

TEMA 12

Geometría del espacio. **Los cuerpos geométricos.** **Áreas y volúmenes.**

- 12. 1 . - Elementos geométricos en el espacio.
- 12. 2 . - Posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.
- 12. 3 . - Ángulos en el espacio.
- 12. 4 . - Poliedros.
- 12. 5 . - Poliedros regulares.
- 12. 6 . - Otros tipos de poliedros.
- 12. 7 . - Teorema de Euler.
- 12. 8 . - Cuerpos geométricos a estudiar.
- 12. 9 . - Los Prismas.
- 12. 10 . - Las Pirámides y Troncos de Pirámides.
- 12. 11 . - Los Cilindros.
- 12. 12 . - Los Conos y Troncos de Conos.
- 12. 13 . - La Esfera y sus Secciones.
- 12. 14 . - La Tierra, nuestro planeta, una esfera achatada por los Polos.
- 12. 15 . - El teorema de Pitágoras y de Thales en el espacio.
- 12. 16 . - Cuadro resumen de fórmulas.
- 12. 17 . - Actividades de repaso.
- 12. 18 . - Ejercicios y problemas resueltos.
- 12. 19 . - Ejercicios y problemas para resolver.

COMPLEMENTOS :

- ☐ Controles diversos, con las respectivas soluciones, sobre temas de este libro (uno sobre el tema 12, otro sobre los temas 11 y 12 y un tercero sobre los temas 7 al 12).
- ☐ Y, por supuesto, algunas reflexiones.

TEMA 12.-

Geometría del espacio.

Los cuerpos geométricos. Áreas y volúmenes.

OBJETIVOS:

1. Saber comunicar con precisión la posición relativa de rectas y planos y de planos entre sí.
2. Saber utilizar los instrumentos de medida y de dibujo para trazar el desarrollo de prismas, cilindros, pirámides, conos y esferas.
3. Saber dar un resultado aproximado en función de la precisión requerida.
4. Saber estudiar las propiedades geométricas de un cuerpo sencillo relacionado con los prismas, cilindros, pirámides, conos y esferas.
5. Resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana aplicando los problemas de los prismas, cilindros, pirámides, conos y esferas.
6. Calcular el área y/o volumen de objetos geométricos que puedan descomponerse en prismas, cilindros, pirámides, conos y esferas.
7. Criticar y valorar las habilidades propias para resolver las situaciones problemáticas que se presentan.

CONTENIDOS:

De conceptos:

- | | |
|---|--|
| 12.1.- Elementos geométricos en el espacio. | 12.9.- Los Prismas. |
| 12.2.- Posiciones relativas de rectas y planos en el espacio. | 12.10.- Las Pirámides y Troncos de Pirámides. |
| 12.3.- Ángulos en el espacio. | 12.11.- Los Cilindros. |
| 12.4.- Poliedros. | 12.12.- Los Conos y Troncos de Conos. |
| 12.5.- Poliedros regulares. | 12.13.- La Esfera y sus Secciones. |
| 12.6.- Otros tipos de poliedros. | 12.14.- La Tierra, nuestro planeta, una esfera achatada por los Polos. |
| 12.7.- Teorema de Euler. | 12.15.- El teorema de Pitágoras y de Thales en el espacio. |
| 12.8.- Cuerpos geométricos a estudiar. | |

De procedimientos:

1. Clasificación de la posición relativa de rectas y planos o de planos entre sí.
2. Determinación de la distancia existente entre un plano y una recta o entre dos planos.
3. Reconocimiento y clasificación de ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esfera.
4. Construcción en papel del desarrollo de ortoedros, prismas, pirámides, cilindros y conos.
5. Cálculo del área y volumen de ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.
6. Problemas de aplicación a la vida real y cotidiana relacionados con la geometría de los prismas, los cilindros, las pirámides, los conos y las esferas.

De actitudes:

1. Actitud positiva hacia los cuerpos del espacio.
2. Valoración de la utilidad de las fórmulas y el lenguaje algebraico en la expresión de áreas y volúmenes de cuerpos del espacio.
3. Interés por la deducción intuitiva a través de los desarrollos de las fórmulas que se ven en la unidad.
4. Habilidad en la construcción de los desarrollos que se contemplan en la unidad.
5. Confianza en las propias capacidades para percibir el espacio.
6. Sensibilidad ante las cualidades estéticas de los cuerpos del espacio.

12.1.- Elementos geométricos en el ESPACIO.

Recordemos brevemente al matemático griego Euclides, del siglo III antes de Cristo. Ya en la página 54 de este libro, al comienzo del tema 8 (Geometría Plana), se menciona a este sabio de la antigua Grecia, al que podríamos considerar como el “padre” de la Geometría.



Fue Euclides el que formuló una de las proposiciones básicas de la geometría. Es la siguiente:

“Una línea recta queda determinada por dos puntos”.

Esto quiere decir que cuando conozcamos dos puntos podemos construir la única recta que pasa por ellos, con lo cual la tenemos determinada.

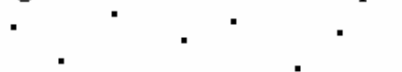
En realidad, a proposiciones como la anterior, tan claras y evidentes que son admitidas sin necesidad de demostrarlas, se les llaman **axiomas**.

Es básico en la geometría tener muy claros los conceptos de puntos, rectas y planos. Para ello recurrimos a cosas conocidas que nos den idea de ellos. Por ejemplo, la huella que deja un lápiz afilado sobre un papel nos sugiere la idea de punto, un hilo muy tirante nos da la idea de línea recta y un suelo o pared pulimentada nos dan la idea de plano.

A fin de llegar a comprender y estudiar mejor los conceptos geométricos, necesitamos partir de una serie de **axiomas o postulados fundamentales** que nos sirvan de base para posteriores razonamientos. Éstos serían los siguientes:

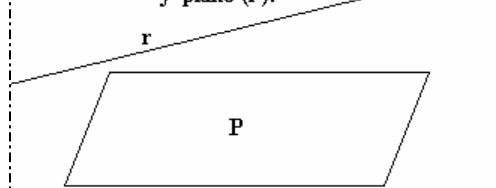
- **Existen unas cosas que llamaremos puntos.** (Ver figura siguiente)

Figura 1.- Idea intuitiva de puntos.



- **Los puntos se agrupan dando lugar a rectas y planos.** Las rectas son los conjuntos de puntos ilimitados con una sola dimensión, y los planos con dos dimensiones. (Figura 2)

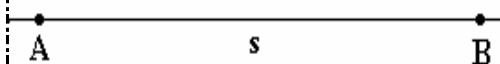
Figura 2.- Idea intuitiva de recta (r) y plano (P).



Nota: Los planos se representan con paralelogramos romboides.

- **Dos puntos determinan una recta única a la que pertenecen.** Y de todos los puntos que la forman se dice que están alineados. (Figura 3)

Figura 3.- Con dos puntos (A y B) se determina una recta (s).



- **Un plano queda determinado por tres puntos que no estén alineados.** Consecuencia de este axioma o postulado serían los siguientes: (Figura 4)

- **Un plano queda determinado por una recta y un punto exterior a ella.** (Figura 5)
- **Un plano queda determinado por dos rectas que se cortan.** (Figura 6)
- **Un plano queda determinado por dos rectas paralelas.** (Figura 7)

Figura 4.- Con tres puntos (A, B y C) se determina un plano.

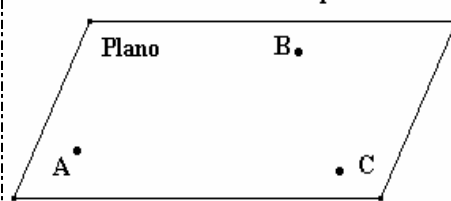


Figura 5.- Con una recta (t) y un punto exterior a ella (A) se determina un plano.

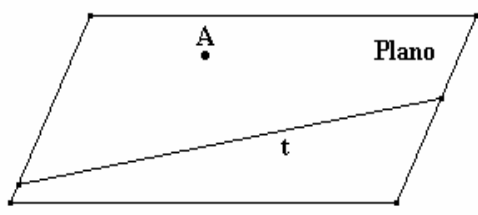


Figura 6.- Con dos rectas (m, n) que se cortan (O) se determina un plano.

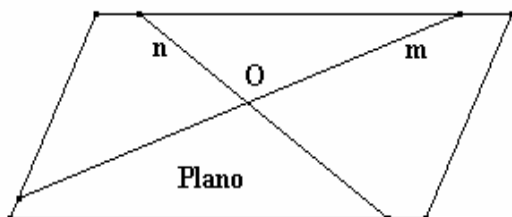
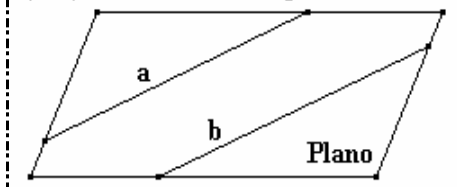
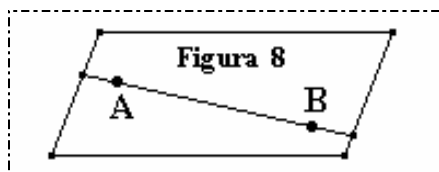


Figura 7.- Con dos rectas paralelas (a, b) se determina un plano.



- Toda recta que tiene dos puntos en un plano está toda ella incluida en él. De este postulado se deducen éstos: (Figura 8)

- Cuando una recta no tiene ningún punto en común con el plano decimos que la recta es paralela al plano. (Figura 9)
- Si la recta tiene un solo punto en común con el plano, decimos que la recta corta al plano. (Figura 10)
- Y si la recta tiene dos puntos en común con el plano, entonces toda ella pertenece al plano. (Figura 8)



r (paralela)

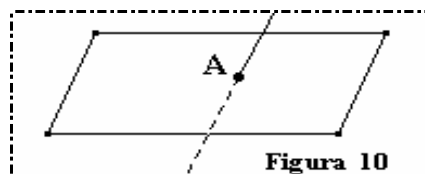
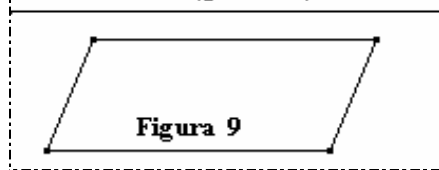


Figura 10

- Todo plano divide al espacio en dos partes o regiones que llamaremos semiespacios. De este axioma deducimos lo siguiente:

- Todos los puntos que no pertenecen al plano están situados en uno de los dos semiespacios. (Figura 11)
- Dos puntos cualesquiera de un semiespacio se pueden unir con un segmento sin cortar el plano. (Figura 12)
- Y dos puntos que estén situados en semiespacios distintos no se pueden unir con un segmento sin que éste corte al plano. (Figura 13)

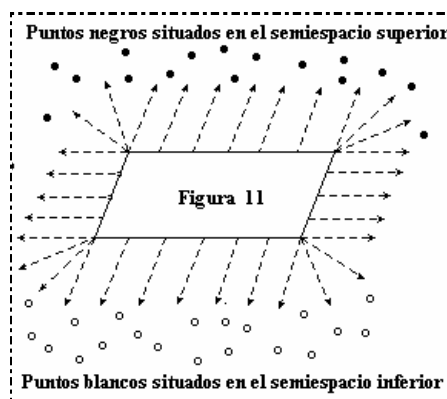


Figura 11

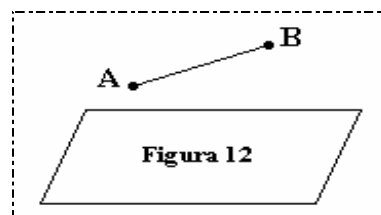


Figura 12

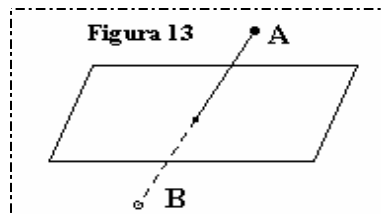


Figura 13

Partiendo de estos axiomas, comenzaremos a estudiar la geometría del espacio, para aprender a calcular longitudes, áreas y volúmenes de objetos, recipientes, edificios, etc., situados en un espacio con tres dimensiones.

12.2.- Posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.

Como ya hemos indicado, las rectas y los planos son ilimitados, y lógicamente sólo es posible dibujar una parte de ellos. A las rectas siempre las representamos en los dibujos como segmentos, y a los planos por paralelogramos (romboides, más frecuentemente).

☐ Posiciones relativas de dos rectas:

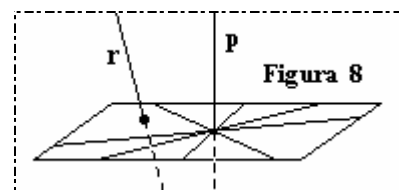
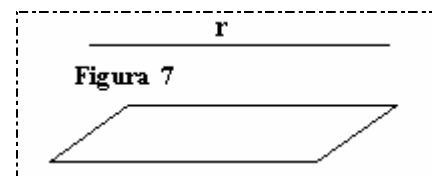
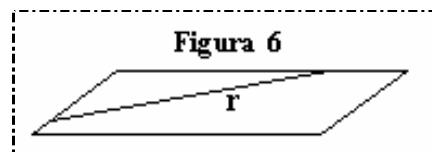
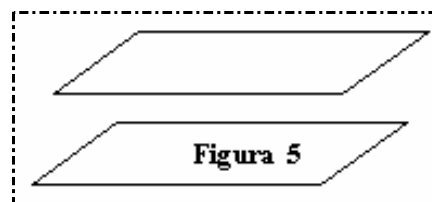
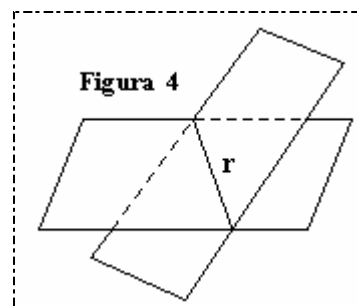
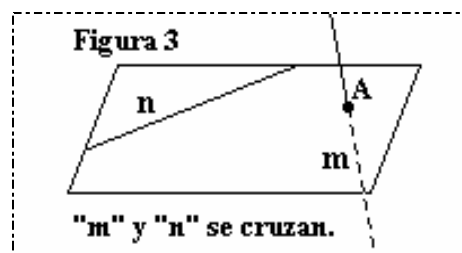
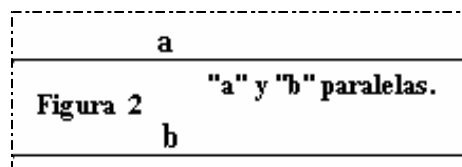
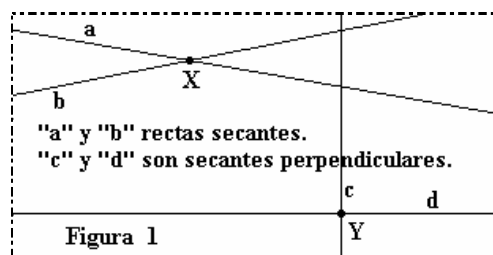
- ❶ **Secantes**, cuando se cortan en un punto. Un caso particular de éstas son las rectas perpendiculares, que se cortan formando un ángulo recto (90°). (Ver figura 1 de la columna siguiente)
- ❷ **Paralelas**, cuando no tienen ningún punto en común. (Figura 2)
- ❸ **Rectas que se cruzan**, cuando están situadas en planos diferentes. (Figura 3)

☐ Posiciones relativas de dos planos:

- ❶ **Secantes**, cuando tienen una recta en común. (Figura 4)
- ❷ **Paralelos**, cuando no tienen ningún punto en común. (Figura 5)

☐ Posiciones relativas de rectas y planos:

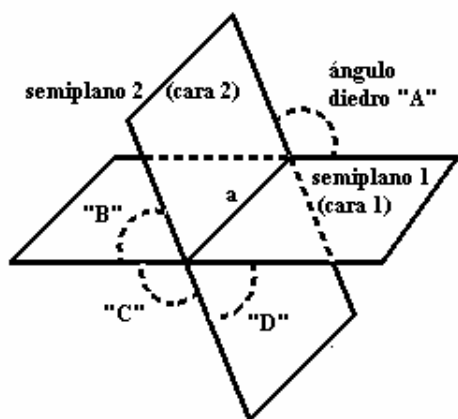
- ❶ **Contenida en el plano**, cuando todos los puntos de la recta están contenidos en el plano. Esta recta divide al plano en dos partes que llamamos **semiplanos**. (Figura 6)
- ❷ **Paralela**, cuando no tienen ningún punto en común con el plano. (Figura 7)
- ❸ **Recta secante**, cuando tiene un punto en común con el plano. Un caso particular sería la recta perpendicular al plano, que forma con cualquiera de las rectas del plano que pasan por su pie un ángulo de 90° (recto). (Figura 8)



12.3.- Ángulos en el espacio.

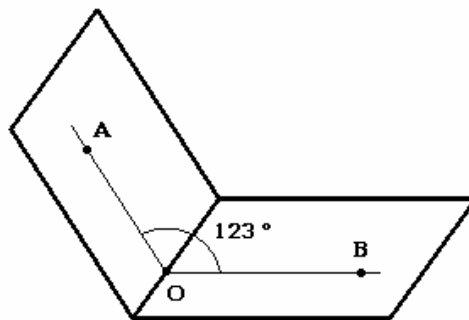
Dos planos que se cortan y no son paralelos determinan en el espacio cuatro regiones (en la figura siguiente son: "A", "B", "C" y "D"). A cada una de estas regiones se les llama ángulo diedro.

ÁNGULO DIEDRO es la región del espacio limitada por dos semiplanos que se cortan en una recta. Así, el ángulo diedro "A" de la figura está formado por los dos semiplanos "1" y "2", a los que se les suele llamar **caras** del ángulo diedro. A la recta de corte, recta "a" de la figura, se le llama **arista**.



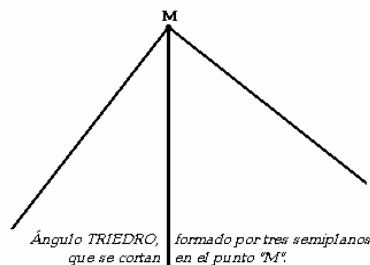
Si tomamos un punto (O) cualquiera en la arista (recta de corte) de un ángulo diedro, como el de la siguiente figura, y desde ese punto trazamos perpendiculares (OA y OB) a ambas caras (semiplanos), se forma un ángulo ($AOB = 123^\circ$; ver figura siguiente) al que llamaremos **ángulo rectilíneo** del ángulo diedro. Ese rectilíneo nos servirá para medir el diedro. Así que los ángulos diedros se miden con sus rectilíneos respectivos, con lo que serán agudos si miden menos de 90° , rectos si miden 90° , ..., suplementarios si suman 180° , opuestos por el vértice, etc. O sea, igual que los ángulos estudiados en el tema 8 (Geometría Plana).

Los ángulos diedros se miden con un aparato llamado **goniómetro**, que mide el rectilíneo correspondiente de cada diedro.

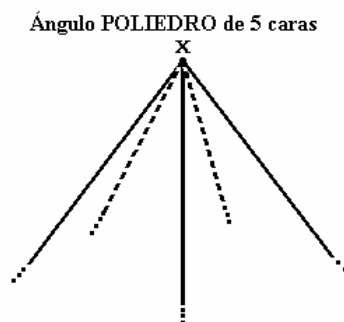


Para que te hagas mejor a la idea de los ángulos en el espacio, puedes coger un cuaderno, libro o dos cartulinas y formar tú mismo ángulos diedros. Ten en cuenta que las caras (hojas) de esos ángulos que formes son limitadas, sin embargo, el ángulo diedro en realidad es ilimitado, ya que está formado por dos semiplanos, que son ilimitados.

ÁNGULO TRIEDRO es la región del espacio limitada por tres semiplanos que tienen un punto en común, **el vértice**, punto donde se cortan tres aristas (las tres semirrectas) que se forman al cortarse las tres caras del ángulo triedro.



ÁNGULO POLIEDRO es la región del espacio limitada por tres o más semiplanos que tienen un punto en común, **el vértice** (X), punto donde se cortan todas las aristas (las semirrectas) que se forman al cortarse las caras del ángulo poliedro.



12.4.- Poliedros.

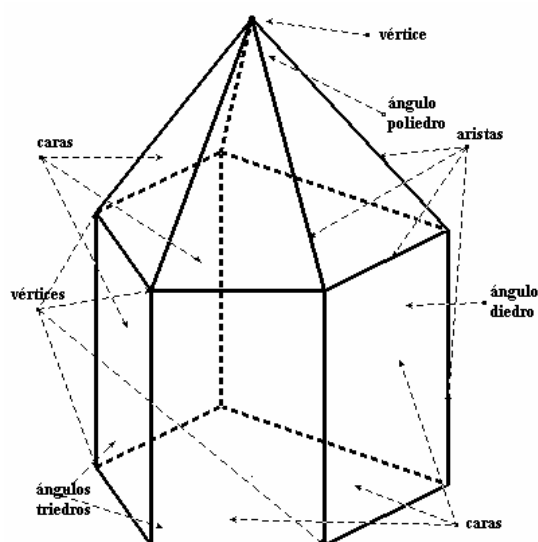
Basta echar una mirada a nuestro alrededor para ver cuerpos que están limitados por caras que son diversos polígonos: una caja de leche, un armario, una cama, un estuche, un objeto con forma de pirámide, un dado, una habitación, etc. Todos ellos son poliedros.

POLIEDRO es todo cuerpo que está limitado por polígonos, o dicho de otro modo, la región del espacio limitada por caras planas.

Los elementos a distinguir en todos los poliedros son los siguientes:

- ➡ Sus **caras**, que son los polígonos que lo forman.
- ➡ Sus **aristas**, que son los lados de los diversos polígonos que lo limitan.
- ➡ Sus **ángulos (diedros o poliedros)**, que son las regiones del espacio que limitan sus caras.
- ➡ Sus **vértices**, que son los puntos donde se cortan tres o más caras que lo componen.

Observa detenidamente en la siguiente figura poliédrica los elementos descritos :

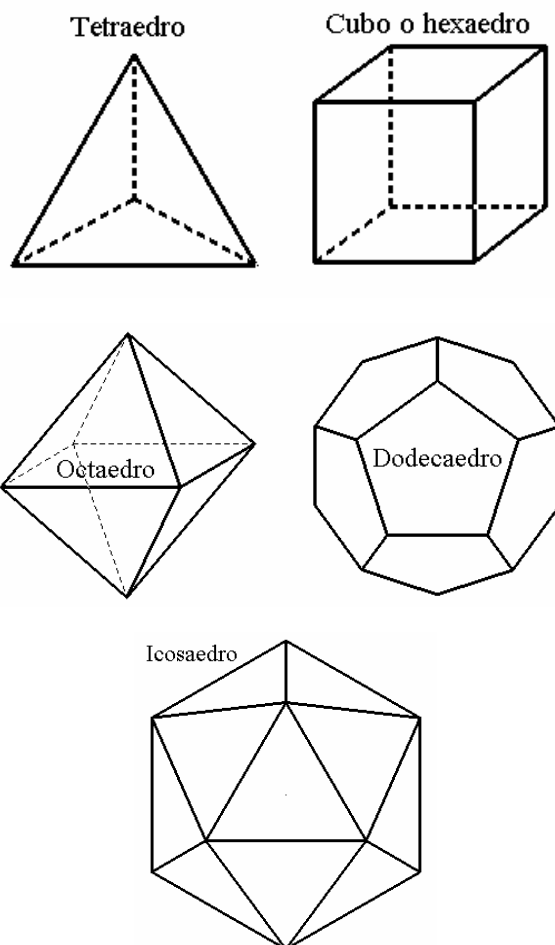


12.5.- Poliedros regulares.

Dentro de los poliedros hay algunos especiales por tener sus ángulos diedros iguales, sus ángulos poliedros iguales y todas sus caras iguales. A los que cumplen estas condiciones se les llaman poliedros regulares.

Sólo hay cinco poliedros regulares:

- ➔ **TETRAEDRO**, formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros
- ➔ **HEXAEDRO o CUBO**, formado por seis caras que son cuadrados.
- ➔ **OCTAEDRO**, formado por ocho caras que son triángulos equiláteros.
- ➔ **DODECAEDRO**, formado por doce caras que son pentágonos regulares.
- ➔ **ICOSAEDRO**, formado por veinte caras que son triángulos equiláteros.



Hemos dicho antes que sólo hay cinco poliedros regulares. Vamos a ver por qué:

- 1º) Un poliedro regular tiene como caras a polígonos regulares iguales.
- 2º) En todos los vértices de un poliedro regular concurren el mismo número de aristas.
- 3º) Como mínimo, para formar un poliedro regular se necesitan tres o más polígonos regulares.
- 4º) No es posible formar ángulos poliedros con polígonos regulares que al unirlos en un vértice sumen 360° , ya que si es así estarían en un mismo plano.
- 5º) Podemos formar poliedros regulares con triángulos equiláteros, cuyos ángulos miden 60° ; por ejemplo, con tres ($60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$), y se forma el tetraedro; con cuatro ($60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 240^\circ$), y se forma el octaedro; con cinco ($60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 300^\circ$), y se forma el icosaedro. Sin embargo, con seis triángulos equiláteros unidos en un vértice no se podría, porque suman 360° ($6 \cdot 60^\circ$) y no formarían ángulo poliedro, ya que se ajustan en un mismo plano.
- 6º) Podemos formar poliedros regulares con cuadrados, cuyos ángulos miden 90° . Con ángulos poliedros de tres cuadrados ($90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$) formamos el hexaedro (cubo). Con cuatro sumarían 360° ($4 \cdot 90^\circ$) y no hay poliedro.
- 7º) Podemos formar poliedros regulares con pentágonos regulares, cuyos ángulos miden 108° . Con ángulos poliedros de tres pentágonos regulares ($108^\circ + 108^\circ + 108^\circ = 324^\circ$) formamos el dodecaedro. Con más, no se podría.
- 8º) Hemos ido formando poliedros regulares con los polígonos regulares de tres lados (triángulos equiláteros), con los polígonos regulares de cuatro lados (cuadrados) y con los polígonos regulares de cinco lados (pentágonos). Ahora lo intentamos con los siguientes, o sea, con los hexágonos

regulares, cuyos ángulos miden 120° : como lo mínimo para formar el poliedro son tres, y ya los tres suman 360° ($3 \cdot 120^\circ$), no es posible formar poliedros con tres caras que sean hexágonos regulares. Y con más, evidentemente, pues todavía menos.

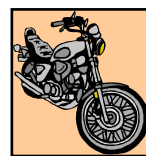
- 9º) Lógicamente, sin con hexágonos regulares no es posible construir poliedros regulares, mucho menos con polígonos regulares de mayor número de lados.
- 10º) Por tanto, sólo existen cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Una de las actividades más idóneas para educar y fortalecer tu fuerza de voluntad es practicar algún deporte, porque si no eres un flojo, perezoso y lánguido intentarás superarte para conseguir vencer el habitual cansancio y fatiga que lógicamente acompañarán tu práctica deportiva. También lucharás cada día por finalizar tus entrenamientos y por no dejarte llevar por la comodidad, aprendiendo a dominar los reveses con firmeza y constancia.

Veamos otros ejercicios para reforzar tu voluntad:

- 1) Durante una comida, cuando tengas un deseo irresistible de comerte más de algo que hay en la mesa, detén tu brazo, reflexionas y decides que en esa ocasión te vas a privar de ese gusto apetitoso, o sea, que manda tu mente y no tus deseos, y no comes más de aquello por ese día.
- 2) Una tarde cualquiera tienes que ir a un lugar algo lejano de tu casa y vas a coger la moto para desplazarte. Bien, pues actúan tus ganas de mejorar tu voluntad y decides que aunque te moleste vas a ir andando. Sin lugar a dudas de esa forma estarás consolidando tu fuerza de voluntad.
- 3) Un día de invierno, allá por enero o febrero, que hace una temperatura gélida, a pesar de tener que ducharte porque lo necesitas, dejas de hacerlo porque el frío te lo impide y te quita las ganas. Y salen a relucir tus deseos de lograr una excelente fuerza de voluntad, ordenándote que hay que ducharse a pesar de no tener ningunas ganas de hacerlo.



Y así, poco a poco, con mucho esfuerzo siempre, con entereza y siendo muy tenaz, irás adquiriendo una apreciable fuerza de voluntad.



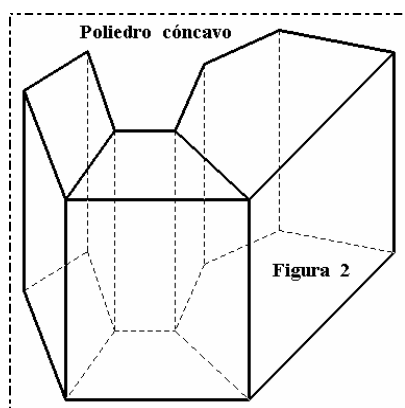
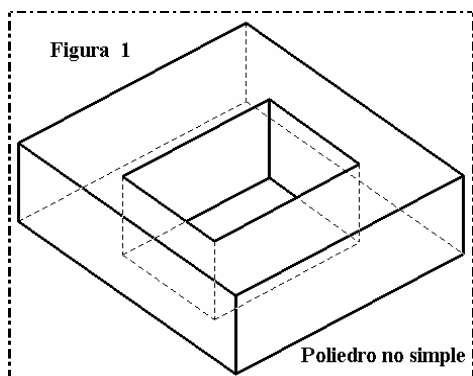
12.6.- Otros tipos de poliedros.

Veamos distintas clasificaciones de poliedros:

POLIEDROS	1ª clasificación
Regulares	Con caras que son polígonos regulares y vértices de igual número de caras concurrentes
Irregulares	Todos los que no cumplen una, otra, o las dos condiciones anteriores.

POLIEDROS	2ª clasificación
Simples	Son los que no tienen orificios. También llamados cerrados.
No simples	Aquellos que sí tienen algún orificio. (Figura 1)

POLIEDROS	3ª clasificación
Convexos	Cuando está situado por completo en uno de los semiespacios que definen cualquiera de sus caras. Para entenderlo mejor: los que pueden apoyar todas sus caras en un plano.
Cóncavos	En caso contrario. (Figura 2) Para comprender mejor: cuando no todas sus caras se pueden apoyar en un plano.



12.7.- Teorema de Euler.

Euler, matemático suizo del siglo XVIII (1707-1783), demostró que en todos los **poliedros convexos** se cumple que el número de caras más el de vértices es siempre igual al número de aristas más dos.

$$N^{\circ} \text{ de caras} + N^{\circ} \text{ de vértices} = N^{\circ} \text{ de aristas} + 2$$

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$C + V = A + 2$$

Comprueba tú este teorema en algunos poliedros.

12.8.- Cuerpos geométricos a estudiar.

Entre los cuerpos geométricos más conocidos, y lógicamente los que vamos a estudiar para conocer cómo son, cuáles son sus elementos, cuáles son las fórmulas de sus áreas laterales y totales y cómo calcular sus volúmenes, están los siguientes:

Poliedros	Los PRISMAS. Las PIRÁMIDES. Los TRONCOS de PIRÁMIDES.
Cuerpos Redondos	Los CILINDROS. Los CONOS. Los TRONCOS de CONOS. Las ESFERAS. SECCIONES de la esfera.

Los **poliedros** relacionados en este cuadro son **irregulares, simples y convexos**.

Los cuerpos redondos son cuerpos de revolución que se forman al girar una figura alrededor de un eje. Si giramos un rectángulo, se engendra un cilindro; si gira un triángulo, se obtiene un cono, y si alrededor de una recta, eje o diámetro hacemos girar un semicírculo, tenemos la esfera.

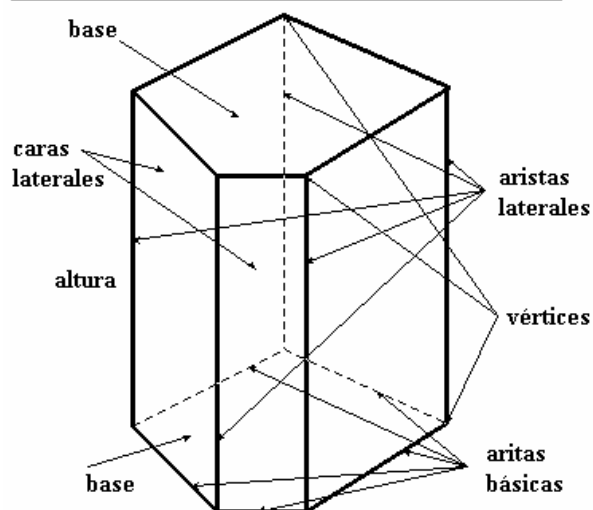
Vamos a estudiarlos a continuación.

12.9.- Prismas .

Los prismas son poliedros que tienen dos caras paralelas, que llamamos bases, y otras caras laterales que son paralelogramos. El número de caras laterales depende de los polígonos que formen la base. Tres caras si las bases son triángulos, cuatro si son cuadriláteros, cinco si son pentágonos, etc.

Los elementos de un prisma son los siguientes: bases, aristas básicas, caras laterales, aristas laterales, vértices y altura (*distancia perpendicular entre las bases*).

PRISMA PENTAGONAL, IRREGULAR Y RECTO



Clasificación de los prismas:

⇒ Según sus bases : (*Ver las siguientes figuras*)

- **Prisma triangular**, si las bases son triángulos.
- **Prisma cuadrangular**, si las bases son cuadrados.
- **Prisma rectangular**, si las bases son rectángulos.
- **Prisma trapezoidal**, si las bases son trapecios.
- **Prisma pentagonal**, si las bases son pentágonos.
- **Prisma hexagonal**, si las bases son hexágonos.
- **Etc.**

⇒ Según sus caras laterales : (*Ver figuras*)

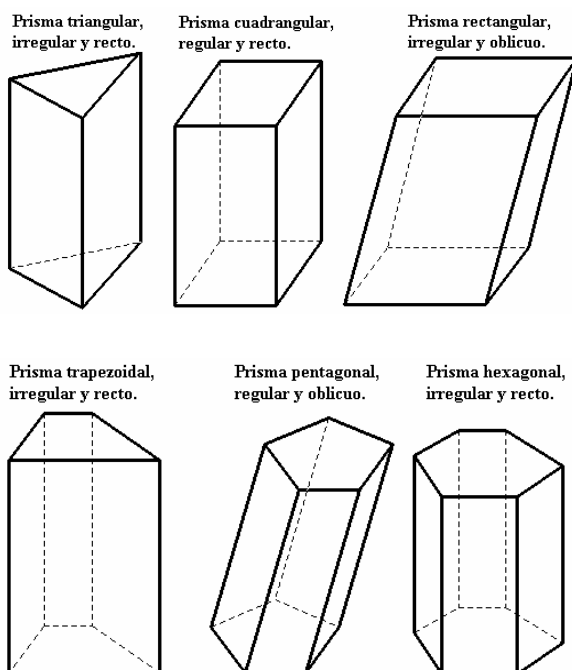
→ **Prismas rectos**, cuando las caras laterales son rectángulos. O dicho de otro modo, si las aristas laterales son perpendiculares a las bases.

→ **Prismas oblicuos**, si sus caras laterales son romboides.

⇒ Según los lados de la bases : (*Ver figuras*)

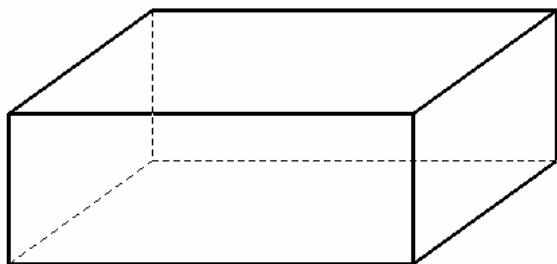
→ **Prismas regulares**, si las bases son polígonos regulares.

→ **Prismas irregulares**, si las bases no son polígonos regulares.



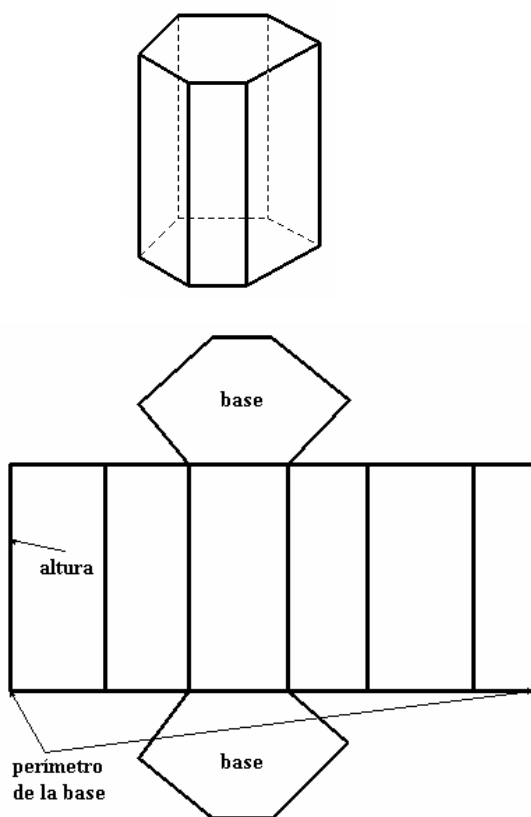
Dentro de los prismas hay unos llamados **PARALELEPÍPEDOS**, que son aquellos cuyas caras -todas, incluidas las bases- son paralelogramos. Uno de los paralelepípedos más conocidos y estudiados en ejercicios y problemas, por ser muy habitual y extendida su forma en multitud de espacios, objetos y cosas cercanas, es el **ORTOEDRO**, que es el paralelepípedo recto que tiene bases y caras laterales que son rectángulos, aunque o las bases o las caras pueden ser cuadrados. Si fueran bases y caras cuadradas, entonces ese paralelepípedo sería el **CUBO**.

Paralelepípedo ORTOEDRO,
o prisma rectangular recto.



ÁREA LATERAL Y TOTAL
DE UN PRISMA RECTO.

Para obtener el área de un prisma debemos hacerlo a través del desarrollo plano de todas sus caras, es decir, cortando por alguna de sus aristas laterales y las básicas y tender todas sus polígonos en la mesa, folio o cuaderno. Por ejemplo, el desarrollo de un prisma hexagonal irregular recto es así :



Claramente podemos observar que el área lateral (suma de las caras laterales) es un rectángulo que tiene de largo el perímetro de la base y de ancho la altura del prisma.

Y el área total (el de todas sus caras: laterales + dos bases) es igual al área lateral más el de las dos bases.

Igualmente se puede proceder para cualquier otro prisma, siempre que sea recto: el desarrollo de todo prisma recto es siempre un rectángulo, que tiene por dimensiones el perímetro de la base y la altura del prisma, más sus dos bases. Con lo cual ya podemos sacar la fórmula general que nos servirá para hallar el área de cualquier prisma recto :

Área Lateral = perímetro de la base . altura

Área Total = Área_{Lateral} + 2 . Área_{Base}

NOTA : A partir de ahora, llamaremos abreviada – mente a estas áreas de la siguiente forma :

- Área Lateral → A_L
- Área Total → A_T
- Área de la base → A_B



Los alumnos del Primer Ciclo de E.S.O. de nuestro Instituto conversan ya con un nivel humano como éste:

REGINA : “Yo tengo un hermano que acapara siempre las conversaciones, es decir, que casi no deja hablar y opinar a los demás, por eso mi madre le advierte continuamente de que esa forma de ser tiene poco que ver con la buena educación y tolerancia y mucho que ver con la intransigencia y el egoísmo”.

SABINO : “Tengo un abuelo al que adoro, porque me enseña muchas cosas; entre otras, la otra noche me decía que saber expresar la discrepancia y el desacuerdo a los demás con delicadeza, con distinción y con respeto es señal de una educación exquisita y de una respetable amistad”.

TECLA : “En mi Instituto tengo unos buenos profesores, pero hay uno al que más admiro, porque habitualmente en sus clases nos habla de muchas cosas interesantes. Por ejemplo, una sobre la cual incide en muchas ocasiones es la siguiente: ‘Familiarizaros cada día más en el uso de sentido común, porque eso os hará la vida más llevadera’. Y tiene muchísima razón”.



¿ Cosas raras, o Urbanidad, buenos modales, buenas costumbres y buena educación ?

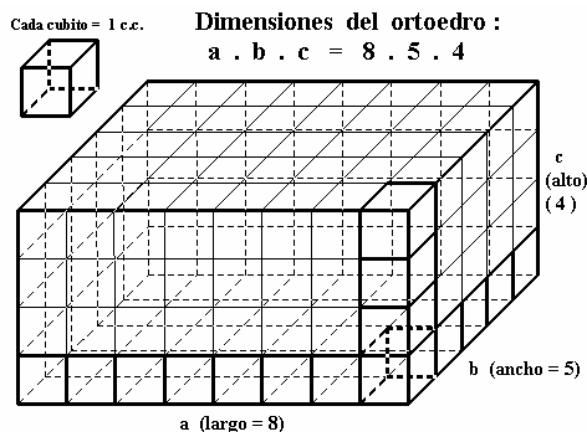


VOLUMEN DE UN PRISMA RECTO.

Empecemos recordando el concepto de volumen, que ya se trató con sus unidades en el tema 7 (página 8).

El volumen de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa ese cuerpo. La unidad principal de la magnitud volumen es el metro cúbico (m^3), que es el volumen de un cubo (hexaedro) de 1 metro de arista. (Ver en página 8 las unidades de volumen)

Para deducir la fórmula con la que calcular el volumen de cualquier prisma recto, observemos el dibujo siguiente de un ortoedro :



Cada uno de los **cubos** en los que hemos dividido este ortoedro tiene **1 cm³** de volumen (1 cm . 1 cm . 1 cm). Podemos ver claramente en este paralelepípedo (prisma rectangular recto) que la primera planta de cubos en la que lo hemos descompuesto está formada por 40 cubitos ($8 \cdot 5 = \text{largo} \cdot \text{ancho}$) de 1 cm³ de volumen. Y como hay 4 pisos, que tienen en total 160 cubitos, pues el volumen de este prisma es **160 cm³** ($8 \cdot 5 \cdot 4 = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$).

Así que el volumen se ha obtenido multiplicando las dos dimensiones de la base (**ÁREA de la BASE**) por la otra dimensión (**ALTURA del PRISMA**). Con un procedimiento análogo se puede ir hallando el volumen de otros tipos de prismas rectos. Por deducción obtenemos la fórmula con la que calcular el volumen de cualquier prisma recto:

En general :

Volumen del PRISMA = Área de la Base . Altura

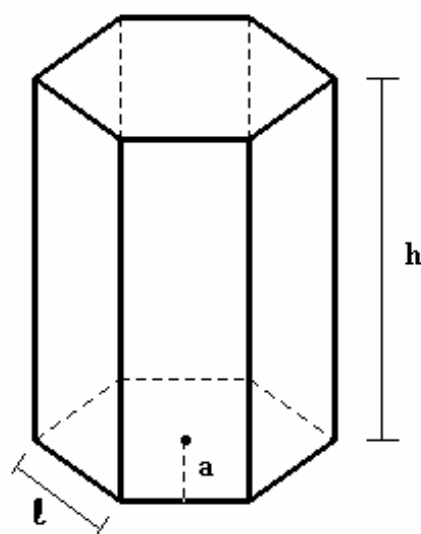
$$V_{\text{Prisma}} = A_B \cdot h$$

En el ORTOEDRO sería :

$$V_{\text{Ortoedro}} = a \cdot b \cdot c$$

Detallemos más las fórmulas poniendo como ejemplo el siguiente prisma :

Prisma hexagonal regular recto



Datos {

- Cuerpo geométrico : Prisma hexagonal regular recto
- h → altura
- l → lado del hexágono regular
- a → apotema del hexágono regular

$$\Rightarrow A_L = p_{\text{base}} \cdot h =$$

$$\text{En este prisma} \rightarrow = 6 \cdot l \cdot h$$

$$\Rightarrow A_T = A_L + 2 \cdot A_B =$$

$$\text{En este} \rightarrow = 6 \cdot l \cdot h + 2 \cdot \frac{6 \cdot l \cdot a}{2}$$

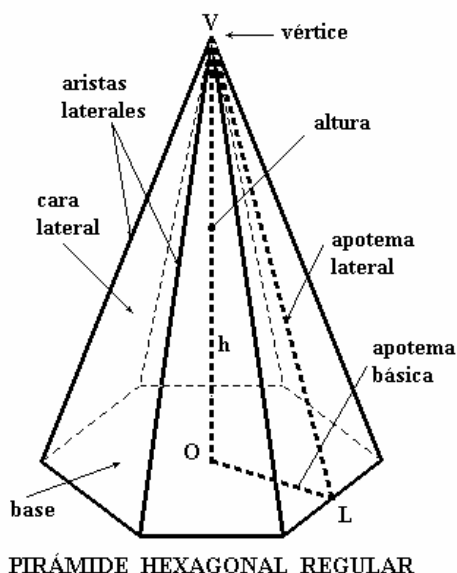
$$\Rightarrow V_{\text{Prisma}} = A_B \cdot h =$$

$$\text{En este prisma} \rightarrow = \frac{6 \cdot l \cdot a}{2} \cdot h$$

12.10.- Pirámides y troncos de pirámides .

Una pirámide es un poliedro que tiene una base que es un polígono y caras laterales que son triángulos con un vértice común, llamado vértice de la pirámide. El número de caras laterales depende del polígono que forma la base. Tres caras si la base es triángulo, cuatro si es cuadrilátero, cinco si es pentágono, etc.

Los elementos de una pirámide son los siguientes: base, aristas básicas, caras laterales, aristas laterales, apotemas laterales, apotemas básicas, vértice y altura (*distancia perpendicular del vértice a la base*).



Clasificación de las pirámides:

⇒ Según sus bases : (Ver las siguientes figuras)

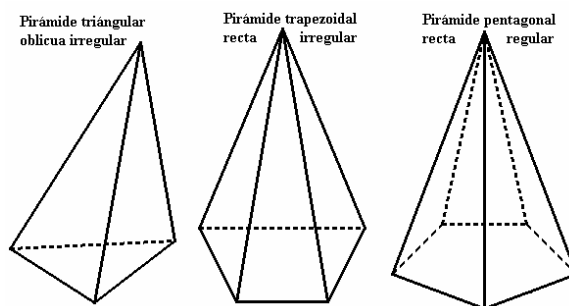
- **Pirámide triangular**, si la base es un triángulo.
- **Pirámide cuadrangular**, si la base es un cuadrado.
- **Pirámide rectangular**, si la base es un rectángulo.
- **Pirámide trapezoidal**, si la base es un trapecio.
- **Pirámide pentagonal**, si la base es un pentágono.
- **Pirámide hexagonal**, si la base es un hexágono.
- **Etc.**

⇒ Según sus caras laterales : (Ver figuras)

- **Pirámides rectas**, cuando las caras laterales son triángulos isósceles.
- **Pirámides oblicuas**, cuando las caras laterales son otras clases de triángulos.

⇒ Según los lados de la bases : (Ver figuras)

- **Pirámides regulares**, si las bases son polígonos regulares y la altura de la pirámide cae en el centro de la base.
- **Pirámides irregulares**, las demás.



Cuando uno no está formado suficientemente confunde el ser tolerante con el no ser libre; es un error muy habitual hoy día. Se piensa, de forma equivocada, evidentemente, que al admitir las ideas de los demás se está minando la libertad de uno mismo. Y no es así, **la diversidad de los otros, además de enriquecernos, nos hace más libres.**

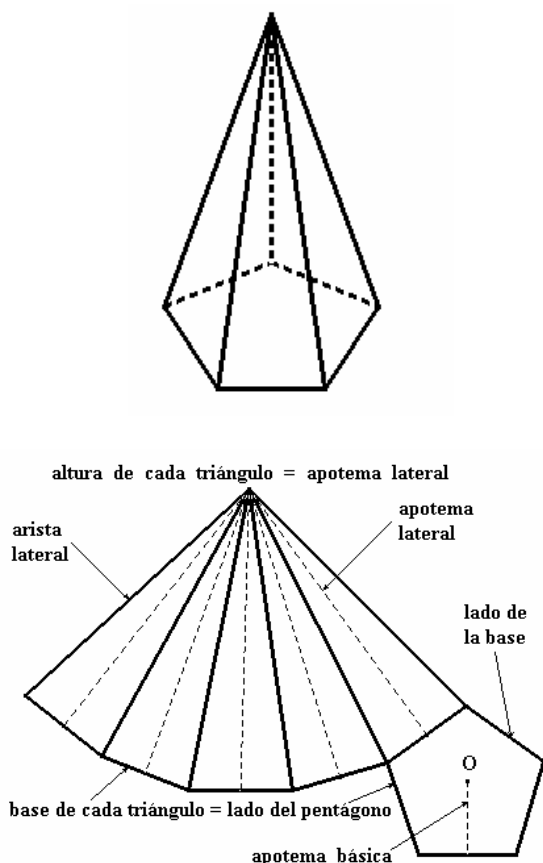


Aprender a respetar a las personas diferentes nos trae el deseo de conocer, nos ayuda a pensar en las desigualdades, acrecienta nuestra amplitud de miras y nos aleja de mantenernos en posiciones centrípetas en las que nos creemos el centro de todo. Y todo eso se traduce en más libertad, porque la tolerancia suma y la intolerancia destruye.

¿Qué significa para ti ser tolerante? Dentro de tus tolerancias, ¿qué cosas o actitudes toleras más? ¿Y qué aspectos tienes todavía que aprender a tolerar, porque nunca o casi nunca lo haces? ¿Crees que se practica suficientemente hoy día la tolerancia? ¿Hay tolerancia en las aulas? ¿Y entre tus amistades?

ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UNA PIRÁMIDE REGULAR RECTA.

Para obtener el área de una pirámide debemos hacerlo a través del desarrollo plano de todas sus caras, es decir, cortando por alguna de sus aristas laterales y básicas y tender todas sus caras en la mesa, folio o cuaderno. Por ejemplo, [el desarrollo de una pirámide pentagonal regular es así](#) :



Claramente podemos observar que el área lateral (suma de las caras laterales) es la suma de las áreas de los triángulos isósceles que tenga, en este caso cinco, porque la base es un pentágono. Como la superficie de cada triángulo es igual a la base por la altura partido por dos, y la base de cada triángulo es igual al lado de la base pentagonal y la altura de cada uno es igual a la apotema lateral, la superficie lateral (los cinco triángulos) es el perímetro de la base por la apotema de la pirámide partido por dos.

El área total (todas sus caras; laterales+la base) es igual al área lateral más el de la base.

Igualmente se puede proceder para cualquier otra pirámide, siempre que sea recta. El desarrollo de toda pirámide recta es siempre igual: varios triángulos isósceles cuyas bases son iguales a los lados de la base de la pirámide y las alturas son las apotemas de la pirámide. Con lo cual ya podemos sacar la fórmula general que nos servirá para hallar el área de cualquier pirámide recta :

$$A_L = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot \text{apotema lateral}}{2}$$

$$A_T = \text{Área Lateral} + \text{Área de la base}$$

En nuestro caso sería :

$$A_L = 5 \cdot \frac{\ell \cdot a_\ell}{2} = \frac{p \cdot a_{\text{lateral}}}{2}$$

$$A_T = A_L + \frac{p \cdot a_{\text{básica}}}{2}$$

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE.

El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del volumen del prisma que tuviera la misma base y la misma altura. Esto se puede comprobar fácilmente: si construimos un prisma y una pirámide con la misma base y la misma altura y llenamos de arena la pirámide, se necesita llenarla tres veces para completar justamente el volumen del prisma.

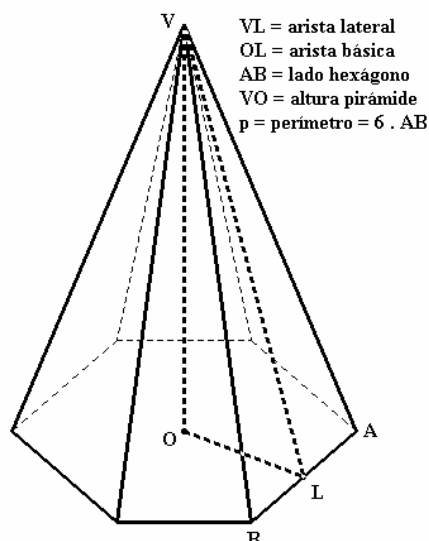
En realidad, un prisma recto se puede descomponer en tres pirámides de igual base e igual altura.

En general :

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{V_{\text{prisma (de igual base y altura)}}}{3}$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

En la página siguiente detallamos más las fórmulas poniendo como ejemplo la siguiente pirámide :



Datos {

- Cuerpo geométrico : **Pirámide hexagonal regular recta**
- $h \rightarrow$ altura = VO
- $\ell \rightarrow$ lado del hexágono regular = AB
- $a_\ell \rightarrow$ apotema lateral = VL
- $a_b \rightarrow$ apotema hexágono regular = OL

$$\rightarrow A_L = \frac{p_{\text{base}} \cdot a_\ell}{2} = \frac{6 \cdot \ell \cdot a_\ell}{2}$$

$$\rightarrow A_T = A_L + A_B = \frac{6 \cdot \ell \cdot a_\ell}{2} + \frac{6 \cdot \ell \cdot a_b}{2}$$

$$\rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\frac{6 \cdot \ell \cdot a_b}{2} \cdot h}{3} = \frac{6 \cdot \ell \cdot a_b \cdot h}{6} = \ell \cdot a_b \cdot h$$



Pregunta “ingenua” : ¿Hay que concienciar ecológicamente más a los niños o a los gobiernos?

Ya en reflexiones anteriores hemos quedado claro que cada cual debe comenzar por él mismo a corregir acciones que mejoren el medio ambiente, pero a pesar de esos compromisos creo que quienes más se tienen que sensibilizar son los gobiernos de los países más “ricos”.

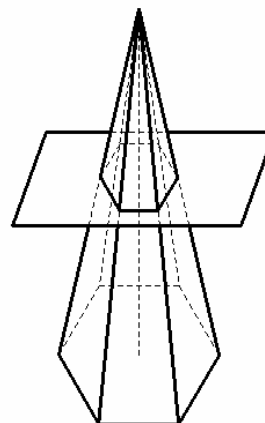
Quizás una de las pocas cosas ante la que nos podíamos poner de acuerdo muchas personas, mejor decir muchísimas, fuera ante la visión de un bello paisaje de nuestro planeta, que aunque viejo y debilitado todavía dispone de zonas hermosísimas donde sentir el verdadero amor por la naturaleza.

Sin embargo, hoy día, dependemos de tantos y tan diversos intereses, sobre todo gobiernos y multinacionales, que ni ese principio básico y vital de acuerdo logra que se tomen las medidas oportunas, que se conocen y se pueden aplicar, para remediar los graves deterioros en el equilibrio de los ecosistemas y de nuestra atmósfera. Quizás, desgraciadamente, sea necesaria una catástrofe ecológica, de dimensiones continentales y casi irrecuperable, para que esos gobiernos antepongan los intereses ecológicos a los económicos. Y, evidentemente, eso no nos consuela nada. Por ello sólo nos queda seguir luchando: primero, desde nuestro humilde puesto de ciudadano, y segundo, apoyando firmemente a todas aquellas organizaciones, o “raros” gobiernos, que sí están verdaderamente comprometidos en la vital tarea de proteger al planeta Tierra de su vejez prematura.

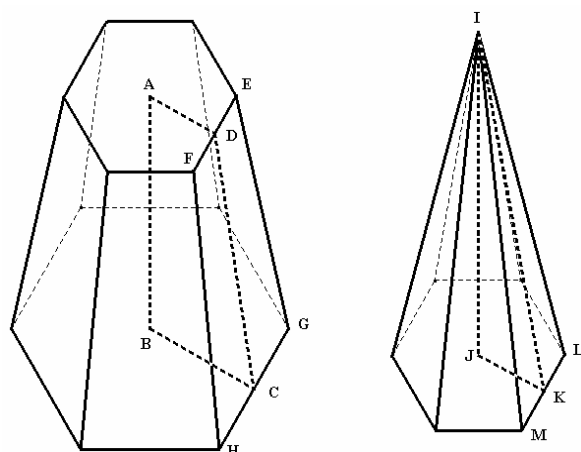


LOS TRONCOS DE PIRÁMIDES REGULARES RECTOS.

Un tronco de pirámide se forma cuando una pirámide es cortada por un plano paralelo a la base.



En las figuras siguientes, la de la izquierda, que es la parte comprendida entre la base de la pirámide inicial y la sección que determina el plano que la ha cortado, es la que corresponde al tronco de pirámide, que como puedes ver tiene dos bases y caras laterales que son trapecios isósceles. Y la figura de la derecha, que es una pirámide, es la parte superior que queda de la pirámide inicial al ser cortada por el plano.



- Cuerpo geométrico :
Tronco de pirámide hexagonal regular recto.
- $h \rightarrow$ altura = AB
- $\ell_1 \rightarrow$ lado del hexágono regular de la base mayor = GH
- $\ell_2 \rightarrow$ lado del hexágono regular de la base menor = EF
- $a_\ell \rightarrow$ apotema lateral = CD
- $a_{b1} \rightarrow$ apotema del hexágono regular de la base mayor = BC
- $a_{b2} \rightarrow$ apotema del hexágono regular de la base menor = AD

$$\rightarrow A_L = \text{Suma de todos los trapecios} = \frac{(p_{\text{base mayor}} + p_{\text{base menor}}) \cdot a_\ell}{2}$$

$$\rightarrow A_T = A_L + 2 \cdot A_B =$$

El volumen del tronco de pirámide es igual al volumen de la pirámide inicial menos el volumen de la pirámide pequeña.

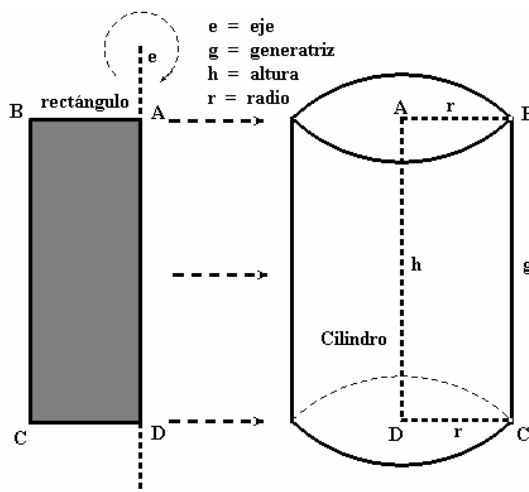
No obstante, hay una fórmula para calcular el volumen del tronco de pirámide:

$$\rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = \frac{(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \cdot h}{3}$$

Donde " S_1 " es la superficie de una base, " S_2 " la de la otra base y " h " la altura del tronco de pirámide.

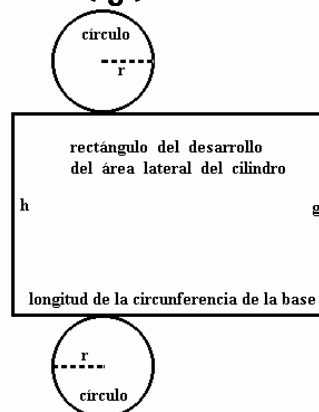
12.11.- Cilindros .

El cilindro es un cuerpo de revolución que se genera al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.



Al hacer girar el rectángulo ABCD de la figura sobre uno de sus lados (AD) como eje, se obtiene un cuerpo redondo, o cuerpo de revolución, al que llamamos **CILINDRO**. Observa, o mejor dicho, imagina, que en la rotación es el lado BC el que genera el cilindro, por ello se le llama generatriz (g) del cilindro. De igual modo, los lados AB y CD son los que generan los dos círculos que forman las bases. La distancia entre las bases, que corresponde al lado AD (h), es la altura.

El desarrollo plano de un cilindro está formado por un rectángulo y por dos círculos. Las dimensiones del rectángulo son la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$) y la altura (h), que es igual a la generatriz (g).



Datos {

- Cuerpo geométrico : **Cilindro recto.**
- **h** → altura
- **g** → generatriz
- **r** → radio de la base

$\rightarrow A_L = 2 \pi r \cdot h = 2 \pi r \cdot g$
 $\rightarrow A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2 \pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$
 $\rightarrow V_{cilindro} = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

Solidaridad: valor muy en desuso en la actualidad, cuando más falta hace en nuestro planeta Tierra. África. Hispano-América. Países del Este. Asiáticos. Hambre. No libertad. Pobreza. No Educación. Mal vivir. Lucha y rebelión contra la situación. Emigración. Esperanza.

Vivimos anclados en nuestra cómoda posición dentro de la civilización afortunada y vemos tan lejos ese mundo marginado y falto de unas condiciones básicas para una vida digna, que pensamos que es de "otro mundo", o sea, como si sufrieran en otro planeta.



En realidad miramos, de forma consciente o inconsciente, hacia otro lado; ignoramos su existencia y queremos borrar cuanto antes de nuestro cerebro las imágenes y las informaciones sobre el llamado tercer mundo, aunque a veces nuestras conciencias no nos lo permiten.

¿Cómo nos vamos a preocupar de ellos con todos nuestros problemas? (i)

Además, ¿qué podemos hacer? (i)

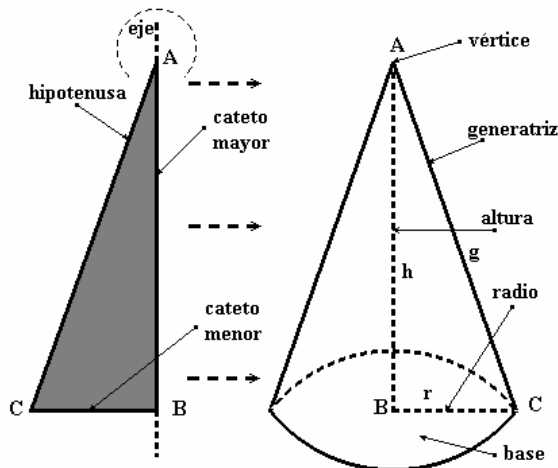
Nos liberamos tan rápidos de esas preocupaciones que... "Nos lavamos las manos bastantes más veces que muchos Pilatos". **La comodidad nos invade. La seguridad nos aplana.** ¿Y qué podemos hacer? **¿Qué hago yo?** ¿Colaboro a que sigan cada día peor o intento algo para contribuir a una posible mejoría?



¿Eres de los que dicen: "Que me dejen tranquilo, que ya tengo yo bastantes problemas", o de los que dicen que no está en sus manos la posibilidad de ayudar, o de los que se solidarizan, identifican y colaboran desde sus posibilidades con algunos de los muchos problemas del mundo actual?

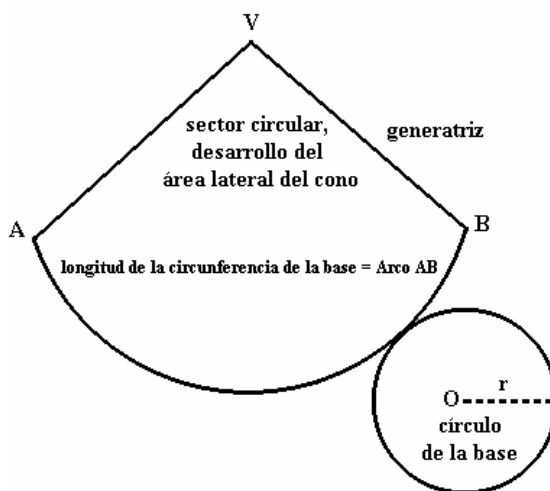
12.12.- Conos y troncos de conos .

El cono es un cuerpo de revolución que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



Al hacer girar el triángulo rectángulo **ABC** de la figura sobre uno de sus catetos (**AB**) como eje, se obtiene un cuerpo redondo, o cuerpo de revolución, al que llamamos **CONO**. En la rotación es **la hipotenusa AC** la que **genera** el cono, por ello se le llama **generatriz (g)** del cono. De igual modo, el cateto **BC** es el que genera el **círculo** que forma **la base**. La distancia del vértice a la base, que corresponde al **lado AB (h)**, es la **altura**.

El desarrollo del cono está constituido por un sector circular, que es el área lateral, y un círculo, que es la base.



Datos {

- Cuerpo geométrico : **Cono recto**
- **h** → altura
- **g** → generatriz
- **r** → radio de la base

El área del sector circular es la longitud del arco, que es $2 \pi r$, por el radio del sector, que es la generatriz (g), partido por dos, o sea :

$$A_{\text{sector}} = \frac{2 \pi r \cdot g}{2} = \pi r g$$

$$\rightarrow A_L = \pi r g$$

$$\rightarrow A_T = A_L + A_B = \pi r g + \pi r^2$$

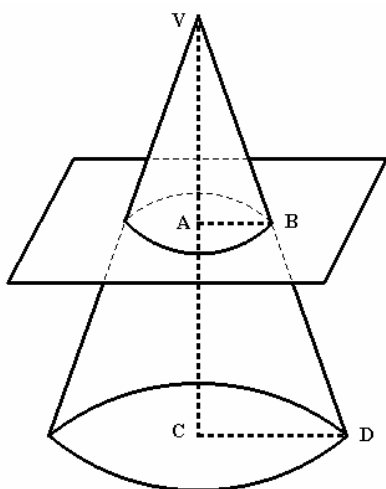
$$\rightarrow V_{\text{cono}} = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

Nota : Como ya dijimos en la pirámide, se puede comprobar –según el principio de Cavalieri– que el volumen de un cono y una pirámide que tengan la misma base y la misma altura es el mismo. Y como el volumen de la pirámide es un tercio del área de la base por la altura, pues el del cono será el área del círculo (base) por la altura partido por tres, como se puede ver en el cuadro de fórmulas anterior.

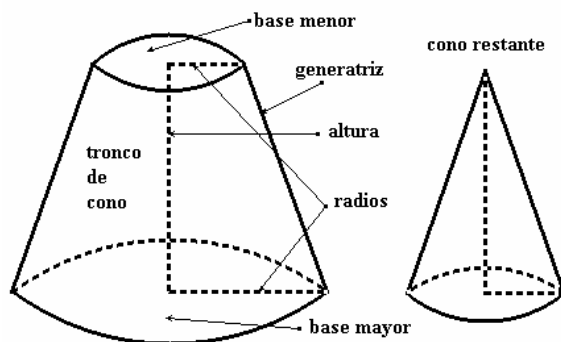
EXTRA . - Averigua qué es lo que dice el citado principio de Cavalieri, lo explicas brevemente con unas frases y unos dibujos en tu cuaderno y me lo enseñas. Recogerás alguna “cosecha”.

LOS TRONCOS DE CONOS RECTOS

Un tronco de cono se forma cuando un cono es cortado por un plano paralelo a la base.



En las figuras siguientes, **la de la izquierda**, que es la parte comprendida entre la base del cono inicial y la sección que determina el plano que lo ha cortado, **es la que corresponde al tronco de cono**, que como puedes ver tiene dos bases. Y la figura de la derecha, que es un cono, es la parte superior que queda del cono inicial al ser cortado por el plano.



Datos {

- Cuerpo geométrico : **Tronco de cono recto.**
- **h** → altura
- **g** → generatriz
- **R** → radio de la base mayor
- **r** → radio de la base menor

$$\rightarrow A_L = (R + r) \cdot \pi \cdot g$$

$$\rightarrow A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

$$\rightarrow V_{\text{tronco de cono}} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

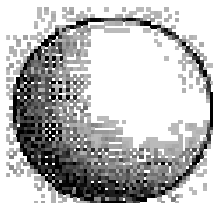
A ver qué tal se te da el dibujo de cuerpos geométricos. Coge lápiz, goma, escuadra y cartabón y dibuja en tu cuaderno lo mejor que puedas los siguientes cuerpos:

- 1) Un prisma romboidal recto de 6 cm de diagonal mayor, mitad de diagonal menor y con una altura de 9 cm.
- 2) Un prisma octogonal recto de 2'5 cm de lado básico y con una altura de 7 cm.
- 3) Una pirámide cuadrangular recta de 4 cm de lado básico y una altura de 8 cm.
- 4) Un tronco de cono recto de 6 cm de altura y con radios de las bases de 4'5 y 3 cm, respectivamente.

Hallá después las áreas laterales, totales y volúmenes de cada uno de ellos.

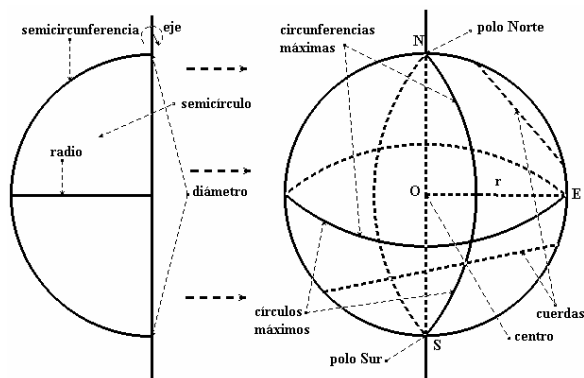
12.13.- La Esfera y Secciones .

La esfera es un cuerpo geométrico engendrado por la rotación completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.



Si consideramos la rotación de la semicircunferencia que corresponde al semicírculo alrededor de su diámetro, se engendra la superficie esférica.

O sea, para entendernos mejor, llamamos esfera al sólido macizo que engendra la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro, por ejemplo, una bola maciza de las que se usan para el lanzamiento de peso en las pruebas de atletismo; y llamamos superficie esférica a la superficie que genera la rotación de la línea curva de su semicircunferencia, por ejemplo, un balón.



En la superficie esférica distinguir los siguientes elementos:

- **Centro.** Es el centro de la semicircunferencia que la genera.
- **Radio.** Es cualquier segmento que une el centro con otro punto cualquiera de la superficie esférica.

- **Diámetro.** Es el segmento que une dos puntos de la superficie esférica pasando por el centro.
- **Cuerda.** Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de su superficie.
- **Polos.** Son los dos puntos donde se corta la superficie esférica con el eje de rotación, llamados Polo Norte y Polo Sur.

La superficie de una esfera no se puede desarrollar sobre un plano de forma exacta, sino sólo de forma aproximada, porque es imposible hallar rectas para recortarla y pegarla en una superficie plana, como hemos hecho para obtener el desarrollo de prismas, pirámides, cilindros y conos. Sin embargo, mediante [un experimento](#) podemos llegar a obtener la fórmula que sirve para calcular su área :

- Cortemos a la mitad una naranja u otro objeto esférico en el que sea posible partirlo a la mitad.
- Pongamos una punta, o algún palito, en el polo de una de las dos mitades y otro en el centro.
- Enrollemos una cuerda alrededor del polo hasta que quede cubierta dicha mitad, y cortémosla.
- Enrollemos ahora alrededor del centro, hasta cubrir el círculo máximo.
- Comprueba que el trozo de cuerda que ha cubierto la semiesfera en el apartado "c" es el doble de la que cubre el círculo máximo del apartado "d".
- O sea, la superficie esférica es igual a cuatro veces la superficie de un círculo máximo.

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ◦ Círculo máximo $\rightarrow \pi r^2$ ◦ Semiesfera $\rightarrow$ dos círculos máximos $\rightarrow 2 \pi r^2$ ◦ Esfera completa $\rightarrow$ Dos semiesferas $\rightarrow 2 \cdot 2 \pi r^2$ |
|---|

A superficie esférica = 4 veces la del círculo máximo

$$\mathbf{A_{superficie\ esférica} = 4 \cdot \pi r^2}$$

Bueno, en realidad esto no es una demostración matemática, pero nos da idea de la fórmula general que sirve para calcular el área de la superficie esférica.

Para obtener la fórmula del volumen de la esfera, podemos deducirlo también con [otro experimento](#):

- Cortamos a la mitad un objeto esférico hueco para obtener una semiesfera.
- Medimos su diámetro.
- Construimos un cilindro que tenga de altura el diámetro de la semiesfera y una base con igual diámetro.
- Llenamos de agua o de arena la semiesfera y comprobamos que para llenar el cilindro hay que vaciar en él justamente tres semiesferas.
- Con lo que deducimos que el volumen de la semiesfera del experimento, media pelota de goma u otro objeto esférico de plástico, es $1/3$ del volumen del cilindro, o sea, que el volumen de la esfera es $2/3$ el del cilindro.

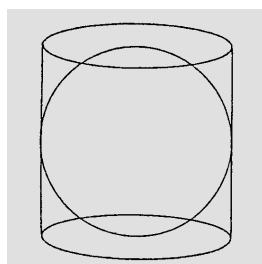
Veamos a continuación, con fórmulas, como queda lo que se deduce del experimento anterior:

En el experimento se deduce lo siguiente :

$$V_{\text{cilindro}} = A_B \cdot h \Rightarrow \begin{cases} \circ A_B \rightarrow \pi r^2 \\ \circ h \rightarrow 2r \end{cases}$$

$$V_{\text{esfera}} = 2 \cdot \text{semiesfera} = 2 \cdot \frac{1}{3} A_B \cdot h =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2r = \frac{4\pi r^3}{3}$$

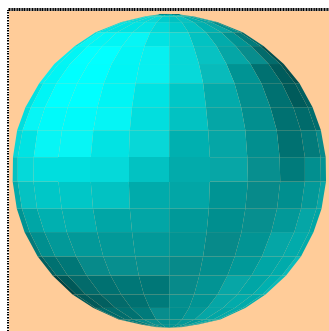


La altura del cilindro es igual al doble del radio:

$$h = 2 \text{ radio} = 2 \cdot r$$

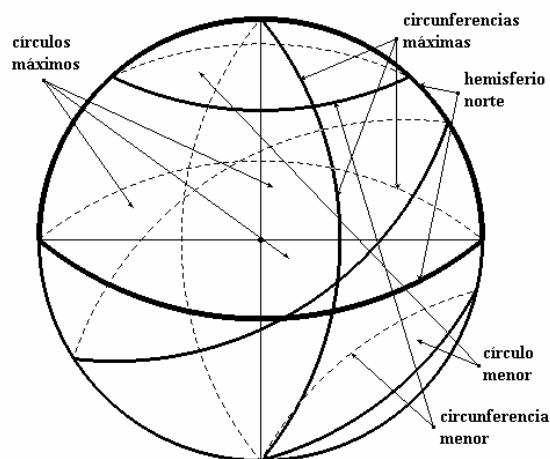
Y el volumen de la esfera es dos tercios del que tiene el cilindro.

EXTRA.- El volumen de una esfera se puede deducir también considerando que está formada por muchas pirámides que unen sus vértices en el centro de ella. Si quieres “molestarte” en hacerlo, o buscar cómo se hace, y plasmarlo en tu cuaderno, me lo enseñas y seguramente habrá alguna “cosecha” para tu evaluación.



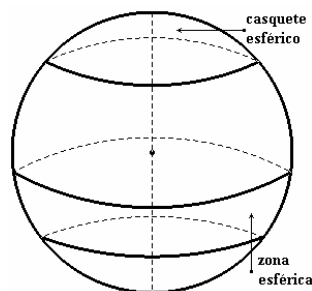
SECCIONES PLANAS EN LA ESFERA, PARTES DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA Y PARTES DE LA ESFERA.

- **Círculo máximo.** Es toda sección de la esfera cuyo plano pasa por el centro. A la circunferencia de dicho círculo se le llama circunferencia máxima. (Ver figura)
- **Hemisferio.** Es cada una de las dos mitades en que queda dividida una esfera por un círculo máximo.
- **Círculo menor.** Es toda sección de la esfera cuyo plano no pasa por el centro. A su circunferencia se le llama circunferencia menor. (Ver figura)

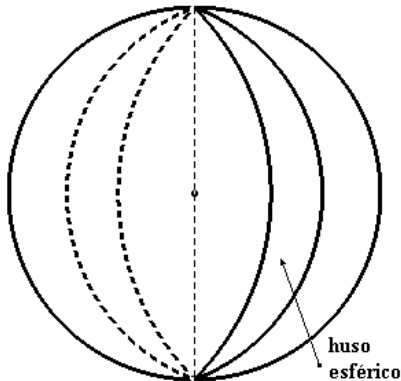


Hastaaquí las secciones planas. Hastaaquí las secciones planas. Hastaaquí las secciones planas.

- **Zona esférica.** Es la parte de la superficie esférica que está comprendida entre dos planos paralelos que la cortan. (Ver figura)
- **Casquete esférico.** Es la parte de la superficie esférica que se obtiene al ser cortada por un plano. (Ver figura)

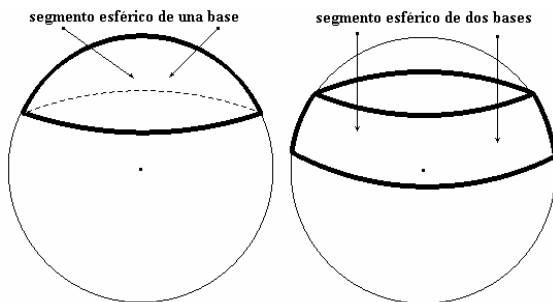


- **Huso esférico.** Es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos circunferencias máximas.

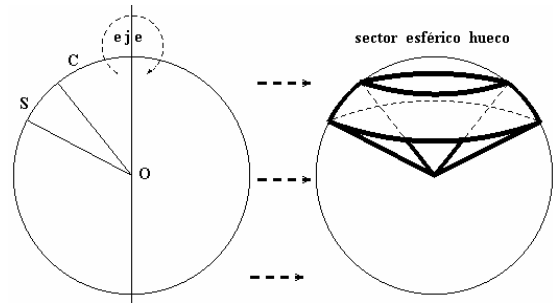
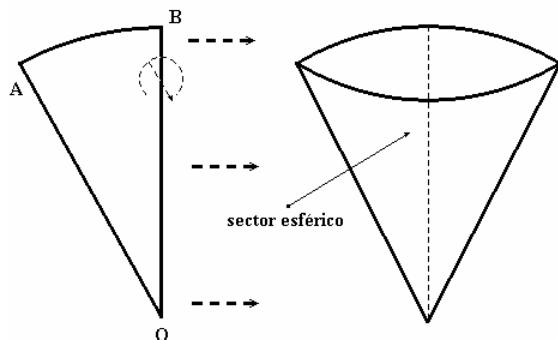


Hasta aquí las partes de la superficie esférica. Hasta aquí las partes de la superficie esférica.

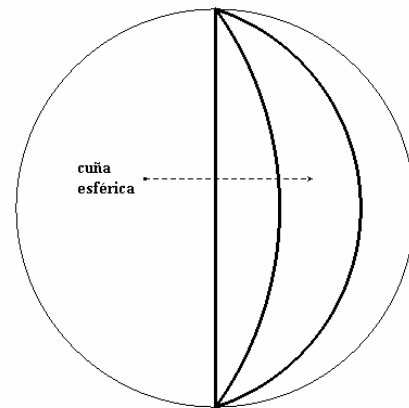
- **Segmento esférico.** De una base, que son cada una de las dos partes en que queda dividida la esfera al ser cortada por un solo plano. De dos bases, que es la parte de esfera comprendida entre dos secciones paralelas.



- **Sector esférico.** Parte de la esfera que se engendra por un sector circular cuando el semicírculo genera la esfera. Puede ser de una o dos bases.



- **Cuña esférica.** La parte de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos y el huso correspondiente a ellos.

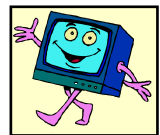


Hasta aquí las partes de la esfera. Hasta aquí las partes de la esfera. Hasta aquí las partes de la esfera.

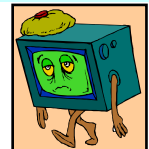


¿ Qué postura tomas tú entre estas dos ?

- a) Los programas de televisión que nos ponen son los que la gente quiere ver. Así que no hay que culpar a las distintas cadenas de TV por lo que ponen. Si ponen programas basura, morbosos, insípidos o violentos es porque gustan mucho al público y tienen mucha audiencia; si no fuera así, no los pondrían.



- b) Las diversas cadenas de TV eligen los programas que ellas quieren que vea el gran público. Seguramente, si pusieran programas más instructivos, más educativos, más cultos, de más debate, más ilustrativos o con más valores en sus argumentos, las audiencias de los llamados programas basura disminuiría muy notablemente. Y a medio plazo, y con toda seguridad que a largo plazo, nos sorprenderíamos de la gran cantidad de seguidores que tendrían esos nuevos programas más formativos.



12.14.- La Tierra, nuestro planeta, una esfera achatada por los Polos.



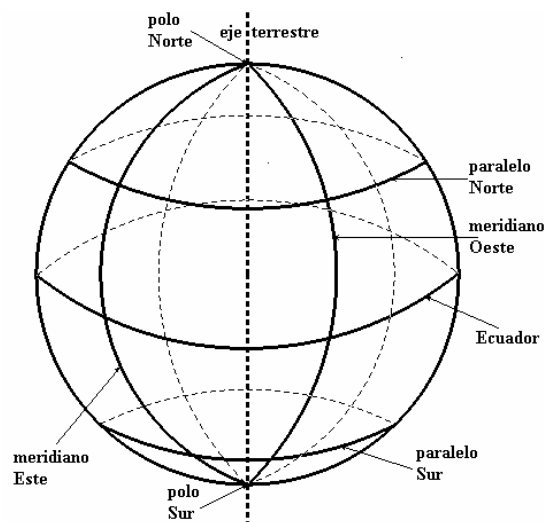
El planeta Tierra tiene forma de esfera, aunque ésta tiene los polos algo achatados, o sea, no es una esfera geoméricamente perfecta. En ellas podemos encontrar las partes estudiadas en esta pregunta.

Ya sabemos que la Tierra tiene dos movimientos: uno de traslación, alrededor del Sol, y otro de rotación sobre un eje imaginario que pasa por los polos. En dar una vuelta alrededor del Sol tarda un año. Y en dar una vuelta sobre sí misma un día.

Todas las circunferencias que pasan por los polos se llaman **MERIDIANOS** (ver fig.), y lógicamente son circunferencias máximas. En la Tierra hay un meridiano que se toma siempre como referencia, es el meridiano cero (0°), que pasa por la ciudad inglesa de Greenwich, que está cerca de Londres. Cuando están al Este del meridiano 0, se señalan los grados ($^\circ$) correspondientes y una “E”, y con el n° y “O” si se refiere al Oeste de Greenwich.

A la circunferencia máxima que es perpendicular al eje de rotación le llamamos **ECUADOR** (ver fig.). Esta línea imaginaria divide a la Tierra en dos partes que llamamos **HEMISFERIO NORTE** y **HEMISFERIO SUR**. (Ver figura en página 243)

Las circunferencias menores que son paralelas al Ecuador se llaman **PARALELOS** (ver fig.). Los paralelos del hemisferio Norte se señalan con el n° de grados y una “N”, y los que están en el hemisferio Sur, con n° y una “S”.



EJERCICIO EXTRA:

Conviene saber que la esfera terrestre, en su movimiento de traslación, es decir, al girar alrededor del Sol, no describe exactamente una circunferencia, sino una elipse (curva cerrada plana que se obtiene cuando un plano corta oblicuamente a una superficie de revolución cilíndrica o cónica). Al plano que describe esta órbita de la Tierra en su traslación se le denomina eclíptica, y el imaginario eje terrestre no es, como se puede pensar, perpendicular a dicho plano, sino que está algo inclinado. Bien, pues allá va la pregunta extra que te dará alguna “cosechilla” para tus notas: ¿Cuál es exactamente la inclinación del imaginario eje terrestre sobre el plano de la eclíptica?



A vosotros los adolescentes no os resultará nada sencillo admitir vuestros defectos de manera sana, ni siquiera aprender a valorar vuestras virtudes, y mucho menos saber reiros de vosotros mismos; eso es difícil pero hay que intentarlo; tu autoestima y tu sentido del humor se irán fortaleciendo. **Cuando poco a poco te aceptes a ti mismo tal como eres y a los demás como son, te sentirás más seguro, aprenderás a ver la vida con más flexibilidad y a observar los acontecimientos desde una cierta distancia que te permitirá apreciarlos con más sentido del humor; todo eso te hará más maduro y te ayudará a adquirir una mejor salud física y mental.**



El sentido del humor se debe apreciar, cuidar y cultivar, siempre teniendo muy en cuenta que no hay que confundirlo con lo gracioso o cómico. El tenerlo lleva consigo una energía y un coraje que hace enfrentarse a situaciones hostiles de la vida de una forma más positiva y saludable.

En la primera ocasión en que seamos capaces de reírnos de forma sana y provechosa de nosotros mismos, y hacerlo ante los demás, estaremos dando, quizás, el primer paso para vivir impregnando nuestra vida con sentido del humor.

¿Te has reído de ti mismo alguna vez ?
¿Y delante de los demás ?



Al igual que en las coordenadas cartesianas situamos cualquier punto sabiendo sus valores, en la superficie de la esfera terrestre podemos localizar cualquier punto si conocemos sus **COORDENADAS GEOGRÁFICAS** (ver fig.) : su latitud y longitud.

La **LATITUD GEOGRÁFICA** de un punto, que se mide en grados, es la medida angular desde el paralelo en que se encuentra ese punto al Ecuador. Si está en el hemisferio Norte se dice latitud Norte, y si es en el Sur, pues latitud Sur. Y varía entre 0° y 90° . Lógicamente, todos los puntos situados en el mismo paralelo tienen la misma latitud de coordenada geográfica.

La **LONGITUD GEOGRÁFICA** de un punto, también medida angular, es la medida en grados del arco que va desde ese punto al meridiano de Greenwich, tomando la referencia en el meridiano donde se encuentre. Si el punto está al Este del meridiano 0° (Greenwich), se dice longitud Este, que va desde 0° a 180° . Si está situado al Oeste del meridiano Greenwich, se dirá longitud Oeste, que también va de 0° a 180° . Lógicamente, todos los puntos situados en el mismo meridiano tienen la misma longitud de coordenada geográfica.

Así, cualquier punto de la superficie terrestre se sitúa con sus dos coordenadas geográficas. O sea, igual que en las coordenadas cartesianas podemos saber la situación de un punto conociendo su abscisa y su ordenada, o viceversa, pues conociendo la latitud y la longitud de cualquier lugar de la Tierra podemos saber dónde se encuentra. Por ejemplo:

Lugar	Coordenadas geográficas	
	Latitud	Longitud
Badajoz	$38^\circ 53' (N)$	$6^\circ 58' (O)$
Sevilla	$37^\circ 23' (N)$	$5^\circ 59' (O)$
Tanzania	$6^\circ 00' (S)$	$35^\circ 00' (E)$
Buenos Aires	$34^\circ 36' (S)$	$58^\circ 22' (O)$
México	$19^\circ (N)$	$80^\circ (O)$

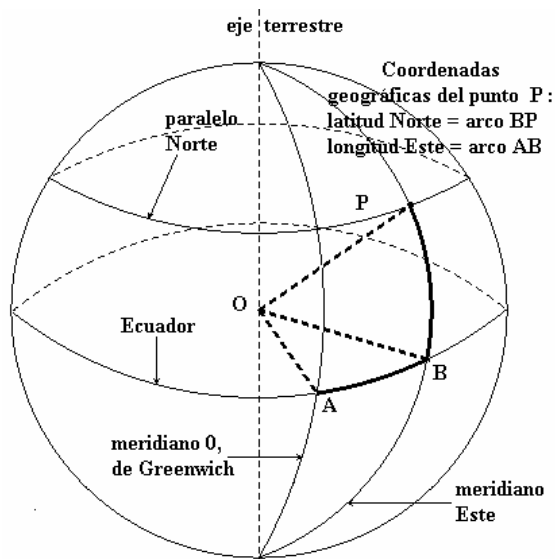
Resumiendo:

Latitud

Es la distancia angular que hay del ecuador a cualquier punto de la superficie terrestre. Sea norte o sur, su escala es de 0 a 90 grados.

Longitud

Es la distancia angular que hay desde el meridiano de Greenwich o de origen, hasta cualquier otro meridiano. Se mide de este a oeste y su escala es de 0 a 180 grados.



Juzgar, entre otras acepciones, tiene las siguientes: deliberar acerca de la culpabilidad de alguno, o de la razón que le asiste en un asunto, y sentenciar lo procedente, o formar juicio u opinión sobre algo o alguien, o afirmar, previa la comparación de dos o más ideas, las relaciones que existen entre ellas. O sea, decidir a favor o en contra, creer o estar convencido de algo, afirmar o negar algo. En resumen, formar un juicio lógico.

La capacidad de juicio la tenemos todos los seres humanos, pero no todos la usamos de forma correcta. Por eso, a las personas que juzgan de forma adecuada se les dice que obran con sentido común, porque ese sentido es "común" a todos, y actúan de forma sensata y madura, o sea, con buen sentido.



Desgraciadamente, todos sabemos, o debemos saber, que en la sociedad de hoy día el proceder con sentido común no predomina todo lo que sería deseable, por ello se suele decir, aunque sea redundante y paradójico, que el sentido común es el menos común de los sentidos.

Todos nos sentimos seguros, confortables y confiados ante personas que brillan por su buen sentido común, porque esperamos encontrar siempre en ellos las respuestas y actuaciones que a nosotros nos faltan.



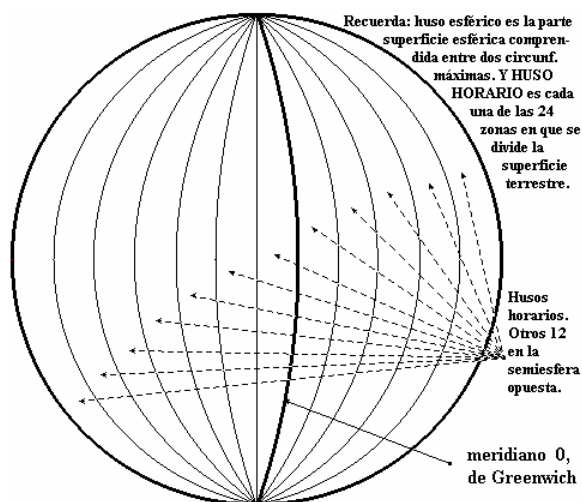
LOS HUSOS HORARIOS

Ya hemos dicho anteriormente que la Tierra tiene dos movimientos: uno de traslación, alrededor del Sol (dura, $\approx$, un año cada vuelta) y otro de rotación, sobre sí misma (dura, $\approx$, un día cada vuelta). El movimiento de rotación se realiza de Oeste a Este durante 24 horas cada vuelta.

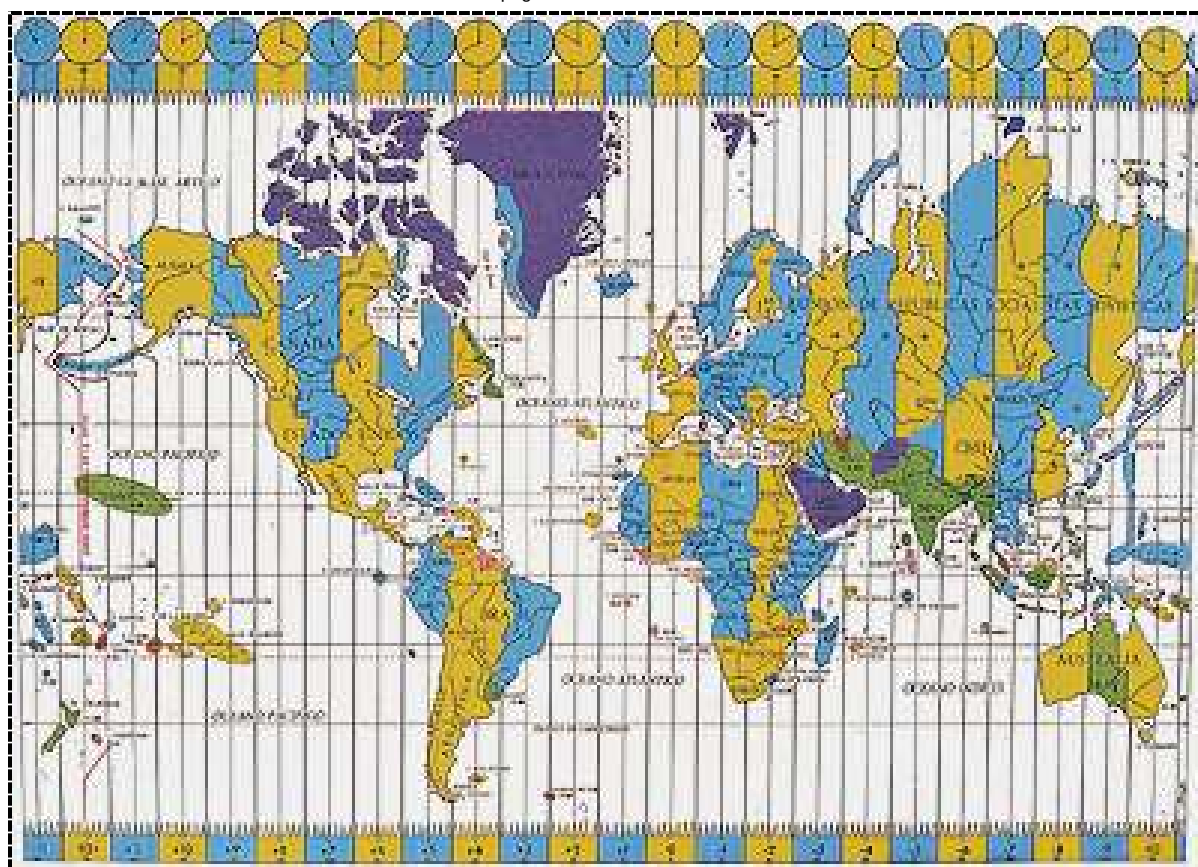
Bien, pues los husos horarios son husos esféricos en los cuales se divide la esfera terrestre. En total son 24 partes imaginarias que se trazan en la superficie de la Tierra y sirven para determinar la hora a escala internacional. Cada uno de ellos marca una hora diferente de acuerdo con la posición del Sol. Se toma como meridiano origen el de Greenwich. Como son 24 husos, cada uno de ellos tiene una longitud geográfica de 15° ($360^\circ : 24 = 15^\circ$), y cada 15° representa una hora más o menos, según sea al Este o al Oeste del meridiano 0.

Así, cada lugar de la Tierra tiene una hora según el huso horario donde se encuentre.

Por ejemplo, si en España son las 4 de la tarde, en un país situado un huso horario al este serán las 5, y en otro situado un huso horario al Oeste serán las 3 de la tarde. En los países que tienen grandes territorios, su extensión es ocupada por varios husos horarios, con lo que existen varias horas en el mismo país, según el huso horario donde se encuentre.



Cortesía de la página web: www.solucionesescolares.cl



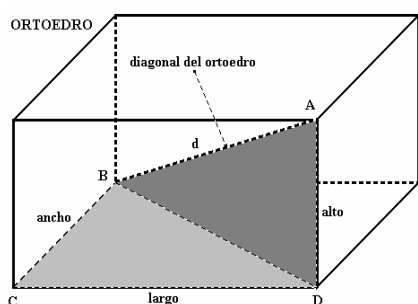
Ficticio desarrollo plano de la Tierra dividida en sus 24 husos horarios.

12.15.-Los teoremas de Pitágoras y de Thales en el espacio.

Es muy frecuente tener que aplicar el teorema de Thales y, sobre todo, el teorema de Pitágoras en ejercicios y problemas de cuerpos geométricos. Veamos algunos casos:

❑ Para calcular la diagonal en cubos u ortoedros.

Observa cómo se calcula la medida de una diagonal aplicando el teorema de Pitágoras.



- ⊗ Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo BCD de la base del ortoedro:

$$\text{Triángulo BCD} \begin{cases} \text{hipotenusa} \rightarrow BD \\ \text{catetos} \rightarrow BC, CD \\ BD^2 = CD^2 + BC^2 \end{cases}$$

- ⊗ Y ahora aplicamos Pitágoras en el triángulo ABD que contiene a la diagonal del ortoedro:

$$\text{ABD} \begin{cases} \text{hipotenusa} \rightarrow AB \rightarrow \text{diagonal} \rightarrow d \\ \text{catetos} \rightarrow BD, AD \\ AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} \end{cases}$$

- ⊗ Sustituimos BD^2 por $CD^2 + BC^2$:

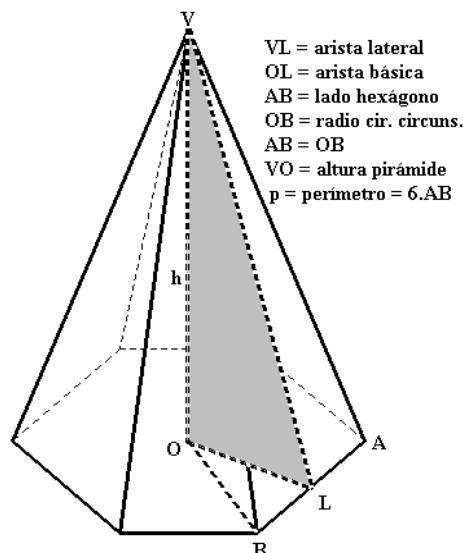
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{CD^2 + BC^2 + AD^2} \\ d &= \sqrt{CD^2 + BC^2 + AD^2} \\ d &= \sqrt{\text{largo}^2 + \text{ancho}^2 + \text{alto}^2} \end{aligned}$$

Igual que en el ortoedro, se haría con el cubo. Y como en el hexaedro o cubo las dimensiones (aristas) son iguales (largo = ancho = alto), la aplicación del t. Pitágoras para calcular la diagonal del cubo quedaría así:

$$\begin{aligned} d_{\text{cubo}} &= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \\ &\rightarrow \text{siendo "a" la arista del cubo.} \end{aligned}$$

❑ Para calcular la altura, la apotema lateral o la apotema básica en las pirámides.

Observa cómo se calcula la altura, o la apotema lateral, o la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras.



- ⊗ Con la altura de la pirámide, la apotema lateral y la apotema de la base se forma un triángulo imaginario, VOL, que es rectángulo en O. Aplicando Pitágoras:

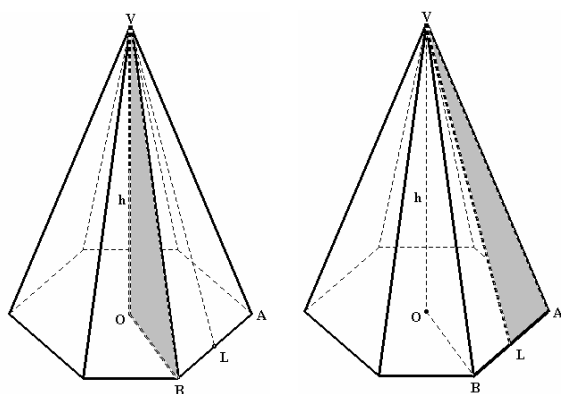
$$\text{Triángulo VOL} \begin{cases} \text{hipotenusa} \rightarrow VL \rightarrow \text{apotema lateral} \rightarrow a_l \\ \text{catetos} \rightarrow \begin{cases} \text{altura} \rightarrow VO \rightarrow h \\ \text{apotema básica} \rightarrow OL \rightarrow a_b \end{cases} \end{cases}$$

Las fórmulas para calcular la altura o las apotemas son las siguientes:

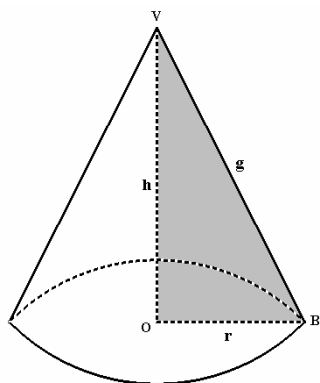
$$\begin{aligned} a_{\text{lateral}} &= \sqrt{h^2 + (a_b)^2} \\ h &= \sqrt{(a_l)^2 - (a_b)^2} \\ a_{\text{básica}} &= \sqrt{(a_l)^2 - h^2} \end{aligned}$$

De igual forma, se puede aplicar el teorema de Pitágoras en los siguientes casos:

- En el triángulo rectángulo imaginario que se forma con la altura, una arista lateral y el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono de la base. (Figura siguiente de la izquierda)
- O en el formado por la apotema lateral, una arista lateral y la mitad de un lado de la base. (Figura siguiente de la derecha)



❑ Para calcular la altura, generatriz o radio en los conos.



⊗ Con la altura del cono, la generatriz y el radio de la base se forma un triángulo imaginario, VOB, que es rectángulo en O. Aplicando el teorema Pitágoras :

$$\text{Triángulo VOB} \begin{cases} \text{hipotenusa} \rightarrow VB \rightarrow \text{generatriz} \rightarrow g \\ \text{catetos} \rightarrow \begin{cases} \text{altura} \rightarrow VO \rightarrow h \\ \text{radio} \rightarrow OB \rightarrow r \end{cases} \end{cases}$$

Las fórmulas para calcular la generatriz, la altura o el radio son las siguientes:

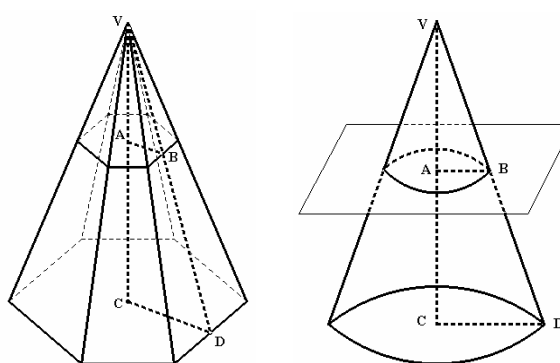
$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$r = \sqrt{g^2 - h^2}$$

❑ Para calcular algunos segmentos en troncos de pirámide o de cono.

Tanto en los troncos de pirámides como en los de conos, se puede formar siempre entre ellos y la pirámide o cono inicial de donde proceden una figura imaginaria con triángulos en posición de Thales, y en ellos, lógicamente, se puede aplicar el teorema de Thales para calcular lados o segmentos diversos de esa figura.



⊗ Observa que tanto en la pirámide como en el cono de la figura hay dos triángulos en posición Thales, que son VCD y VAB.

Aplicando el teorema de Thales en ellos :

$$\frac{VD}{VB} = \frac{VC}{VA} = \frac{CD}{AB}$$

se pueden calcular unos u otros de sus lados, dependiendo de los datos conocidos; bastaría despejar los desconocidos en la serie de razones iguales anterior.

A poco que estemos un rato sentados ante el televisor, no tardaremos en oír en algún anuncio lo siguiente: "... consíguelo sin esfuerzo...". ¡Y eso es lo que faltaba a no pocos chicos y jóvenes de hoy!

Valoran tan poco, o casi nada, el esfuerzo que se sienten incapaces de superar las dificultades y contratiempos que la vida les va presentando. Y, desdichadamente, suelen responder a esas contrariedades con conductas más o menos violentas, de ahí que en más de una ocasión esa violencia llegue incluso a las aulas. Y esas actitudes, que en otras décadas eran rechazadas por una gran mayoría de alumnos, ahora, en la actualidad, tristemente, son jaleadas y seguidas por no pocos de los alumnos. Muchos de éstos no han pasado por su etapa adolescente de forma adecuada, y casi han saltado a otra en la que les falta mucho de todo.



Algunos consideran como valores los suspensos, la chulería, el ser agresivo, la violencia, etc., en lugar del sacar buenas notas y conseguir una buena formación. Muchos de éstos tienen sus modelos en las diversas cadenas de televisión, adolecen de ciertas habilidades sociales y viven muy frecuentemente en un entorno permisivo.

Aunque nos cueste aceptarlo, en muchas aulas existe una significativa pérdida de autoridad, que tanta gente "progre" confunde con autoritarismo. La disciplina en las aulas debe ser un valor esencial, siempre basada en la autoridad moral e intelectual del profesor y, por supuesto, no en la violencia y sí en la imitación.

12.16. - Cuadro resumen de fórmulas .

	Área Lateral	Área Total	Volumen
Hexaedro o Cubo		$6a^2$	a^3
Tetraedro		$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Octaedro		$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodecaedro		$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$
Icosaedro		$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{12}(3\sqrt{5})$
Prisma recto	$p \cdot h$	$A_L + 2 \cdot A_B$	$A_B \cdot h$
Pirámide recta	$\frac{p \cdot a_{pl}}{2}$	$A_L + A_B$	$\frac{A_B \cdot h}{3}$
Tronco de Pirámide (recto)	$\frac{(p_{bmayor} + p_{bmenor}) \cdot a_{pl}}{2}$	$A_L + A_{Bmayor} + A_{Bmenor}$	$\frac{h(A_{B>} + A_{B<} + \sqrt{A_{B>} \cdot A_{B<}})}{3}$
Cilindro recto	$2\pi r h = 2\pi r g$	$2\pi r h + 2 \cdot \pi r^2$	$\pi r^2 h$
Cono recto	$\pi r g$	$\pi r g + \pi r^2$	$\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$
Tronco de Cono (recto)	$(R + r) \pi g$	$A_L + \pi R^2 + \pi r^2$	$\frac{\pi h(R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$
Esfera		$4\pi R^2$	$\frac{4\pi R^3}{3}$
Zona Esférica		$2\pi R h$	
Casquete Esférico		$2\pi R h$	
Huso Esférico		$\frac{\pi R^2 n^\circ}{90^\circ}$	
Cuña Esférica			$\frac{\pi R^3 n^\circ}{270^\circ}$

12.17. - Actividades de repaso.



Cuando realices esta ficha en tu cuaderno, debes hacerlo en una página apaisada, intentando que todas las líneas de cada pregunta terminen con una raya a la misma altura, y desde el final de cada raya se traza una línea hasta el punto que está delante de cada una de las respuestas de los cuadros de la derecha.

Hazlo de 10 en 10, o sea, relacionando las 10 primeras con el primer recuadro de la derecha, las 10 segundas con el segundo recuadro y las otras con el último.

- 1.- Con dos puntos queda determinada una
- 2.- Para determinar un plano se necesitan
- 3.- Un plano divide al espacio en
- 4.- Un ángulo diedro se mide con su
- 5.- Los cuerpos geométricos cuyas caras son polígonos se llaman
- 6.- El poliedro regular de ocho caras triángulos equiláteros es el
- 7.- Los poliedros que no pueden apoyar todas sus caras en un plano son.....
- 8.- El nº de caras más vértices de los polígonos convexos es igual al nº de
- 9.- Los cuerpos que se forman al girar una figura alrededor de un eje son los ..
- 10.- El poliedro regular de seis caras cuadradas se llama

- ángulo rectilíneo.
- poliedros.
- octaedro.
- recta.
- tres puntos.
- dos semiespacios.
- hexaedro o cubo.
- cuerpos de revolución.
- aristas + 2.
- cóncavos.

- 11.- Los cuerpos geométricos que tienen orificios se llaman
- 12.- Las caras laterales del prisma oblicuo son
- 13.- Para comprender mejor las fórmulas de las áreas en los poliedros y cuerpos de revolución es conveniente hacer su
- 14.- El producto de sus tres dimensiones es el volumen de un
- 15.- Segmento que va del vértice al centro de un lado de la base
- 16.- Al girar un rectángulo sobre uno de sus lados se genera un
- 17.- Fórmula para calcular la superficie esférica
- 18.- El Ecuador divide a la esfera terrestre en
- 19.- Las coordenadas geográficas son
- 20.- Cada hora pertenece en la esfera terrestre a la superficie de

- apotema lateral.
- cilindro.
- desarrollo plano.
- ortoedro.
- poliedros no simples.
- romboides.
- un huso esférico.
- dos hemisferios.
- latitud y longitud.
- $4 \pi r^2$.

- 21.- Los gajos de una naranja tienen forma de
- 22.- Las rectas que no se cortan y están en distintos planos son rectas
- 23.- El polígono regular que tiene doce caras pentagonales regulares es el
- 24.- En algunas pirámides hay dos apotemas: la apotema lateral y la.....
- 25.- Los troncos de pirámides y de conos tienen
- 26.- El desarrollo del área lateral de un cono es un
- 27.- A las circunferencias menores paralelas al Ecuador se les llama
- 28.- La amplitud del arco que va desde un lugar al Ecuador es
- 29.- En un ortoedro, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus dimensiones es igual a su
- 30.- Sirve para calcular el área total en un prisma y en un cilindro

- diagonal.
- A_{base} por altura.
- apotema básica.
- dodecaedro.
- dos bases.
- sector circular.
- la latitud.
- paralelos.
- cuña esférica.
- que se cruzan.

12.18. - Ejercicios y problemas resueltos.

SOLUCIONES en las págs. 1005 a 1009.

1.- ¿Cuántos planos pueden cortarse en una misma línea recta?

2.- ¿Qué mesa tiene más posibilidades de cojear: una mesa de cuatro patas o una de tres patas? ¿Por qué?

3.- ¿Cuántos puntos hay en una línea recta? ¿Y en un plano?

4.- Si dos rectas están en un mismo plano y no se cortan, ¿cómo son? ¿Y si están en distintos planos?

5.- Dibuja un plano y una recta ("a") que sea perpendicular a él. Dibuja también, en el plano, una recta perpendicular ("b") a la recta "a". ¿Es posible dibujar en el plano una paralela a la recta "a"?

6.- ¿Cómo se halla la distancia desde un plano a un punto no situado en él?

7.- Comprueba el teorema de Euler en el octaedro.

8.- ¿Es posible dibujar un prisma regular cuya base sea un trapecio? ¿Y una pirámide regular? Explica por qué sí o por qué no.

9.- ¿Cómo se llaman los prismas que tienen de base cuadriláteros de lados paralelos dos a dos?

10.- Señala cuál es la equivalencia básica que nos permite relacionar las unidades de masa, capacidad y volumen.

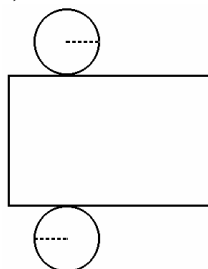
11.- ¿Qué diferencia hay entre la altura y la generatriz de un cilindro recto? ¿Y entre la altura y generatriz de un cono recto?

12.- En un desarrollo plano de la superficie lateral de un cuerpo geométrico nos sale un rectángulo. ¿De qué cuerpo geométrico se puede tratar?

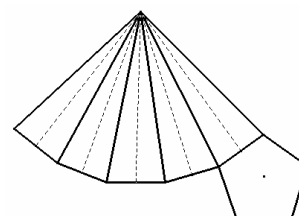
13.- Describe qué cuerpo geométrico se genera al girar un trapecio isósceles alrededor de su base mayor. Dibújalo.

14.- ¿A qué cuerpos geométricos corresponden los siguientes desarrollos planos?

a)

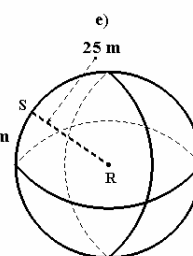
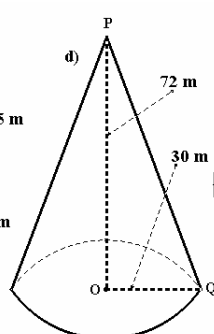
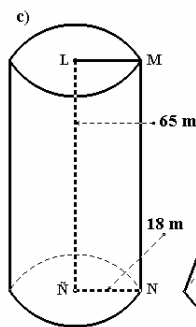
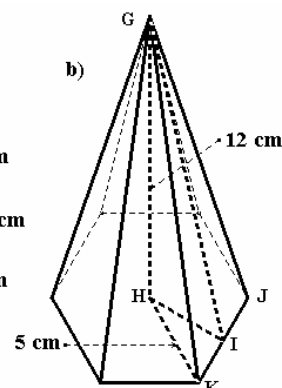
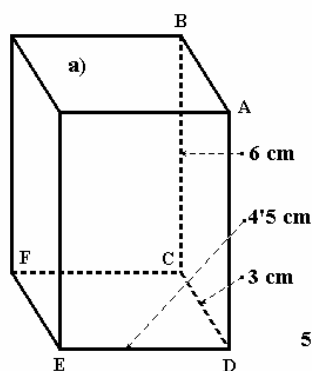


b)



15.- Sergio quiere hacer una pirámide con un ángulo poliedro de cinco caras en su vértice cuyos ángulos diedros midan 80° , 59° , 47° , 90° y 83° . ¿Podrá conseguirlo? (NOTA: no vale decir simplemente sí o no; hay que razonarlo)

16.- Ejercicio básico para el repaso de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos elementales. Debes calcular el área lateral, área total y el volumen de cada uno de los siguientes cuerpos:



17.- Para medir el volumen de:

- Una taza de café.
- Un armario de tu habitación.
- Un dedal para la costura.
- Un pantano.
- Una casa.

¿Qué unidades usarías como las más adecuadas?

18.- Un gran cucurucho cónico de galleta, de los que sirven para echar los helados, tiene 13 cm de generatriz y 10 cm de diámetro. ¿Cuántos cm^3 de helado de vainilla caben en él rasurando por la base?

19.- Calcula el área lateral (cm^2), área total (cm^2) y el volumen (cm^3) de un prisma pentagonal regular de 0'09 m de altura, y cuya base tiene de lado 0'5 dm y $34\frac{1}{4}$ mm de apotema

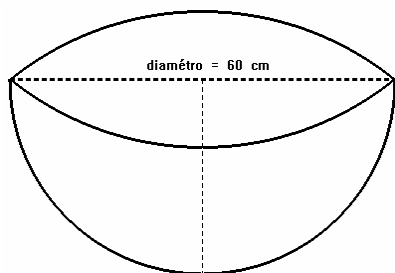
20.- La diagonal de un depósito de agua que tiene forma de hexaedro mide $2000\sqrt{3}$ mm. ¿Cuántos litros de agua tiene de capacidad?

21.- Se necesitan 942 hectolitros de agua para llenar exactamente una piscina de forma cilíndrica cuya longitud de la base mide 314 dm. ¿Cuántos metros tiene de profunda?

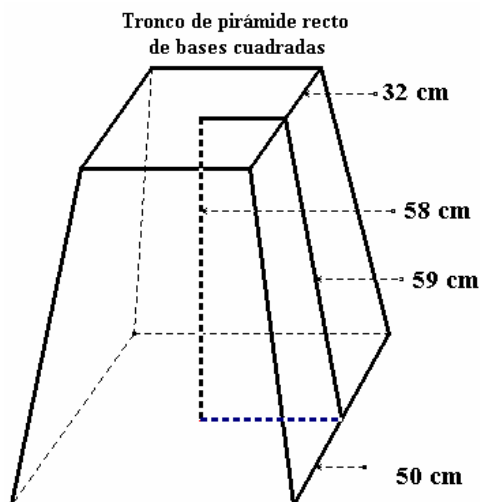
22.- ¿Cuánto mide la arista de un depósito cúbico cuyo volumen es $42'875 \text{ m}^3$? ¿Cuántos litros caben en él?

23.- El volumen de un cono recto es $12\pi \text{ m}^3$. Si su altura mide 40 dm, ¿cuál es su área lateral (m^2)?

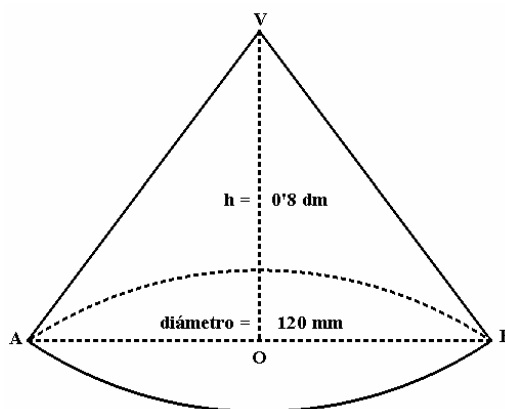
24.- Se va a preparar un refresco compuesto de varias mezclas para celebrar una fiesta. Al terminar, el encargado de hacerlo llenó justamente un recipiente hueco de forma semiesférica como el de la figura. ¿Cuánto costó la preparación si cada litro salió a una media de 1'50 €?



25.- Halla el área lateral (cm^2), área total (cm^2) y volumen (cm^3) del tronco de pirámide de la figura.



26.- ¿Cuántos grados tiene el sector circular que constituye el desarrollo plano del área lateral del cono de la figura?



27.- Calcula el radio de una esfera cuya superficie esférica es de $36\pi \text{ cm}^2$.

28.- ¿Por qué número debes multiplicar la superficie total de un cubo si se duplica la medida de su arista? ¿Y el volumen?

29.- Averigua cuántos kg pesa una columna cilíndrica maciza de hierro de 5 metros de altura y 50 cm de radio básico.
(Nota: densidad del hierro = $7'6 \text{ g/cm}^3$)

30.- ¿Cuáles son las antípodas de nuestro país? Señala algunos datos de ellas.

SOLUCIONES DE LOS 30 EJERCICIOS ANTERIORES

SOLUCIONES de las págs. 1003 y 1004.

1.- En una misma línea recta pueden cortarse infinitos planos.

2.- Una mesa de cuatro patas, si está bien construida, no cojeará, ya que los cuatro puntos donde se apoya estarán en un mismo plano. Y una mesa de tres patas nunca cojeará, porque los tres puntos donde se apoya definen a un plano (suelo); sin embargo, puede que la parte de arriba, lo que propiamente es la mesa, no esté bien construida en la horizontal y resbalen o caigan las cosas sobre ella.

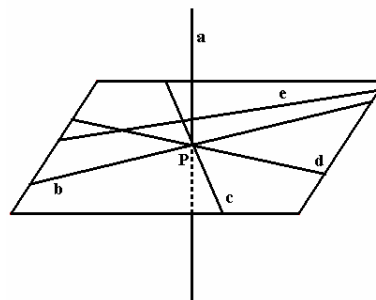
3.- Tanto en una línea recta como en un plano hay infinitos puntos.

4.- Dos rectas que están en un mismo plano y no se cortan, necesariamente son paralelas. Si están en distintos planos, pueden darse dos casos:

- a) Que sean también paralelas, aunque en distintos planos.
- b) Que se crucen.

5.- En la figura siguiente, la recta "a" es perpendicular al plano representado. La recta "b", situada en el plano, es perpendicular a la recta "a", al igual que todas las rectas del plano que pasen por el punto "P", como las rectas "c" y "d". Sin embargo, no es posible dibujar una recta en el plano que sea paralela a la recta "a". Así, la recta "e" y todas las

que no pasen por "P" serán rectas que se cruzan con "a", pero nunca paralelas.



6.- Trazando la perpendicular desde ese punto al plano. La distancia será el segmento que une el punto dado con el punto de corte en el plano.

7.- El octaedro tiene 8 caras, 6 vértices y 12 aristas.

Teorema de Euler :

$$\begin{array}{rclclcl} \text{caras} + \text{vértices} & = & \text{aristas} & + & 2 \\ 8 & + & 6 & = & 12 & + & 2 \\ 8 & + & 6 & = & 12 & + & 2 \\ 14 & = & 14 & & & & \end{array}$$

8.- Pues no, porque si es regular no puede tener de base un trapecio, ya que sus caras laterales no serían iguales. Sólo será regular cuando la base del prisma sea un polígono regular.

9.- Se llaman paralelepípedos.

10.- La **equivalencia fundamental** es: **1 litro $\Rightarrow$ 1 dm³ $\Rightarrow$ 1 kg**

Para completar más esta equivalencia, adjuntamos la siguiente tabla que te ayudará mucho para ciertos ejercicios y problemas donde es necesario relacionar las magnitudes de capacidad, volumen y masa.

Unidades de CAPACIDAD	Unidades de VOLUMEN	Unidades de MASA
1 mal	10 m ³	10 tm
1 kl $\rightarrow$ (1.000 l)	1 m ³ $\rightarrow$ (1.000 dm ³)	1 tm $\rightarrow$ (1.000 kg)
1 hl $\rightarrow$ (100 l)	100 dm ³	1 qm $\rightarrow$ (100 kg)
1 dal $\rightarrow$ (10 l)	10 dm ³	1 mag $\rightarrow$ (10 kg)
1 l (litro)	1 dm ³ $\rightarrow$ (decímetro cúbico)	1 kg (kilogramo)
1 dl	100 cm ³	1 hg
1 cl	10 cm ³	1 dag
1 ml (mililitro)	1 cm ³ $\rightarrow$ (1.000 mm ³)	1 g (gramo)

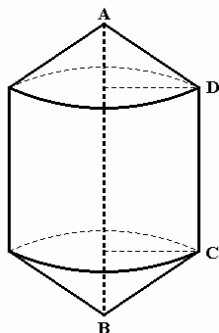
¡ O J O ! Hay que tener en cuenta que la relación de **equivalencia** de la siguiente tabla **entre** las unidades de **CAPACIDAD y VOLUMEN** es **válida para todos los líquidos**, pero la relación existente **entre** las unidades de **VOLUMEN Y MASA sólo** es válida **para el agua destilada** o agua pura. (En los demás líquidos, si queremos saber su masa, será necesario saber también su densidad)

Corregir es enmendar errores cometidos. Aprovecha estas fichas todo lo que puedas. Y, no lo dudes, mejorarás.

11.- En un cilindro recto, la generatriz y la altura tienen la misma longitud, o sea, coinciden. En un cono recto, la generatriz es la hipotenusa del triángulo rectángulo que lo genera y la altura es el cateto alrededor del que gira el triángulo; lógicamente, nunca son iguales.

12.- Puede ser de un prisma o de un cilindro recto.

13.- Se genera un cuerpo geométrico compuesto por un cilindro de cuyas bases salen dos conos rectos. Al girar el trapecio isósceles ABCD sobre el lado AB se genera este cuerpo:



La música hace más difícil caer en vicios, en degradaciones, en ansiedades, en cobardías, en desalientos, en angustias, en maldades, en inmundicias y en tantas bajas pasiones que a veces nos acechan.

La música tiene como recorrido nuestro ser más íntimo y se va trasladando por momentos a lugares recónditos de nosotros mismos, produciendo armonía y consiguiendo actitudes y sentimientos que nos "elevan" el espíritu mediante esas vibraciones sonoras. En ocasiones nos acerca lo invisible, otras nos ensancha el corazón, otras nos destruye las fronteras, otras quema el dinero y otras nos hace incolora la piel.



Con ella, con la música, nos adentramos con más facilidad en la naturaleza, nos acercamos más a las estrellas y viajamos de forma reposada y seductora por el universo. Ella dibuja, esculpe y edifica el silencio, rellena los vacíos, hace brotar los sentimientos, da palabras a las miradas y calma las tempestades.



Sin música en tu vida es posible vivir, pero sin música no es posible **VIVIR**.

¿La música que rodea tu vida produce en ti sensaciones como las que aquí se describen?



14.- A un cilindro recto el desarrollo a) y a una pirámide pentagonal regular recta el desarrollo b).

15.- Un ángulo poliedro debe tener menos de 360° , por tanto, como los ángulos diedros que forman ese poliedro suman 359° ($80^\circ + 59^\circ + 47^\circ + 90^\circ + 83^\circ$), sí sería posible formar un ángulo poliedro.

16.- Cinco ejercicios básicos y completos para el repaso de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos elementales. Debes calcular el área lateral, área total y el volumen de cada uno de los cuerpos.

a) PRISMA CUADRANGULAR.

$$A_L = p_{\text{base}} \cdot h = 4 \cdot 4'5 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 108 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 108 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 4'5^2 \text{ cm}^2 = 108 + 40'5 = 148'5 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot h = 4'5^2 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} = 121'5 \text{ cm}^3$$

b) PIRÁMIDE HEXAGONAL REGULAR.

⊗ Ajustes previos:

1) En los hexágonos regulares, el radio de la circunferencia circunscrita a la base es igual al lado. Luego: lado = JK = radio = 5 cm.

2) En el triángulo HIK, que es rectángulo en $\hat{I}$ (90°), se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema básica:

$$a_{\text{básica}} = HI = \sqrt{HK^2 - IK^2} = \sqrt{5^2 - 2'5^2} = \sqrt{18'75} = 4'33... \text{ cm}$$

3) Y en el triángulo GHI, rectángulo en $\hat{H}$ (90°), volvemos a aplicar Pitágoras para calcular la apotema lateral, la de la pirámide:

$$a_{\text{lateral}} = GI = \sqrt{GH^2 + HI^2} = \sqrt{12^2 + 4'33^2} = \sqrt{162'75} = 12'75... \text{ cm}$$

$$A_L = \frac{p_{\text{base}} \cdot a_{\text{lateral}}}{2} = \frac{6 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 12'75 \text{ cm}}{2} = 191'25 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 191'25 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4'33}{2} = 191'25 + 64'95 = 256'2 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{64'95 \cdot 12}{3} = 259'6 \text{ cm}^3$$

c) CILINDRO RECTO.

$$A_L = 2 \pi r h = 2 \cdot 3'14 \cdot 18 \cdot 65 = 7347'6 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 7347'6 + 2 \cdot 3'14 \cdot 18^2 = 7347'6 + 2034'72 = 9382'32 \text{ m}^2$$

$$V = \pi r^2 h = 3'14 \cdot 18^2 \cdot 65 = 66128'4 \text{ m}^3$$

Corregir es enmendar errores cometidos. Aprovecha estas fichas todo lo que puedas. Y, no lo dudes, mejorarás.

d) CONO RECTO. ☒ Ajuste previo :

En el triángulo rectángulo POQ ($O = 90^\circ$), aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la generatriz del cono (PQ), que es la hipotenusa.

$$g = PQ = \sqrt{PO^2 + OQ^2} = \sqrt{72^2 + 30^2} = \sqrt{6084} = 78 \text{ m}$$

$$A_L = \pi r g = 3'14 \cdot 30 \cdot 78 = 7347'6 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 7347'6 + \pi r^2 = 7347'6 + 3'14 \cdot 30^2 = 10173'6 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3'14 \cdot 30^2 \cdot 72}{3} = 67824 \text{ m}^3$$

e) ESFERA.

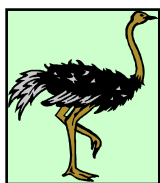
$$A_{\text{superficie esférica}} = 4 \pi r^2 = 4 \cdot 3'14 \cdot 25^2 = 7850 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{4 \pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3'14 \cdot 25^3}{3} = 65416'66 \text{ m}^3$$



Hay personas que tienen poca fortaleza para enfrentarse a los problemas que la vida les va planteando, y ante esa incapacidad deciden ignorarlos, con lo que evidentemente se acrecientan. Hay una expresión muy popular que describe bastante bien esa postura: “echarse la manta a la cabeza”, es decir, hacer como si las dificultades no existieran porque ya no se ven. Lógicamente, lo más normal es que así no solucionen nada, sino más bien todo lo contrario.

Pues el “efecto avestruz” significa más o menos lo mismo. Es sabido que el avestruz esconde su cabeza bajo la arena para no ver el peligro, aunque actualmente se piensa que esto no es exacto, porque lo que hace es tenderse en el suelo cuan largo es, escondiendo en él su pequeña cabeza, en un intento de pasar desapercibido a la vista de sus enemigos.



En realidad, esconda su cabeza bajo la arena o bajo su cuerpo, la actitud del avestruz es crear que el peligro no existe si no lo ve.

Bien, pues todo esto viene a cuento de que hay muchas personas, tanto jóvenes como mayores, que practican demasiado frecuentemente la táctica del avestruz, y en lugar de asumir y afrontar las responsabilidades en los contratiempos y problemas que la vida inevitablemente les va a ir planteando, prefieren echarle tierra (arena) a sus dificultades, ignorándolas, pensando que con esa actitud las evitan. Y, sin lugar a ninguna duda, se confunden completamente, pues con toda seguridad en lugar de soluciones tropiezan con más contrariedades.

¿Sueles practicar habitualmente en tu vida el efecto avestruz, o presentas lucha, esfuerzo, valentía y tesón para resolver los avatares de tu vida?



17.- Las unidades serían las siguientes:

- Una taza de café con cm^3 .
- Un armario de tu habitación con dm^3 .
- Un dedal para la costura con mm^3 .
- Un pantano con hm^3 .
- Una casa con m^3 ó dam^3 .

18.- Problema del cucurucho de helado.

☒ Ajustes previos :

1) Radio = diámetro / 2 = 10 : 2 = 5 cm

2) Aplicamos Pitágoras en el triángulo que forman la generatriz, la altura y el radio.

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3'14 \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 314 \text{ cm}^3$$

Solución → Caben 314 cm^3 de helado.

19.- Ejercicio sobre cálculo del área lateral, área total y volumen de un prisma pentagonal regular.

☒ Ajustes previos :

$$\begin{cases} h = 0'09 \text{ m} \rightarrow 0'09 \cdot 100 = 9 \text{ cm} \\ \text{lado}_{\text{base}} = 0'5 \text{ dm} \rightarrow 0'5 \cdot 10 = 5 \text{ cm} \\ a_{\text{base}} = 34'4 \text{ mm} \rightarrow 34'4 : 10 = 3'44 \text{ cm} \end{cases}$$

$$A_L = p_{\text{base}} \cdot h = 5 \cdot 5 \cdot 9 = 225 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 108 + 2 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 3'44}{2} = 225 + 86 = 311 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot h = \frac{5 \cdot 5 \cdot 3'44}{2} \text{ cm}^2 \cdot 9 \text{ cm} = 387 \text{ cm}^3$$

20.- Problema sobre los litros de un depósito.

☒ Ajustes previos :

1) Como cada dm^3 de volumen tiene una capacidad de 1 litro, reducimos a dm :

$$d = 2000\sqrt{3} \rightarrow 2000\sqrt{3} : 100 = 20\sqrt{3} \text{ dm}$$

2) Calculamos la arista:

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$(20\sqrt{3})^2 = 3a^2$$

$$20^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 400 \cdot 3 = 3a^2$$

$$a = \sqrt{\frac{400 \cdot 3}{3}} = 20 \text{ dm}$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 = 20^3 = 8000 \text{ dm}^3$$

$$8000 \text{ dm}^3 \Rightarrow 8000 \text{ litros}$$

Solución : El depósito es de 8000 litros.

Corregir es enmendar errores cometidos. Aprovecha estas fichas todo lo que puedas. Y, no lo dudes, mejorarás.

21.- Problema sobre la piscina cilíndrica.

⊗ Ajustes previos :

$$1) 942 \text{ hl} \rightarrow 942 : 10 = 94'2 \text{ kl}$$

$$2) 94'2 \text{ kl} \Rightarrow 94'2 \text{ m}^3$$

$$3) 314 \text{ dm} \rightarrow 314 : 10 = 31'4 \text{ m}$$

$$4) \text{ La longitud de la base es } 2\pi r.$$

$$2\pi r = 31'4$$

$$r = \frac{31'4}{2\pi} = \frac{31'4}{2 \cdot 3'14} = 5 \text{ m}$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 94'2 = 3'14 \cdot 5^2 \cdot h$$

$$h = \frac{94'2}{3'14 \cdot 25} = 1'2 \text{ m}$$

Solución $\rightarrow$ La piscina tiene 1'2 metros de profundidad.

A lo largo de otras reflexiones anteriores sobre la Educación, creo que hemos quedado perfectamente claro que los cimientos y primeros pisos del edificio educativo los debe asentar de manera segura y firme la familia. Después, en la escuela, en el entorno, en los amigos, en el instituto, etc., se irá completando y puliendo.

Igual que los músculos de nuestro cuerpo si no se ejercitan no se desarrollan adecuadamente o se atrofian, nuestros hijos necesitan constantemente de ejercicios sobre todos aquellos valores que desde el hogar queramos inculcarles. Hay que recuperar la disciplina en casa, si no es así no podemos pretender que nuestros hijos la valoren. Hay que respetar a los profesores, si no nuestros hijos no les prestarán el debido respeto. Hay que enseñar a nuestros hijos a tolerar el aburrimiento y la ansiedad, si no esa incapacidad les llevará a veces por rutas no deseadas (tabaco, alcohol, drogas, etc.). Hay que acostumbrar a los chicos a que decidan por sí solos, sabiendo dilucidar entre las cosas a favor y en contra. Y hay que ponerse de acuerdo para no confundirlos, tanto entre padre y madre como entre los propios profesores.



No es muy frecuente, pero todavía quedan padres que sólo visitan un centro educativo para protestar por esto o aquello que le ha ocurrido a su hijo, cuando hace unos lustros lo habitual era que el padre y/o la madre se entrevistaran con los profesores para pedir que fueran más exigentes con su hijo. En fin, que los tiempos cambian, en este caso pienso sinceramente que no para bien. De cualquier modo, todos, padres y profesores, debemos tener y dar un mensaje de esperanza, porque la vida lo merece, y más la de nuestros hijos o alumnos, e inculcarles muy hondamente que el futuro se va labrando día a día, con esfuerzo, sacrificio e interés constante.

22.- Problema sobre la arista del hexaedro o cubo.

$$V_{\text{cubo}} = a^3 = 42'875$$

$$a = \sqrt[3]{42'875} = \sqrt[3]{42'875} =$$

$$= \sqrt[3]{(5^3 \cdot 7^3)} : 10^3 = (5 \cdot 7) : 10 = 3'5 \text{ m}$$

Solución: La arista mide 35 metros.

23.- Ejercicio sobre el área lateral del cono.

⊗ Ajustes previos :

$$1) \text{ Altura} = 40 \text{ dm} \rightarrow 40 : 10 = 4 \text{ m}$$

$$2) V_{\text{cono}} = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow 12\pi = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 4}{3} \Rightarrow$$

$$12\pi \cdot 3 = \pi r^2 \cdot 4$$

$$r = \sqrt{\frac{12\pi \cdot 3}{\pi \cdot 4}} = \sqrt{9} = 3 \text{ dm}$$

3) Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo formado por la altura, el radio y la generatriz.

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m}$$

$$4) A_L = \pi r g = 3'14 \cdot 3 \cdot 5 = 47'1 \text{ m}^2$$

24.- Problema sobre la semiesfera llena de refresco para una fiesta.

SEMIESFERA.

⊗ Ajustes previos :

$$d = 60 \text{ cm} \rightarrow 60 : 10 = 6 \text{ dm}$$

$$\text{radio} = 3 \text{ dm}$$

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{4\pi r^3}{3} : 2 = \frac{4 \cdot 3'14 \cdot 3^3}{6} =$$

$$= 56'52 \text{ dm}^3 \Rightarrow 56'52 \text{ litros}$$

⊗ Ajuste final :

$$56'52 \text{ l} \cdot 1'50 \text{ €} = 84'78 \text{ €}$$

Solución $\rightarrow$ El refresco costó 84'78 €.

27.- Sobre el radio de una esfera.

¡Ojo! Cambio el orden por necesidad de espacio para cuadrar páginas.

ESFERA.

$$A_{\text{superficie esférica}} = 4\pi r^2$$

$$36\pi = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{36 \cdot \pi}{4 \cdot \pi}} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

Solución $\rightarrow$ El radio la esfera mide 3 cm.

Corregir es enmendar errores cometidos. Aprovecha estas fichas todo lo que puedas. Y, no lo dudes, mejorarás.

25.- Sobre el área lateral, área total y volumen de un tronco de pirámide.

TRONCO DE PIRÁMIDE CUADRANGULAR.

⊗ Ajustes previos :

$$1) P_{\text{base mayor}} = 4 \cdot 50 = 200 \text{ cm}$$

$$2) P_{\text{base menor}} = 4 \cdot 32 = 128 \text{ cm}$$

$$3) A_{\text{base mayor}} = B = \ell_1^2 = 50^2 = 2500 \text{ cm}^2$$

$$4) A_{\text{base menor}} = b = \ell_2^2 = 32^2 = 1024 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \frac{(P_{b>} + P_{b<}) \cdot a_{\text{lateral}}}{2} = \frac{(200 + 128) \cdot 59}{2} = 9676 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + B + b = 9676 + 2500 + 1024 = 13200 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{Tronco de p.}} = \frac{h \cdot (B + b + \sqrt{B \cdot b})}{3} = \frac{58 \cdot (2500 + 1024 + \sqrt{2500 \cdot 1024})}{3} = 99064 \text{ cm}^3$$

26.- Sobre los grados del desarrollo plano del área lateral de un cono.

CONO RECTO.

⊗ Ajustes previos:

$$\begin{cases} h = 0'8 \text{ dm} \rightarrow 0'8 \cdot 10 = 8 \text{ cm} \\ d = 120 \text{ mm} \rightarrow 120 : 10 = 12 \text{ cm} \\ \text{radio} = 6 \text{ cm} \\ g(r_{\text{sector}}) = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$A_L = \pi r g = 3'14 \cdot 6 \cdot 10 = 94'2 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{sector del desarrollo}} = \frac{\pi r (g)^2 n^\circ}{360^\circ} = A_{\text{Lateral}}$$

$$\frac{\pi g^2 n^\circ}{360^\circ} = 94'2 \Rightarrow \pi g^2 n^\circ = 360 \cdot 94'2$$

$$n^\circ = \frac{360 \cdot 94'2}{3'14 \cdot 10^2} = 108^\circ$$

Solución $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{El desarrollo plano del área} \\ \text{lateral del cono corresponde a} \\ \text{un sector de } 108^\circ. \end{cases}$

30.- Sobre las antípodas de nuestro país.

Se llama antípoda de un punto, sitio o país del planeta al lugar de la Tierra que está situado en la esfera terrestre exactamente en el punto diametralmente opuesto, o sea, que tiene como coordenadas geográficas las siguientes:

- De longitud: diferencia de 180° , de un lugar con respecto a otro.
- De latitud: igual, o similar, dependiendo de la extensión de los lugares de referencia.

Los lugares que son antípodas unos de otros están situados en hemisferios diferentes, uno el hemisferio Sur y otro en el Norte. Por ello, lógicamente, las estaciones del año y el horario están totalmente invertidas, de un lugar con respecto a otro.

Las antípodas de España son Nueva Zelanda, país situado a 1.600 km al sureste de Australia. Con unas coordenadas geográficas que son las siguientes: 41° Sur y 174° Este. Nueva Zelanda es un país con dos islas. Tiene una extensión de algo más de la mitad de la de España, con población de cerca de 4 millones de habitantes.

Cuando en España son las 12 del mediodía, en Nueva Zelanda, su antípoda, son las 12 de la noche, o sea, una diferencia horaria de 12 horas. Nos llevan doce horas diarias de adelanto.

28.- Sobre el cambio de área y volumen al duplicar la medida de la arista de un cubo.

CUBO.

$$A_L = 6 a^2$$

⊗ Si se duplica la arista:

$$A_L = 6 (2a)^2 = 6 \cdot 4 \cdot a^2 = 24 a^2$$

Al duplicar ($\cdot 2$) la arista del cubo, su área queda multiplicada por cuatro (2^2).

$$V = a^3$$

⊗ Si se duplica la arista:

$$V = (2a)^3 = 8 a^3$$

Al duplicar ($\cdot 2$) la arista del cubo, su volumen queda multiplicado por ocho (2^3).

29.- Problema sobre la masa de una columna de hierro.

CILINDRO RECTO.

⊗ Ajuste previo:

$$h = 5 \text{ m} \rightarrow 5 \cdot 100 = 500 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 h = 3'14 \cdot 50^2 \cdot 500 = 3925000 \text{ cm}^3$$

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \Rightarrow d = \frac{m}{V};$$

$$m = d \cdot V$$

$$m = 7'6 \left(\text{g/cm}^3 \right) \cdot 3925000 \left(\text{cm}^3 \right)$$

$$m = 29830000 \text{ gramos} \rightarrow 29830 \text{ kg}$$

⊗ Ajuste final:

$$29830000 \text{ g} \rightarrow 29830000 : 1000 = 29830 \text{ kg}$$

Solución $\rightarrow$ La columna pesa 29.830 kg.

12.19. - Ejercicios y problemas para resolver.

NOTA: En aquellos ejercicios o problemas donde salgan decimales, debes operar con dos cifras decimales.

1.- Haz una relación de las características en las que se parecen y se diferencian dos rectas paralelas y dos rectas que se cruzan.

2.- Para que una mesa esté bien asentada en el piso donde esté, ¿cuál es el menor número de patas que necesita tener?

3.- ¿Cuántas rectas perpendiculares a un plano pasan por un punto exterior a él?

4.- Investiga a ver qué significan estas palabras: coplanarias y no coplanarias, referido a las posiciones de rectas.

5.- Dice Zenobio que es posible que dos planos puedan tener un solo punto en común; por ejemplo: apoyando por una esquina un cuaderno encima de la mesa, ya que los planos de la mesa y el cuaderno sólo se tocan en un punto. ¿Qué tienes que decir al respecto?

6.- Dibuja tres planos que se corten en una misma línea recta y otros tres que se corten en un punto.

7.- Si una puerta de esas que giran está formada por tres partes iguales, ¿cuánto mide cada ángulo diedro de una de esas partes?

8.- Tenemos dos puntos, A y B, y un plano. Si los unimos, el segmento resultante corta al plano. ¿Qué se puede decir de ellos?

9.- Señala en tu aula lo siguiente:

- Dos planos paralelos.
- Dos planos que se corten y su intersección.
- Tres planos que se corten en un punto.
- Dos rectas que se cruzan.

10.- ¿Cuánto mide el diedro complementario de otro cuyo rectilíneo mide 67° ? ¿Y el diedro suplementario?

11.- ¿Cómo es la recta del rincón de la clase, el de la derecha de la pizarra, con respecto al plano del suelo? ¿Y con respecto a la pared de atrás de la clase?

12.- En la pregunta 12.6 de este tema hay un dibujo de un poliedro no simple. Comprueba a ver si se cumple el teorema de Euler.

13.- Explica brevemente por qué no existen poliedros regulares con caras hexagonales.

14.- Dibuja una pirámide rectangular recta con todos sus elementos, y con una altura de 6 cm.

15.- Realiza un esquema o cuadro donde aparezcan la cantidad de caras, aristas y vértices de estos cuerpos geométricos: cubo, octaedro, prisma triangular y pirámide trapezoidal. Estará más completo si los dibujas.

16.- En diversos problemas resueltos aparecen las siguientes preguntas y soluciones.

	PREGUNTAS	RESPUESTAS
a)	¿Cuánto mide la altura?	10 m
b)	¿Qué amplitud tiene el sector?	0'6 dam
c)	¿Cuánto tiene de masa?	12'5 kl
d)	Averigua su superficie.	280 ca
e)	Calcula el volumen.	48 m ²
f)	¿Qué capacidad tiene?	174 kg
g)	Halla el área.	9'2 cm ²
h)	Calcula el volumen de la base.	3.406 mm ³
i)	¿Qué masa tiene?	4'5 tm
j)	¿Cuál es el área de la apotema?	36 dm ²
k)	¿Cuánto tiene de capacidad?	2 l
l)	¿Qué superficie ocupa?	69 hm ²

Debes explicar brevemente los apartados donde observes errores, sea en las preguntas, en las respuestas o en ambas. (Te recomiendo ver el tema 7)

17.- Dibuja el desarrollo plano de un tetraedro y de un hexaedro.

18.- ¿Cuáles de las siguientes equivalencias son correctas y cuáles no?

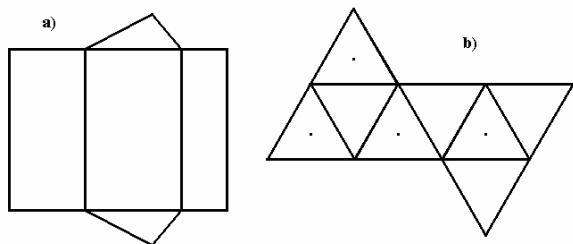
	EQUIVALENCIA	SUSTANCIA
a)	$2 \ell = 2 \text{ dm}^3$	agua destilada
b)	$0'65 \text{ m}^3 = 0'65 \text{ kl}$	aceite
c)	$7'5 \text{ kg} = 7'5 \text{ dm}^3$	agua destilada
d)	$2000 \text{ g} = 2000 \text{ ml}$	vinagre
e)	$15 \text{ cl} = 15 \text{ dag}$	agua destilada
f)	$378 \text{ dm}^3 = 378 \text{ kg}$	agua destilada
g)	$4 \ell = 4 \text{ kg}$	gasolina
h)	$8 \text{ tm} = 8 \text{ hl}$	agua destilada
i)	$402 \text{ kg} = 402 \text{ dm}^3$	hierro
j)	$0'5 \text{ kl} = 0'5 \text{ tm}$	agua destilada

Debes explicar brevemente por qué son correctas o no. (Te recomiendo ver la página 15 del tema 7)

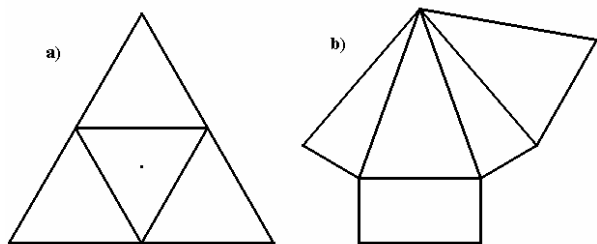
19.- Dibuja el desarrollo de un cono recto que tiene 4 cm de radio y 9 cm de generatriz.

20.- Dibuja el desarrollo de un cono recto cuyo diámetro mide 6 cm y su altura 80 mm.

21.- ¿A qué cuerpos geométricos corresponden los siguientes desarrollos planos?



22.- ¿A qué cuerpos geométricos corresponden los siguientes desarrollos planos?



23.- A ver si eres capaz de construir con cartulina o papel fuerte un ángulo poliedro de cuatro caras cuyos ángulos rectilíneos midan 90° .

(NOTA: no vale decir sí o no simplemente; es necesario explicarlo brevemente)

24.- ¿Es posible construir un ángulo poliedro de tres caras cuyos ángulos diedros midan lo siguiente?

$$\hat{A} = 120^\circ 56' 49''$$

$$\hat{B} = 101^\circ 38' 7''$$

$$\hat{C} = 137^\circ 41' 20''$$

(NOTA: no vale decir sí o no simplemente; es necesario explicarlo)

25.- En cada uno de los apartados debes decir si las afirmaciones son ciertas o falsas, dando algunas razones que expliquen por qué opinas así.

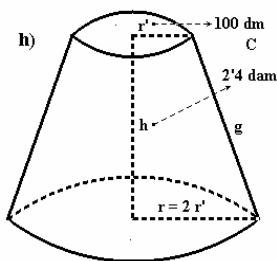
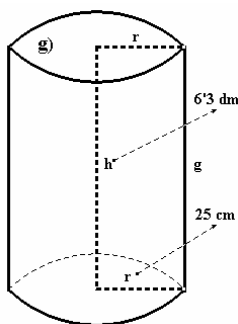
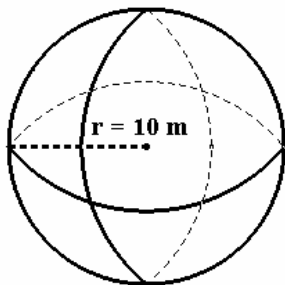
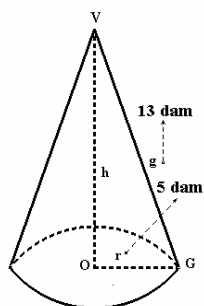
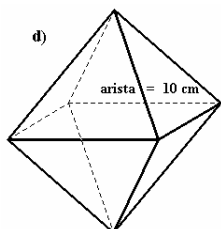
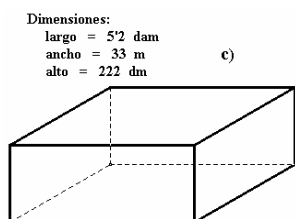
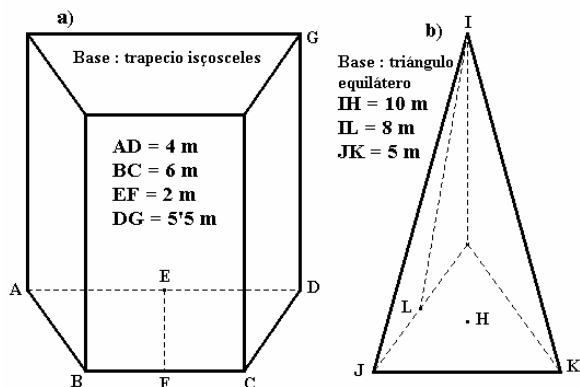
- Un paralelepípedo tiene por base un trapecio.
- En un prisma, el área lateral puede ser menor que el área de una base.
- Si aumentamos al doble el radio de un cono, el área total aumenta el doble.
- Puedo construir una pirámide irregular de base cuadrada.
- El volumen de un cubo cuya arista mide 6 m es $0'216 \text{ dm}^3$.
- El área de un polígono se mide con un aparato llamado goniómetro.

26.- Las proposiciones expuestas a continuación pueden ser correctas o falsas. Descubre cómo es cada una explicando brevemente por qué piensas así.

- El área total de un cubo cuya arista mide 5 dm es $1'5 \text{ m}^2$.
- Si triplico el radio de un cilindro, el volumen del nuevo cilindro se triplica.
- El eje imaginario terrestre sobre el que se produce el movimiento de rotación de la Tierra tiene una inclinación de $23^\circ 27'$.
- Para situar exactamente un punto o lugar en el planeta Tierra es necesario saber sus tres coordenadas, a saber, la longitud, la latitud y la altitud.
- Los meridianos son círculos menores paralelos al Ecuador.

27.- Se sabe que un depósito de forma cúbica tiene una capacidad de 729 litros. ¿Cuántos cm tiene su arista?

28.- En cada una de las figuras siguientes hallar el área lateral, el área total y el volumen.



29.- En una piscina cuyas dimensiones son 50 m de largo, 20 m de ancho y 2 m de profundidad, cuál es la mayor distancia que puede hacer un buen nadador, o buceador, sin cambiar de dirección. (NOTA: puede nadarse también bajo el agua)

30.- Se va a pintar las paredes y la bóveda de un salón rectangular cuyas dimensiones son de 20 x 15 x 4 (alto) m. ¿Cuánto costará el trabajo a razón de 6 €/m²?

31.- La altura de una pirámide cuadrangular regular es de 900 cm. Si se llena de agua pesa 48.000 kg. ¿Cuántos metros mide cada lado de la base?



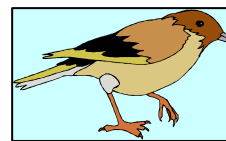
Tanto en Matyval I como en este libro, Matyval II, aparecen varias reflexiones que tratan sobre la felicidad, intentando con todas ellas captar algunos de los muchos y diversos matices que su concepto tiene. Seguimos aquí proponiendo otros aspectos.

Ya decía Epicuro, filósofo griego, que no hay felicidad sin acción y que no es posible ser feliz sin ser sabio, honrado y justo. Quizás habría que matizar o debatir mucho estas ideas del filósofo de Samos, pero lo que sí está claro es que la persona sabia, honrada y justa dispone de un estado mental que le hace disfrutar del mayor grado de felicidad.



El ser humano, en su constante búsqueda, anhela encontrar lo bueno, lo verdadero, lo justo y lo bello. Y a lo largo de esa búsqueda se va educando tanto en las adversidades como en los momentos felices; momentos que no dependen de casualidades o situaciones fortuitas, sino de actitudes que se han ido forjando a lo largo de un verdadero proceso educativo.

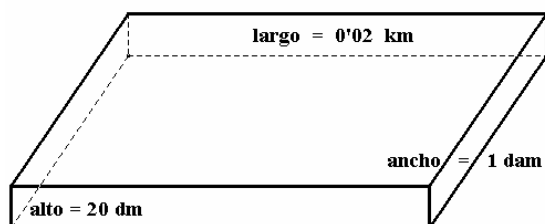
A pesar de los muchos inconvenientes que la sociedad actual nos presenta, todavía puede uno sintonizar con ciertos equilibrios de la naturaleza que nos hacen sentirnos mejor, aun sin la necesidad de acción, como afirmaba Epicuro, por ejemplo, pasear a la orilla de un río y percibir la paz a través del susurro de su corriente, descubrir la calma con el trinar de los pájaros y notar algo de felicidad escuchando el silencio. Porque sentirse bien no tiene nada que ver con el afán de poseer, los vicios, las drogas, o...



No obstinamos más en querer y desear lo que no tenemos que en valorar lo que sí poseemos. Lo mejor, si no puede uno hacer o ser lo que quiere, es ser lo que es, siendo así más libre y más feliz, ya que la libertad y la felicidad no deben ser sueños, porque muchas veces están detrás de los muros que nosotros mismos construimos.



32.- ¿Cuánto vale llenar la piscina de la figura si cada litro de agua vale a 0'08 € ?



33.- Para llenar un depósito cilíndrico de agua, cuya altura es de 150 cm, se necesitan 42.390 litros. ¿Cuántos metros tiene de diámetro dicho depósito?

34.- El aljibe –cisterna cilíndrica para reserva de agua- de un campamento de verano tiene 2 metros de radio y una capacidad de 58.875 litros. ¿Cuántos metros tiene de altura?

35.- ¿Cuánto mide la longitud (en cm) de un paralelo producido por una sección plana realizada en una esfera a una distancia de 240 mm del centro? El diámetro de la esfera es de 5'2 dm.

36.- Dibuja en tu cuaderno un octógono regular de 4 cm de lado y mide la apotema. Si teniendo como base ese octógono se levantara un prisma de 100 mm de altura, ¿cuál sería su área lateral (cm²), área total (cm²) y volumen (cm³)?

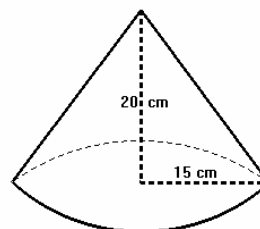
37.- Un rectángulo de 8 dm de base y 100 cm de altura gira sobre su lado mayor. ¿Cuál es el área lateral (dm²), área total (dm²) y el volumen (dm³) del cuerpo de revolución que engendra?

38.- Un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 12'5 cm y el cateto menor 3/5 de la hipotenusa, gira alrededor del cateto mayor. Calcula el área lateral (cm²), área total (cm²) y el volumen (cm³) del cuerpo de revolución que engendra?

39.- Disponemos de un almacén en forma de ortoedro cuyas dimensiones son 15 x 12 x 4 metros. Queremos llenarlo de cajas cuyas dimensiones son 15 x 8 x 3 dm. ¿Cuántas caben?

40.- Averigua cuál es el radio aproximado de la Tierra y calculas la longitud del Ecuador y el volumen de la esfera terrestre. (NOTA: expresa la medida del volumen con notación científica en m³)

41.- Se dispone de 471 m² de cartón para hacer gorros de forma cónica que se van a repartir en las ferias de un pueblo. Las dimensiones son como el que aparece en la figura. ¿Cuántos se podrán hacer, suponiendo que no se desperdicia nada del cartón inicial?



En muchas culturas antiguas existía la llamada ley del talión, que consistía en hacer sufrir al delincuente un daño igual al que causó; dicho de otro modo más conocido, "ojo por ojo y diente por diente". Bueno, en realidad esta ley inexorable sigue vigente, desgraciadamente, de una u otra forma, en sociedades del siglo XXI.

Hay bastantes lugares de nuestro planeta donde por un diente roto arrancan dos, donde por un ojo saltado sacan tres o donde por un muerto matan cinco. Así, la cadena de venganzas cada vez será más creciente, y ese chorro de torturas será cada vez más imposible de taponar.



En la Biblia se dice que cuando te golpeen en la mejilla derecha, presentes también la otra. Quizás no estén los tiempos para eso, ¿no? Pero sí hay modos y maneras de no aplicar mal por mal, de no hacer sufrir igual o más que te hagan a ti, de no superar la maldad que padeces, aunque es bastante difícil. Los ejemplos que vemos cada día en las TV's, en los diversos medios de comunicación, en nuestro entorno y hasta en nuestras familias, desgraciadamente, no nos dan muestras de cómo hacer desaparecer de nuestras sociedades esa ley del talión, ese código del desquite y la venganza.



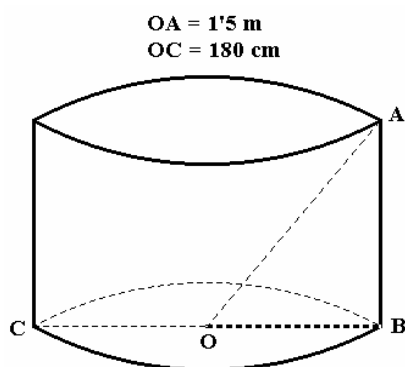
Es en la Educación (familiar, sobre todo y esencialmente, y en la escuela e instituto) donde hay que "mamar" esas actitudes positivas y auténticas. Sin embargo, ni la Educación está a esa altura, sobre todo la esencial, la que se transmite en casa, ni los "medios" y la sociedad tampoco; por tanto, mientras todo esto no mejore, es necesario auto-formarse en esas convicciones.



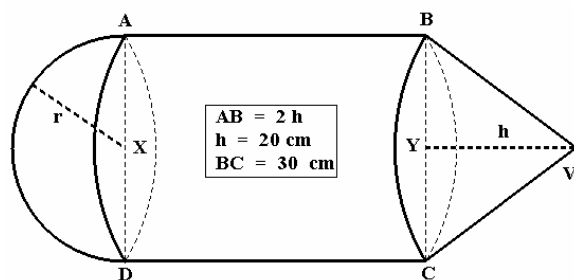
42.- El diámetro de un balón de fútbol es de 24 cm y la longitud de una circunferencia máxima de un balón de baloncesto es de 87'92 cm. Calcula la diferencia entre sus áreas y sus volúmenes.

43.- El dependiente de una tienda de calzados ha vendido en un día 15 pares. Todos ellos llevaban una caja de dimensiones 40 (largo) x 20 (ancho) x 15 (alto) cm. En cada envoltorio gasta aproximadamente un 12 % más de la superficie de cada caja. ¿Cuánto gastó en papel de envolver a razón de 1'25 €/m²?

44.- Se quiere saber el volumen de un bloque de piedra deforme, es decir, sin ninguna forma geométrica definida. Dicho bloque no sobrepasa en ninguna dimensión el metro. ¿Cómo lo hallarías disponiendo de un depósito como el de la figura, lleno de agua exactamente hasta la mitad?

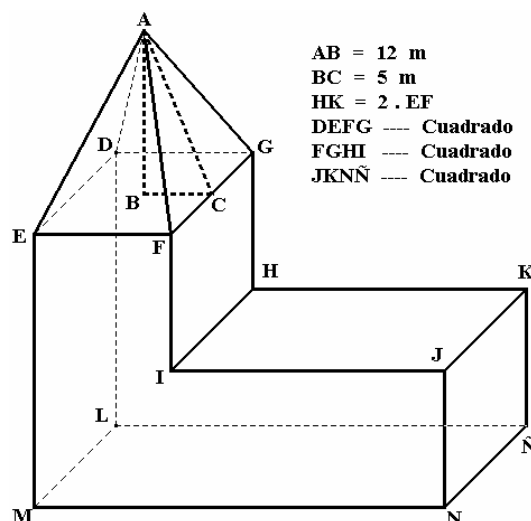


45.- Calcula el área y el volumen de la figura.



46.- Inflamos un globo hasta que tiene un diámetro de 60 cm. Si lo desinflamos hasta quedar su radio a la mitad, ¿crees tú que su volumen habrá quedado reducido a la mitad? Cálculalo. Y su superficie esférica, ¿habrá quedado la mitad, más de la mitad o menos? Cálculalo.

47.- Para hacer un cuerpo geométrico como el que se representa en la siguiente figura se han utilizado 8 horas de trabajo a razón de 20'50 €/hora. El m² de material con el que se ha hecho cuesta 12'75 €. Averigua el coste total de la obra. (NOTA: la base del cuerpo de la figura es piso normal no hecho del material mencionado)



¿ En cuántos m³ sobrepasa el volumen de la obra a 4 dam³ ?

48.- Una de las pirámides más famosas de Egipto es la de Keops, considerada como una de las siete maravillas del mundo. Esta pirámide tiene una altura de 160 metros, siendo su base cuadrada con 240 metros de lado.

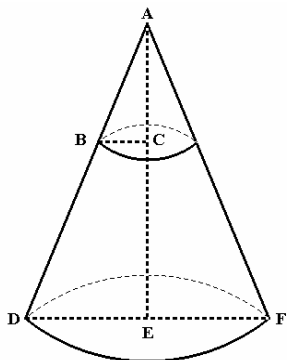


Cortesía de la página web portalmix.com

- Si tuviéramos que envolver la pirámide para cubrirla, ¿cuántos m² de malla necesitaríamos?
- ¿Cuántos hm³ ocupa de volumen?

49.- Un recipiente cilíndrico tiene una base de 1884 mm. Si lo llenamos de agua pesa 145 kg, y vacío 3'7 kg. ¿Cuántos cm tiene de altura?

50.- Fíjate en la figura:



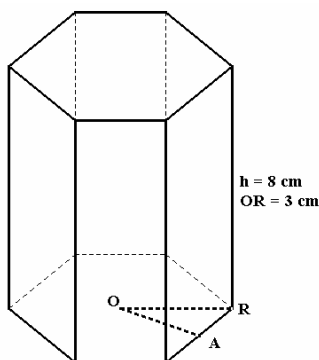
La altura del cono (AE) mide 260 mm, y el diámetro de la base (DF) mide 2 dm.

Se corta el cono por un plano paralelo a la base que dista de ella 15'6 cm.

¿Cuántos cm^2 mide la superficie del círculo de la sección formada que tiene como radio a BC?

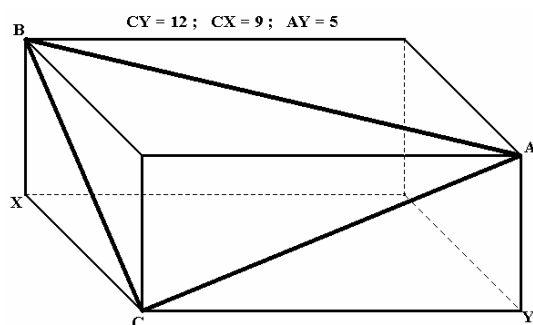
¿Qué volumen (en cm^3) tiene cada uno de los dos cuerpos geométricos obtenidos?

51.- Calcula el área lateral (cm^2), área total (cm^2) y el volumen (cm^3) del prisma hexagonal regular representado en la siguiente figura.



52.- ¿Cuántos metros mide el radio de un cono de 6 m de altura si su volumen es de $98\pi \text{ m}^3$?

53.- Calcula el perímetro del triángulo ABC que se representa en la figura siguiente.

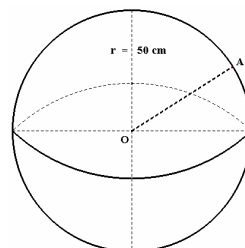


54.- Calcula la altura (en dm) de un prisma hexagonal regular cuya base tiene una superficie de $4'5 \text{ dm}^2$ y su volumen es de 47.700 cm^3 .

55.- ¿Cuántos cm mide cada lado de la base de una pirámide pentagonal regular si su área lateral es de 850 cm^2 y su apotema lateral tiene 100 mm?

56.- Una tubería cilíndrica tiene de radio interior 5 cm y 50 m de larga. El diámetro de la sección perpendicular a ella es de 30 cm. ¿Cuántos m^3 ocupa el volumen del material del que está hecha?

57.- EJERCICIOS SOBRE LA ESFERA:



Radio de la esfera = 50 cm

- Calcula el área de la superficie esférica de la figura anterior y su volumen.
- ¿Cuántos metros mide el ecuador de esta esfera?
- ¿Cuántos metros mide un meridiano de esta esfera?
- ¿Cuántos metros mide un paralelo cuyo centro está a 3 dm del centro de la esfera?
- Halla el área (cm^2) de la zona esférica comprendida entre el paralelo del apartado anterior y el Ecuador.
- Calcula el área de un casquete esférico, perteneciente a la esfera de la figura, cuya base está a 400 mm al Sur del centro O.
- Si formamos un huso esférico de 27° , ¿cuántos dm^2 tendrá de superficie?
- ¿Qué volumen, en cm^3 , ocupa la cuña esférica correspondiente al huso esférico del apartado anterior?

58.- Calcula cuántos metros de altura debe tener un depósito cilíndrico de 5 m de radio para que lleno de agua pese 785 toneladas.

59.- En una gran escultura metálica de un parque público hay tres esferas de 10 metros de diámetro y cinco columnas cilíndricas de radio 1 m y altura 3 m. Calcula el coste total a razón de 75 €/m^3 .

60.- Una columna de mármol, que tiene forma de prisma cuadrangular, tiene una altura de 4 m. La diagonal de la base mide $5\sqrt{2} \text{ dm}$. ¿Cuántos kg pesa?

(NOTA: la densidad del mármol es de $2,7 \text{ g/cm}^3$)