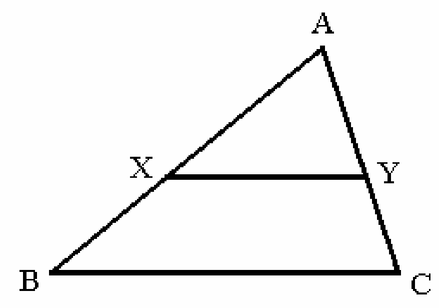
A) PRIMER CASO :

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos iguales.

Observemos otra vez la figura de los triángulos anteriores:



Y partiendo de ella, vamos a dibujar sobre el triángulo mayor **ABC** el triángulo menor **A'B'C'**. Para ello tomamos sobre el lado **AB,** y desde el vértice **A,** un segmento igual a lado **A'B'** del triángulo menor. Trazamos después una paralela a la base **BC** por el punto **X,** con lo que obtenemos **dos triángulos en posición de THALES**, que como ya hemos visto en la pregunta 11.5.e son semejantes. Veamos lo explicado en este párrafo en la figura siguiente:



B) SEGUNDO CASO :
Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

Para comprender y demostrar este caso de semejanza de triángulos se sigue un procedimiento análogo al utilizado en las figuras del caso anterior.

C) TERCER CASO :
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.

Para comprender y demostrar este caso de semejanza de triángulos, se sigue un procedimiento análogo al utilizado en las figuras del caso **A**).

NOTA : ***Los enunciados de los tres casos se pueden demostrar con los conocimientos ya adquiridos, si te "atreves" y lo haces de forma presentable y bien, me lo enseñas y seguramente recogerás algún fruto para tus calificaciones.***

R e s u m i e n d o :

Dos triángulos son semejantes si tienen:

▲ Dos ángulos iguales.

▲ Dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido.

▲ Sus tres lados proporcionales.

Y cuando tengamos dos triángulos semejantes, podemos establecer entre sus lados proporciones para hallar medidas que nos pidan en los ejercicios y/o problemas. Llamando **"a"**, **"b"**, **"c"** a los lados de uno y **"x"**, **"y"**, **"z"** a los lados del otro, tendríamos siempre :

$$\left[\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\right] ; \left[\frac{a}{x}=\frac{c}{z}\right] ; \left[\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\right]$$

CASOS PARTICULARES DE SEMEJANZAS DE TRIÁNGULOS :

1º) Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes.

2º) Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual o, también, si sus catetos son proporcionales.

3º) Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen un ángulo igual.

4º) Dos triángulos rectángulos e isósceles son siempre semejantes.

CONSECUENCIAS DE ESTA PREGUNTA :

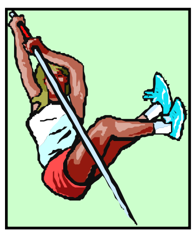
a) La ***razón de las alturas*** homólogas de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza.

b) La ***razón de los perímetros*** de dos triángulos semejantes es igual a su razón de semejanza.

c) La ***razón de las áreas*** de dos triángulos semejantes es igual AL CUADRADO de la razón de semejanza.

Un deseo.

Espero que seas inteligente y aprendas cuanto antes una cosa muy importante para toda la vida: cuando uno se sacrifica, le cuesta mucho, pero después se recogen los frutos y las satisfacciones personales. Si no es así se suele coger la "cuesta abajo" llena de más problemas y más insatisfacciones en la vida.

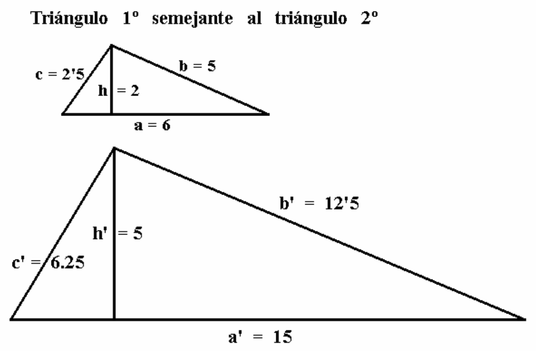


De ti depende, ya que vas teniendo algunos años y cierta capacidad para reflexionar sobre ti mismo y sobre tu futuro. Cada uno es, o va siendo, lo que él mismo se propone y se gana con sacrificio y trabajo constante; no lo olvides.

La "pértiga" que te lance al futuro está compuesta, entre otros, de los siguientes "materiales": interés, esfuerzo, dedicación y perseverancia.

Ejemplo práctico de las consecuencias anteriores :

Recuerda: una razón es el cociente indicado de dos números. Fijándonos en la siguiente figura, veamos las tres consecuencias de la página anterior.



Calculamos razones del 1º con respecto al 2º:

a) RAZÓN DE LAS ALTURAS HOMÓLOGAS :

$$\frac{h}{h'} = \frac{2}{5} = 0'4 \rightarrow \text{"r" (razón de semejanza)}$$

b) RAZÓN DE LOS PERÍMETROS :

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{p}{p'} = \frac{13'5}{33'75} = 0'4 \rightarrow \text{"r"}$$

c) RAZÓN DE LAS ÁREAS :

$$\frac{A}{A'} = \frac{6}{37'5} = 0'16 = (0'4)^2 \rightarrow \text{"}r^2\text{"}$$

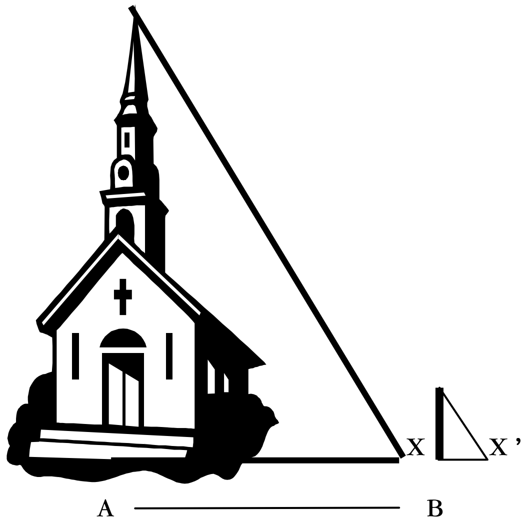
▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲

Ejemplos prácticos resueltos sobre la semejanza de triángulos :

El sabio griego Thales de Mileto midió las alturas de algunas pirámides de Egipto, hallaba las distancias de los barcos a la costa y otras cosas que le dieron fama de brujo entre los habitantes de su tiempo. Pero nosotros, después de lo que llevamos explicado de este tema de la proporcionalidad geométrica, sabemos que Thales no sabía nada de brujería y sí mucho de geometría, estudio y aplicaciones de sus sabios y diversos conocimientos.

Thales de Mileto se valió de la semejanza, sobre todo de la de triángulos, para averiguar las alturas de las pirámides. Y precisamente eso, hallar alturas de torres, edificios, postes, etc., es una de las aplicaciones prácticas de la semejanza de triángulos. Veamos algunos ejemplos resueltos.

1.- Valiéndonos de un palo, un bastón, una vara o algo semejante, calculemos la altura de una torre.



→ Altura del palo = 1'50 m
→ Sombra del palo = 1'20 m
→ Sombra de la torre (AB) = 25'6 m

NOTA : *Los ángulos que forman las sombras con los rayos procedentes del Sol, y que pasan por los puntos altos de la torre, el palo o el objeto que sea, son iguales, o sea, X = X '.*

Como los dos triángulos siguientes :

Uno con estos 3 lados:
- La altura de la torre.
- Su sombra.
- Del vértice de la torre al extremo de su sombra.

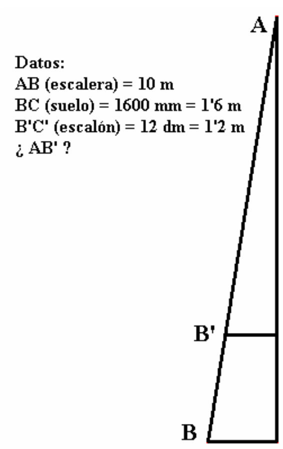
Otro con estos 3 lados:
- La altura del palo.
- Su sombra.
- Del vértice del palo al extremo de su sombra.

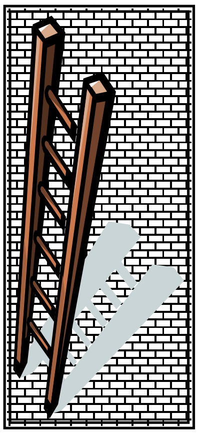
son semejantes, por ser rectángulos y tener un ángulo agudo igual (X = X'), pues sus lados son proporcionales :

$$\left[\frac{1'50}{1'20} = \frac{\text{"h"}}{25'6}\right] \rightarrow h = \frac{1'5 . 25'6}{1'2} = 32 \text{ m}$$

Solución: La torre mide 32 metros.

2.- Una escalera de 10 metros está apoyada en un pared. El pie de la escalera está separado de la pared 1600 milímetros. ¿Cuántos metros dista de la parte superior de la escalera un escalón cuya distancia a la pared es de 12 dm?



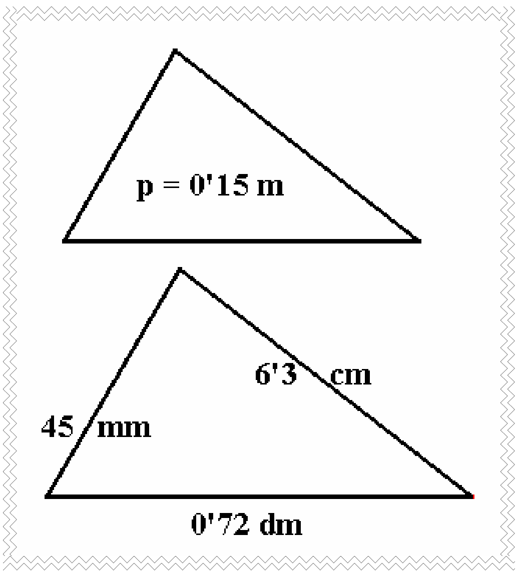


Los triángulos ABC y AB'C' están en posición de Thales, o sea, que sus lados son proporcionales.

$$\left[\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}\right] \rightarrow \left[\frac{10}{1'6}=\frac{x}{1'2}\right] \rightarrow x=7'5 \text{ m}$$

Solución: Del escalón hasta arriba hay 7'5 m.

3.- El perímetro de un triángulo es de 0'15 m, y los lados de un triángulo semejante son de 45 mm, 6'3 cm y 0'72 dm. Aplicando tus conocimientos de la semejanza de triángulos y las propiedades de las proporciones, calcula la medida de los lados del primer triángulo.



⊗ Ajustes $\begin{cases} 0'15 \text{ m} \rightarrow 0'15.1000 = 150 \text{ mm} \\ 0'72 \text{ dm} \rightarrow 0'72.100 = 72 \text{ mm} \\ 6'3 \text{ cm} \rightarrow 6'3.10 = 63 \text{ mm} \\ 45 \text{ mm} \end{cases}$

Como los dos triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales, o sus perímetros.

⊗ $\begin{cases} p \text{ (menor)} = 0'15 \text{ m} = 150 \text{ mm} \\ p' \text{ (mayor)} = 72 + 63 + 45 = 180 \text{ mm} \end{cases}$

$$\left[\frac{150}{180}=\frac{x}{72}\right] \rightarrow x = \frac{150.72}{180} = 60 \text{ mm}$$

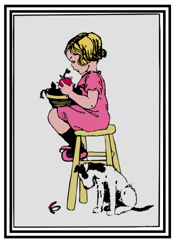
$$\left[\frac{150}{180}=\frac{y}{63}\right] \rightarrow y = \frac{150.63}{180} = 52'5 \text{ mm}$$

$$\left[\frac{150}{180}=\frac{z}{45}\right] \rightarrow z = \frac{150.45}{180} = 37'5 \text{ mm}$$

Solución → Los lados miden $\begin{cases} \textbf{60 mm,} \\ \textbf{52'5 mm,} \\ \textbf{37'5 mm.} \end{cases}$

****

Lo primero a tener en cuenta para valorar a una persona es respetar su dignidad personal, es decir, respetar su manera de ser, su forma de comportarse, su actitud ante la vida, su modo de pensar, sus sentimientos, etc., sobre todo cuando son, como sucede en tantas ocasiones, distintos a los nuestros. Ese respeto unas veces nos llevará a cambiar lo nuestro y otras veces no; el respetar y aceptar "lo otro" no presupone un compartir lo distinto o un cambio de nuestra postura, que en ocasiones así será, sino eso, un respeto, o sea, atenderlo, considerarlo, tenerlo en cuenta y, si es posible, debatirlo. Claro, se puede pensar, incluso tener muy claro, que no todas las personas van a merecer ese respeto, sea porque lo que transmiten infringe claramente los derechos fundamentales de las personas, porque su forma de comunicarlo no es nada digna o porque sus actitudes y/o ideas distan mucho de lo que podemos llamar un merecido respeto.



La diversidad a la que nos conduce el ser tolerante debe constituir en nuestra vida un excelente complemento, y en ocasiones –cuando la relación y la comunicación lo requieran, o cuando las otras opiniones, argumentos, ideas o razones nos hagan ver que "aquello del otro" es más válido que "esto nuestro"– abrirnos (o enseñarnos) otro rumbo hacia el cual con nuestro bagaje no caminábamos, y eso nos empuja al compromiso. Por ello, la tolerancia constituye claramente un valor de extraordinaria importancia.

****

11.8.- Ejercicios para resolver.

1) Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m. ¿Qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4'5 m? (NOTA: se especifica que es a la misma hora porque si no fuera así la inclinación de la sombra que da el Sol no sería igual, o sea, los ángulos formados por el poste o el árbol, sus sombras y las líneas imaginarias que las une)

2) Los lados de un triángulo miden 7 m, 8 m y 10 m respectivamente. En un triángulo semejante, el lado correspondiente al de 8 m mide 16 m. Hallar los otros lados del triángulo.

3) **EXTRA**. Aprovechando los conocimientos que ya tienes, y para demostrarte a ti mismo tu progreso matemático en este tema, calcula la altura de la torre de la Parroquia de Nuestra Señora del Valle. También, si lo deseas, puedes calcular las alturas de otras torres de Villafranca: Ermita de la Coronada, Iglesia del Carmen, Capilla del Colegio. (Habrá "premio")

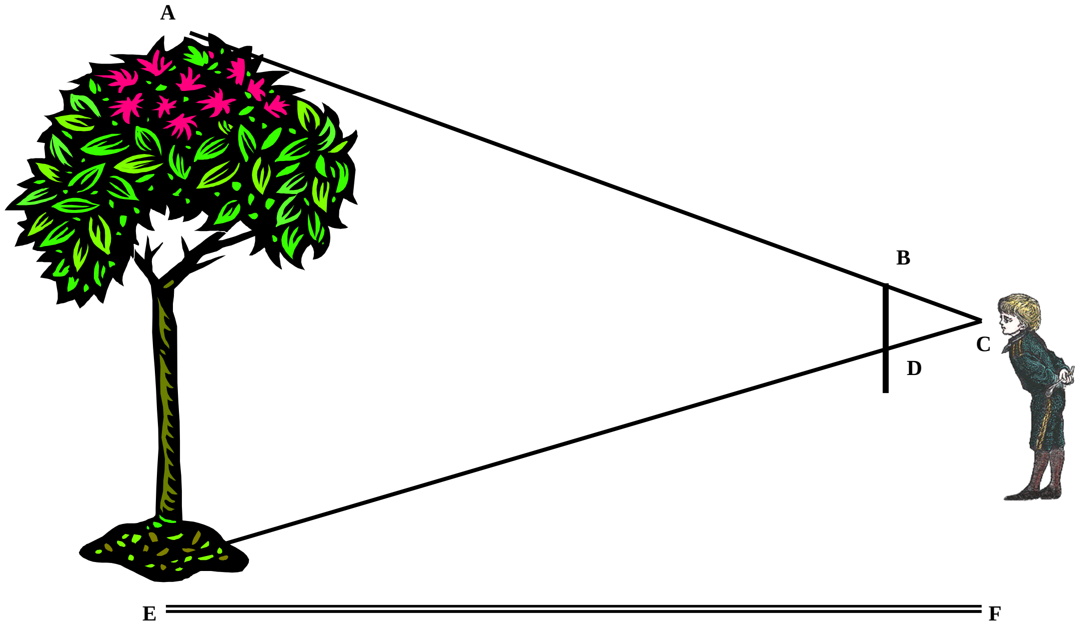
4) Sergio sabe que su talla es de 155 cm. Sale un día de paseo con su amigo Carlos y se detienen junto a un poste de cables de teléfonos. Carlos mide la sombra que proyecta Sergio en ese momento y obtiene una medida de 25 dm. ¿Cuántos m tiene la altura del poste si éste proyecta una sombra de 24.000 mm?

5) ¿Son semejantes dos triángulos rectángulos que tienen proporcionales dos catetos? Razona tu respuesta.

6) Dado un triángulo escaleno, ¿cómo podemos construir fácil y rápidamente otro triángulo escaleno semejante cuyos lados midan el doble.

7) Dos triángulos semejantes tienen sus lados menores de 27 mm y 0'45 dm. Calcula la razón de semejanza entre sus áreas.

8) Fíjate en el dibujo siguiente. En él se puede aprender una manera de hallar la altura de un árbol, o de otra cosa, con ayuda de un palo. Mides antes la distancia hasta el árbol –o sea, la altura del triángulo mayor, ACE, que en nuestro caso es de 0'93 dam–, mides la distancia de tu cara al palo –o sea, la altura del triángulo menor, BCD, que es de 3'1 dm– y mides el trozo de palo que sobresale del puño que lo coge –o sea, BD, que en nuestro caso mide 25 cm–. (NOTA : Aunque no se ha puesto una imagen del chico cogiendo con la mano el palo, para que se vean mejor los segmentos que intervienen en el problema, se supone que el palo lo tiene cogido el chico con una mano por debajo del punto D.)



Distancia del chico al árbol → 0'93 dam

9) Señala, explicando brevemente tus respuestas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

b) Dos triángulos iguales son siempre semejantes.

c) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

d) Dos triángulos semejantes son siempre iguales.

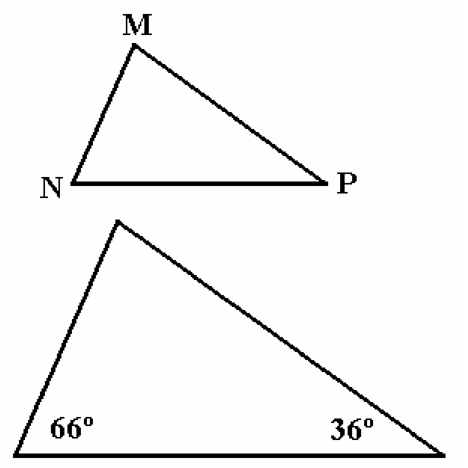
e) Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales, sus ángulos correspondientes son iguales.

10) Hallar la altura de una torre (en m) que proyecta una sombra de 4'5 dam, sabiendo que en el mismo instante un muro de 30 dm da una sombra de 500 cm.

11) Dibuja un triángulo ABC y otro semejante A'B'C', de tal forma que estén en posición de Thales y que la razón de semejanza sea igual a 1/3.

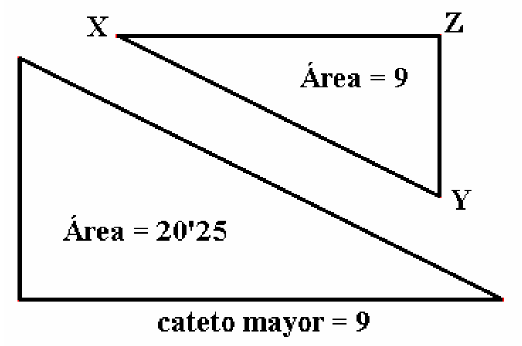
12) Los lados de un triángulo miden 8 dm, 1 m y 160 cm. Calcula la longitud de los lados de otro triángulo semejante cuyo perímetro sea de 680 mm.

13) Los dos triángulos de la figura son semejantes. ¿Cuánto miden los tres ángulos del triángulo MNP?



14) ¿Es posible que un triángulo rectángulo sea semejante a otro que no sea rectángulo? Razona tu respuesta.

15) Sabiendo que los dos triángulos siguientes son semejantes, y con los datos de la figura, calcula la medida de los tres lados del triángulo XYZ.

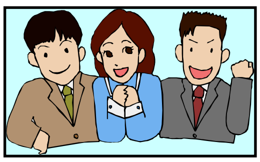


16) Se sabe que las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son de 16 cm ^{2} y 0'25 dm^2. La base del mayor mide 100 mm. Averigua el perímetro del triángulo menor.

↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔

No siempre es fácil saber distinguir a los amigos "fetén" de los que no lo son.

Se dice a veces, pienso que de forma equivocada, que los amigos no se exigen ni se quejan nunca. No es así la amistad, porque cuando eso sucede esa relación o no es amistad o es tan débil que es como si no lo fuera. En la verdadera amistad uno de los mayores desafíos es saber dar a conocer al amigo los propios defectos de uno mismo y, además, hacerle caer en la cuenta de los suyos. Sucede, en no pocas ocasiones, que uno no se llega a poner de acuerdo ni con el mejor de los amigos. Y eso es normal, como también lo es el estar dispuesto siempre a perdonarse los pequeños defectos. ¿Y los defectos grandes? Pues quizás la verdadera amistad no sea muy compañera de los vicios, sino más bien consejera de virtudes. Con la buena amistad uno persigue la virtud, un provechoso diálogo y una apreciable relación.



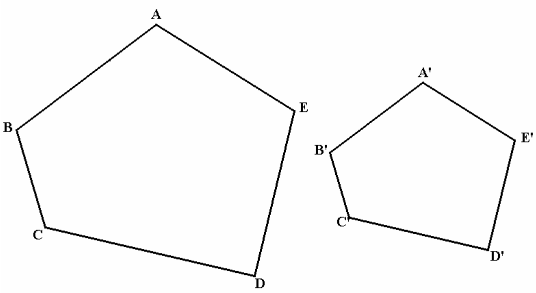
En la auténtica amistad encontramos una especie de sedante para aquellas situaciones delicadas y problemáticas que todos tenemos, porque los verdaderos amigos son los que "entran" en nuestras vidas cuando los demás "salen", o sea, aquellos para los que en las contrariedades no existe la palabra mañana. De los otros, de las "amistades" volubles y cicateras, hay que intentar librarse cuando antes. Al amigo genuino se le prueba en los reveses y en las desventuras.

↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔

11.9.- Semejanza de polígonos.

Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y los lados homólogos son proporcionales.

A la razón de los lados homólogos la llamaremos, como en los triángulos, razón de semejanza.



Como los dos polígonos son semejantes :

a) Sus ángulos son iguales:

$A = A'$; $B = B'$; $C = C'$; $D = D'$; $E = E'$.

b) Sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = "k",$$

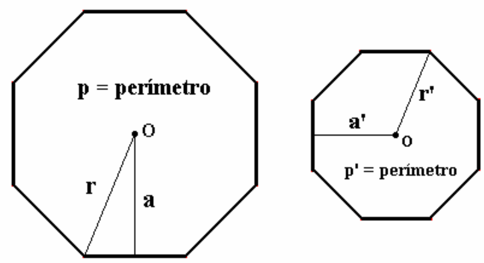
siendo "k" la razón de semejanza.

En general, si dos polígonos son semejantes :

⊗ La razón de sus perímetros es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{p}{p'} = "k" = \frac{AB}{A'B'} = \ldots$$

Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes. Por ello sus lados, sus perímetros, sus radios y sus apotemas son proporcionales.



Los dos octógonos anteriores , como son regulares , son semejantes . Entonces :

$$\left[\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} = "k"\right]$$

$$\left[\frac{\text{Área del mayor}}{\text{Área del menor}} = "k^2"\right]$$

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS SEMEJANTES

Método "A" :

Construir un pentágono semejante a otro dado cuyo razón de semejanza, del nuevo con respecto al inicial, sea igual a 3/4.

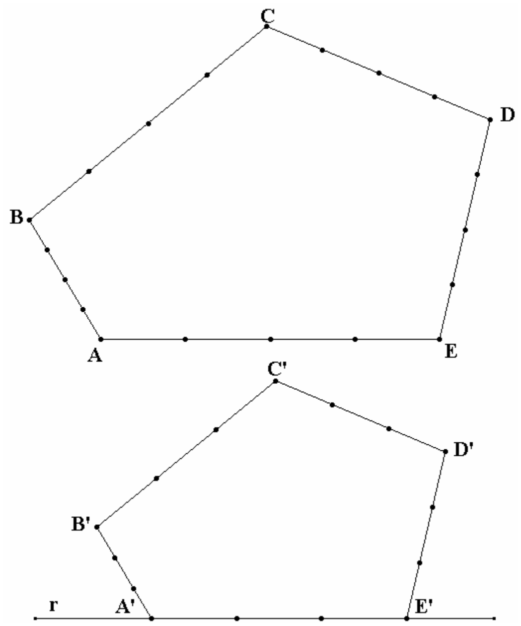
En primer lugar, dividimos cada lado del primero en 4 partes iguales.

A continuación, una vez trazada una línea recta *–mejor que sea horizontal, pero puede no serlo-,* transportamos sobre un punto arbitrario de ella (**A'**) tres partes del lado horizontal (**AE**), con lo que obtenemos el lado homólogo (**A'E'**, lado correspondiente).

Por el extremo **E'** trazamos una paralela al lado **ED** y sobre ella transportamos tres partes del lado **ED,** obteniéndose así el lado **E'D'** homólogo de **ED.**

Sobre el extremo **D'** trazamos una paralela al lado **CD** y sobre ella medimos tres partes del lado **DC**; obtenemos así **D'C',** lado homólogo de **DC.**

Y de modo análogo seguiremos hasta terminar de construir el polígono semejante que nos pedían con razón de semejanza de ¾.



Método "B" :

Construir un polígono semejante a otro cuya razón de semejanza, del inicial con respecto al nuevo, sea igual a 3.

Partimos del hexágono mayor de la figura, **ABCDEF**.

Trazamos las tres diagonales desde cualquiera de sus vértices. En este caso hemos elegido el vértice **A**.

Dividimos las diagonales en tres partes iguales, ya que la razón de semejanza es **3,** o sea:

$$"k" = \frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{CD} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FA}{F'A'} = k = 3$$

Dividimos en tres partes iguales los dos segmentos contiguos al vértice elegido **A,** es decir, los lados, **AB** y **AF.**

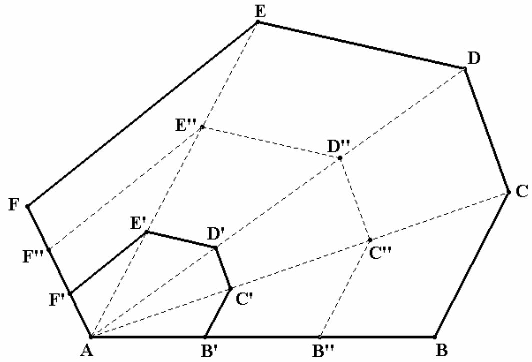
Ahora sólo nos queda unir los puntos **B', C', D', E' y F'** que están situados en la primera de las tres partes en que se han dividido las diagonales y los dos lados contiguos. **Y** así obtenemos el hexágono semejante con razón **3.**

$$\boxed{\text{ABCDEF semejante a AB'C'D'E'F'}}$$

¡OJO! Como la razón de semejanza es la relación entre uno y otro polígono, si en lugar de relacionar el hexágono mayor con respecto al menor relacionamos el menor con respecto al mayor, entonces las razón se invierte, o sea :

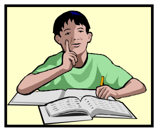
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Razón de} \\ \text{AB'C'D'E'F'A} \\ \text{con respecto} \\ \text{a ABCDEFA}\end{array}\right\} \left[\frac{AB'}{AB} = \ldots = \frac{1}{3} = "k^{-1}"\right]$$

Observa que si uniéramos los puntos homólogos **A, B", C", D", E", F", A,** tendríamos otro hexágono semejante al inicial, pero de razón de semejanza igual a **3/2,** o a **2/3** si relacionamos éste con respecto al inicial **ABCDEFA.**



Igual que en los triángulos, la razón entre las áreas de polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

$$\left[\frac{\text{Área de ABCDEF}}{\text{Área de AB'C'D'E'F'}} = "k^2"\right]$$



Si tus padres se equivocaron alguna vez en el trato contigo, ¿recibiste excusas, de tu padre o de tu madre, similares a las que se describen aquí?

Cuando una persona se equivoca, lo peor de todo no es equivocarse, sino no reconocer SU error. Si encima se mantiene en él, o su actitud es defenderlo, le lleva a una situación de repulsa ante los demás, y no por haberse equivocado sino por su actitud después del error.

Te digo esto porque el que se ha equivocado, en esta ocasión, he sido yo, ya que no te he hablado bien al decirte lo de las horas que dedicaste a la asignatura que has suspendido.

Bien, pues que quede claro que reconozco mi error y te pido perdón. No te hablé bien y lo siento.

Que sepas que yo comprendo que has podido suspender, que también sé que poco a poco te has ido superando y que tengo esperanzas y confianza en que sigas mejorando y madurando. O sea, que no estoy enfadado, aunque está claro que hubiera sido mejor, sobre todo para ti, haber terminado con todo aprobado.

Bueno, pues lo dicho, que siento haberte hablado así.

Enhorabuena por las demás notas, y espero que recuperes con total suficiencia esa asignatura pendiente.

¿Te lo mereciste alguna vez y no lo han hecho?

11.10.- Planos y escalas.

Frecuentemente hay necesidad de representar por medio del dibujo cosas que no caben en el papel (cuaderno o lámina) por tener dimensiones muy grandes (una nación, una región, una cordillera, una ciudad, una carretera, etc.), o que no pueden apreciarse bien por tener dimensiones muy pequeñas (un ácaro, una molécula, una célula, etc.). Como consecuencia de ello es necesario reducir o ampliar en una proporción determinada las dimensiones reales de las cosas representadas.

Tanto si reducimos como si ampliamos, las figuras representadas deben ser semejantes a las originales o reales. Es decir, deben tener las mismas formas y las medidas proporcionales. Por tanto, entre ellas siempre habrá una razón de semejanza.

Hecha esta introducción, pasemos a definir plano y escala.

P L A N O es la figura o figuras semejantes que resultan de la ampliación o reducción de la/s figura/s original/es, o sea, un plano es la representación gráfica de un terreno, edificio, campamento, carretera, etc.

El caso más conocido y usado por vosotros es el mapa. Un **M A P A es la representación de una superficie plana de una parte geográfica de la Tierra reproducida a escala,** por ejemplo, un continente, una nación, una comunidad, etc. En los mapas pueden figurar datos físicos o políticos (mapas topográficos), o datos botánicos, geológicos, tectónicos (mapas temáticos), o datos meteorológicos (mapas del tiempo).

E S C A L A es la razón de semejanza entre el dibujo (plano) y el objeto real, es decir, la razón constante que existe entre dos puntos cualesquiera del dibujo y los correspondientes (homólogos) de la realidad.

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{Longitud del plano}}{\text{Longitud real}}$$

Las escalas pueden ser numéricas o gráficas.

La **ESCALA NUMÉRICA** suele representarse por una fracción, o por una expresión en forma de cociente con la unidad **(1)** como dividendo. Aunque no es lo más habitual, también se puede representar por una fracción o cociente en el que no aparece en el numerador la unidad **(1),** sino otro número. Ejemplos:

1) Si en un plano o mapa ves la expresión siguiente:

$$E = 1 : 3000 \rightarrow \text{o así} \rightarrow E = \frac{1}{3000}$$

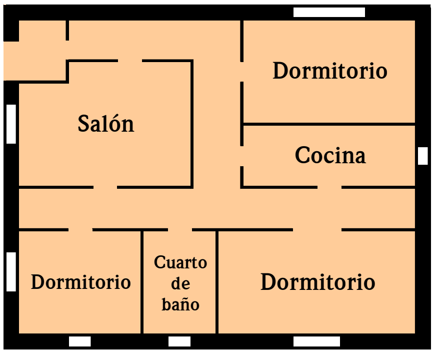
quiere decir que 1 unidad de longitud del dibujo representan 3000 unidades en la realidad, o sea, que **1 cm** del dibujo son 3000 cm (**30 m**) de la realidad.

2) Si la escala de un dibujo viene representada por:

$$E = 2 : 15 \rightarrow \text{ó bien} \rightarrow E = \frac{2}{15}$$

quiere decir que cada 2 unidades de longitud del dibujo representan a 15 unidades de la realidad.

A continuación tienes un plano de una casa.



E s c a l a → 1 : 300

En el plano de la casa, cada cm representan 300 cm de la realidad, o sea, **1 cm : 3 m** . ¿Es una buena casa?

EXTRA.- ¿Cuáles son las dimensiones de la casa representada en este plano? *(Habrá "cosecha")*

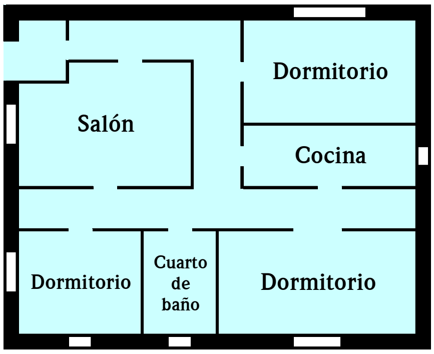
¡ OJO ! Debes tener en cuenta que las escalas numéricas de cualquier plano o mapa quedan invalidadas siempre que se le haga alguna reducción o ampliación, o sea, que sólo será válida en una fotocopia cuando no se reduzca ni se amplíe.

La **ESCALA GRÁFICA** suele representarse mediante un segmento graduado, en el cual cada unidad tomada en el plano o escala equivale a alguna unidad de longitud (m, km, etc.) en la realidad. Al segmento que aparece graduado en el plano se le llama escala gráfica. Llevando este segmento sobre el plano haremos los cálculos de distancias entre diversos lugares o puntos.

Por ejemplo, en el plano anterior de la casa, la escala gráfica sería:

Escala → **: 3 m**

Cada segmento de esta escala tomado en el plano representa 3 m de la realidad.



¡ OJO ! Debes tener en cuenta que las escalas gráficas de cualquier plano o mapa tienen la ventaja de que siguen siendo válidas a pesar de que reduzcas o amplíes el plano o mapa mediante fotocopias o cualquier otro método.

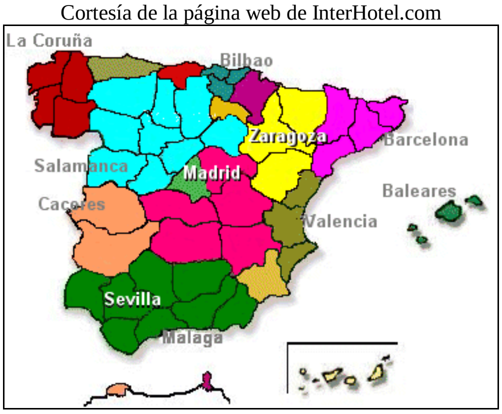
Repasemos algunos conceptos:

PLANO es la representación en dos dimensiones (bidimensional), mediante un dibujo, de una habitación, una casa, un campo, una ciudad, un río, etc., conservando la forma original.

Cortesía de la página web de la Uex.
Plano del campus universitario de Badajoz.

MAPA es la representación, también bidimensional, mediante un dibujo de una parte de la superficie terrestre (provincia, comunidad, país, continente, etc.), conservando igualmente la semejanza entre la realidad y el dibujo.

Cortesía de la página web de InterHotel.com



MAQUETA es la representación en tres dimensiones (tridimensional, en el espacio y no en el plano como planos y escalas) de un edificio, una catedral, un monumento, una ciudad, un vehículo o cualquier otro objeto.

Cortesía de página web de la ETSA (Escuela Técnica Superior de Arquitectura) de las Palmas de Gran Canaria

EJEMPLOS RESUELTOS

1.-En un mapa de España, con escala numérica = 1 : 14.000.000, ¿cuántos km distan en la realidad dos ciudades separadas en el mapa por una distancia de 5'6 cm?

⊗ Escala = 1 : 14.000.000

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ cm (mapa)} \rightarrow 14000000 \text{ cm (realidad)} \\ 5'6 \text{ cm (mapa)} \rightarrow \text{"x" cm (reales)} \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{5'6 \cdot 14000000}{1} = 78400000 \text{ cm}$$

78400000 : 100000 = 784 km

Solución : Distan 784 km en la realidad.

2.-Sabemos que dos ciudades españolas distan en la realidad 630 km. ¿A qué distancia aparecerán en el mapa de España citado en el ejercicio anterior?

⊗ Escala = 1:14.000.000

⊗ Ajuste previo: 630 km → 63.000.000 cm

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ cm (mapa)} \rightarrow 14000000 \text{ cm (realidad)} \\ \text{"x" (mapa)} \rightarrow 63000000 \text{ cm (reales)} \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{63000000 \cdot 1}{14000000} = 4'5 \text{ cm}$$

Solución : Distan 4'5 cm en el mapa.

3.-En un plano de Extremadura, aparecen Badajoz y Villafranca separadas por 4 cm. Si la distancia real entre ellas es de 80 km, ¿a qué escala está dibujado ese mapa?

⊗ Ajuste previo: 80 km → 8.000.000 cm

$$\left\{\begin{array}{l} 4 \text{ cm (mapa)} \rightarrow 8000000 \text{ cm (reales)} \\ 1 \rightarrow \text{"x"} \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8000000}{4} = 2000000$$

Solución : La escala es 1 : 2.000.000

Lo he resuelto con regla de tres para que la recuerdes y no olvides lo práctica que es en muchos y diversos problemas. No obstante, se resuelve, quizás más rápido, aplicando la fórmula general de las escalas :

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{longitud del mapa}}{\text{longitud real}} = \frac{4}{8000000} =$$

Escala → 1 : 2.000.000

4.-Disponemos de un mapa de la provincia de Badajoz cuya escala numérica es 1 : 600.000.

a) Si hacemos una fotocopia ampliándolo al doble, ¿cuál será la nueva escala de la copia obtenida?

b) Si el mapa original lo reducimos a la tercera parte, ¿cuál será la nueva escala de esa reducción?

a) Si ampliamos al doble, quiere decir que 1 unidad de medida del mapa, por ejemplo, 1 cm, quedará en el nuevo mapa ampliado con 2 cm. Es decir, que esos nuevos 2 cm representan a la misma distancia real que en el primer mapa. Luego :

$$\textit{Nueva ESCALA} \rightarrow \frac{2}{600000} = \frac{\mathit{1}}{\mathit{300.000}}$$

b) Siguiendo el mismo razonamiento, 1 cm del primer plano se convierte después de foto–copiarlo en 1/3 de cm. Y 1/3 equivale a 600.000 cm reales. Así :

$$\textit{Nueva ESCALA} \rightarrow \frac{1/3}{600000} = \frac{\mathit{1}}{\mathit{1.800.000}}$$

5.-Si las dimensiones reales de un edificio son de 18 x 15 x 24 m, ¿qué dimensiones, en cm, tendrá una reproducción (maqueta) suya hecha a escala 3 / 50 ?

⊗ Ajustes iniciales:

$$\left\{\begin{array}{l} 18 \text{ m} \rightarrow 18 \cdot 100 = 1800 \text{ cm} \\ 15 \text{ m} \rightarrow 15 \cdot 100 = 1500 \text{ cm} \\ 18 \text{ m} \rightarrow 24 \cdot 100 = 2400 \text{ cm} \end{array}\right.$$

$$⊗ \text{ Escala} = \frac{3}{50}$$

$$\left[\frac{3}{50} = \frac{x}{1800}\right] \rightarrow x = \frac{3.1800}{50} = 108 \text{ cm}$$

$$\left[\frac{3}{50} = \frac{y}{1500}\right] \rightarrow y = \frac{3.1500}{50} = 90 \text{ cm}$$

$$\left[\frac{3}{50} = \frac{z}{2400}\right] \rightarrow z = \frac{3.2400}{50} = 144 \text{ cm}$$

Solución : { **Las dimensiones de la maqueta del edificio son 108 x 90 x 144 cm**

11.11.- La homotecia.

HOMOTECIA es una transformación que hace corresponder a todo punto **A** de una figura otro punto **A'** alineado con **A** y con un centro **O** tal que :

$$\frac{OA'}{OA} = \text{"k"} \begin{cases} \textit{constante} \\ \textit{y} \\ \textit{distinta de } 0 \ (\neq 0) \end{cases}$$

→ Al punto **A'** se le llama **homólogo** de **A**.

→ **"O"** es el **centro de la homotecia**.

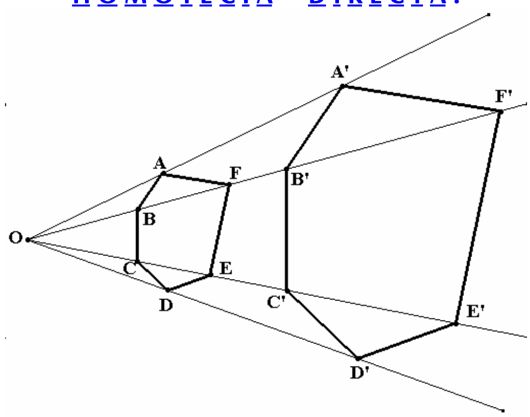
→ **"k"** es la **razón de homotecia**

Si los puntos homólogos están ***a un mismo lado*** del centro de homotecia, la **HOMOTECIA** se llama **DIRECTA**.

Si los puntos homólogos están alineados ***a uno y otro lado*** del centro de homotecia, la **HOMOTECIA** se llama **INVERSA**.

Veamos ejemplos de ambas clases :

HOMOTECIA DIRECTA:



En esta homotecia los puntos homólogos están situados al mismo lado del centro de homotecia, luego es una homotecia directa.

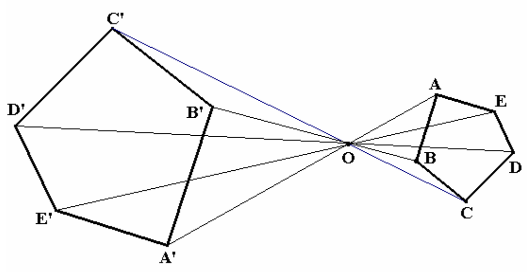
⊗ Los hexágonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' son semejantes.

⊗ $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{OE'}{OE}=\frac{OF'}{OF}=$ "k", siendo "k" la razón de la homotecia.

⊗ Lógicamente, también :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'F'}{EF}=\frac{F'A'}{FA}=\text{"k"}$$

HOMOTECIA INVERSA:



En esta homotecia, los puntos homólogos están situados a distinto lado del centro de homotecia, luego es una homotecia inversa. Observa cómo cambia de posición.

⊗ Los pentágonos ABCDE y A'B'C'D'E' son semejantes.

⊗ $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{OE'}{OE}=$ "k" siendo "k" la razón de la homotecia.

⊗ Lógicamente, también :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}=\text{"k"}$$

En las **homotecias directas** la razón es mayor de 0 (**$k > 0$**), porque los segmentos formados por dos puntos homólogos con el centro están situados **en el mismo sentido** con respecto al centro de homotecia, es decir, con el mismo signo.

En las **homotecias inversas** la razón es menor de 0 (**$k < 0$**), porque los segmentos formados por dos puntos homólogos con el centro están situados a ambos lados del centro de homotecia, o sea, **en distinto sentido** con respecto a "O", es decir, con distinto signo.

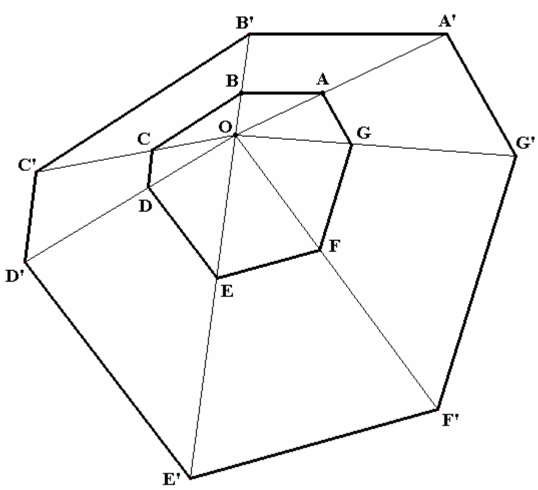
El conocimiento de las homotecias nos ayuda a agilizar la construcción de figuras semejantes. Podemos imaginar este método como un proyector de rayos que pasan por los vértices de una figura y nos forma otra semejante.

Conviene saber que el centro de homotecia no siempre está fuera de ellas. Puede estar dentro o en uno cualquiera de los vértices de la figura.

Una homotecia queda definida si nos dan dos pares de puntos homólogos contenidos en segmentos paralelos.

Para construir una figura semejante a otra mediante una homotecia seguimos el siguiente procedimiento:

- Partimos de una figura, en este caso un heptágono irregular convexo, un centro de homotecia (**O**) y una razón de homotecia (k = 2'4).
- Trazamos semirrectas desde "**O**" pasando por los vértices **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** y **G**.
- Medimos en cada una de ellas, respectivamente y desde el centro de homotecia, 2'4•**OA**, 2'4•**OB**, 2'4•**OC**, 2'4•**OD**, 2'4•**OE**, 2'4•**OF**, 2'4•**OG** . Y así obtenemos los puntos homólogos respectivos, o sea, **A'**, **B'**, **C'**, **D'**, **E'**, **F'** y **G'**.
- Unimos los puntos homólogos y obtenemos el heptágono semejante al inicial con razón igual a 2'4.
- Se haría de forma más rápida, y sin tener que hacer tantas mediciones, si hallamos uno de los puntos homólogos, por ejemplo, **A'**, y vamos trazando paralelas respectivas a cada uno de los lados por los puntos de cortes que se van obteniendo en las distintas semirrectas.



El mismo procedimiento se sigue cuando el centro de homotecia esté en uno de los vértices de la figura o fuera de ella.

Ejercicio EXTRA

A ver qué grado de comprensión has adquirido sobre las transformaciones homotéticas. Rellena el siguiente cuadro en tu cuaderno, dibujando en cada una de las homotecias un ejemplo con las figuras planas que desees. Pero hazlo todo con regla, con interés y con esmero; después me lo enseñas para recibir alguna "recompensa".

	Tipos de homotecias		
	Razón	Tamaño de la figura homotética	Posición de la figura homotética
a)	k = 1		
b)	k = - 1		
c)	k > 1		
d)	k < - 1		
e)	0 < k < 1		
f)	- 1 < k < 0		

En las situaciones inesperadas, conflictivas, problemáticas, difíciles y/o graves, es donde más necesitamos el sentido común, por eso, si desgraciadamente alguna vez estás presente o vives realidades de este tipo, ten calma, actúa con prudencia, reflexiona, usa tu inteligencia, estudia el entorno, etc. Quizás, actuar con sentido común se podría definir como el actuar con una inteligencia práctica.

Una persona tiene sentido común cuando actúa con sensatez, cuando obra con buen juicio y cuando procede de manera madura.

Podemos destacar, entre otras, algunas características que poseen las personas con un alto nivel de sentido común en su vida:

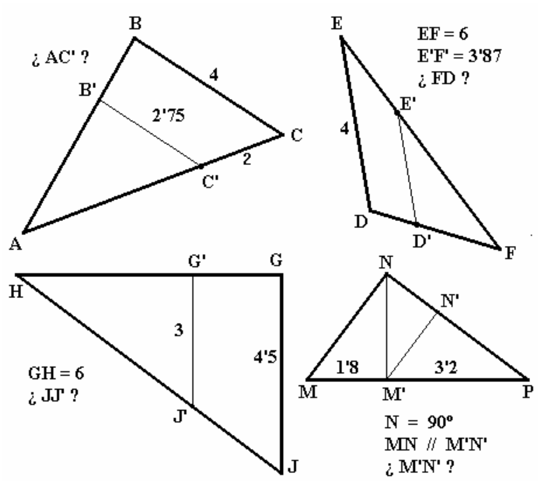
→ No dejarse llevar de las ilusiones.
→ Saber escuchar.
→ Ser humilde, y no egoísta.
→ Ser prudente, cauto.
→ Usar la inteligencia práctica

Hoy día, con la gran complejidad del mundo actual, se hace necesario utilizar cada vez más el sentido común. Existe tanta confusión en tantos campos y niveles que debemos buscar (fijarnos) la mejor información, aquella que producen los verdaderos expertos, que en todos los tiempos los ha habido y los habrá, pero sabiendo muy claramente distinguir "el grano de la paja", o sea, buscando en ellos los que traslucen su sensatez y su mesura.

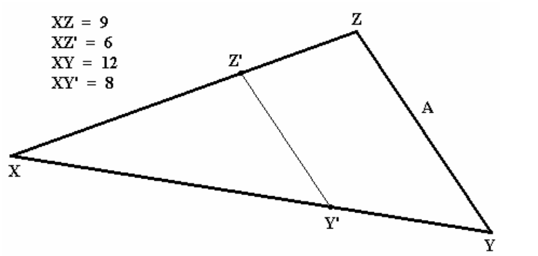
11.12.- Ejercicios y problemas resueltos.

SOLUCIONES en las páginas 952, 953 y 954

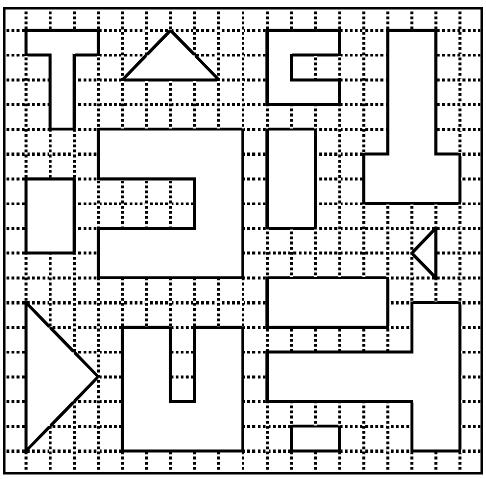
1.- ¿En cuáles de los siguientes dibujos se puede hallar la medida pedida sin medirlo y en cuáles no? Explícalo razonadamente.



2.- Con los datos de la figura, ¿puedes afirmar que los lados BC y B'C' son paralelos? ¿Por qué sí o por qué no?

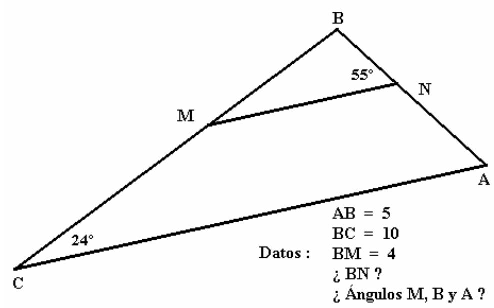


3.- ¿Cuáles de las siguientes figuras son semejantes? ¿Por qué sí o por qué no?



4.- Tenemos dos triángulos rectángulos semejantes, XYZ y X'Y'Z', cuya razón de semejanza es 3/5. Averigua las medidas de los lados del primero sabiendo que los dos catetos del segundo miden 10 cm y 7'5 cm.

5.- Observa la figura y calcula lo que te piden. ¿ Puedes averiguar la medida de AC ?

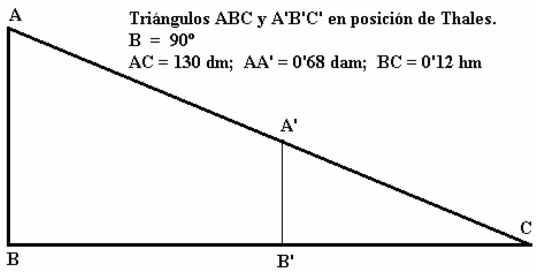


Las técnicas de estudio son una de las mejores "armas" para lograr el éxito en los estudios. Desde luego, ante las cifras significativas del fracaso escolar que desdichadamente existen en los últimos años, lo primero y esencial, antes de dominar una serie de técnicas que te ayuden a mejorar el rendimiento en tus estudios, es tener una actitud mental de querer estudiar. Si no comienzas teniendo interés, ganas y estando dispuesto a esforzarte porque tienes muy claro que tu deber (trabajo) es estudiar, entonces huelga dedicarse a adquirir una serie de herramientas que te suministren más capacidad de memoria, más concentración y más eficacia en tus estudios.

Uno de los primeros pasos debe ser el tener muy claro por qué es necesario estudiar. Esa pregunta, aunque alguien te ayude a contestarla, lo interesante es que la reflexiones tú, la analices tú y la respondas tú, atendiendo a tu forma de ser, a tus inquietudes, a tus ilusiones, a tus preferencias y a tus deseos o intuiciones sobre tu futuro.

Para terminar esta reflexión, que te quede una cosa muy clara: el estudio es para ti, es decir, lo que alcances con tu estudio, tus progresos y tus logros será inequívocamente en beneficio tuyo. Y lo que no logres ahora, en estos años, quizás algún día no muy lejano te pese.

6.- Calcula cuántos metros mide A'B'.



7.- Ya sabes que hoy día está muy generalizado el uso de las fotocopiadoras para multitud de cosas, y habitualmente la mayoría de las veces se fotocopian los originales a igual tamaño. Pero también otras se reducen o amplían. Contesta a :

a) *Si fotocopias con una reducción del 60 % un mapa recuadrado de dimensiones 18 x 24 cm, ¿cuáles serán las nuevas dimensiones de cuadro del mapa en la fotocopia obtenida?*

b) *Si en lugar de reducir el mapa anterior lo amplías un 25 %, ¿qué largo y ancho tendrá el recuadro del mapa de la nueva fotocopia?*

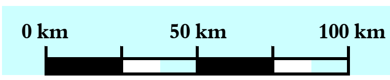
c) *Si el original del mapa anterior marcaba una escala de 1 : 1500000, ¿cuál será la nueva escala de cada una de las fotocopias del caso a) y b)?*

8.- Dibuja un trapecio rectángulo cuya base horizontal mida 3 cm y la altura 2 cm. Después haces una homotecia inversa de esa figura cuya razón sea – 2 y calculas el área del trapecio homotético obtenido.

9.- Ya sabes que las escalas pueden ser numéricas o gráficas. Bien, pues a ver si sabes hacer estos dos apartados:

a) La escala numérica reseñada en un mapa de Extremadura es 1 : 10000000. Dibuja la escala gráfica semejante a esa escala numérica señalada.

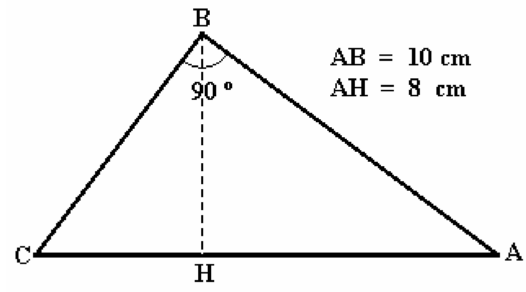
b) En un mapa de la provincia de Badajoz aparece la siguiente escala gráfica:



¿A qué escala numérica corresponde?

10.- Otro complicado.

Con los datos de la siguiente figura, debes averiguar la medida de los lados de otro triángulo semejante que tiene de perímetro 180 mm.



Es fundamental para tu estudio el lugar donde estudies. No todos disponen en su casa de una habitación para ellos, pero si tú eres de los que disponen de ella, debes encontrar un lugar de tu casa donde menos te molesten, donde haya buena iluminación, sobre todo natural, que esté bien ventilado, con una mesa lo más amplia posible, una buena silla con respaldo, con un armario o estantería donde guardar todas tus cosas y no usando nunca en tus horas de estudio ni tele, ni radio, ni música, ni otras distracciones que sólo servirán para disminuir o anular tu rendimiento.

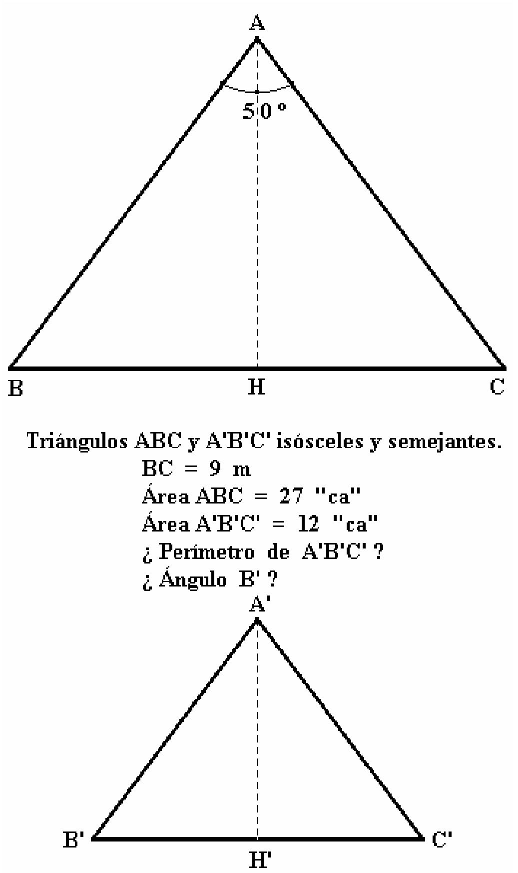
En las clases hay que estar atentos *–no perdiendo la concentración–*, hay que mirar *–observando todos los detalles de las explicaciones de tus profesores–*, hay que oír todo lo que dicen *–escuchando (intentando entender) con aplicación–* y hay que aprender *–culminación de la actividad diaria de toda clase–*.

Ya en casa, tu TRABAJO será ordenar apuntes, programar las horas de estudio y dedicación a cada asignatura, realizar ejercicios o actividades diversas, lectura silenciosa y comprensiva, memorización de las partes explicadas, asimilación de los contenidos dados y repaso de lo que poco a poco se va olvidando de días anteriores. Y a todo esto anterior se le llama ESTUDIAR, con "mayúsculas", porque estudiar, con "minúsculas", de vez en cuando, poco y mal, conduce a "lugares" nada satisfactorios.

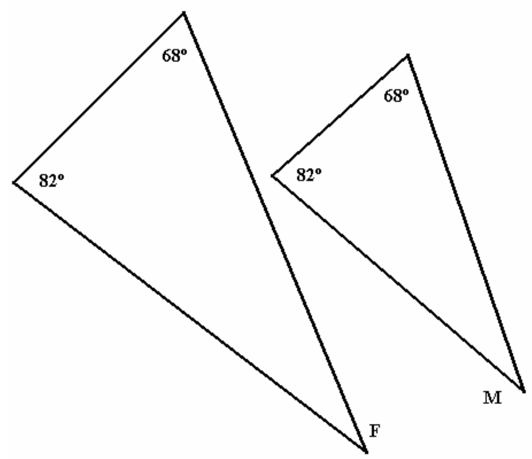
Esto no es nada sencillo, ¿verdad? Más bien todo lo contrario. Sin embargo, lo difícil está en los primeros días y semanas, después, con el hábito adquirido, ya casi será "coser y cantar". Bueno, quizás no tanto, pero sí mucho más llevadero.

Recuerda: lo que consigas en estos años de estudio te ayudará muy positivamente en todo tu FUTURO, o sea, a lo largo de toda tu vida.

11.- Uno más dificilillo.



12.-¿Son semejantes los triángulos de la figura? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Se aplica alguno de los criterios de semejanza de triángulos? ¿Cuál?



13.- Uno completito sobre escalas.

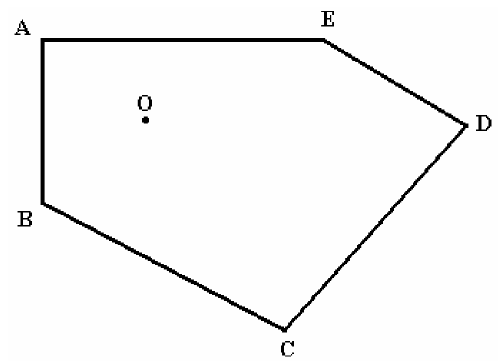
a) En un mapa de España cuya escala numérica es 1 : 30000000, ¿cuántos km distan en la realidad dos ciudades que están separadas por 2 cm?

b) En ese mismo mapa, ¿cuántos mm distan dos ciudades que realmente están a 150 km?

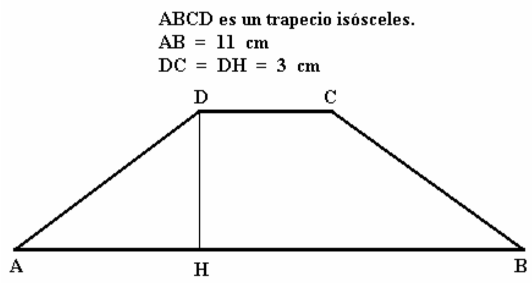
c) Si dos ciudades de un mapa están separadas por 4 cm y en la realidad distan 100 km, ¿a qué escala está dibujado ese mapa?

14.- Partiendo del pentágono de la figura y tomando como centro de transformación al punto O, realiza dos homotecias, una con razón de semejanza $k_1 = 3/5$ y otra con razón $k_2 = 2$.

NOTA : mide la figura, la dibujas aproximadamente igual en tu cuaderno y realiza después las dos homotecias con escuadra y cartabón para hacer las paralelas y que salgan las líneas rectas.



15.- Dibuja en tu cuaderno este trapecio. Prolonga los lados BC y AD hasta que se formen dos triángulos, uno de base CD y otro mayor de base AB. ¿Cuál es el perímetro del triángulo menor?



16.- Y para terminar esta serie de ejercicios resueltos, otro peliagudo.

La razón entre las áreas de dos triángulos rectángulos es 0'0625. Sabemos que los catetos del menor miden 1'5 cm y 2 cm. ¿Qué perímetro tiene el triángulo rectángulo mayor?

SOLUCIONES de las páginas 949, 950 y 951.

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 1.

⊗ Se puede hallar en los triángulos ABC, GHJ y MNP. No es posible en el DEF.

⊗ En el triángulo ABC.

Aplicamos el teorema de Thales:

$$\left[\frac{4}{2'75}=\frac{AC}{AC-2}\right] \rightarrow 4.(x-2) = 2'75x$$

Al resolver la ecuación: $x = 6'4$

$AC' = AC - CC' = 6'4 - 2 = 4'4 = AC'$

⊗ En el triángulo GHJ.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$HJ = \sqrt{4'5^2 + 6^2} = 7'5$$

Aplicamos el teorema de Thales:

$$\left[\frac{4'5}{3}=\frac{7'5}{HJ'}\right] \rightarrow 4'5.x = 3.7'5$$

Al resolver la ecuación: $x = 5$

$JJ' = HJ - HJ' = 7'5 - 5 = 2'5$

⊗ En el triángulo MNP.

Como es muy complicado, doy una oportunidad a los que acepten el reto de hacerlo, y si me lo presentan bien hecho y explicado, pues ¡premio!

Daré unas pistas:

1º) Aplica el teorema de la altura.

2º) Después el teorema de Pitágoras en MM'N.

3º) El teorema de Thales.

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 2.

⊗ Sí son paralelos, porque se cumple el teorema de Thales:

$$\left[\frac{9}{6}=\frac{12}{8}\right] \rightarrow 9.8 = 6.12 \rightarrow 72 = 72$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 4.

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{10^2 + 7'5^2} = 12'5 \text{ cm}$$

⊗ Aplicamos el teorema de Thales:

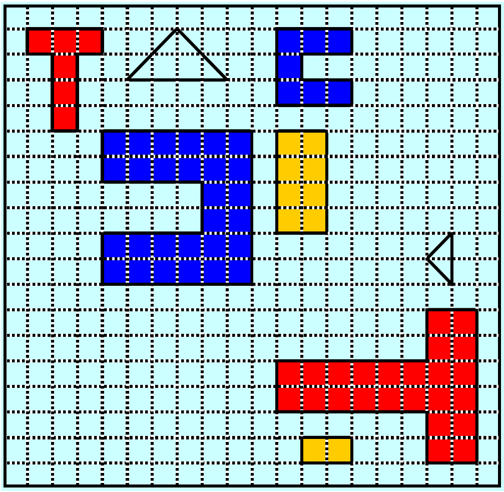
$$\left[\frac{a}{12'5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{7'5}=\frac{3}{5}\right]$$

Y una vez resueltas las proporciones. tenemos las medidas de los lados del primer triángulo rectángulo, que son:

$$\begin{cases} \text{hipotenusa } (a) = 7'5 \text{ cm} \\ \text{cateto } (b) = 6 \text{ cm} \\ \text{cateto } (c) = 4'5 \text{ cm} \end{cases}$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 3.

⊗ Son semejantes los siguientes pares, porque sus medidas (contornos) son proporcionales. Las que no eran las hemos suprimido.



SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº5.

⊗ Aplicamos el teorema de Thales:

$$\left[\frac{5}{BN}=\frac{10}{4}\right] \rightarrow 5.4 = x.10$$

Resuelta la ecuación: $x = 2 = BN$

⊗ Como son triángulos semejantes, sus ángulos son iguales.

$M = C = 24º$

$B = 180º - 24º - 55º = 101º$

$A = B = 101º$

⊗ No podemos averiguar el lado AC, porque no tenemos referencia de su lado homólogo.

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 6.

⊗ Ajustes previos :

$$\begin{cases} AC = 130 \text{ dm} \rightarrow 130:10 = 13 \text{ m} \\ AA' = 0'68 \text{ dam} \rightarrow 0'68.10 = 6'8 \text{ m} \\ BC = 0'12 \text{ hm} \rightarrow 0'12.100 = 12 \text{ m} \\ A'C = 13 - 6'8 = 5'2 \text{ m} \end{cases}$$

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras :

$$AB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ m}$$

⊗ Aplicamos el teorema de Thales :

$$\left[\frac{13}{5'2}=\frac{5}{A'B'}\right] \rightarrow A'B' = \frac{5'2 \cdot 5}{13} = 2 \text{ m}$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 7.

a) Dimensiones iniciales del recuadro: 18 x 24.

Razón de semejanza de la 1ª fotocopia:

$$60\ \% \rightarrow \frac{60}{100} \rightarrow 0'6 \rightarrow \begin{cases}\text{Coeficiente} \\ \text{reductor}\end{cases}$$

$$\text{Nuevas dimensiones} \begin{cases} 18 . 0'6 = 10'8 \text{ cm} \\ 24 . 0'6 = 14'4 \text{ cm}\end{cases}$$

El recuadro nuevo es de 10'8 x 14'4 cm.

b) Dimensiones iniciales del recuadro: 18 x 24.

Razón de semejanza de la 2ª fotocopia:

$$125\ \% \rightarrow \frac{125}{100} \rightarrow 1'25 \rightarrow \begin{cases}\text{Coeficiente} \\ \text{ampliador}\end{cases}$$

$$\text{Nuevas dimensiones} \begin{cases} 18 . 1'25 = 22'5 \text{ cm} \\ 24 . 1'25 = 30 \text{ cm}\end{cases}$$

El recuadro nuevo es de 22'5 x 30 cm.

c1) Si reducimos al 60 %, quiere decir que 1 unidad de medida del mapa inicial, por ejemplo, 1 cm, quedará en el nuevo mapa reducido, o sea, con 0'6 cm (1.0'6). Es decir, que esos nuevos 0'6 cm representan a la misma distancia real que en el primer mapa. Luego :

$$\textbf{Nueva ESCALA} \rightarrow \frac{0'6}{15000000} = \frac{1}{2.500.000}$$

c2) Con el mismo razonamiento, 1 cm del primer plano se convierte después de ampliarlo en 1'25 cm. Y 1'25 equivale a 1500000. Así :

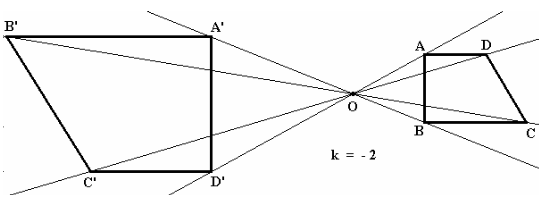
$$\textbf{Nueva ESCALA} \rightarrow \frac{1'25}{15000000} = \frac{1}{1.200.000}$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 8.

⊗ En esta homotecia :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = k = -2$$

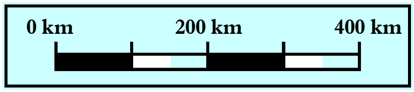
Observa la forma de hacerla en el dibujo siguiente. Como las dimensiones reales exceden las de esta columna, el gráfico aparece reducido.



SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 9.

a) En la escala gráfica vamos a representar segmentos de 1 cm, expresando a qué medida de la realidad corresponden, por lo que debemos hallar esa equivalencia.

1 cm → 10000000 cm → 100 km



SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 9.

b) En esa escala gráfica, cada segmento, que mide 1 cm, representa a 25 km de la realidad. Hallamos la escala numérica:

1 cm → 25 km → 2500000 cm

$$\textbf{Escala numérica} \rightarrow \frac{1}{2500000}$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 10.

⊗ Aplicamos el teorema del cateto en ABC para calcular la hipotenusa AC :

$$\left[\frac{AC}{10} = \frac{10}{8}\right] \rightarrow AC = \frac{100}{8} = 12'5 \text{ cm}$$

⊗ Ahora, para calcular el otro cateto (BC), aplicamos el teorema de Pitágoras :

$$BC = \sqrt{12'5^2 - 10^2} = 7'5 \text{ cm}$$

⊗ Conocidos los tres lados, hallamos el

$$\text{perímetro :} \left\{\begin{array}{l} \text{hipotenusa} = 12'5 \\ \text{cateto AB} = 10 \\ \text{cateto BC} = 7'5 \end{array}\right\} \rightarrow 30 \text{ cm}$$

⊗ Aplicamos el teorema de Thales para calcular los lados del triángulo semejante, porque la razón de los perímetros es igual a la razón de los lados homólogos.

Ajuste previo : 180 mm → 180:10 = 18 cm

$$\left[\frac{12'5}{x} = \frac{10}{y} = \frac{7'5}{z} = \frac{30}{18}\right]$$

Resolviendo las proporciones, tenemos:

$$\textbf{Solución} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 7'5 \text{ cm}} \\ \mathbf{y = 6 \text{ cm}} \\ \mathbf{z = 4'5 \text{ cm}} \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 12.

⊗ Sí son semejantes, porque tienen dos ángulos iguales.

⊗ Corresponde al primer criterio de semejanza de triángulos.

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 11.

⊗ Conocemos las áreas, y sabemos que la razón de semejanza de dos figuras planas es igual a la raíz cuadrada de la razón de las áreas, luego :

$$\sqrt{\frac{27\ \text{"ca"}}{12\ \text{"ca"}}} = \sqrt{\frac{3.3.3}{2.2.3}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

⊗ Aplicamos el teorema de Thales, una vez conocida la razón de semejanza (3/2):

$$\left[\frac{9}{B'C'} = \frac{3}{2}\right] \rightarrow \mathbf{B'C'\ (base) = 6\ m}$$

⊗ Conociendo el área de A'B'C' y su base, calculamos la altura :

$$A' = \frac{b'.\,h'}{2} \Rightarrow 12 = \frac{6.A'H'}{2} \Rightarrow \mathbf{h' = 4\ m}$$

⊗ Ahora aplicamos el teorema de Pitágoras en A'H'C' para calcular el lado A'C', que es su hipotenusa :

$$A'C' = \sqrt{\left(\frac{B'C'}{2}\right)^2 - A'H'^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} =$$

$$\mathbf{A'C' = 5\ m = A'B'}$$

⊗ Calculamos ya el perímetro de A'B'C' :

$$\textbf{perímetro } \mathbf{(A'B'C')} = 6 + 5 + 5 = \mathbf{16\ m}$$

⊗ Por último, calculamos el ángulo B' :

$A = A' = 50°$

$B = B' = C = C'$

$180° = 50° + x + x = 50 + 2x$

$$x = \frac{180° - 50}{2} = \mathbf{65° = B'}$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 13.

a) $\left[\frac{1}{30000000} = \frac{2\ cm}{x}\right] \rightarrow x = 60000000\ cm$

60000000 cm → **600 km** → **Solución**

b) Ajuste previo: 150 km → 150000000 mm

$$\left[\frac{1}{30000000} = \frac{x}{150000000\ mm}\right] \rightarrow \begin{cases}\textbf{Solución:}\\ \mathbf{x = 5\ mm}\end{cases}$$

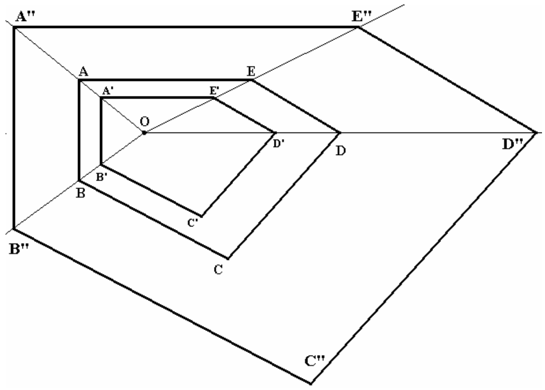
c) Ajustes previos: 100 km → 10000000 cm

$$\left.\begin{cases} 4\ cm\ \ldots\ldots\ldots\ 10000000\ cm \\ 1\ \ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \text{" x "}\end{cases}\right\} \rightarrow x = 2500000$$

$$\textbf{Escala del mapa} \rightarrow \frac{1}{2.500.000}$$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 14.

⊗ A otra escala, es decir, más reducido, ya que el dibujo en tu cuaderno te habrá salido 1'6 veces mayor, aproximadamente. Las dos homotecias pedidas serían como aparecen en la figura siguiente :



SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº 15.

Datos referidos a la figura siguiente del cuadro.

⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo AHD, igual al BKC, para calcular el lado AD, que es su hipotenusa :

$$\mathbf{AD} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \mathbf{5\ cm}$$

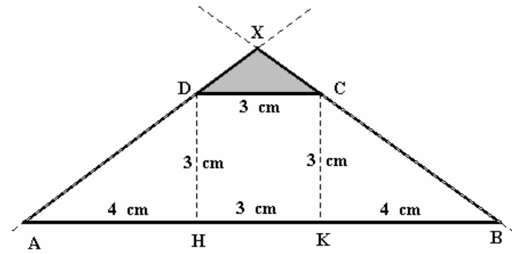
⊗ Aplicamos el teorema de Thales en los triángulos ABX y DCX :

$$\left[\frac{11}{3} = \frac{5 + DX}{DX}\right] \rightarrow 11\,.\,x = 3\,.\,(5 + x)$$

Resuelta la ecuación → x = **1'875 cm = DX**

⊗ Y ya tenemos el perímetro pedido del triángulo sombreado DCX :

perímetro = 1'875 + 1'875 + 3 = **6'75 cm**



SOLUCIONES DEL EJERCICIO Nº16.

⊗ La razón de semejanza de dos triángulos es igual a la raíz cuadrada de la razón de sus áreas, luego :

$$\sqrt{0'0625} = \mathbf{0'25} \rightarrow \textbf{razón de semejanza}$$

⊗ Por Pitágoras :

$$\textbf{hipotenusa}_{\textbf{menor}} = \sqrt{1'5^2 + 2^2} = \mathbf{2'5\ cm}$$

⊗ Por Thales, calculamos los lados del mayor :

$$\left[\frac{2'5}{x} = \frac{1'5}{y} = \frac{2}{z} = 0'25\right]$$

Una vez resueltas las proporciones, tenemos :

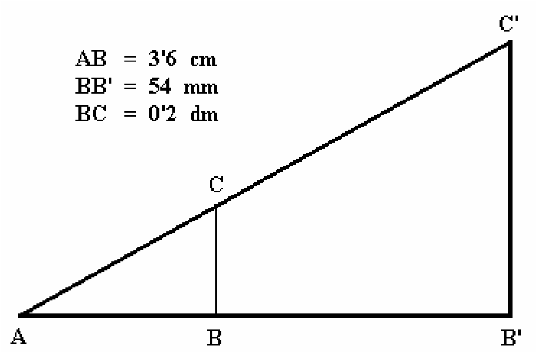
$$\text{Lados del mayor} \rightarrow \begin{cases}\textbf{hipotenusa = 10 cm}\\ \textbf{cateto 1 = 6 cm}\\ \textbf{cateto 2 = 8 cm}\end{cases}$$

Perímetro (mayor) → 24 cm

11.13.- Ejercicios y problemas para resolver.

1.- Utilizando escuadra y cartabón, dibuja un segmento AB que mida 7 cm y construye otro segmento CD tal que CD = 4/3 de AB. *(Método explicado en la pregunta 11.5.a)*

2.- ¿Cuántos cm^2 tiene el área del triángulo AB'C' de la siguiente figura?



3.- Dibuja un trapecio isósceles cuya base mayor mida 100 mm, base menor 6 cm y altura 0'4 dm. Después, utilizando los dos métodos descritos para la construcción de figuras semejantes en las páginas 191 y 192, trazas dos trapecios semejantes cuya razón de semejanza sea igual a 1/2.

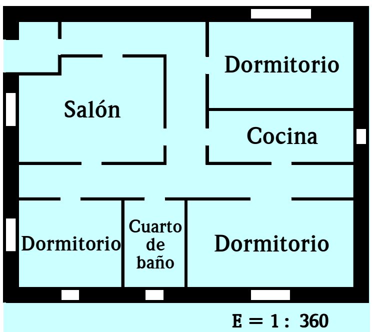
4.- A continuación tienes un dibujo. Contesta a las siguientes preguntas sobre él:

a) ¿Cómo llamamos a los dibujos de este tipo?

b) ¿Para qué sirven?

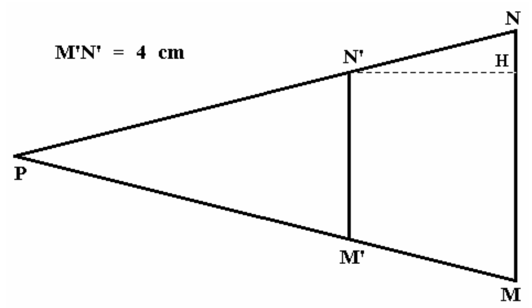
c) ¿Qué significa la notación que aparece en la parte inferior derecha?

d) ¿Qué dimensiones reales tiene el piso representado?



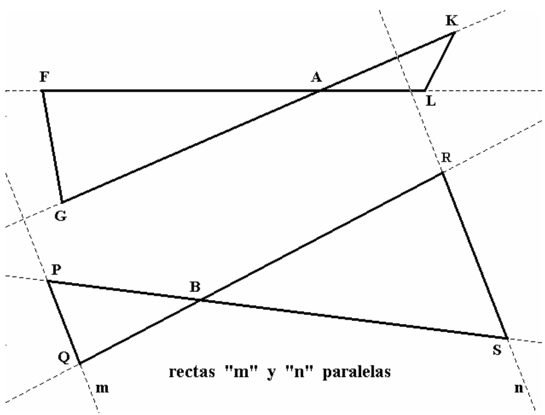
5.- Tenemos dos triángulos semejantes. Los lados de uno de los dos triángulos miden 200 mm, 30 cm y 3'5 dm. El lado mayor del otro triángulo mide 0'28 m. Averigua la razón de semejanza, el perímetro del segundo triángulo, qué clase de triángulo es y la razón de las áreas en cm^2.

6.- Éste te va a costar trabajillo. A ver si consigues resolverlo.
¿Cuánto mide el perímetro del triángulo MNP de la siguiente figura si el área del triángulo pequeño M'N'P es de 16 cm^2 y el del trapecio isósceles MNN'M' es de 20 cm^2?
NOTA : Si salen decimales en las operaciones, operas siempre con dos de ellos solamente.



7.- Un mapa de Extremadura está realizado a escala 1 : 1500000. ¿Qué distancia separará en el plano a dos ciudades que en la realidad están a 60 km?

8.- ¿Qué pares de triángulos de la siguiente figura son semejantes? ¿Por qué sí o por qué no? Si hay algunos semejantes, ¿qué criterio de semejanza cumplen?



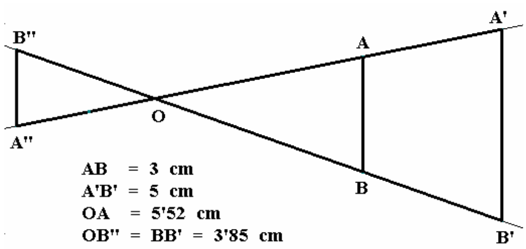
9.- Las áreas de dos triángulos semejantes son 50 cm^2 y 18 cm^2 . Si el perímetro del triángulo menor es de 450 mm, ¿cuál es la razón de semejanza y cuál el perímetro del triángulo mayor?

10.- En un mapa de España, que está a escala 1 : 2500000, la distancia entre dos ciudades es de 14 cm. ¿A cuántos km de distancia están en la realidad?

11.- Se hace un plano de una habitación rectangular que tiene 9 x 6 m. En el plano, el largo de la habitación es de 12 cm. Calcula :

a) La escala a la que se ha realizado el plano.
b) ¿Qué mide el ancho de la habitación en el plano?

12.- Averigua los perímetros de los triángulos mayor y menor de la siguiente figura.



13.- Tenemos dos triángulos semejantes, ABC y A'B'C', de los cuales conocemos los siguientes datos:

AB = 12 cm ; A'B' = 16 cm ;
BC = 27 cm ; B'C' = 36 cm ; B = B'

¿Son semejantes? Demuéstralo y di a qué criterio de semejanza corresponde.

14.- Dibuja en tu cuaderno un triángulo equilátero de 6 cm de lado y otro, también equilátero y en posición de Thales con el anterior, cuya razón de semejanza, del 2º con respecto al 1º, sea 5/3. Calcula:

a) ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo AB'C' (2º)?
b) ¿Cuántos cm^2 tiene de área el nuevo triángulo equilátero?

15.- Dibuja un trapecio rectángulo con las siguientes medidas:

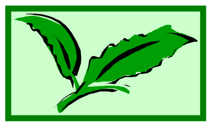
→ **Base mayor = 3 cm**
→ **Base menor = 2 cm**
→ **Altura = 1'5 cm**

Después realizas dos homotecias en dibujos distintos, o sea, uno debajo de otro y suficientemente separados para que no se mezclen sus líneas. El centro de homotecia, para las dos, lo colocas a 3 cm a la izquierda de la base y en su misma horizontal. La 1ª homotecia (directa) con razón k_1 = 2'5 y la 2ª homotecia (inversa) con razón k_2 = - 2.

16.- Dibuja tres segmentos, AB = 3 cm, CD = 2 cm y EF = 6 cm. Construye el segmento que sea cuarto proporcional a los tres dados. *(Ver página 179)*

17.- Construye un segmento que sea tercero proporcional a 2 cm y 4 cm. *(Ver página 180)*

Es muy humano, después de un cierto periodo de tiempo de actividad, esfuerzo y progreso en cualquier actividad, tender a relajarse, a descansar y "bajar la guardia". Es, indudablemente, lógico y comprensible. Pero hay que estar siempre alerta para que ese intervalo de sosiego y reposo no sea excesivo y te conduzca a perder el hábito de interés, dedicación y esfuerzo que te proporcionaban la energía necesaria con la que antes habías conseguido los objetivos planteados.

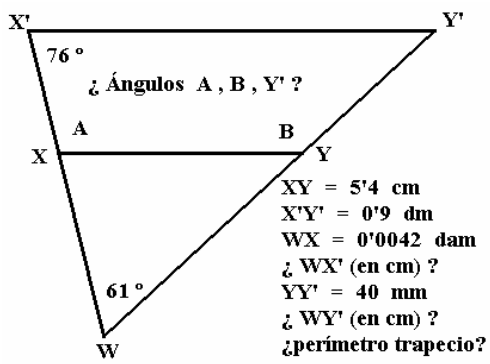


Llegar a la meta propuesta y conseguir los fines trazados es siempre labor difícil, dura y prolongada, pero "caer de la cima" alcanzada y perder los buenos hábitos es tarea relativamente fácil, ligera y rápida.

Hay una expresión que define bastante bien lo anteriormente explicado: *"No hay que dormirse en los laureles"*. Es decir, que cuando a base de esfuerzo, tesón y perseverancia se logra el triunfo (meta-laureles) no debe uno relajarse hasta tal punto que retroceda (duerma) aquellos pocos "escalones" difíciles y duros que ha conseguido subir en la "escalera" compleja de su vida.

Los propósitos, objetivos, fines y compromisos hay que ir renovándolos cuando poco a poco se van alcanzando, poniéndolos al día o introduciendo otros nuevos que ayuden a seguir en la línea de vida marcada.

18.- Calcula las medidas que te piden en la siguiente figura.



19.- Los datos de dos hexágonos regulares semejantes son los siguientes:

Radios de las circ. circunscritas: 5'19 cm y 7'785 cm.

Apotemas respectivas: 6 cm y 9 cm.

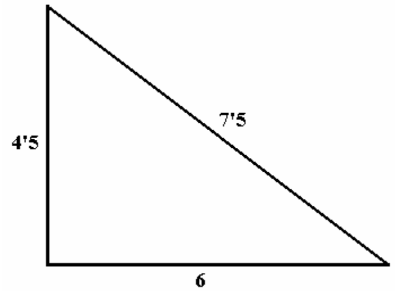
¿Qué tienes que decir al respecto?

Ya comentamos en otra reflexión la fuerza con la que se creyó y confió Pigmalión en las posibilidades de convertir su estatua de marfil en mujer de carne y hueso, y lo consiguió, de ahí el llamado efecto de su nombre.

No es sencillo para un padre o un profesor tratar a ciertos hijos/alumnos desmotivados, yo indisciplinados, y/o rebeldes y/o pasotas, es decir, con problemas de conducta y/o estudio, de forma que apliquemos en ellos el efecto Pigmalión en sentido positivo. Sin embargo, muchos de esos hijos o alumnos pueden mejorar notablemente por el mero hecho de que padres o profesores les tratemos mejor, como más capaces, más inteligentes y les inculquemos una mentalidad positiva. Con estos requisitos, sin lugar a dudas a veces muy difíciles, les dotaremos de auto-motivación, y ello les hará más factible un cambio radical en sus actitudes que les conducirá a lograr el éxito.

A pesar de que es difícil actuar con pautas de efecto Pigmalión positivo, hay que intentar dar un trato a nuestros hijos o alumnos como si de verdad confiásemos plenamente en ellos, de tal manera que nuestras actuaciones ante ellos se rijan por el lado positivo, ya que de lo contrario, o sea, tratándolos como en realidad son o los vemos, seguramente los perjudicaremos y conseguiremos finalmente de ellos que sean y actúen como nosotros los vemos y se lo hacemos ver.

20.- Dibuja dos figuras semejantes a la siguiente, una mayor y otra menor, pero con medidas enteras de sus lados.

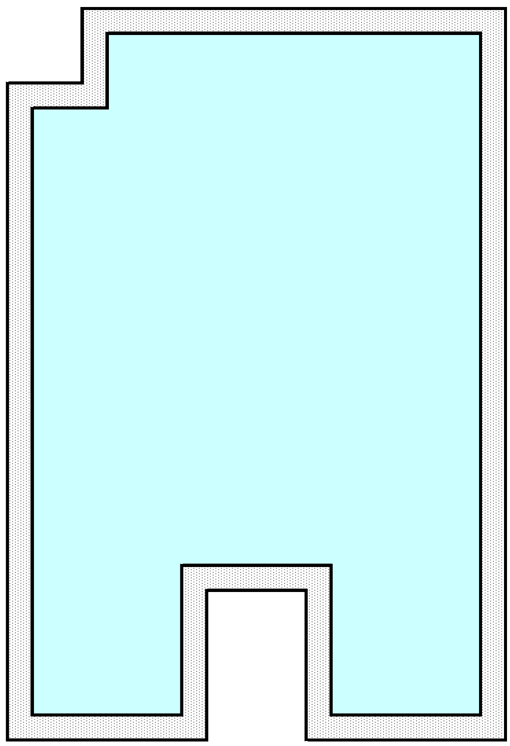


21.- Las medidas de los lados de cuatro triángulos son las siguientes:

a	b	c
6'5	6	2'5
13	12	4'5
26	23	10
1'04	0'96	0'4

¿Hay triángulos semejantes entre ellos? ¿Cuáles y por qué?

22.- A continuación aparece el plano de una nave industrial. ¿Cuál sería su precio a razón de 500 € / m^2 construido? (Mide sólo el interior)



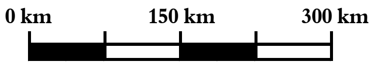
E = 1 : 1200

23.- Dibuja un triángulo rectángulo e isósceles cuyo cateto mida 6 cm. Después, dibujas otro triángulo semejante en posición de Thales cuya razón de semejanza, del anterior con respecto al nuevo, sea 2/3.

24.- Sobre escalas:

a) La escala numérica reseñada en un mapa de la nuestra querida provincia de Badajoz es 1 : 2000000. Dibuja la escala gráfica semejante a esa numérica señalada.

b) En un mapa de Extremadura aparece la siguiente escala gráfica:

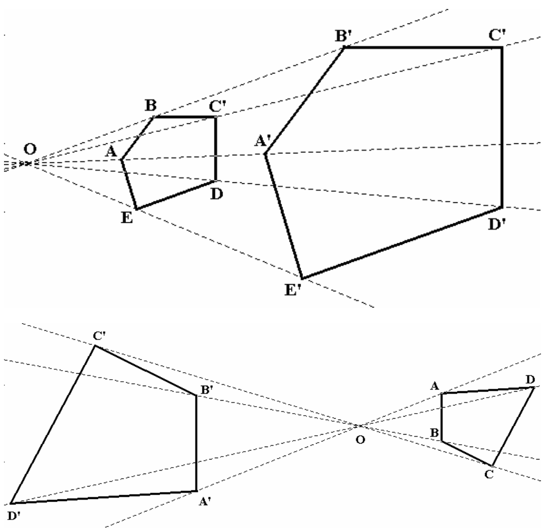


¿A qué escala numérica corresponde?

25.- Fíjate en los dibujos de las dos homotecias siguientes y contesta:

a) ¿De qué clase es cada una?

b) ¿Cuál es la razón de semejanza de cada una de ellas?



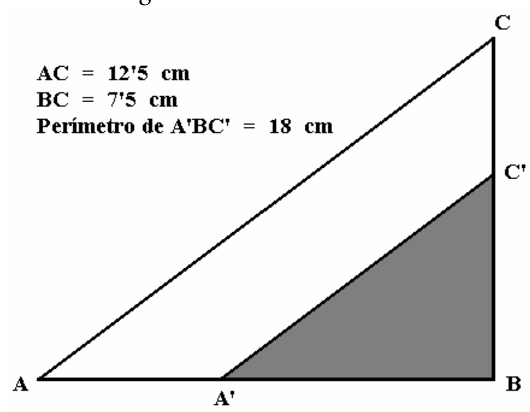
26.- Imagínate que eres un espeleólogo y descubres una huella de un pie gigante de algún antepasado raro del hombre. ¿Qué se te ocurriría para saber de forma aproximada la estatura de aquel homínido?

27.- ¿A qué escala está dibujado un terreno si un segmento de 5 cm en el plano corresponde a una distancia real de 90 metros?

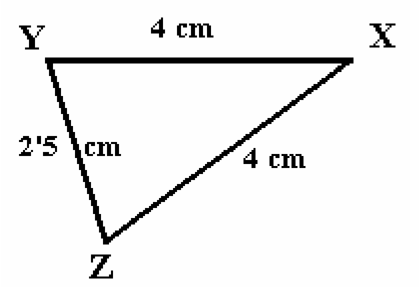
28.- Responde en cada uno de los apartados si el par de triángulos citados pueden ser o no semejantes, explicando de forma razonada tus respuestas.

a) Un triángulo escaleno y otro isósceles.
b) Un triángulo rectángulo y otro escaleno.
c) Un triángulo obtusángulo y otro rectángulo.
d) Un triángulo acutángulo y otro isósceles.
e) Un triángulo rectángulo y otro equilátero.
f) Un triángulo obtusángulo y otro acutángulo.

29.- En la siguiente figura, calcula la medida del perímetro del triángulo mayor y el área del triángulo sombreado.



30.- Construye un triángulo semejante al de la siguiente figura que tenga un perímetro tres veces mayor. ¿Cuál es la razón de semejanza del de la figura con respecto al nuevo? ¿Y la razón de semejanza del que has construido con respecto al primero?



31.- El plano de una vivienda está realizado a escala 1 : 75. Si las dimensiones del salón son de 6 cm x 8 cm en el plano, ¿cuál es la superficie real de la habitación?

32.- Se ha dibujado el plano para una excelente y necesaria biblioteca que se va a construir en nuestro Instituto. Se ha realizado a escala 1 : 45. Partiendo de ese plano, se ha dibujado otro semejante cuya razón es de 3/5, de este 2º con respecto al plano inicial. ¿Qué escala habría que poner en el 2º dibujo?

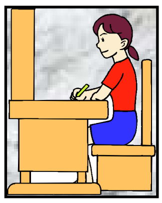
33.- El salón-comedor de un piso tiene una superficie real de 24 m^2. Sabiendo que el salón tiene forma rectangular y que sus dimensiones en un plano del piso son 6 cm x 6.25 cm, averigua a qué escala está realizado el plano.

34.- Dibuja un segmento AB que mida 9 cm y divídelo en seis partes iguales aplicando el teorema de Thales.

⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧

Vamos a indicar en esta reflexión algunos consejos muy útiles para corregir o mejorar las dolencias de la espalda.

Al estar sentado debemos apoyar completamente los dos pies en el suelo, colocando las rodillas por encima o, mejor, al mismo nivel que las caderas. La silla debe tener un respaldo que respete la curva normal de nuestra espalda y que sujete de forma especial la zona lumbar, por lo que nuestro "culo" debe echarse siempre hacia atrás hasta que toque el respaldo. La espalda no debe estar curvada ni hacia delante ni hacia atrás, o sea, siempre recta y apoyada en el respaldo. Al estar sentados no debemos girar la parte superior de nuestro cuerpo de forma parcial, es decir, que hay que girar todo a la vez. Y si permanecemos mucho tiempo sentados, es muy conveniente levantarse cada 50 ó 60 minutos, andar y estirar un poco la zona cervical.



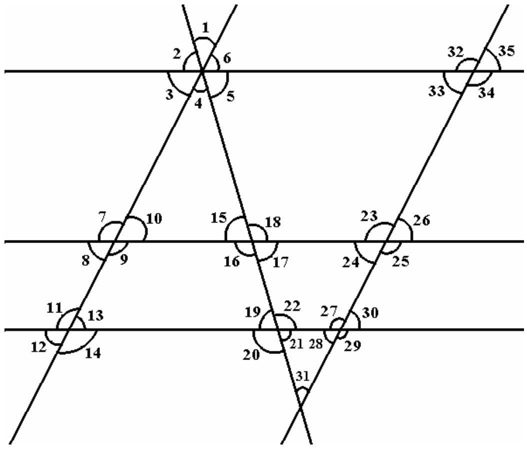
Si trabajamos –o juegas (¡)– con el ordenador, la pantalla debe situarse a unos 45 cm de distancia, y frente a los ojos y a su altura o unos grados ligeramente por debajo. Se deben evitar los reflejos en la pantalla. Siempre que sea posible, es mejor la iluminación con luz natural. Las muñecas y los codos deben estar rectos y a la altura del teclado, con los codos flexionados en ángulo recto. Además, intenta acostumbrarte a manejar el ratón con las dos manos, así podrás alternarlas y no las cansarás excesivamente.

Cuando alguna vez tengas molestias en tu espalda y quieras aprender algunos ejercicios o estiramientos, que no te dé ningún reparo en decírmelo, que yo te facilitaré algunos muy buenos.

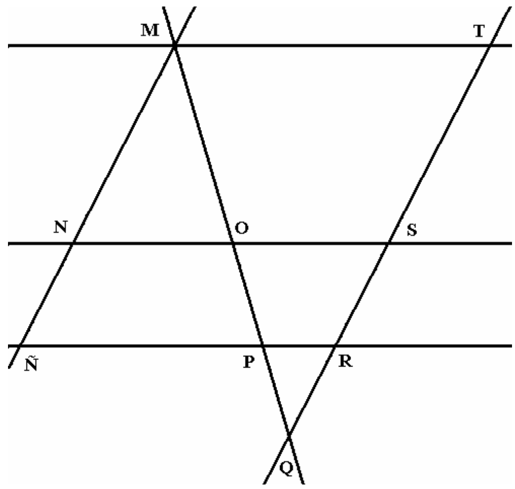
⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧ ⇧

35.- En el siguiente dibujo aparecen tres rectas horizontales paralelas, otras dos rectas secantes también paralelas y otra secante que corta a las cinco anteriores.

a) ¿Qué grupos de ángulos son iguales de entre todos los que hay en el gráfico? Por ejemplo : $1 = 4 = 31$



b) ¿Cuáles de los triángulos que se forman entre todas las líneas del gráfico son semejantes entre sí. Explícalo razonadamente.



36.- Busca en tu libro de Ciencias Sociales, o en un Atlas, o en la Biblioteca, un mapa de Europa y calcula las distancias que hay entre las siguientes ciudades:

a) Entre Badajoz y París.
b) Entre Madrid y Sevilla.
c) Entre Santander y Cádiz.
d) Entre Madrid y Bruselas.
e) Entre Madrid y Londres.
f) Entre Madrid y Roma.

Y ahora en un mapa de España, que lo harás mejor, calcula las distancias :

g) *Entre Villafranca y Mérida.*
h) *Villafranca y Badajoz.*
i) *Villafranca y Cáceres.*
j) *Villafranca y Madrid.*
k) *Villafranca y Almería.*
l) *Villafranca y Teruel.*

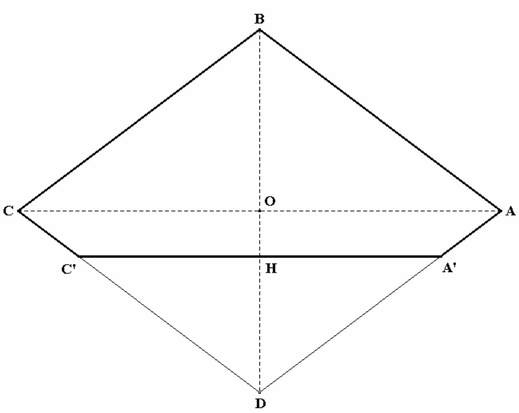
37.- En un mapa de América del Sur, construido a escala 1 : 30000000, medimos la distancia entre el punto más occidental y el punto más oriental y no da 17 cm. Hacemos lo mismo entre el punto más al Norte y el punto más al Sur, y sale 25 cm. ¿A cuántos km reales corresponden esos ejes ficticios que atravesaran América del Sur de Este a Oeste y de Norte a Sur?

38.- Explica de forma razonada si es posible o no lo que indican los siguientes apartados:

a) Construir un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 5 cm, 7 cm y 13 cm, con razón de semejanza igual a 2/5.
b) Dibujar un trapecio rectángulo semejante a otro que tiene dos ángulos de 65º y 135º y una base mayor de 8 cm, con una razón de semejanza igual a 5/4.

39.- Calcula el perímetro y el área del pentágono irregular ABCC'A' de la siguiente figura, conociendo estos datos:

→ Diagonal mayor del rombo = 16 cm.
→ Diagonal menor del rombo = 12 cm.
→ Segmento OH = 1'5 cm.



40.- Varios jóvenes, de los que participan en la Ruta Quetzal *(expedición-aventura cultural que realizan jóvenes elegidos por baremos de méritos sobre una amplia gama de valores humanos)* que se realiza por Hispanoamérica, se encuentran en plena selva por uno de los países sudamericanos. Están mirando atónitos un árbol enorme llamado sequoia, especie que puede llegar a una altura de hasta 150 metros. Tienen curiosidad por medir la altura del que están viendo, y hacen lo siguiente:

a) *Miden la sombra que proyecta el árbol, que es de 27 metros.*
b) *Miden un mástil de una de sus tiendas de campaña, que tiene 2 metros.*
c) *Miden la sombra que en ese momento proyecta el mástil, que es de 375 mm.*

¿Sabes cómo averiguaron la altura de la sequoia? ¿Cuántos metros tenía?

Una persona podrá decir que posee fuerza de voluntad cuando tenga capacidad para abordar actividades que impliquen una energía prolongada que le permita mantener un esfuerzo. Está claro que eso no es nada sencillo y necesita de una buena salud y de fortaleza mental. Para mantener y robustecer la fuerza de voluntad hay que ejercitarla, como ya hemos visto en reflexiones anteriores. Sigamos con otros ejercicios:

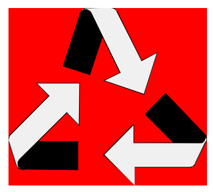
1) ***Si no te gustan las verduras, por ejemplo, debes intentar comer poco a poco algunas hasta que cojas gusto por una o dos de ellas, y después mantener en las comidas la toma de esas que has elegido o menos rechazas.***
2) ***Si estas haciendo deporte y te entra sed, pues aguanta cierto tiempo prudencial sin beber; con ello estarás educando a tu voluntad.***
3) ***Si empiezas una tarea y antes de acabar estás muy cansado y con ganas de dejarla para mañana, pues impón tu fuerza de voluntad, saca de tu interior el esfuerzo necesario y decides que no dejas la tarea hasta que no la finalices.***

Bien, esto son sólo tres ejercicios, pero tú puedes inventarte muchos más de acuerdo con tus actividades diarias. Ten en cuenta que no fortalecerás tu voluntad por hacerlo de vez en cuando, sino por mantener esos ejercicios hasta que ya constituyan hábitos.

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ Egoísmo ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿

Egoísmo: incontinente y excesivo amor de sí mismo; carácter del que subordina el interés ajeno al suyo propio y juzga todas las cosas desde este punto de vista.

Una pregunta para empezar la reflexión: Cuando poseemos más cosas, de cualquier tipo, ¿somos más o menos egoístas?



En esta reflexión, como en tantas otras, uno deja traslucir sus carencias. Ya comento en la página 163 que muchas de las cosas tratadas en las reflexiones nacen de mis vivencias, de mis deseos de mejorar y de los análisis de mis defectos. Uno de ellos, quizás el más humano, seguramente que uno de los más perjudiciales *–para nosotros y para nuestros semejantes–*, el que muchas veces nos pasa desapercibido y, sin embargo, cuando lo sentimos intentamos disimular, es el egoísmo. Egoístas somos casi todos, sólo varía el grado y el ejercicio de nuestro egoísmo. Y por supuesto que yo lo soy. No pretendo aquí juzgar hasta qué punto llega mi acción egoísta, pero sí tengo muy claro que debo y tengo mucho que mejorar en este aspecto.

Desde bien pequeñitos somos egoístas, pero es muy necesario que cuanto antes aprendamos a superar el inevitable egoísmo infantil. Somos egoístas por instinto, y es muy difícil desterrarlo de nosotros y de los demás, pero hay que intentarlo una y otra vez, porque nuestro egoísmo nos va cerrando sigilosamente el corazón. En muchas ocasiones estamos tan intensamente atrapados por él que nos embauca, que nos impide ver que todo gira interiormente a nuestro alrededor, que sólo nos movemos a impulsos de nuestros intereses, que no advertimos que el otro también habla, o tiene deseos, o gusta de contar sus cosas, o quiere que le escuchemos, o, a lo peor, necesita ayuda. Y no lo vemos; nuestro ser egoísta nos ciega. Por eso, cuando de tarde en tarde ahondamos en nosotros mismos, en nuestro corazón, hallamos más de egoísmo que de amor, o de solidaridad, o de comprensión, o de afecto, o ...

Bueno, en realidad, como dijimos anteriormente, hay muchos tonos, grados y niveles de egoísmo en las personas. Más en unas épocas que en otras. No sé si habrá personas que no sean nada egoístas, ojalá las haya, pero lo seguro es que si las hay son pocas. Quizás existan más de aquellas que yo digo que tienen el egoísmo de la "buena gente", aunque desgraciadamente también existen, y no pocas, de las que cultivan muy a menudo el egoísmo duro, maléfico y depravado. En realidad todos, pero por lo menos los que pensamos que somos parte de la "buena gente egoísta", debemos luchar constantemente contra nuestro egoísmo hasta irlo erradicando poco a poco, o al menos atenuarlo lo más posible en nuestras vivencias, porque esa lucha y los éxitos que logremos nos acercarán a una vida más rica y completa, al amor y a la felicidad.

Después de reflexionar, al menos un poco, sobre la situación de la sociedad de tu entorno más inmediato, y la de Extremadura, y la de España, y la situación actual de la sociedad mundial, ¿cómo ves el futuro? Hagas el análisis que hagas del futuro, pienso que no hay que dejarse vencer por el pesimismo e intentar, cada cual desde sus posibilidades, afrontar el nuevo milenio con unas buenas dosis de compromiso y optimismo.

Este milenio (siglo XXI) va a estar muy necesitado de gente como vosotros que aprendan desde bien jovencitos a ayudar, a consolar, a compartir, a alegrarse de y con, a tratar bien, a saber escuchar, a comprender, a sonreír, a mirar, a ser solidario, ... , a mostrar el corazón.

¿Será un reto permanente y resistente para ti el formar parte de ese grupo de gente tan abierta a los demás para el siglo XXI?

? ? ? Los demás también existen ? ?