

TEMA 13

Iniciación a las gráficas.

Funciones.

- 13.1.-** Introducción.
- 13.2.-** Las coordenadas en el plano.
- 13.3.-** Lectura e interpretación de puntos y gráficas.
- 13.4.-** Funciones.
- 13.5.-** Características de las funciones.
 - 13.5.1.- Dominio y recorrido.
 - 13.5.2.- Intersección con los ejes.
 - 13.5.3.- Continuidad y discontinuidad.
 - 13.5.4.- Crecimiento y decrecimiento. Tasa de variación.
 - 13.5.5.- Máximos y mínimos. Periodicidad.
- 13.6.-** Estudio conjunto de varias gráficas.
- 13.7.-** Ejercicios resueltos (31).
- 13.8.-** Ejercicios para resolver (48).
- 13.9.-** Funciones cuya representación es una recta.
 - 13.9.1.- Funciones de proporcionalidad directa.
 - 13.9.2.- Funciones afines.
 - 13.9.3.- Funciones constantes.
- 13.10.-** ¿Cómo hallar la ecuación de una recta?
 - 13.10.1.- Ecuación de la forma punto-pendiente.
 - 13.10.2.- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
- 13.11.-** Estudio conjunto de dos rectas y sus ecuaciones.
- 13.12.-** Ejercicios resueltos (18).
- 13.13.-** Ejercicios para resolver (52).
- 13.14.-** Modelos de controles (3).

Y, por supuesto, algunas reflexiones.

TEMA 13.- **Iniciación a las gráficas. Funciones.**

OBJETIVOS:

1. Utilizar la nomenclatura referida a los sistemas cartesianos de representación y a los distintos tipos de datos.
2. Representar en unos ejes de coordenadas cartesianas fenómenos en los que haya una dependencia lineal, a partir de parejas de valores dados u obtenidos de manera empírica o con la utilización de la expresión funcional.
3. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales la representación gráfica de datos y su interpretación.
4. Reconocer y expresar las funciones verbalmente, mediante una tabla de valores, gráficamente y mediante un fórmula.
5. Representar funciones, por medio de puntos, en unos ejes cartesianos.
6. Definir variable y función.
7. Diferenciar variable dependiente e independiente.
8. Saber reconocer algebraica y gráficamente las funciones de proporcionalidad directa, las afines y las constantes.
9. Identificar el valor de la pendiente de funciones lineales e interpretar su significado.
10. Extraer toda la información acerca de una función a partir de su representación gráfica.
11. Descubrir la relación existente en pares de valores correspondientes a dos magnitudes y expresarla de forma lineal.
12. Reconocer funciones crecientes y decrecientes e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
13. Reconocer máximos y mínimos absolutos y relativos sobre la representación gráfica de una función.
14. Representar conjuntamente dos gráficas cuyas variables estén relacionadas e interpretar dicha relación. Significado de su punto de corte.
15. Saber realizar un informe detallado sobre un fenómeno a partir de la representación gráfica de correspondiente.
16. Diferenciar función afín, lineal y constante y conocer las características de cada uno.
17. Representar en un eje de coordenadas funciones de proporcionalidad directa, afines y constantes.
18. Resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones de primer grado.
19. Resolver situaciones problemáticas aplicando la interpretación de gráficas que describen fenómenos relacionados con la vida cotidiana.

CONTENIDOS:

De conceptos:

- 1.- Las coordenadas en el plano.
- 2.- Lectura e interpretación de puntos y gráficas.
- 3.- Funciones.
- 4.- Características de las funciones.
 - 13.5.1.- Dominio y recorrido.
 - 13.5.2.- Intersección con los ejes.
 - 13.5.3.- Continuidad y discontinuidad.
 - 13.5.4.- Crecimiento y decrecimiento. Tasa de variación.
 - 13.5.5.- Máximos y mínimos. Periodicidad.
- 5.- Estudio conjunto de varias gráficas.
- 6.- Funciones cuya representación es una recta.
 - 13.9.1.- Funciones de proporcionalidad directa.
 - 13.9.2.- Funciones afines.
 - 13.9.3.- Funciones constantes.
- 7.- ¿Cómo hallar la ecuación de una recta?
 - 13.10.1.- Ecuación de la forma punto-pendiente.
 - 13.10.2.- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
- 6.- Estudio conjunto de dos rectas y sus ecuaciones.

De procedimientos:

- 1) Situación y determinación de coordenadas de puntos en el plano.
- 2) Graduación de ejes con distintos datos.
- 3) Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
- 4) Interpretación de gráficas. Máximo, mínimo y cálculo de la variación.
- 5) Corrección de gráficas defectuosas.
- 6) Utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas en casos sencillos.
- 7) Realización de distintos tipos de gráficos obtenidos de una misma serie de datos.
- 8) Identificación de relaciones funcionales entre magnitudes.
- 9) Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas o de expresiones funcionales, teniendo en cuenta el fenómeno al que se refieren.
- 10) Obtención de una tabla de valores a partir de una fórmula.
- 11) Construcción de gráficas a partir de tablas, fórmulas y de descripciones verbales de un problema, eligiendo en cada caso el tipo de gráfica y medio de representación más adecuado.
- 12) Utilización de situaciones que originan correspondencias lineales.
- 13) Elaboración, en diferentes contextos, de correspondencias lineales.
- 14) Visualización gráfica de una relación lineal.
- 15) Realización de gráficas de funciones lineales.
- 16) Formulación de problemas de proporcionalidad directa y su relación con el comportamiento lineal.
- 17) Formulación de situaciones que permitan detectar las propiedades de la función lineal.
- 18) Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa o su expresión algebraica.

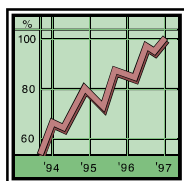
De actitudes:

- 1) Valorar la información que se puede obtener de una gráfica.
- 2) Reconocer que siempre es posible elegir una escala de medida adecuada para graduar un eje.
- 3) Comprender la utilidad del lenguaje gráfico como representación de datos y descripción de fenómenos.
- 4) Valorar la simplicidad de los gráficos cartesianos.
- 5) Curiosidad e interés por los distintos tipos de gráficos.
- 6) Reconocer la posible relación que se puede establecer entre una fórmula y un gráfico.
- 7) Sensibilidad y gusto por la correcta utilización de gráficos.
- 8) Incorporación del lenguaje funcional a diversas situaciones habituales.
- 9) Reconocer y valorar críticamente la utilidad de las aplicaciones lineales.
- 10) Interés por analizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
- 11) Gusto por la presentación ordenada y clara de los resultados y de los procesos gráficos efectuados.
- 12) Valorar la ayuda que puede ofrecer la calculadora en la resolución de determinados cálculos.
- 13) Reconocimiento y valoración de la utilidad de los lenguajes gráficos para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
- 14) Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en el tratamiento y representación gráfica de informaciones de índole muy diversa.
- 15) Reconocimiento y valoración de las relaciones entre el lenguaje gráfico y otros conceptos y lenguajes matemáticos.
- 16) Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos.
- 17) Sensibilidad, interés y valoración crítica del uso del lenguaje gráfico.
- 18) Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones y experiencias.
- 19) Valoración del trabajo en equipo como forma eficaz para realizar actividades.
- 20) Gusto por la claridad y precisión en el tratamiento y presentación de datos.

13.1.- Introducción.

Hoy día, en la televisión, en los periódicos, en revistas, en libros, etc., se ofrece multitud de información de todo tipo. **Dentro de la diversidad informativa abundan los llamados gráficos o gráficas**, que representan relaciones entre magnitudes de todo tipo (sociales, geográficas, científicas, médicas, deportivas, etc.) y nos sirven para ayudarnos a interpretar mejor y de forma rápida esa información.

Dichas gráficas utilizan un lenguaje que es necesario conocer para mejor informarse, para saber procesar (enjuiciar) la muy diversa, amplia y compleja información que constantemente recibimos y para evitar errores en la interpretación de la multitud de mensajes gráficos con el que diariamente somos “bombardeados”.



En la actualidad las gráficas nos las encontramos en todas las partes, y **a través de ellas podemos conocer e interpretar con un simple golpe de vista informaciones, datos, relaciones y variaciones referidas a cualquier tema**. Por tanto, es imprescindible aprender a saber interpretar toda la información que se nos da por medio de gráficas, ya que si no es así tendremos un gran déficit en nuestra formación, conocimiento y cultura general.

Cuando se nos dice que “alguna magnitud depende de otra magnitud” o “que esta magnitud está en función de esa otra”, se están mencionando relaciones que estudian las funciones. **La función es una herramienta matemática que estudia los fenómenos** -de todo tipo, no sólo los matemáticos, sino físicos, químicos, etc.- **que suceden en nuestro entorno**. Con ellas, con las funciones, a través de su estudio y representaciones, conocemos cómo cambian unas magnitudes (*variables dependientes*) cuando varían otras magnitudes de las cuales dependen (*variables independientes*). Así que no sólo por el deber de estudiar y saber, sino además por la vital importancia que en la actualidad tienen y tendrán las gráficas y funciones, es necesario y muy conveniente el estudio de este tema.



13.2.- Las coordenadas en el plano.

Las gráficas se representan por medio de puntos, y **para la representación de puntos en un plano se utilizan los llamados ejes de coordenadas cartesianas**. Se denominan así en honor a René Descartes, sabio que vivió a finales del siglo XVI (1596) hasta la mitad del siglo XVII (1650) y destacó como filósofo, científico y matemático.

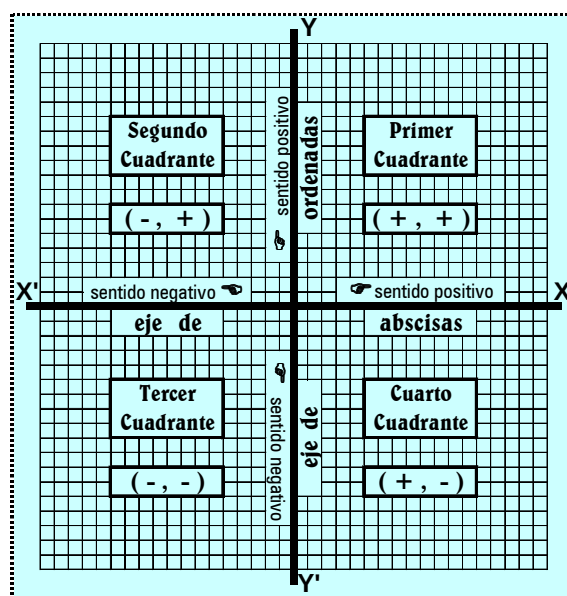
Los ejes de coordenadas cartesianas son dos:

- Uno horizontal, llamado **eje de abscisas (XX')**
- Otro vertical, llamado **eje de ordenadas (YY')**

El punto donde se cortan los dos ejes es llamado origen de coordenadas, que generalmente suele llamarse con la letra “O”. Estos ejes dividen al plano en cuatro regiones angulares iguales, a las cuales llamaremos **cuadrantes**. Observa que el orden de los cuadrantes va en sentido contrario a las agujas del reloj. Fíjate en el esquema siguiente

- | | | |
|---------------------------|----------|-----------------------|
| 1 ^{er} cuadrante | → (+, +) | → (derecha, arriba) |
| 2 ^o cuadrante | → (-, +) | → (izquierda, arriba) |
| 3 ^{er} cuadrante | → (-, -) | → (izquierda, abajo) |
| 4 ^o cuadrante | → (+, -) | → (derecha, abajo) |

Los ejes (eje de abscisas y de ordenadas) se dividen en partes iguales, tomadas a partir de un segmento unidad. No tienen por qué ser iguales en los dos ejes, pero sí en cada uno de ellos.



Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

Cada punto que se representa viene definido por **un par de valores**, es decir, por dos números, **llamados coordenadas** de dicho punto. El primer valor (**abscisa**), o sea, el primer número, se representa en el eje de abscisas, si es positivo a la derecha del origen (**0**) y si es negativo a la izquierda. Y el segundo número (**ordenada**) se representa en el eje de ordenadas, si es positivo hacia arriba, por encima del origen (**0**), y si es negativo hacia abajo. Así, por ejemplo, para representar el punto **G (4, -7)** tomaremos 4 unidades a la derecha de "**0**" y 7 unidades por debajo de "**0**". En cualquier punto, como resumen, podemos decir lo siguiente:

Llamando P, en general, al punto a representar:

- El primero de los dos valores es siempre la abscisa $\rightarrow$ "x" $\rightarrow$ variable independiente.
- El segundo de los valores es siempre la ordenada $\rightarrow$ "y" $\rightarrow$ variable dependiente.

P (abscisa, ordenada)

P (x, y)

P (variable independiente, variable dependiente)

P $\left(\begin{array}{l} \text{abscisa} \left\{ \begin{array}{l} + \rightarrow \text{derecha} \\ - \rightarrow \text{izquierda} \end{array} \right\}, \text{ordenada} \left\{ \begin{array}{l} + \rightarrow \text{arriba} \\ - \rightarrow \text{abajo} \end{array} \right\} \end{array} \right)$

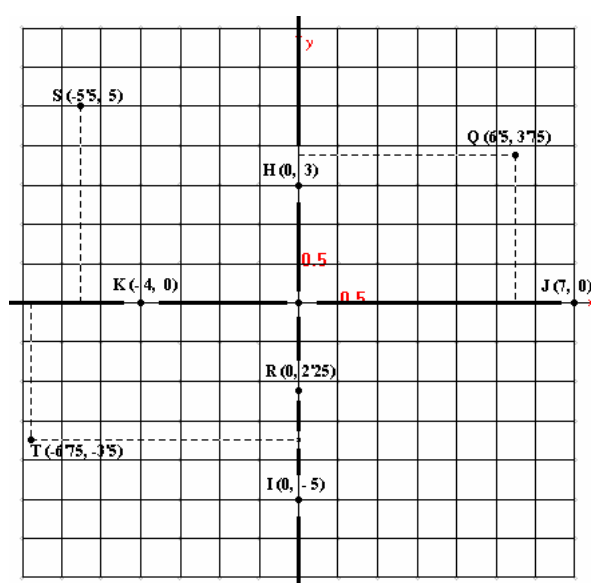
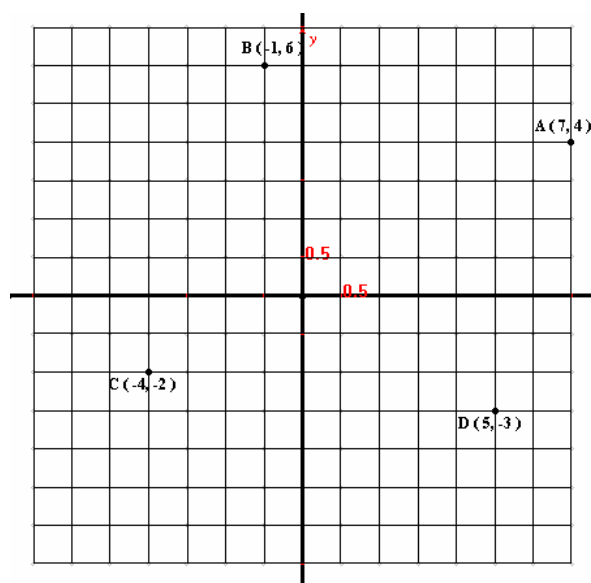
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fíjate en la representación de estos puntos} \\ \text{en el cuadro de abajo a la izquierda} \end{array} \right\}$ A (7 , 4) , B (- 1 , 6) , C (- 4 , - 2) , D (5 , - 3)

A veces, sobre todo en 1º, hasta tanto no dominan suficientemente la representación gráfica en los ejes de coordenadas, ciertos alumnos tienen fallos cuando alguna/s de las coordenadas definidas en los puntos que hay que representar son nulas, es decir, cuando valen cero (0). Veamos un resumen para ayudarte a no tener esos errores. Ver ejemplos en el cuadro de la derecha.

$\left\{ \begin{array}{l} \otimes \text{ Cuando la abscisa es nula, o sea, vale } 0 : \\ \text{El punto estará situado en el eje de ordenadas} \\ \text{Ejemplos : H (0 , 3) ; I (0 , - 5)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \otimes \text{ Cuando la ordenada es nula, o sea, vale } 0 : \\ \text{El punto estará situado en el eje de abscisas.} \\ \text{Ejemplos : J (7 , 0) ; K (- 4 , 0)} \end{array} \right\}$

Evidentemente, los valores de las coordenadas no tienen por qué ser siempre enteros, es decir, pueden ser decimales (fraccionarios). Veamos en el gráfico de la derecha estos puntos :

Q $\left(6'5, \frac{11}{4} \right)$; R $\left(\frac{0}{15}, -2'25 \right)$; S $\left(-\frac{11}{2}, 5 \right)$; T $(-6'75, -3'5)$



13.3.- Lectura e interpretación de puntos y gráficas.

LECTURA DE PUNTOS.

Para leer los puntos representados en unos ejes de coordenadas cartesianas debemos saber que cada uno viene definido por dos valores: el 1º de ellos se mide sobre el eje de abscisas y el 2º de ellos sobre el eje de ordenadas, como ya se ha explicado de forma amplia en la pregunta anterior. Así que si vemos en unos ejes de coordenadas un punto “M” situado 10 unidades a la derecha y 7 unidades hacia abajo del origen de coordenadas (“O”), lo leeremos de la siguiente forma:

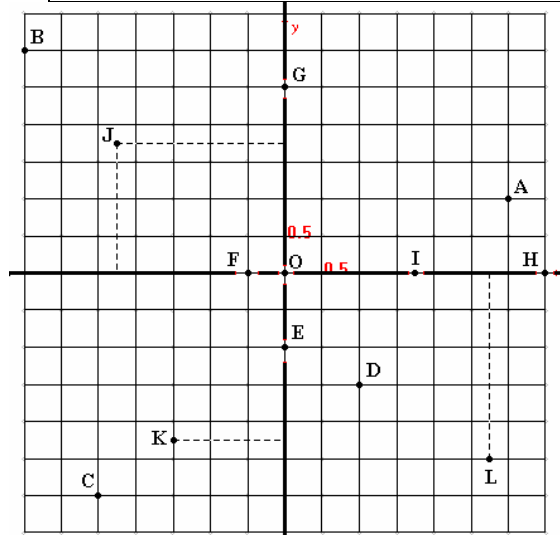
$$M(10, -7), \text{ donde } \rightarrow \begin{cases} 10 \text{ es la abscisa,} \\ -7 \text{ es la ordenada} \\ \text{y está en el 4º cuadrante} \end{cases}$$

EJERCICIOS sobre lecturas y representación de puntos :

- 1) Realiza la lectura de los puntos representados en los siguientes ejes de coordenadas:

Debes hacer con cada punto igual que hago yo con el primero de ellos por orden alfabético, o sea, así:

$$A(6, 2) \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ Abscisa} = +6 \\ \circ \text{ Ordenada} = +2 \\ \circ \text{ En el primer cuadrante.} \end{cases}$$



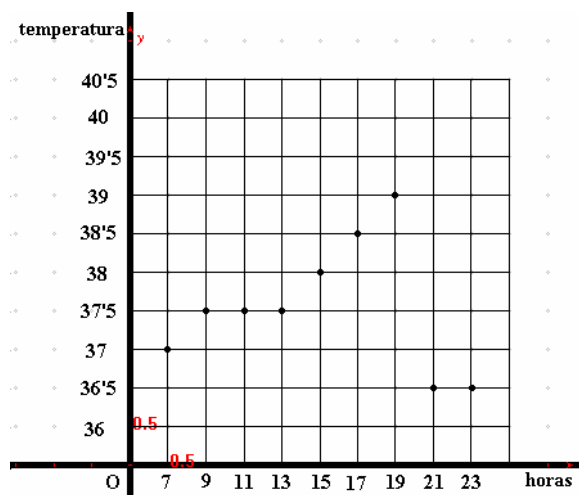
- 2) Representa en ejes de coordenadas cada uno de los puntos cuyas lecturas son las siguientes:
 $\underline{N}(1, 9)$; $\underline{\tilde{N}}(-3, 8)$; $\underline{P}(-5, -10)$;

$$\begin{aligned} &\underline{Q}(6, -4); \underline{R}(-2, 0); \underline{S}(0, -7); \\ &\underline{T}(5, 0); \underline{U}(0, 9); \underline{V}(-4, 8); \\ &\underline{W}(6, -4); \underline{X}(-2, -9); \underline{Y}(0, 7). \end{aligned}$$

INTERPRETACIÓN DE PUNTOS.

Para saber interpretar los puntos que representan un fenómeno es imprescindible **fijarse en el significado de los dos ejes de coordenadas cartesianas**, es decir, asegúrate de qué magnitud se mide en el eje de abscisas y qué otra magnitud se mide en el eje de ordenadas. Veamos un ejemplo:

Victoria está enferma con gripe. A lo largo de distintas horas de un día se han tomado los datos obtenidos al medir su temperatura corporal. Los resultados se expresan en unos ejes cartesianos con los siguientes puntos:



Hagamos la interpretación de estos puntos a partir de unas preguntas.

(NOTA : intenta responderlas tú antes de ver las respuestas)

- ¿Cuál es la temperatura máxima alcanzada y a qué hora se produjo esa subida de la fiebre?
- ¿Llegó a bajar de 36.5 °C en algún momento de ese día?
- ¿Cuál fue la temperatura más baja y a qué horas del día estuvo Victoria sin fiebre?
- A lo largo de ese día, y como tuvo una fuerte subida de fiebre, se tomó un comprimido antipirético que le hizo efecto muy rápidamente. ¿A qué hora sucedió eso? ¿Cuánto le bajó y en qué tiempo?
- ¿En qué periodo del día le subió más la fiebre?

- f. Estuvo con unas décimas durante un cierto periodo de tiempo. ¿Cuántas horas y a qué temperatura?
- g. ¿Llegó en algún momento de esas horas del día en las que se tomaron los datos a tener fiebre de 40°C ?

Las respuestas son las siguientes:

- a) La máxima “t” fue de 39°C a las 7 de la tarde.
- b) No.
- c) La “t” más baja fue de $36,5^{\circ}\text{C}$. Según la gráfica, estuvo sin fiebre (“t” $< 37^{\circ}\text{C}$) desde las 9 a las 11 de la noche.
- d) Se tomó una pastilla contra la fiebre a las 7 de la tarde. Le bajó la “t” $2,5^{\circ}\text{C}$ en una hora, o sea, de 7 a 8 de la tarde.
- e) Entre la 1 del mediodía y las 7 de la tarde.
- f) Desde las 9 de la mañana a la 1 del mediodía. En ese periodo de tiempo tuvo cinco décimas de fiebre ($37,5^{\circ}\text{C}$).
- g) No.

LECTURA E INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS.

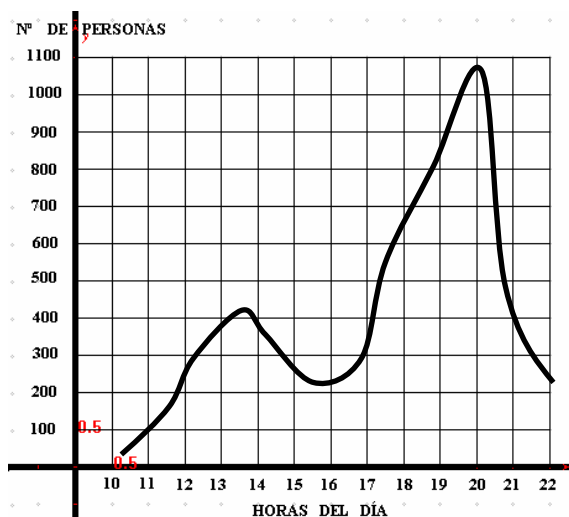
Una vez vista la lectura e interpretación de puntos, pasemos a las gráficas. En este tema estudiaremos las gráficas referidas a funciones, y en el siguiente veremos las gráficas (diagramas de barras, de sectores, histograma, etc.) que representan relaciones más complejas y largas encuadradas en procesos estadísticos.

Una gráfica es el conjunto de puntos representados en unos ejes cartesianos mediante los que se relacionan dos magnitudes. Las gráficas nos describen una correspondencia entre dos variables: una independiente (“x”, en el eje de abscisas) y otra dependiente (“y”, en el eje de ordenadas).

Para interpretar bien una gráfica debemos observarla de izquierda a derecha, para ver cómo va variando la variable dependiente (“y”) al ir aumentando la variable independiente (“x”). Veamos un ejemplo:

En la siguiente gráfica se representa la relación existente entre las horas del día en que está abierto un hipermercado y la cantidad de personas que lo visitan. Hagamos su lectura a través de una serie de preguntas.

(NOTA : intenta responderlas tú antes de ver las respuestas)



- a) ¿Entre qué horas del día está abierto?
- b) ¿Entre qué horas de la mañana se alcanza el mayor número de clientes? ¿Y en qué hora de la tarde/noche hay en el hipermercado el máximo número de clientes?
- c) ¿A lo largo de qué par de horas del día se produce el mayor descenso en la clientela?
- d) ¿En qué periodo se incrementa muy notablemente la afluencia de clientes a esos grandes almacenes?
- e) ¿Cuántas personas se encuentran dentro, de forma aproximada, a las 12 de la mañana? ¿Y a las 4 de la tarde? ¿Y a las 8 de la tarde?
- f) ¿Qué hora, aproximadamente, es cuando hay 100 clientes? ¿Y cuando hay 1000? ¿Y en qué horas hay 400 clientes?
- g) Aproximadamente, ¿cuántos clientes quedan a la hora de cierre dentro del hipermercado?

Las respuestas son las siguientes:

- a) Desde las 10 de la mañana hasta las 10 de la noche.
- b) Entre la 1 y la 2 del mediodía. A las 8 de la tarde/noche.
- c) Entre las 8 y las 10 de la noche.
- d) Entre las 5 y las 8 de la tarde/noche.
- e) A las 12 unas 250 personas. A las 16 unos 220 clientes. Y a las 20 unos 1080.
- f) Hay 100 clientes a las 11. Llegan a 1000 clientes sobre las 19:30 horas. Y hay 400 a las 13:20, a las 13:50, a las 17:15 y a las 21, aproximadamente.
- g) Al cerrar, quedan unos 225 clientes que irán poco a poco saliendo al concluir las colas en las cajas de pago.

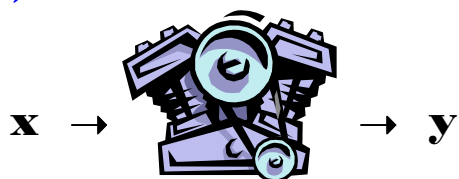
13.4.- Funciones.

Función es una relación o correspondencia entre dos magnitudes que hace corresponder a cada valor de la primera **un único valor** de la segunda. A la 1ª magnitud se le llama variable independiente, se le designa con la letra “x” y se representa en el eje de abscisas. A la 2ª magnitud se le llama variable dependiente, se le designa con la letra “y” y se representa en el eje de ordenadas.

Una vez fijado el valor de la **variable independiente** (también llamado **original**) (“x”), se calcula el valor de la **variable dependiente** (también llamado **imagen**) (“y”). De ahí sus nombres, ya que el segundo valor siempre depende del valor que demos al primero.

Con cada par de valores (x, y) que se obtienen de la relación entre las dos magnitudes se forma un punto. Y con todos los puntos obtenidos en el estudio de esa función se forma la **gráfica de dicha función**.

En realidad, para hacerte mejor a la idea, **toda función es como una maquinita** por la que van entrando valores de “x” (**variable independiente**, llamados también **originales**) y salen valores de la “y” (**variable dependiente**, llamados también **imágenes**), teniendo en cuenta que a cada “x” corresponde solamente un valor de “y”. **El número que sale de la máquina (“y”) depende del número que entre en ella (“x”).**



En general, una función se expresa así:

$$f(x) = y$$

Las funciones nos sirven para describir fenómenos de muy diverso tipo (físicos, químicos, económicos, sociológicos, deportivos, etc.) y para expresar relaciones puramente matemáticas. Las funciones pueden relacionar más de dos variables; por ejemplo, el precio de una llamada telefónica (variable dependiente, “y”) depende de varias

variables independientes: la empresa (Vodafone, Amena, etc.), el tiempo que dura la llamada, el tipo de llamada (local, nacional, al extranjero, etc.), de la modalidad de tarjeta, del contrato de compra, de la franja horaria, etc.

En este tema sólo estudiaremos las funciones que relacionan dos variables. Ejemplos:

- La longitud de una circunferencia está en función de su radio.
- El área de un cuadrado está en función de la medida de su lado.
- El espacio recorrido por un móvil está en función del tiempo empleado.
- El coste de las naranjas está en función del peso.
- La temperatura de un enfermo está en función de las horas del día.
- El estiramiento de un muelle está en función del peso que soporta.
- La presión atmosférica está en función de la altitud (altura con respecto al mar).
- La temperatura de algo que se está descongelando está en función del tiempo que pasa.



Cuando se tiene un buen grado de **fuerza de voluntad**, la persona se siente más **segura de sí misma**, más **independiente**, posee más **autoestima** y todo ello lleva consigo un **autodominio** que le hace crecerse en las contrariedades.

Seguimos con ejercicios para disciplinar a tu voluntad:

- Intenta cada día fijarte una meta o algo que hacer y que no es habitual en tu vida, desde luego sin que sea demasiado difícil, y procura cumplirlo. 
- Al anochecer, cuando ya uno está muy cansado y se tiende en el sofá para ver la tele, decides que esa noche te vas a sentar en una silla y vas a vencer tu innata comodidad. 
- Aunque no te guste leer, proponte hacerlo cada día con un número de páginas de algún libro que te atraiga o te hayan recomendado, y no lo dejes hasta que al cabo de varios días no lo termines.

Cuando **aprendas a superar** estos y otros muchos ejercicios y lo hagas de forma regular, estarás poniendo los **cimientos** al **edificio** sobre el que se asentará una estimable **fuerza de voluntad**.



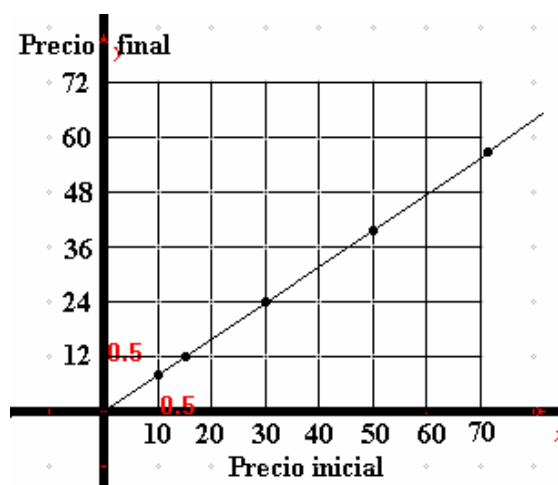
Distintos modos de expresar una función:

- a) Con un texto, en el que se describe verbalmente. Por ejemplo: ***"Rebajas de Julio. 20 % de descuento en todos los artículos"***. A través de este texto podemos hallar directamente el precio de cualquier artículo de esa tienda hallando el 80 % del precio marcado. A través de varios artículos se puede pasar a la tabla, y de la tabla dibujamos la gráfica, e incluso es posible obtener la fórmula de esta función.
- b) Con una tabla de valores. En nuestro ejemplo anterior, con los precios marcados de varios artículos hallamos varios pares de valores (x, y) para hacer la tabla correspondiente.

Precio inicial de artículos	10	15	30	50	70'50	Etc.
Precio final a pagar en €	8	12	24	40	56'40	Etc.

Ofrecen de forma rápida los valores concretos de las variables, y eso es una ventaja; pero no nos da una visión global del comportamiento de la función. En realidad, con esta forma de expresión tenemos una visión cuantitativa de la función, es decir, **cuánto varía la "y" en función de la "x"**.

- c) A través de una gráfica. Siguiendo con nuestro ejemplo, la gráfica obtenida a través de la tabla anterior sería esta:



La ventaja de esta forma de expresión es que tenemos una información inmediata de cómo ha evolucionado el fenómeno estudiado sin necesidad de conocer detalladamente los distintos valores de las variables que se relacionan. Con este modo de expresión tenemos una visión cualitativa de la función, es decir, **cómo varía la "y" en función de la "x"**.

- d) Mediante una fórmula. Terminamos con el mismo ejemplo. La fórmula que representa a la función que nos sirve de ejemplo es la siguiente:

NOTA . Recuerda la fórmula de los porcentajes:

$$V_{\text{valor Inicial}} \cdot F_{\text{actor de Variación}} = V_{\text{valor Final}}$$

$$x \cdot 0'8 = y \rightarrow y = 0'8 x$$

$$f(x) = 0'8 x$$

Con ella podremos hallar los distintos valores de la variable "y" que corresponden a ciertos valores de la variable "x". O también calcular valores de la variable "x" conociendo los correspondientes de la "y".

Normas para representar las funciones :

- 1º) Identificar la variable independiente ("x").
- 2º) Hacer una tabla dando valores a "x" y obteniendo los correspondientes valores de la variable dependiente ("y").
- 3º) Elegir una escala para los ejes de coordenadas. Ésta puede ser igual para los dos ejes, pero no tiene por qué ser siempre así, ya que la elección de la escala debe ser acorde con los valores de cada eje, es decir, intentando que sea lo más legible posible. Por ejemplo, los valores de las abscisas pueden tener escalas de 0'5 cm e ir numerados de 1 en 1, y los valores de las ordenadas tener escala dividida en 1 cm e ir de 100 en 100.
- 4º) Se van representando los puntos definidos por cada par de valores.
- 5º) Generalmente, los puntos representados estarán aislados, y tú tienes que saber (deducir) **si tiene sentido el unirlos o no**.

13.5.- Características de las funciones.

Dominio y recorrido.

Todos los valores válidos que pueda tomar la variable independiente ("x") constituyen lo que llamaremos **dominio de la función**. Lo representamos así: $D(f)$.

Igualmente, todos los valores válidos que toma la variable dependiente ("y") forman el **recorrido de la función**. Lo representamos así: $R(f)$.

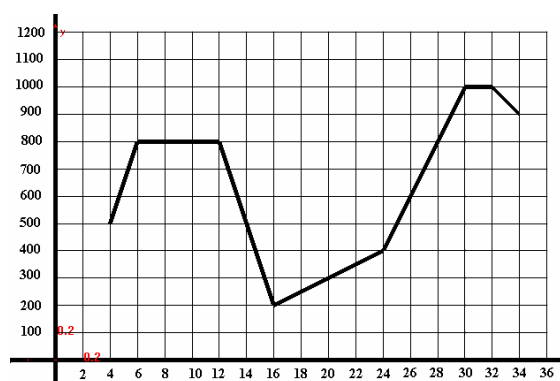
Ejemplo 1)

En la función representada en la gráfica siguiente, su dominio (valores de la "x") está entre 4 y 34, o sea:

$$D(f) = [4, 34]$$

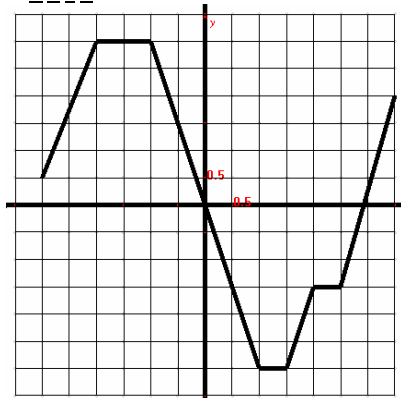
Y su recorrido (valores de la "y") está entre 200 y 1000, o sea:

$$R(f) = [200, 1000]$$



EJERCICIO 1.- Averigua el dominio y el recorrido de la función representada en la gráfica siguiente:

NOTA: cada cuadrado de la escala vale 1.



Intersección con los ejes.

Son los puntos en los que la gráfica corta a los ejes de coordenadas. El punto de corte con el eje de abscisas será $(?, 0)$ y el punto de corte con el eje de ordenadas será $(0, ?)$.

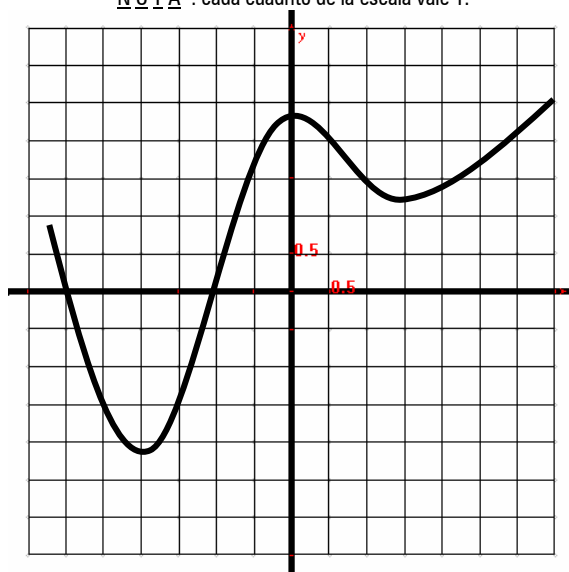
Ejemplo 2)

En la función representada en la gráfica siguiente, los puntos de intersección con los ejes son:

Con el eje X $\rightarrow (-6, 0)$ y $(-2, 0)$.

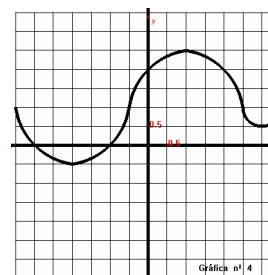
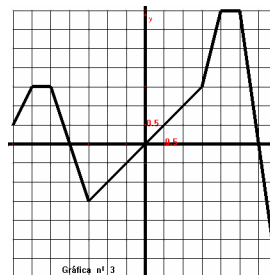
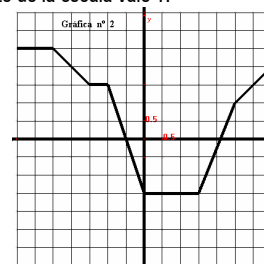
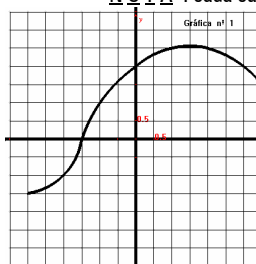
Con el eje Y $\rightarrow (0, 4)$.

NOTA: cada cuadrado de la escala vale 1.



EJERCICIO 2.- ¿Cuáles son los puntos de intersección con los ejes de las gráficas siguientes?

NOTA: cada cuadrado de la escala vale 1.

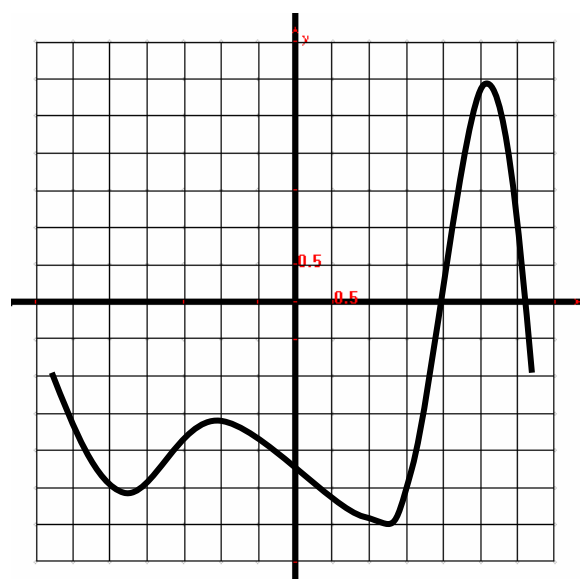


Continuidad y discontinuidad.

Se dice que una función es **continua** cuando su gráfica está formada por un **solo trazo**, es decir, se puede dibujar sin levantar el “boli” del papel.

Ejemplo 3)

La gráfica siguiente es continua, porque no presenta saltos (interrupciones) en su dibujo. Está claro que se puede hacer el trazado de ella sin necesidad de levantar el boli del papel.



Si la gráfica presenta **interrupciones**, entonces tiene discontinuidades en los puntos donde la función salta de un tramo a otro. Basta que tenga un punto de discontinuidad para que la función descrita sea **discontinua**. Cuando la función es discontinua, debemos indicar el punto o los puntos de discontinuidad.

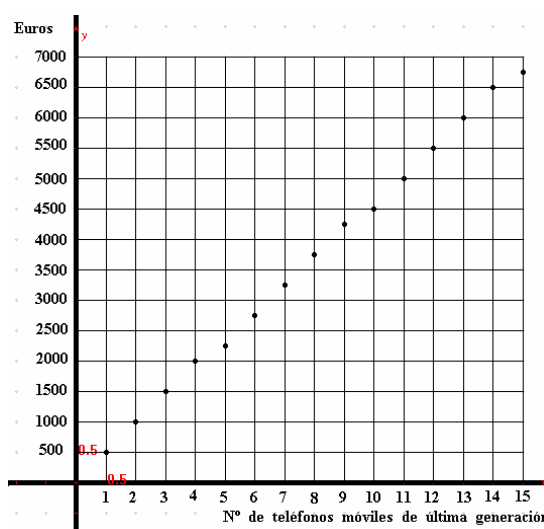
Es muy conveniente saber definir bien esta característica de las funciones para evitar las dudas que llevan a errores en los que se unen los puntos de las gráficas que no se deben unir. Veamos algunos **casos de discontinuidad**:

- Cuando los valores de la “x” (variable independiente) van dando saltos de un valor a otro. (Ejemplo 4)
- Cuando la “x” es continua pero la gráfica presenta saltos. (Ejemplos 5 y 6)

Por ello, si unimos los puntos de los saltos de funciones con alguna de estas discontinuidades, estaremos errando en la representación correcta de dichas funciones.

Ejemplo 4)

En la gráfica siguiente se relacionan el nº de teléfonos móviles última generación que se compran en una tienda y sus precios respectivos, teniendo en cuenta que al comerciante se le rebaja un 10 % por cada cinco teléfonos comprados.



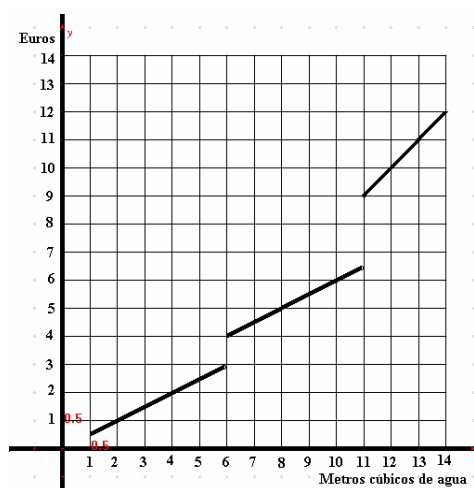
Como ves, esta gráfica es una representación de puntos que **no** debemos unir, ya que no tiene sentido la compra de dos teléfonos y medio, o de cuatro teléfonos y cuarto, o de 6'15 teléfonos, etc.

Ejemplo 5)

A continuación tenemos la gráfica que relaciona los m^3 de agua que se gastan en cada vivienda con su coste. Cada m^3 de agua se paga a 0'50 €, pero se penaliza con un precio superior a partir de los 6 m^3 , subiendo 0'50 € en el séptimo m^3 hasta el décimo. También, el undécimo m^3 se paga a 9 € (subida de 2'50) y en cada unidad siguiente el coste sube a 1 €/m³ en lugar de a 0'50 €/m³.

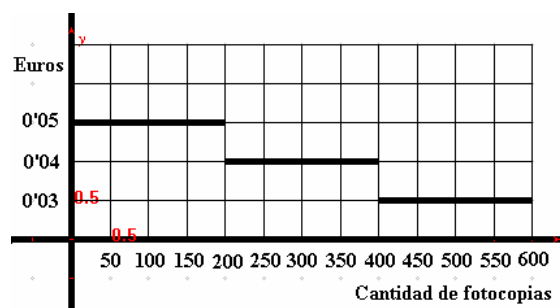
Se observan en la gráfica dos discontinuidades, dos saltos: en $x = 6$ y en $x = 11$.

Es evidente que la gráfica siguiente no puede ser dibujada sin levantar el boli del folio o cuaderno, por ello esta gráfica representa a una función discontinua.



Ejemplo 6)

En este ejemplo se representa la relación entre la magnitud cantidad de fotocopias y la magnitud precio. Entre 1 y 200 fotocopias se cobran a 0'05 €; entre 201 y 400 cuestan a 0'04 €; entre 401 y 600 a 0'03 €, etc.



La función es discontinua, porque hay saltos en su trazado. No puede dibujarse sin levantar el lápiz.



EJERCICIO 1.- A partir de la tabla siguiente, representa gráficamente la función que relaciona la dependencia entre las variables años y precio de las tarifas de consumo de agua en la viviendas. Estudia en ella su continuidad o discontinuidad.

Años	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
m ³ de agua en €	0'30	0'35	0'40	0'45	0'50	0'55	0'60	0'65

EJERCICIO 2.- Realiza la gráfica de la función que representa la dependencia entre las dos magnitudes que describe este texto: “*En la frutería de Ferny, cada kg de naranjas cuesta a 1'50 €*”. Después, estudia en ella su continuidad o discontinuidad.

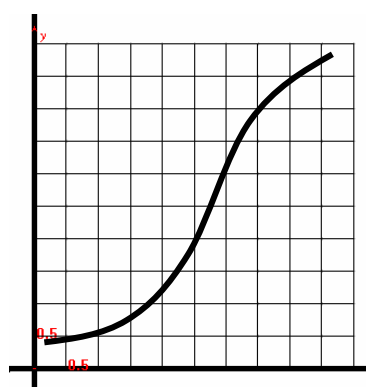


►►► Crecimiento y decrecimiento.

Existe **crecimiento** en una función cuando al aumentar la variable independiente (“x”) aumenta la variable dependiente (“y”). Dicho de otro modo, si miramos (*leemos*) una gráfica de izquierda a derecha, la función es **creciente** si su trazado es **ascendente**.

Ejemplo 7)

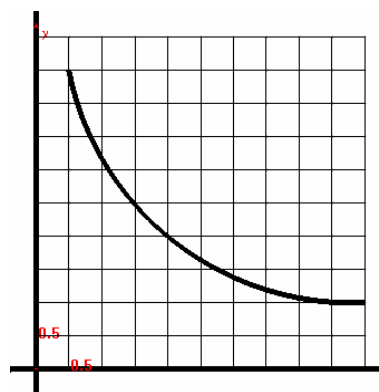
Como puedes observar, el tramo de la función representada en la gráfica siguiente es creciente, o sea, ascendente.



Existe **decrecimiento** en una función cuando al aumentar la variable independiente (“x”) disminuye la variable dependiente (“y”). Dicho de otro modo, si miramos (*leemos*) una gráfica de izquierda a derecha, la función es **decreciente** si su trazado es **descendente**.

Ejemplo 8)

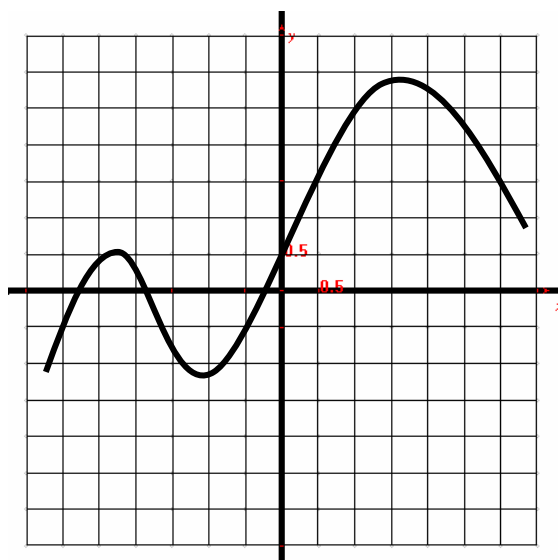
Como puedes observar, la gráfica siguiente es decreciente, ya que a medida que aumenta el valor de la “x” disminuye el valor de la “y”, es decir, es una función descendente.



Las funciones, habitualmente, tienen tramos que son crecientes y otros decrecientes, como el ejemplo siguiente. Debes tener muy claro que hay que **observar** cómo al desplazarnos desde la **izquierda a derecha** (eje “x”) varía el desplazamiento de **abajo a arriba** (eje “y”).

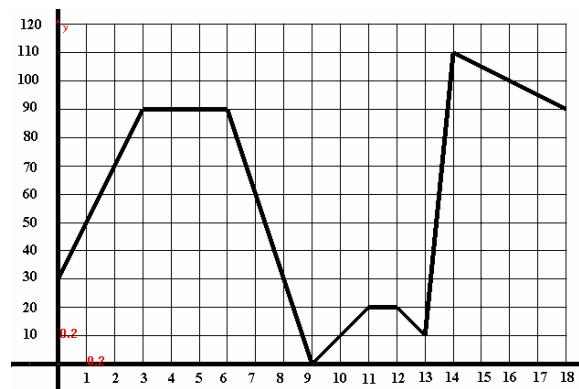
Ejemplo 9)

La gráfica de la función representada tiene dos tramos (intervalos) en los que es creciente y otros dos en los que es decreciente. Averigua tú de forma aproximada los valores de esos tramos.



Se llama **tasa de variación** de una función al **aumento o disminución que experimenta la función** cuando cambia la variable de un valor a otro. Con el estudio de la tasa de variación podemos saber la rapidez con que crecen y decrecen las funciones.

En la gráfica siguiente podemos definir con claridad los **intervalos** (tramos) en los que la función es **creciente, decreciente o constante** (tramos es los cuales ni crece ni decrece).



Veamos con datos concretos los intervalos (tramos) crecientes, decrecientes, constantes y las tasas de variación que se producen en ellos:

Es creciente :

- Entre 0 y 3. Tasa de variación (de 30 a 90) = + 60.
- Entre 9 y 11. Tasa de variación (de 0 a 20) = + 20.
- Entre 13 y 14. T. de variación (de 10 a 110) = + 100.

Es decreciente :

- Entre 6 y 9. Tasa de variación (de 90 a 0) = - 90.
- Entre 12 y 13. Tasa de variación (de 20 a 10) = - 10.
- Entre 14 y 18. Tasa de variación (de 110 a 90) = - 20.

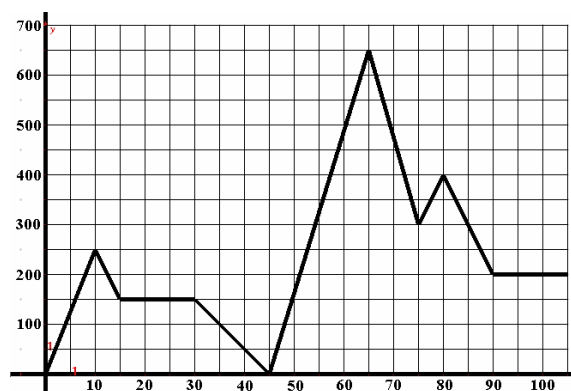
Es constante :

- Entre 3 y 6. Tasa de variación (de 90 a 90) = 0.
- Entre 11 y 12. Tasa de variación (de 20 a 20) = 0.

Podemos observar claramente que la **tasa de variación** es **positiva** cuando la función es **creciente**, es **negativa** cuando la función es **decreciente** y es **nula** (0) cuando es **constante**.



EJERCICIO 1.- Después de observar detenidamente la siguiente gráfica que representa a una función, describe sus tramos crecientes, decrecientes y constantes, mencionando también las correspondientes tasas de variación. (Hazlo de forma semejante a la que ves en la parte superior de esta columna que corresponde al ejemplo nº 9)



EJERCICIO 2.- Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones :

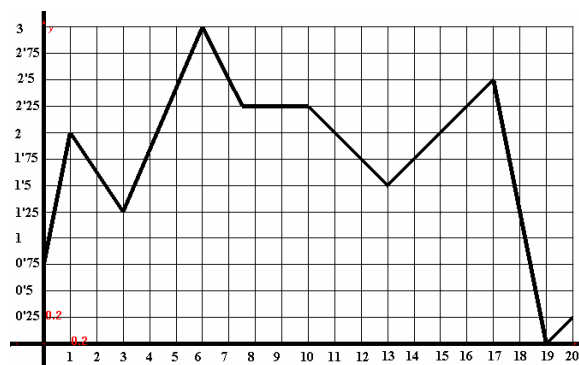
- Que tenga tres tramos crecientes, dos decrecientes y uno constante, en el orden que tú desees.
- Que la escala de abscisas sea de 1 en 1 y la de ordenadas de 3 en 3.
- Que en uno de los tramos creciente tenga una tasa de variación de + 21 y en otro de los decrecientes una tasa de - 12.

► Máximos y mínimos.

Se llama máximo de una función al **mayor de los valores que toma la variable dependiente ("y")**. Este máximo se denomina **máximo absoluto**, porque es el máximo valor de todas las ordenadas que toma la función. Sin embargo, como ya hemos visto, una función puede ser creciente en toda su gráfica, pero frecuentemente tiene tramos (intervalos) en los que es creciente y otros en los que es decreciente. Pues a esos otros puntos donde la función pasa de creciente a decreciente, es decir, donde la ordenada es mayor que la de los puntos que la rodean, excluido el punto que es máximo absoluto, a esos puntos los llamaremos **máximos relativos**.

Se llama mínimo de una **función al menor de los valores que toma la variable dependiente ("y")**. Este mínimo se denomina **mínimo absoluto**, porque es el mínimo valor de todas las ordenadas que toma la función. Y **mínimos relativos** serían todos los demás donde la función pasa de decreciente a creciente.

Veamos lo explicado en los dos párrafos anteriores con el ejemplo de la gráfica siguiente:



- **Máximo absoluto** $\Rightarrow 3$
- **Máximos relativos** $\Rightarrow 2$ y 2.5
- **Mínimo absoluto** $\Rightarrow 0$
- **Mínimos relativos** $\Rightarrow 1.25$ y 1.5

A la izquierda de los máximos la función es creciente, y a la derecha decreciente.

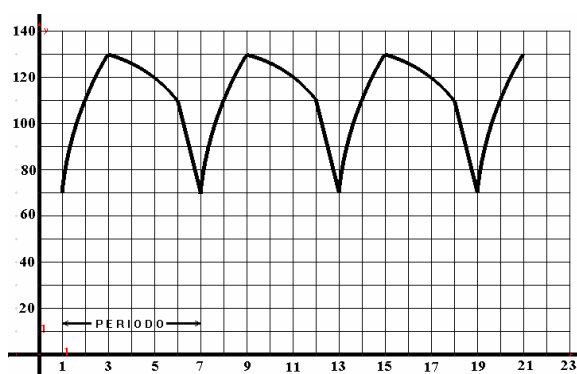
A la izquierda de los mínimos la función es decreciente, y a la derecha creciente.

► Periodicidad.

Una función es periódica cuando los valores que toma se van repitiendo cada tramo, es decir, cuando **cada cierto intervalo se repite su gráfica** porque vuelve a tomar los mismo valores.

La parte que se repite se llama período, que es la longitud del intervalo entre los dos valores de "x" en los que la función se repite. Por eso, si en una función conocemos su período, ésta queda perfectamente definida. Así, en cualquier función periódica podemos conocer su comportamiento en tramos no dibujados (valores no representados, o valores futuros) con sólo saber cuál es su período, con lo que es posible realizar previsiones de lo que ocurra posteriormente.

Estudiamos un poco esta característica, y de paso otras anteriores, en la función representada en la gráfica siguiente:



- ☞ Es una función periódica.
- ☞ Su período es **6**, empezando en $x = 1$ hasta $x = 7$.
- ☞ La función es creciente en los dos primeros valores enteros del periodo y decreciente en los cuatro siguientes.
- ☞ La tasa de variación de los dos tramos decrecientes es **-60** $\{130, 70\}$.
- ☞ El máximo de la función es **130**.
- ☞ El mínimo de la función es **70**.
- ☞ ¿Qué valor tendrá la variable dependiente "y" en el valor $x = 30$?
Pues será $\rightarrow y = 110$.
- ☞ ¿En qué punto de la gráfica caerá el 5º máximo de la función? En el punto $(27, 110)$.

13.6.- Estudio conjunto de varias gráficas.

Si representamos dos o más funciones en unos mismos ejes de coordenadas, además de hacer el estudio de cada una podremos hacer un análisis comparativo de todas ellas.

Cuando comparamos gráficas de varias funciones, debemos observar el eje de abscisas de izquierda a derecha para ir viendo en cada valor de la variable independiente ("x") cómo se comporta (*si está por encima, se cortan, o está por debajo*) el valor de la variable dependiente ("y") de cada una de las gráficas representadas.

Varias gráficas en unos mismos ejes nos ofrecen conclusiones con una visualización rápida, pero podemos analizar otras preguntas y obtener nuevas deducciones observando de forma más detenida. Te pueden ayudar al estudio conjunto estas observaciones:

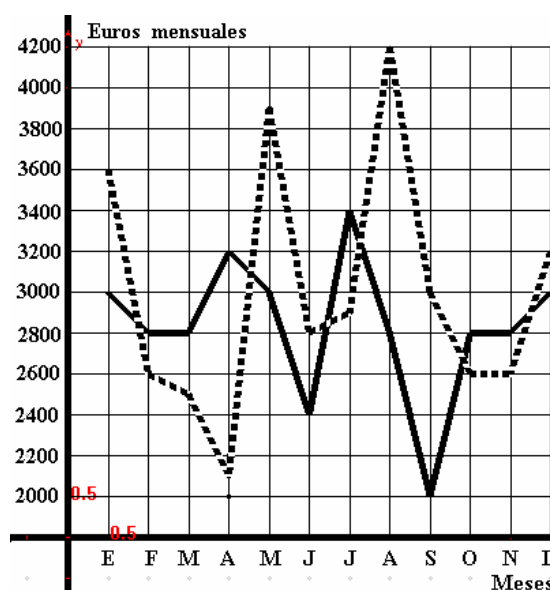
- 1) Leer el enunciado varias veces hasta que lo comprendas perfectamente.
- 2) Observa en qué valores una está por debajo de otra.
- 3) Advierte dónde se producen los puntos de corte.
- 4) En qué periodos crecen las dos o en qué periodos decrecen.
- 5) En qué periodos se comportan de forma opuesta, es decir, mientras una es ascendente la otra es descendente.
- 6) Etc.

EJEMPLO 1:

En la siguiente gráfica se representa la relación entre los meses del año y los ingresos y gastos de los miembros de una familia. Los ingresos están representados por la gráfica que tiene la línea continua, y los gastos por la línea discontinua. Hagamos un estudio conjunto de las dos gráficas representadas.

Intenta responder tú a las preguntas que vienen a continuación antes de ver las respuestas.

- 1) ¿A cuánto ascienden los ingresos y gastos en el mes de enero?
- 2) ¿En qué mes los miembros de la familia tienen el mínimo absoluto en los ingresos? ¿Cuánto ganaron ese mes? ¿Y en qué mes el mínimo absoluto de gastos? ¿Cuánto gastaron ese mes?
- 3) ¿Cuál fue la cantidad de ingresos más repetida en ese año? ¿En qué meses? ¿Y cuál la más repetida en gastos? ¿En qué meses?
- 4) ¿En qué mes los miembros de la familia tienen el máximo absoluto en los ingresos? ¿Cuánto ganaron ese mes? ¿Y en qué mes el máximo absoluto de gastos? ¿Cuánto gastaron ese mes?
- 5) ¿En qué mes se produce la mayor diferencia a favor de los ingresos, es decir, en qué mes ahorraron más? ¿A cuánto asciende ese ahorro? ¿Y en qué mes se produce la mayor diferencia a favor de los gastos, o sea, en qué mes tuvieron mayor déficit? ¿A cuánto ascendió ese déficit?
- 6) ¿Hay algún mes equilibrado entre los ingresos y gastos, es decir, gastan lo que ingresan?
- 7) ¿Entre qué meses la gráfica de ingresos es ascendente? ¿Cuál es la tasa de variación en esos tramos? ¿Entre qué meses la gráfica de gastos es ascendente? ¿Cuál es la tasa de variación en esos intervalos?
- 8) ¿Alguna de las dos gráficas es periódica? ¿Por qué?
- 9) ¿Cómo ha resultado el año para esa familia, es decir, ha sido rentable o gravoso? ¿A cuánto asciende la cantidad total ahorrada o gastada de más?
- 10) Hubo unos meses en que la familia tuvo necesidad de efectuar unos gastos extras. ¿Cuáles fueron?
- 11) ¿Dónde aparecen máximos y mínimos relativos de ingresos y gastos?
- 12) ¿Se deberían haber unido los puntos?



RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DEL EJEMPLO 1:

- 1) Ingresos = 3000 €; gastos = 3600 €.
- 2) Mínimo abs. de ingresos → 2000 €, en septiembre.
Mínimo absoluto de gastos → 2100 €, en abril.
- 3) La más repetida de ingresos → 2800 €, en febrero, marzo, abril, octubre y noviembre.
La más repetida de gastos → 2600 €, en febrero, octubre y noviembre.
- 4) Máximo absoluto de ingresos → 3400 €, en julio.
Máximo absoluto de gastos → 4200 €, en agosto.
- 5) Ahorraron más en abril → $3200 (I) - 2200 (G) = + 1000$ €.
Mayor déficit en agosto → $2800 (I) - 4200 (G) = - 1400$ €.
- 6) En ningún mes ingresan lo que gastan.
- 7) Ingresos :
 - Ascendente :
 - Entre marzo y abril ⇔ T. de variación = + 400
 - Entre junio y julio ⇔ T. de variación = + 1000
 - Entre septiembre y octubre ⇔ T. de v. = + 800
 - Entre noviembre y diciembre ⇔ T. v. = + 200
 - Descendente :
 - Entre enero y febrero ⇔ T. de v. = - 200
 - Entre abril y junio ⇔ T. de v. = - 800
 - Entre junio y septiembre ⇔ T. de v. = - 1400
- Gastos :
 - Ascendente :
 - Entre abril y mayo ⇔ T. de v. = + 1800
 - Entre junio y agosto ⇔ T. de v. = + 1400
 - Entre noviembre y diciembre ⇔ T. v. = + 600
 - Descendente :
 - Entre enero y abril ⇔ T. de v. = - 1500
 - Entre mayo y junio ⇔ T. de v. = - 1100
 - Entre agosto y octubre ⇔ T. de v. = - 1600
- 8) No. No se repite ningún tramo de forma periódica.
- 9) Ha sido gravoso, porque entre los ingresos totales (+ 34000 €) y los gastos (- 36000 €) hay un déficit de 2000 €, o lo que es lo mismo, la familia ha gastado 2000 € más de los que ha ganado. Así que difícil se presenta el próximo año por no haber sabido administrar bien su economía.
- 10) Sí, en los meses donde se ha producido un gran crecimiento de los gastos : enero, mayo y agosto. Seguramente por las Navidades y Reyes (en enero), por la celebración de alguna Primera Comunión (en mayo) y por las Vacaciones (en agosto).
- 11) Mínimo relativos de ingresos:
 - En julio, con 2400 €.
 Mínimo relativo de gastos:
 - En junio, con 2800 €.
- 12) No se deberían unir, ya que los datos se corresponden al final de cada mes y no para días intermedios. Entre enero y febrero, o entre febrero y marzo, etc., no hay datos, pero los unimos para analizar mejor las gráficas.

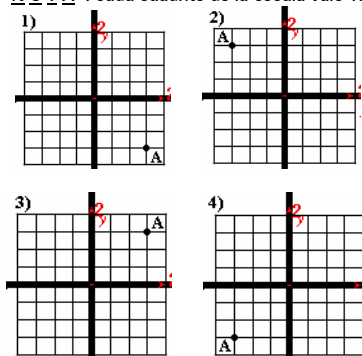
13. 7.- EJERCICIOS RESUELTOS.

SOLUCIONES en las págs. 1045 a 1050.

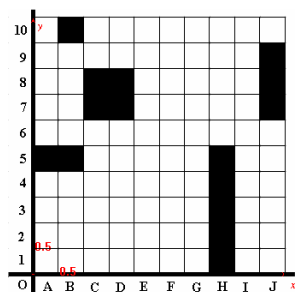
1.- Intenta hacer un esquema de llaves con los conceptos elementales de los ejes de coordenadas cartesianas.

2.- ¿En cuál de los gráficos siguientes está representado el punto A (- 3, 3)?

NOTA : cada cuadrado de la escala vale 1.



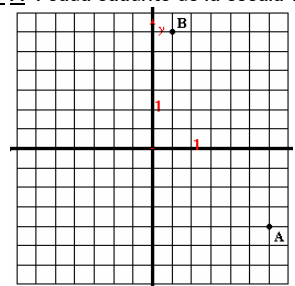
3.- Seguramente habrás jugado alguna vez al juego de los barcos. En él se representan los barcos en cuadrillos dentro de un cuadrante de los ejes de coordenadas. ¿Qué tiros harías tú para hundir los barcos de la flota que aparecen en la gráfica?



4.- Entre las siguientes, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos A y B representados?

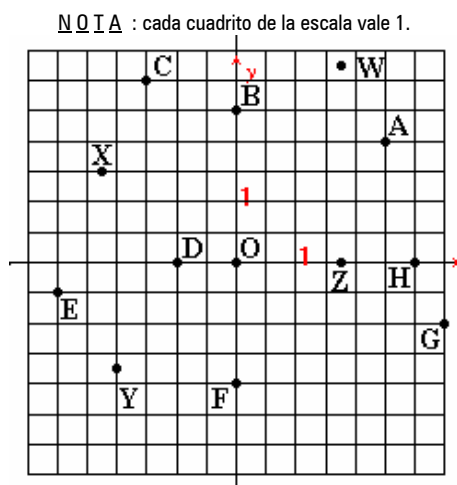
A (- 4, 6) ; A (6, 4) ; A (6, - 4) ; A (4, - 6)
B (- 1, - 6) ; B (1, - 6) ; B (6, 1) ; B (1, 6)

NOTA : cada cuadrado de la escala vale 1.



Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

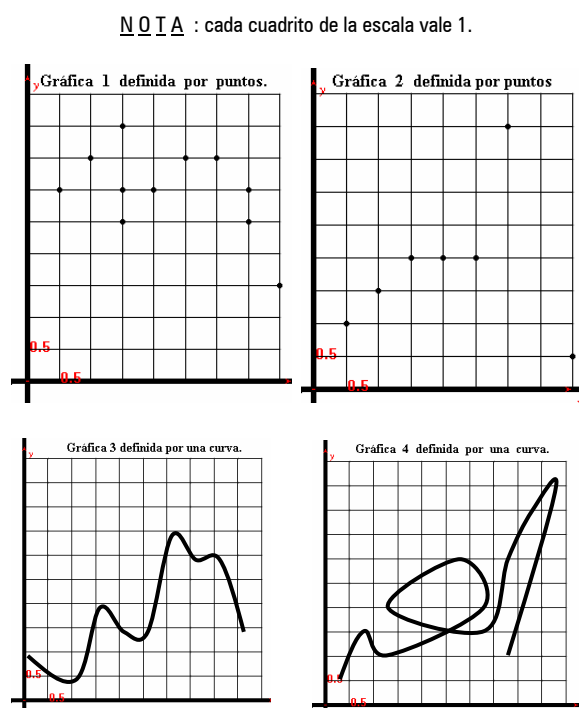
5.- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos representados en los ejes siguientes? Hazlo por orden alfabético. ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada decimal? ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada nula?



6.- Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:

A $(-6, 5)$; B $(0, -4)$; C $(7/2, 3)$; D $(-2.5, 0)$
 E $(1, -2)$; F $(-9/2, -5.5)$; G $(0.8, 6)$,
 H $(-8, -2)$; I $(-6, 1.5)$; J $(-1, 5)$.

7.- ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa a una función y cuáles no? Explícalo.



8.- Los alumnos de 2º de ESO del I.E.S. “Meléndez Valdés” hacen una excursión por nuestra querida tierra extremeña. Realizan una primera parada para desayunar en uno de los muchos pueblos bonitos que hay en Extremadura. Después continúan hasta la ciudad que van a visitar, y en ella están un tiempo gozando de la observación de algunas de la muy bellas cosas que hay allí. Llegada la hora apropiada, se desplazan fuera de la ciudad a un lugar exquisito donde saciar el apetito del mediodía. Al terminar, comienzan el regreso a Villafranca, parando a media tarde para tomar algún refresco y estirar un poco las piernas. Y, por fin, hacen la última etapa hasta llegar al pueblo.

La gráfica que representa todo el trayecto es la siguiente.



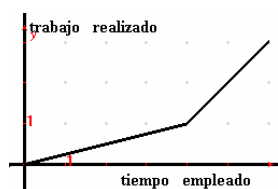
Después de observarla detenidamente, contesta a estas preguntas:

- ¿A qué hora salieron?
- ¿Cuántos km habían recorrido a las 2 horas?
- ¿A qué hora llegaron a la ciudad que iban a visitar?
- ¿Cuánto tiempo estuvieron desayunando? ¿Qué distancia llevaban recorrida entonces? ¿De qué hora a qué hora pararon a tomar el refresco? ¿Cuántos km quedaban para llegar al pueblo?
- ¿A qué distancia de Villafranca estaba el lugar donde comieron a mediodía? ¿Y a cuánto de la ciudad visitada?
- ¿Cuánto tiempo estuvieron visitando la ciudad? ¿De qué hora a qué hora?
- ¿Cuánto tiempo había pasado cuando llevaban recorridos en autobús 160 km?
- ¿Qué hacían exactamente a las 3:15 de la tarde?
- ¿A qué hora comieron?
- ¿Cuál fue la velocidad media del autobús durante todo el trayecto?
- ¿A qué hora llegaron a Villafranca?

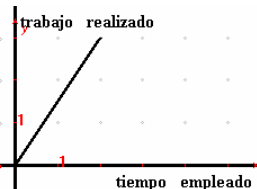
9.- A continuación se describe la relación o dependencia entre el tiempo trabajado por unos pintores y la obra realizada. Todos pintan las mismas superficies de la obra encargada. Después de leer la descripción de la forma de trabajar de cada uno, identifica a cada pintor con su gráfica.

- El pintor A hace su trabajo despacio y no descansa.
- El pintor B hace su trabajo de forma rápida, pero descansa un tiempo en la mitad de la jornada.
- El pintor C hace su trabajo con normalidad, sin correr mucho y sin parsimonia.
- El pintor D hace su trabajo descansando varias veces.
- El pintor E hace su trabajo muy rápidamente sin descansar.
- El pintor F trabaja al principio muy despacio, pero se da cuenta de que no va a terminar a tiempo y pinta frenéticamente para concluir.

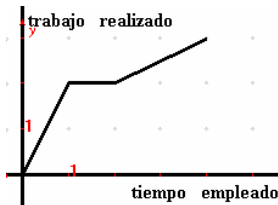
GRÁFICA N° 1



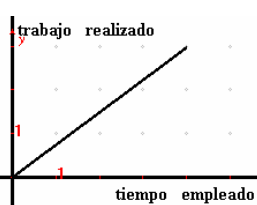
GRÁFICA N° 2



GRÁFICA N° 3



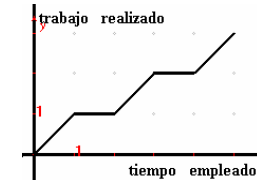
GRÁFICA N° 4



GRÁFICA N° 5



GRÁFICA N° 6



10.- La relación entre la variable dependiente “y” en función de la variable independiente “x” viene expresada con la siguiente expresión algebraica:

$$y = 5 - x$$

Señala cuáles de los apartados siguientes corresponden a afirmaciones ciertas y cuáles falsas.

- Si damos a “x” el valor 2, le corresponde “y = 7”.
- Al valor “x = -5” le corresponde “f(x) = 0”.
- Para “x = 7” la “y = -2”.
- Cuando la variable indep. es nula, f(x) = -5.
- Si “x = -8” $\rightarrow y = f(x) = -3$.
- Para “x = 6” le corresponde “y = -1”.

11.- La ecuación (expresión algebraica) de una función es:

$$f(x) = \sqrt{7 + x}$$

¿Cuáles de los números -10, -9, -7, -3, 0, 2, 6 y 11 pertenecen a su dominio y cuáles no? Razona tus respuestas.

12.- Dadas las siguientes expresiones algebraicas (ecuaciones) representativas de funciones:

$$w = 3 - 4x$$

$$x = 2 + y$$

$$y = 5z$$

Halla las expresiones algebraicas de las siguientes dependencias:

- De “w” en función de “y”.
- De “x” en función de “z”.
- De “z” en función de “w”.



Comentarios diversos de algunos alumnos en la clase de tutoría, cuando tratan sobre Urbanidad y buenos modos :

VISITACIÓN : “El otro día me comentó mi tía que cuando a una persona se le cae algo al suelo es muy caballeroso cogérselo o ayudarle, sobre todo si esas personas son mayores o señoritas”.

WIFREDO : “Hay una cosa en la que mi madre es muy pesada, pero la comprendo. Está continuamente diciéndonos que la higiene es muy importante siempre pero más en tiempos calurosos, por eso nos hace ducharnos cada día, que usemos el desodorante, que nos limpiemos los oídos, que nos cortemos bien las uñas, que nos peinemos adecuadamente, que usemos pañuelos de celulosa, que nos limpiemos los zapatos, que nos cambiemos diariamente los calcetines y ropa interior, lavarnos las manos antes y después de comer, cepillarnos la dentadura, etc., etc.”.



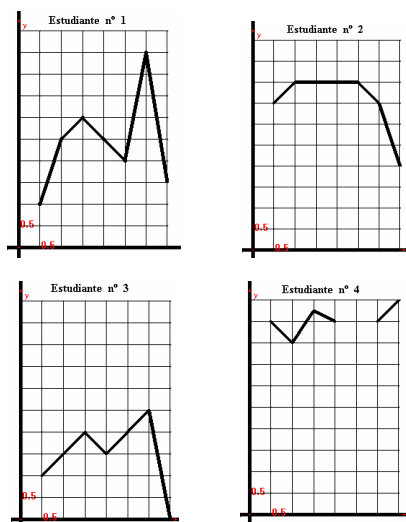
ZACARÍAS : “Una amiga mía madrileña me dijo que al pasear con señoras o señoritas es más correcto ceder la parte derecha a ellas, aunque a mí esta norma no me parece muy elemental”.

¿Cosas raras, o Urbanidad, buenos modales, buenas costumbres y buena educación?



Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

13.- A continuación tienes cuatro gráficas, correspondientes a las notas (de 0 a 10) de cuatro alumnos, en las que se representan las relaciones existentes entre las magnitudes días de la semana (eje de abscisas: Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Lunes, Martes) y notas de cada uno de los exámenes realizados cada día (eje de ordenadas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).



¿Crees que es correcto haber unido los puntos?

- ¿Qué alumno ha obtenido las mejores notas? ¿Y cuál las peores?
- A uno de los alumnos, el profesor le cogió copiando y le puso un 0. ¿A quién fue y que día sucedió?
- Un alumno estuvo enfermo un día y no realizó el examen. ¿Quién fue y que día de la semana estuvo enfermo?
- ¿Cuántos suspensos y aprobados sacó cada uno de ellos?
- ¿Cuál de ellos obtuvo tres ochos?

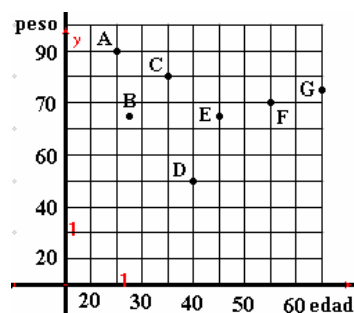
14.- Renato quiere hacer fotocopias de sus trabajos. Cada fotocopia le cuesta a 0'06 €. Identifica las magnitudes relacionadas, rellena la tabla de valores, realiza la gráfica y deduce si hay que unir los puntos obtenidos o no.

Nº de fotocopias	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Precio en €	0'06	0'12							

15.- Tecla va de compras a la frutería. Sabiendo que 2 kg de plátanos cuesta 3 €, realiza lo mismo que en el ejemplo anterior.

Peso (kg) de Plátanos	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Precio en €	3	6							

16.- En la gráfica se representa la relación entre las edades de siete personas y el peso que tienen.



- ¿Cuáles son las personas que pesan más de 60 kg?
- ¿Qué personas tienen más de 40 años?
- ¿Cuál es la de menor edad? ¿Cuántos años tiene?
- ¿Quién pesa más y cuánto?
- ¿Quién de ellas tiene 50 años? ¿Y quién pesa 60 kg?
- ¿Hay algunas personas que tengan la misma edad? ¿Y que tengan el mismo peso?
- ¿Qué edad y qué peso tiene B? ¿Y G?

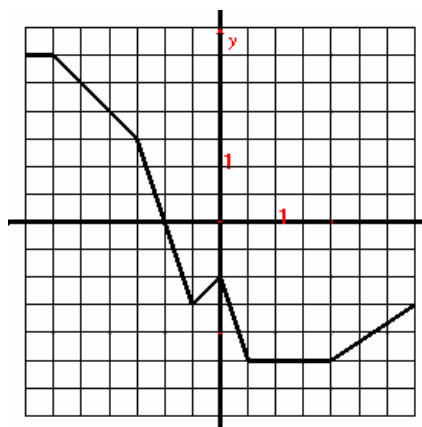
17.- ¿En cuáles de los apartados las dependencias descritas corresponden a funciones y en cuáles no?

- El perímetro de cualquier polígono regular y la longitud de su lado.
- Cada número natural y todos sus divisores.
- La edad de una persona y su estatura.
- A cada número le asocia su cuarta parte menos uno.
- Cada número y su mitad.

18.- Observa la gráfica siguiente, de “y” en función de “x”, y responde:

- ¿Para qué valor/es de “x” la “y” vale – 5?
- ¿Para qué valor de “y” la “x” vale 0?
- ¿Para qué valor de “x” la “y” vale 0?
- ¿Para qué valor de “x” la “y” vale 3?
- ¿Qué valores de “x” e “y” son los máximos en la gráfica representada.

NOTA : cada cuadrado de la escala vale 1.

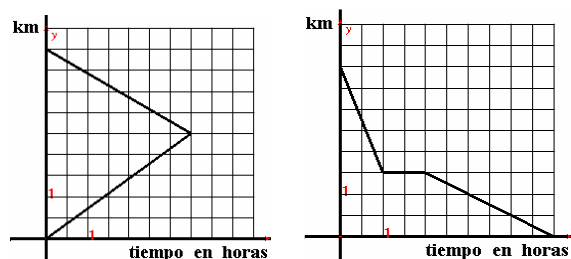


Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

19.- A ver qué grado de comprensión de los conceptos has adquirido. Responde a las preguntas siguientes de forma razonada.

- ¿El dominio de una función puede tener más elementos que su recorrido? ¿Y al revés?
- Si entre varios valores consecutivos de la variable independiente la tasa de variación es nula, ¿qué quiere eso decir? ¿Y si es positiva? ¿Y si es negativa?

20.- ¿Qué comentarios diversos se te ocurren después de observar detenidamente cada una de las dos gráficas?



21.- Dos amigos, Policarpo y Quirico, viven en pueblos que distan uno de otro 75 km. Un domingo deciden dar un paseo en bicicleta cada uno al pueblo del otro. Describimos el paseo:

- Salen los dos al mismo tiempo.
- Policarpo hace un primer tramo de 25 km en dos horas. Descansa a refrescar un cuarto de hora. A las 3 horas y cuarto de salir lleva recorridos 60 km. Hace otro descanso el doble del anterior y llega al pueblo de Quirico en un último tramo que recorre a 12 km/h.
- Quirico recorre el primer tramo de 35 km en hora y media. Descansa media hora. Pasadas 4 horas se encuentra a 20 km del pueblo de Policarpo. Descansa otros 15 minutos y llega a su destino a las 5 horas y media de haber salido.

Dibuja la gráfica de la dependencia entre la distancia y el tiempo de la ruta de cada uno.

¿Quién llegó antes a su destino y en qué diferencia?
 ¿En qué punto (de tiempo y distancia) coincidieron ambos? De los tramos realizados por los dos, ¿cuál fue el de mayor velocidad?

En el eje de ordenadas se mide la distancia de cada uno al pueblo de Policarpo, que designaremos con el punto "P" (al pueblo de Quirico, con la letra "Q"). Te aconsejo tomar estas escalas:

- Para la variable independiente, cuadritos de 15 minutos.
- Para la variable dependiente, cuadritos de 10 km.

22.- En la vuelta ciclista a España hay una etapa con las siguientes características:

Una parte inicial llana.

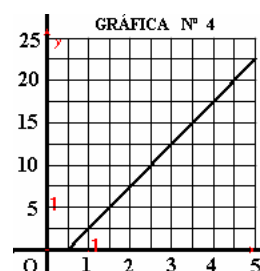
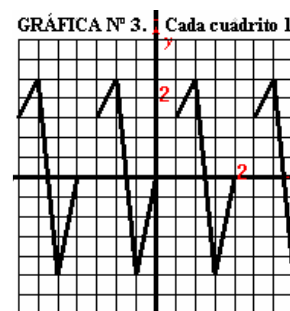
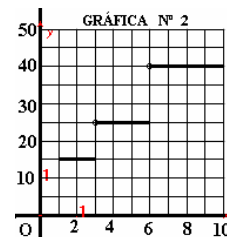
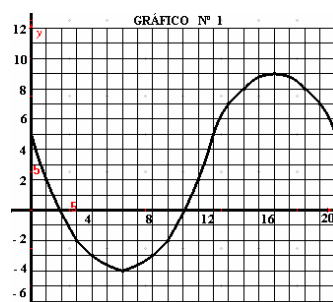
Un puerto de montaña de 2ª categoría con su correspondiente bajada.

Un tramo llano menor que el inicial que enlaza con la subida de un puerto de 1ª categoría que tiene una bajada vertiginosa.

Y la carrera termina con un falso llano.

23.- Rellena en tu cuaderno un cuadro como el siguiente observando detenidamente las gráficas:

	Gráfica 1ª	Gráfica 2ª	Gráfica 3ª	Gráfica 4ª
Dominio				
Recorrido				
Crecimiento				
Decrecimiento				
Máximos				
Mínimos				
Discontinuidad				
Periodicidad				



24.- ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde a una función? ¿Por qué?

a)

x	-9	-5	-5	0	3	3
f(x)	-4	0	2	7	-1	8

b)

x	-10	-6	-1	0	4	9
y	-8	-6	-3,5	-3	-1	1,5

25.- Deduce cuál es la expresión algebraica (ecuación) correspondiente de la tabla del ejercicio anterior que representa a una función.

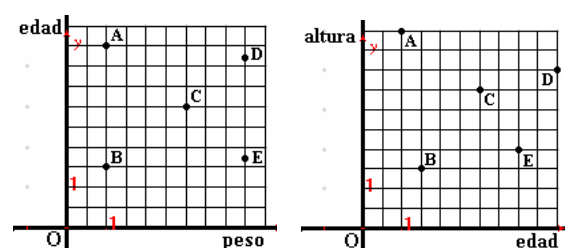
26.- En un centro de los que se dedican a cuidar a niños pequeños cuando sus padres están ocupados en algunos menesteres que les impiden estar con ellos, tienen las siguientes tarifas y/o condiciones:

- Las dos primeras horas (8 a 10) → 5 €/ hora
- La tercera hora o parte de ella hasta la sexta (10 a 14) → 7'5 €/ hora
- Desde la séptima hasta la decimocuarta (14 a 22), incluida la fracción de hora → 10 €
- El coste máximo a pagar diariamente no excede de 60 €.
- El centro está abierto de las 8 de la mañana a las 10 de la noche.
- Representa la función que relaciona las horas de estancia de cada niño con la cuantía a pagar, siendo el dominio de 8 a 22 horas.

27.- En las siguientes gráficas se han representado dos correspondencias:

Gráfica 1ª → El peso y la edad.

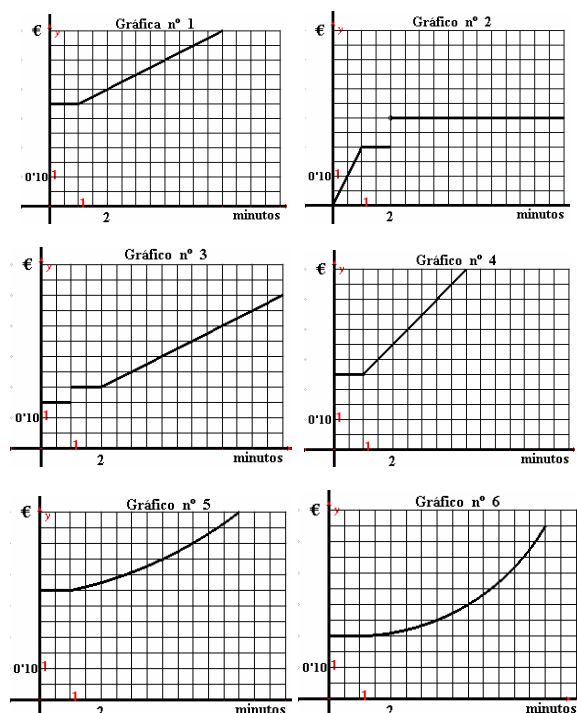
Gráfica 2ª → La edad y la altura.



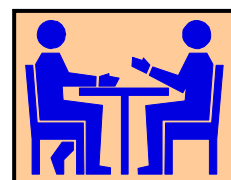
- ¿Cuántas personas se representan?
- En la 1ª, ¿cuál es la persona de más peso? ¿Y la de más edad? ¿Y la de menos peso? ¿Y la de menos edad? ¿Y la de mayor peso y más joven?
- En la 2ª, ¿cuál es la de menos edad y más alta? ¿Y la de más edad? ¿Cuál es más alta, B o E?
- ¿Son funciones las dos? ¿Por qué sí o no?

28.- Hoy día la competencia en todo es feroz. Hay un sector, el de la telefonía, en el que cada compañía intenta atraer cada día clientes a las competidoras. La compañía "A" cobra la conexión de las llamadas a 15 céntimos de euro, por el primer (o fracción) minuto 20 céntimos y cada minuto siguiente de forma proporcional al tiempo empleado. La compañía "B" no tiene una cuota de establecimiento de llamada, el primer minuto (o fracción) a 0'25 € y los minutos siguientes también de forma proporcional.

- ¿Qué gráfica de las siguientes corresponde a cada compañía?
- ¿Cuál de ellas es más cara a los 10 minutos de llamada?



A lo largo de la vida, sobre todo en la adolescencia y juventud, es muy habitual pedir opiniones. Unas veces a los amigos, otras a los profesores y otras, quizás las menos, a los padres. Del fin de esas opiniones que se piden depende una parte de la formación. Aquellos que buscan en esas respuestas soluciones a sus problemas no se formarán adecuadamente, porque las soluciones debe buscarlas uno mismo. Las opiniones de los demás, incluidas las de los padres, sólo te servirán convenientemente si a través de ellas, pero desde tu interior, salen las respuestas, soluciones o modos de vida que te guíen en el futuro.

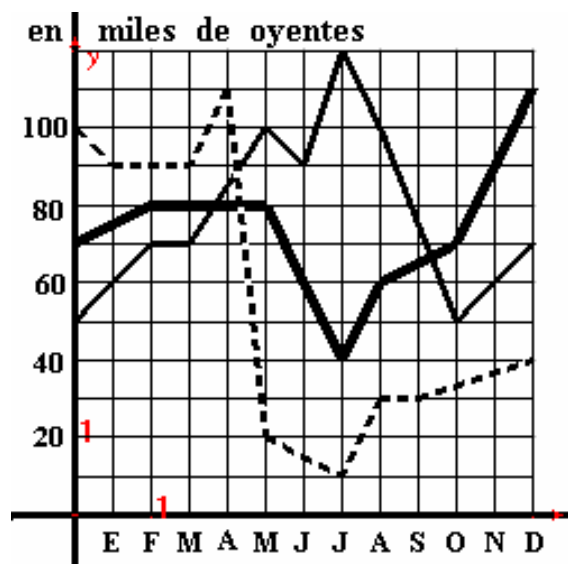


Las personas que se dejan llevar excesivamente de los demás, que dependen de sus amistades o que están demasiado condicionadas por los padres no madurarán apropiadamente porque su desarrollo se bloqueará y le impedirá que florezcan en su fuero interno aquellas respuestas que a lo largo de su vida irá necesitando, y sólo serán válidas las que broten de su interior.

De todo esto no debes deducir que no haya que confiar en los demás, que sí hay que confiar en quien lo merezca, sobre todo en los padres, sino que la ayuda que te presten con sus opiniones y consejos deberás compartirla y tamizarla desde tu interior.

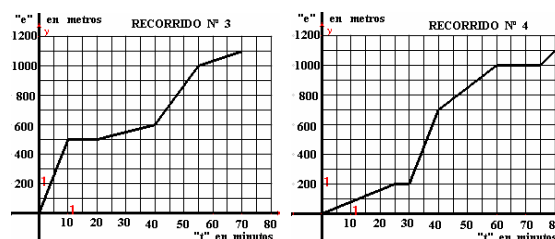
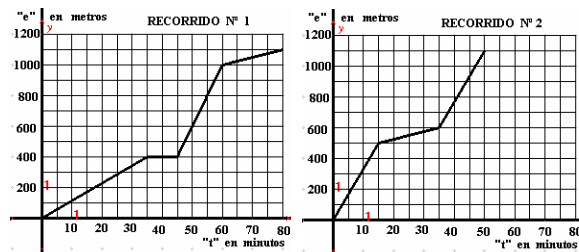


29.- En las gráficas siguientes se ha representado la evolución de la cantidad de oyentes de varias emisoras de radio en cada uno de los meses de un determinado año. La gráfica de trazo continuo más grueso corresponde a la **emisora "X"**, la de trazo continuo menos grueso a la **emisora "Y"** y la de trazo discontinuo a la **emisora "Z"**.



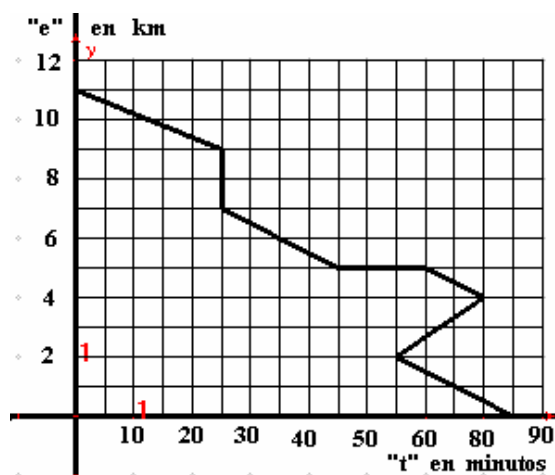
- Señala los intervalos de crecimiento y decrecimiento mayores de cada una, indicando las tasas de variación correspondientes.
- Señala los máximos y mínimos de cada una.
- Al empezar el año objeto de estudio, ¿cuántos oyentes tenía cada emisora?
- ¿Cuál es el mes en que a cada una corresponde la mayor diferencia a favor y en contra del número de oyentes con respecto a las demás? ¿Cuáles son esas diferencias en miles de oyentes?
- Señala los intervalos en que cada una de ellas mantiene a sus oyentes constantes.
- ¿Qué recorrido tiene cada emisora en ese año?
- ¿En qué mes hubo mayor número de oyentes entre las tres emisoras? ¿En cuál menos? ¿En algún/os mes/es el total de oyentes fue igual que otro? ¿En cuál/es?

30.- En las gráficas siguientes se representan cuatro recorridos distintos para ir a un mismo lugar. Describe cada uno de ellos.



- ¿Qué distancia (en "km") tenía el trayecto?
- ¿Qué recorrido emplea más tiempo? ¿Cuánto minutos? ¿Y cuál menos? ¿Cuántos minutos?
- ¿En cuál de ellos se descansa más y en qué tramos se hicieron los descansos? ¿En qué recorrido no se realizó ningún descanso?
- Algunos recorridos emplean el mismo tiempo. ¿Cuáles y cuánto en horas?
- ¿Qué velocidad media final (en m/min) hizo el recorrido nº 2? ¿Y el recorrido nº 4 (en dm/seg)?
- Ordena de mayor a menor velocidad los primeros tramos de cada recorrido.
- ¿En qué recorrido se hizo el tramo más lento y en qué intervalo? ¿Cuál fue su tasa de variación en dicho tramo? ¿Y en qué recorrido se realizó el tramo más rápido y en qué intervalo? ¿Cuál es la tasa de variación en él?
- A los 20 minutos, ¿cuántos metros llevaba cada recorrido?
- ¿Con qué recorrido se alcanzaba antes los 4 hm? ¿Y con cuál se llegaba más tarde?
- ¿Quién crees tú que realizó el recorrido a menor velocidad media, el nº 1 ó el nº 4? (i)

31.- En temas de cálculo general (enteros, fracciones, potencias, etc.) hemos realizado muchos ejercicios en MATYVAL I para detectar errores. Bien, pues veamos qué grado de comprensión has adquirido de las gráficas detectando también errores en ellas. Descubre los posibles errores de esta gráfica en la que se representa el camino de vuelta a casa andando de una persona.



SOLUCIONES DE LOS 31 EJERCICIOS DE LAS PÁGS. 1035 A 1044.

1.- Esquema de llaves.

Ejes de coordenadas	Origen de coordenadas → "O" (0,0)	Repres. de un punto → (abscisa, ordenada)
	Eje horizontal	◦ Positivo → A la derecha
		◦ Negativo → A la izquierda
Eje vertical	Eje de ordenadas	◦ Positivo → Hacia arriba
		◦ Negativo → Hacia abajo

2.- El punto A (-3, 3) corresponde al gráfico nº 2.

3.- Los barcos. Para hundir la flota se deberían hacer los siguientes tiros:

- Barco de 1 cuadro → B 10.
- De 2 cuadros → A 5, B 5.
- De 3 cuadros → J 7, J 8, J 9.
- De 4 cuadros → C 7, C 8, D 7, D 8.
- De 5 cuadros → H 1, H 2, H 3, H 4, H 5.

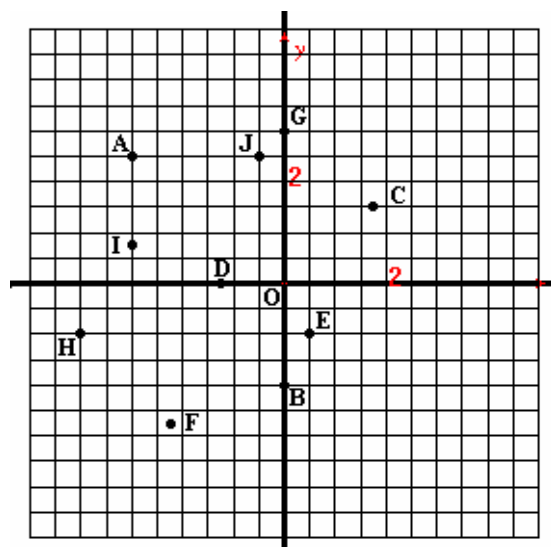
4.- Coordenadas de los puntos A y B.

A (6, -4); B (1, 6)

5.- Coordenadas de los puntos representados por orden alfabético.

A (5, 4); B (0, 5); C (-3, 6); D (-2, 0)
E (-6, -1); F (0, -4); G (7, -2),
H (6, 0); O (0, 0); W (3'5, 6'5);
X (-4'5, 3); Y (-4, -3'5); Z (3'5, 0).

6.- Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:



7.- Funciones sí o no.

Son funciones las gráficas nº 2 y nº 3, porque a cada valor de "x" corresponde un único valor de "y". Las gráficas nº 1 y nº 4 no son funciones, porque hay valores de la variable independiente ("x") a los que corresponde más de un valor de "y". Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \otimes \text{ GRÁFICA N}^\circ 1: & \text{ Para } x = 3 \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = 7 \\ y = 8 \end{cases} \\ \otimes \text{ GRÁFICA N}^\circ 4: & \text{ Para } x = 5 \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 5'8 \end{cases} \end{aligned}$$

8.- Excursión de 2º de ESO del I.E.S. "Meléndez Valdés".

- A las 8 de la mañana.
- 120 km.
- A las 11 de la mañana.
- El desayuno duró 30 minutos. Cuando llevaban 80 km. De las 9 a las 9:30.
El refresco de la tarde fue de 5:45 a 18:30. Quedaban 130 km para llegar.
- A 240 km de Villafranca. Y a 40 km de la ciudad visitada.
- Durante 4 horas visitaron la ciudad. De las 11 a las 15.
- A los 160 km habían transcurrido 2'5 horas.
- Iban en el autobús camino del lugar donde iban a comer.
- Entre las 15:30 y las 4:30.
- En la excursión recorrieron 240 km, en la ida, más 240 km de la vuelta. Duró 12 horas y cuarto, de las cuales 6 horas fueron viaje.

$$V_{\text{media}} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{480 \text{ km}}{6 \text{ horas}} = 80 \text{ km/h}$$

- A las 20:15.

9.- Los pintores y sus gráficas.

- Al pintor "A" → La gráfica nº 5.
- Al pintor "B" → La gráfica nº 3.
- Al pintor "C" → La gráfica nº 4.
- Al pintor "D" → La gráfica nº 6.
- Al pintor "E" → La gráfica nº 2.
- Al pintor "F" → La gráfica nº 1.

10.- Valores de "x" e "y".

- a) $y = 5 - x \rightarrow \text{para } x = 2 \rightarrow y = 5 - 2 = 3$
 b) $y = 5 - x \rightarrow \text{para } x = -5 \rightarrow y = 5 + 5 = 10$
 c) $y = 5 - x \rightarrow \text{para } x = 7 \rightarrow y = 5 - 7 = -2$
 d) $y = 5 - x \rightarrow \text{para } x = 0 \rightarrow y = 5 - 0 = 5$
 e) $y = 5 - x \rightarrow \text{para } x = -8 \rightarrow y = 5 + 8 = 13$
 f) $y = 5 - x \rightarrow \text{para } x = 6 \rightarrow y = 5 - 6 = -1$

Luego son ciertas la c) y la f).

11.- Los valores del dominio.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7-10} = \sqrt{-3} \rightarrow \text{Imaginario} \\ f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7-9} = \sqrt{-2} \rightarrow \text{Imaginario} \\ f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7-7} = \sqrt{0} = 0 \\ f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \\ f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7-0} = \sqrt{7} = 2'6... \\ f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3 \\ f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7+6} = \sqrt{13} = 3'6... \\ f(x) &= \sqrt{7+x} = \sqrt{7+11} = \sqrt{18} \rightarrow 4'2... \end{aligned}$$

Los dos primeros valores, -10 y -9 , no pertenecen al dominio, porque dan valores imaginarios a la función. Los otros sí pertenecen. Si el dominio correspondiera a los racionales, sólo estarían en él los valores -7 , -3 y 2 . Si el dominio fueran los números reales, entonces entrarían los valores -7 , -3 , 0 , 2 , 6 y 11 .

12.- Expresiones algebraicas (ecuaciones, despejes).

$$\begin{aligned} w &= 3 - 4x \\ x &= 2 + y \\ y &= 5z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= 3 - 4x = 3 - 4 \cdot (2 + y) = 3 - 8 - 4y = -5 - 4y \\ x &= 2 + y = 2 + 5z \end{aligned}$$

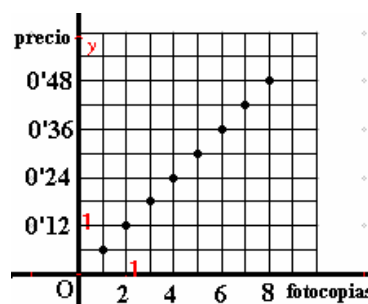
$$y = 5z \rightarrow z = \frac{y}{5} = \frac{x-2}{5} = \frac{3-w}{4} - 2 = \frac{-5-w}{20}$$

13.- Las notas de los cuatro estudiantes. ¡OJO! Se han unido los puntos para mejor observar la gráfica.

- a) Las mejores notas son del nº 4. Las peores del nº 3.
 b) Se le puso un 0 al nº 3. En el último examen, que fue el 2º de los martes.
 c) Faltó a un examen el nº 4. Fue el viernes.
 d) El nº 1 obtuvo 4 aprobados y 3 suspensos. El nº 2 sacó 6 aprobados y 1 suspenso. El nº 3 suspendió 6 veces y aprobó 1. Y el nº 4 aprobó los seis exámenes que hizo.
 e) El estudiante nº 2 obtuvo tres ochos.

14.- Tabla y gráfica de las fotocopias.

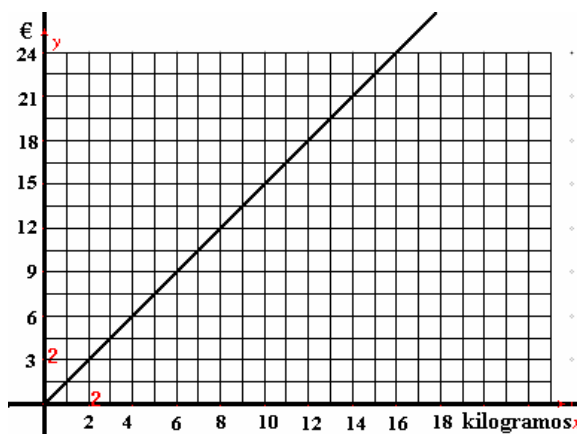
Nº de fotocopias	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Precio en €	0'06	0'12	0'18	0'24	0'30	0'36	0'42	0'48	0'54



Como el dominio son los números naturales, no se deben unir los puntos, ya que entre el valor 1 y 2 no hay dominio, porque no tiene sentido el hacer media fotocopia, o un cuarto de fotocopia, o $3'75$ fotocopias, etc.

15.- Tabla y gráfica de los plátanos.

Peso (kg) de Plátanos	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Precio en €	3	6	9	12	15	18	21	24	27



Aquí el dominio son los números racionales, pues muchas veces no se venden los plátanos con medidas de peso que sean números naturales (1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, etc., exactamente), sino que lo habitual es que pesen cantidades decimales, o sea, con parte entera y decimal (gramos). Por ello, se deben unir los puntos, ya que entre el valor 1 y 2, ó 2 y 3, ó 13 y 14, etc., si existe valor (precio) y hay dominio de la función si se venden cantidades decimales como $2'45$ kg, ó $5'07$ kg, u $11'3$ kg.

16.- Gráfica de edades y pesos de siete personas.

- Todas menos la "D".
- Las personas "E", la "F" y la "G".
- La persona "A", que tiene 25 años.
- La persona "A", que pesa 90 kg.
- 50 años no tiene ninguna. Tampoco pesa 60 kg ninguna.
- Ninguna tiene la misma edad. El mismo peso tienen las personas "B" y "E", que pesan 67'5 kg.
- La persona "B" tiene 27 años y medio y pesa 67'5 kg. Y la persona "G" tiene 65 años y pesa 72'5 kg.

17.- ¿Cuáles son funciones y cuáles no?

- Es función, ya que a cada lado corresponde solamente un perímetro.
- No es función, porque la mayoría de los números naturales tienen más de un divisor.
- Si es función, ya que a cada persona corresponde una y sólo una estatura.
- Si es función, porque a cada número sólo le asocia otro número.
- Es función, ya que cada número sólo tiene una mitad que le corresponde.

18.- Hallar valores.

- Para " $x = 1$ ", para " $x = 2$ ", para " $x = 3$ " y para " $x = 4$ ", la " $y = -5$ ".
- Para " $y = -2$ ", la " $x = 0$ ".
- Para la " $x = -2$ ", la " $y = 0$ ".
- Para " $x = -3$ ", la " $y = 3$ ".
- Mayor valor positivo de " x " en la gráfica es $+7$, y el menor -7 . El mayor de " y " en la gráfica es $+6$ y el menor -5 .

19.- Conceptos.

- En una función el dominio puede tener más elementos que el recorrido, porque puede haber valores de “y” que correspondan a varios valores de “x”. Sin embargo, al revés no es posible, porque si hay más valores de “y” que de “x” es que existen valores de “x” a los que necesariamente corresponden más de un valor de “y”, y entonces no hay función.
- Si la tasa de variación es nula, es que la función en ese tramo (intervalo) es constante, es decir, ni crece ni decrece, porque se mantiene constante el valor de “y”.
Si la tasa de variación es positiva, la gráfica en ese tramo es creciente. Y si es negativa, decreciente.

20.- Comentarios de dos gráficas.

☞ La gráfica 1ª no es posible. En ella se representa el espacio (km) en función del tiempo (horas), y según la gráfica, desde el punto (7, 5) el tiempo va para atrás, y eso es imposible. Si la escala de horas es de 1 y la de km de 200, leyendo fielmente la gráfica 1ª diríamos que a partir de la 7 horas de viaje vuelve al punto de partida sin haber empleado nada de tiempo desde la salida inicial. No es posible representar un movimiento con la 1ª gráfica, pues de ella se deduce que en un mismo momento el móvil se encontraría en dos posiciones diferentes, y eso es imposible; además de que no sería función, pues a un mismo valor de “x” corresponden dos de “y”.

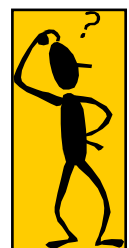
⇒ La gráfica 2ª es una representación correcta de un movimiento. Hay un primer tramo muy rápido (muchos km en poco tiempo), después un descanso (parada) y termina con un tramo bastante más lento que el 1º (muchas horas para pocos km).

Esta reflexión, como tantas otras, te puede servir para toda tu vida.

En muchas ocasiones conocerás cosas, verdades, situaciones, etc., que parecen inamovibles, es decir, que no presentan “vuelta de hoja” o que son casi inmutables. Pero tú debes razonarlas, aceptarlas desde tu óptica, intentar comprenderlas y no hacerlas tuyas sólo por quien las dice, las descubre o las habla. Debemos tener un tamiz a través del cual pasar esas verdades. Seguramente, si proceden de personas doctas, serán muy dignas de ser tomadas en cuenta, pero tú debes filtrarlas y cribarlas por el cedazo de tus conocimientos y experiencias.



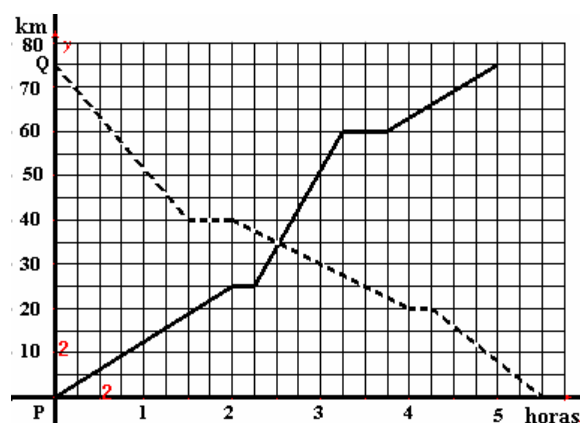
Poner en tu tela de los juicios aseveraciones rotundas te ayudará a formarte, a ser tu mismo, a valorar y comprender esas verdades más y mejor, o a criticarlas, y si no atravesaran adecuadamente la cándara de tus análisis, pues adaptarlas a ti o desecharlas. Claro, para lograr esto hay que poseer una buena formación, porque no es nada fácil escudriñar en diversidad de temas. Sin embargo, muchas veces será posible bañarlas e impregnarlas de tu bagaje de conocimientos, con tu escala de valores y con tus experiencias.



No es conveniente dar siempre por hecho todo lo que otros ya han averiguado, porque dudar es sano, es inteligente, es enriquecedor, es descubrir quizás lo mismo que te plantean pero a tu modo; es, en suma, adaptar aquello sobre lo que dudas a tu vida.

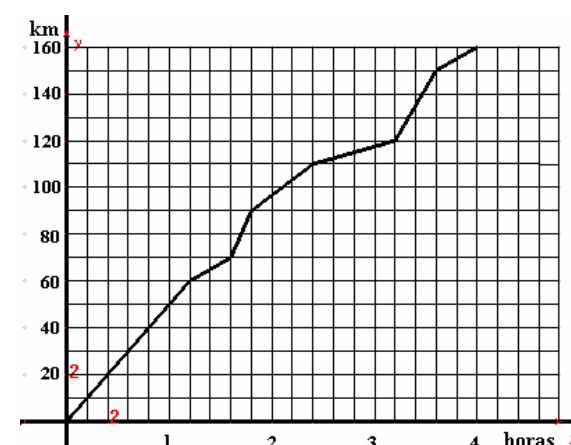
¿...? ¿...? ¿...? ¿...? ¿...? ¿...? ¿...?

21.- La gráfica de dos amigos, Policarpo y Quirico.



- Llegó antes a su destino Policarpo, que empleó 5 horas. Quirico tardó 30 minutos más.
- Se encontraron a las 2 horas y media de haber salido, a una distancia 35 km de "P" y 40 km de "Q".
- El tramo de mayor velocidad lo hizo Policarpo, a 35 km/h, entre las 2:15 y las 3:15 horas de la salida.

22.- Vuelta ciclista a España.



Con la realización de estos dos libros para uso de mis alumnos, en los que he puesto todo mi esmero y bastante dedicación, pretendo (intento) hacer asequible y entendible el mundo de las "Mate" a los chicos, a los que en una edad muy significativa para ellos como es la adolescencia, en la que tú te encuentras, sucede que tienen bastantes dificultades en esta asignatura. Edad muy importante ésta, la adolescencia, porque es en ella donde las personas ponen los verdaderos cimientos a su "edificio" futuro y las prestaciones al "vehículo" con el que se desplazarán a las distintas "estaciones" en las que desarrollar los años de su vida. Para que lo entiendas mejor: **de los 11/12 años a los 15/16 te irás formando en todo y empezarás a ser lo que serás en un futuro.**

Una cosa es segura con rotundidad, o sea, una cosa te quedo bien clara: **si tú quieres, no aprendes.** Pero otra cosa te afirmo con más certeza si cabe: **si tú quieres, sí aprendes.** O sea que ...

23.- Estudio completillo de 4 gráficas.

	Gráfica 1ª	Gráfica 2ª	Gráfica 3ª	Gráfica 4ª
Dominio	$[0, 20]$	$[1, 10]$	$\{-7, 7\}$ menos entre -4 y -3, entre 0 y 1, entre 4 y 5	$\{0, 5\}$
Recorrido	$[-4, 9]$	$[15, 40]$	$[-5, 5]$	$[0, 22, 5]$
Crecimiento	$(6, 16) + 13$		$(-7, -6) + 2$ $(-5, -4) + 5$ $(-3, -2) + 2$ $(-1, 0) + 5$ $(1, 2) + 2$ $(3, 4) + 5$ $(5, 6) + 2$	$(6, 5) + 22, 5$
Decrecimiento	$(0, 6) - 9$ $(16, 20) - 4$		$(-6, -5) - 10$ $(-2, -1) - 10$ $(2, 3) - 10$ $(6, 7) - 10$	
Máximos	$[16, 9]$		$(-6, 5)$ $(-2, 5)$ $(2, 5)$ $(6, -5)$	
Mínimos	$[6, -4]$		$(-5, -5)$ $(-1, -5)$ $(3, -5)$	
Discontinuidad		En $x = 3$ y en $x = 6$	Entre $x = -4$ y $x = -3$. Entre $x = 0$ y $x = 1$. Entre $x = 4$ y $x = 5$.	
Periodicidad			Periodo = 3 : entre $x = -4$ y $x = -3$, entre $x = 0$ y $x = 1$, entre $x = 4$ y $x = 5$.	

24.- ¿Qué tabla representa una función?

La tabla que representa a una función es la 2ª (la "b"), ya que la otra (la "a") no es función, porque hay valores de "x" a los que corresponde más de un valor de "y". Por ejemplo: para " $x = -5$ " hay dos valores de "y", que son " $y = 0$ ", e " $y = 2$ ".

25.- Ecuación de una función.

La tabla del apartado "b" del ejercicio anterior tiene la siguiente expresión algebraica (ecuación):

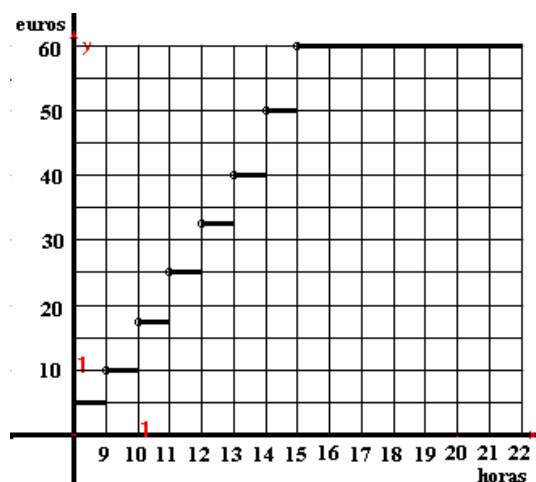
$$y = \frac{x}{2} - 3$$

En la 2ª parte de este tema aprenderemos cómo se obtiene la ecuación de una función conociendo dos de los puntos por los que pasa su recta.

Te voy a proponer una serie de medidas para que reflexiones sobre ellas; son las siguientes:

- Que hay que **trabajar** (estudiar, hacer tareas, ejercicios, etc.) una media de, al menos, más de 2 horas diarias.
- Que **no** debes estudiar NUNCA viendo la **televisión**.
- Que hay que intentar una y otra vez **contestar de forma adecuada y madura** a las cosas que te dicen, mandan o insinúan tus padres, y también los profesores.
- Que alguna que otra vez debes aprender a **ponerte en el lugar de** tus padres, o de los profesores, a ver si tu forma de actuar te gustaría a ti para un hijo o alumno que tú tuvieras, en el caso de llegar a ser padre o profesor.

26.- Gráfica del coste de una guardería de niños en función del tiempo de estancia.



27.- Gráficas de peso, edades y altura.

- Se representan 5 personas.
- Las personas D y E son las de mayor peso. La persona A es la de mayor edad. Las personas A y B son las de menor peso. La persona B es la de menor edad. La que pesa más y es más joven es la persona E.
- En la 2ª gráfica, la persona A es la de menos edad y de mayor altura. La de más edad es la persona D. Es más alta E.
- La 1ª gráfica no representa a una función, porque hay valores de "x" a los que corresponde dos valores de "y". La 2ª gráfica si es una función, ya que a cada valor del eje de abscisas corresponde un solo valor del eje de ordenadas.

28.- Competencia telefónica.

- A la compañía "A" le corresponde la gráfica nº 1. Y la compañía "B" le corresponde la gráfica nº 4.
- Es más cara la compañía "B" a partir del tercer minuto de llamada, luego también a los 10 minutos de llamada.

29.- Estudio de las audiencias de las tres emisoras de radio.

- Intervalos de crecimiento mayores y sus tasas de variación :
Emisora "X" → De julio a diciembre → + 70.000
Emisora "Y" → De junio a julio → + 30.000

Emisora "Z" → De marzo a abril y de julio a agosto → ambos con tasa de variación de + 20.000

Intervalos de decrecimiento mayores y sus tasas de variación :

Emisora "X" → De mayo a julio → - 40.000

Emisora "Y" → De julio a octubre → - 70.000

Emisora "Z" → De abril a mayo → - 90.000

- Máximos de cada una :

Emisora "X" → No aparece definido, aunque se alcanza el mayor nº de oyentes (110.000) en diciembre.

Emisora "Y" → En julio → 120.000 oyentes.

Emisora "Z" → En abril → 110.000 oyentes.

Mínimos de cada una :

Emisora "X" → En julio → 40.000 oyentes.

Emisora "Y" → En octubre → 50.000 oyentes.

Emisora "Z" → En julio → 10.000 oyentes.

- Al empezar el año reunían 220.000 oyentes entre las tres.

- Las máximas diferencias se producen en :

A favor de la emisora "X" → En diciembre, 40.000 oyentes más que la "Y" → En diciembre, 70.000 oyentes más que la "Z".

A favor de la emisora "Y" → En julio, 80.000 oyentes más que la "X" → En julio, 110.000 oyentes más que la "Z".

A favor de la emisora "Z" → En abril, 30.000 oyentes más que la "X" → Al empezar el año, 50.000 oyentes más que la "Y".

- Los intervalos constantes, es decir, sin cambios en los miles de oyentes de cada una son :

Emisora "X" → De febrero a mayo → se mantienen 80.000 oyentes.

Emisora "Y" → De febrero a marzo → se mantienen 70.000 oyentes.

Emisora "Z" → De enero a marzo → se mantienen en 90.000 oyentes.

- Recorridos de cada emisora ese año :

Emisora "X" → { 40000, 110000 }

Emisora "Y" → { 50000, 120000 }

Emisora "Z" → { 10000, 110000 }

- Máximas audiencias globales : En abril → 275.000 oyentes.

Mínima audiencia : En octubre → 153.000 oyentes.

El nº global de oyentes se repitió en los meses de febrero y marzo → 240.000 oyentes.

A continuación tienes una tabla que ayuda bastante a las respuestas, y a ver los datos gráficos de otra manera más numérica y más rápida.

Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

aproximadamente MES	Miles de oyentes			Total - Mes
	"X"	"Y"	"Z"	
Dic.-Año-Ant.	70	50	100	220
enero	75	60	90	225
febrero	80	70	90	240
marzo	80	70	90	240
abril	80	85	110	275
mayo	80	100	20	200
junio	60	90	15	165
julio	40	120	10	170
agosto	60	100	30	190
septiembre	65	75	30	170
octubre	70	50	33	153
noviembre	90	60	37	187
diciembre	110	70	40	220

30.- Los cuatro recorridos.

- El trayecto era de 1'1 km.
- El recorrido más tardío es el nº 4, que emplea 80 minutos. El recorrido más rápido es el nº 2, que emplea 50 minutos.
- Se descansó más en el recorrido nº 4. Se hicieron dos paradas: de los 25 a los 30 minutos y de los 60 minutos a 75. No se realizó ningún descanso en el recorrido nº 2.
- El recorrido nº 1 y el nº 4 tardaron 1 hora y 20 minutos en el trayecto.

- El recorrido nº 2:

$$\text{velocidad media} = \frac{1100 \text{ m}}{50 \text{ min.}} = 22 \text{ m/min.}$$

El recorrido nº 4:

$$v_{\text{media}} = \frac{1100 \text{ m}}{80 \text{ min.}} = \frac{11000 \text{ dm}}{6000 \text{ seg.}} = 2'29 \text{ dm/seg.}$$

- $\text{Recorrido nº 3} \rightarrow v = \frac{500 \text{ m}}{10 \text{ min}} = 50 \text{ m/min.}$
 $\text{Recorrido nº 2} \rightarrow v = \frac{500 \text{ m}}{15 \text{ min}} = 33'33 \text{ m/min.}$
 $\text{Recorrido nº 1} \rightarrow v = \frac{400 \text{ m}}{35 \text{ min}} = 11'43 \text{ m/min.}$
 $\text{Recorrido nº 4} \rightarrow v = \frac{200 \text{ m}}{25 \text{ min}} = 8 \text{ m/min.}$

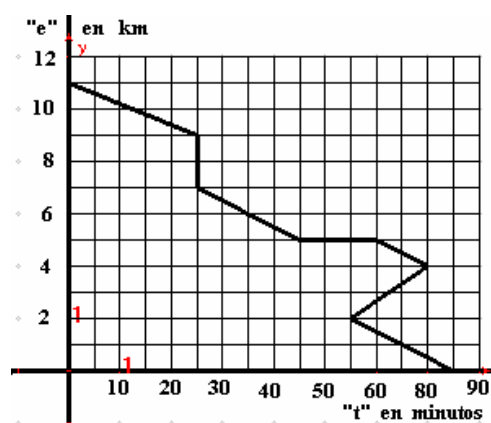
- El tramo más lento se hizo en el recorrido nº 1, al final, ya que tardó 20 minutos en recorrer 100 metros, o sea, a una velocidad de 5 m/min. La tasa de variación en este tramo es de + 100 (m).

El tramo más rápido se realizó en el recorrido nº 3, al principio. Se hizo 500 m en 10 min., es decir, a 50 m/min. La tasa de variación en este tramo es + 500 (m).

- A los 20 minutos de salida, la situación era:
Recorrido nº 1 → Llevaba 200 m.
Recorrido nº 2 → Llevaba 525 m.
Recorrido nº 3 → Llevaba 500 m.
Recorrido nº 4 → Llevaba Unos 170 m.
 - Los 4 hm (400 m) se alcanzan antes en el recorrido nº 3. Y el recorrido nº 1 lo alcanza más tarde.
 - Pues los dos a igual velocidad media, ya que han recorrido la misma distancia (1100 m) en el mismo tiempo (80 minutos).

$$v_{\text{media}} = \frac{1100 \text{ m}}{80 \text{ min.}} = 13'75 \text{ m/min.}$$

31.- Errores en gráficas.

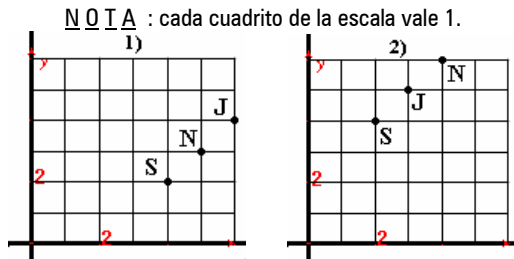


- El primer error está en que a los 25 minutos de haber iniciado la vuelta a casa, según la gráfica, recorre 2 km en 0 minutos, y eso no es posible *—al menos sin poseer el don de la ubicuidad—*. En realidad esta gráfica no representa a una función, porque para “x = 25” tiene más de un valor de “y”, por ejemplo, “y = 7”, “y = 8” e “y = 9”.
- El segundo error está en que a los 80 minutos la gráfica vuelve hacia la izquierda (punto 55, 2), que quiere decir que recorre 2 km haciendo retroceder el tiempo media hora (30 minutos). Y evidentemente eso es imposible, ya que por lo menos por ahora no es posible viajar hacia atrás en el tiempo, a no ser que sea en películas de ciencia-ficción, a través de un agujero negro, por ejemplo..

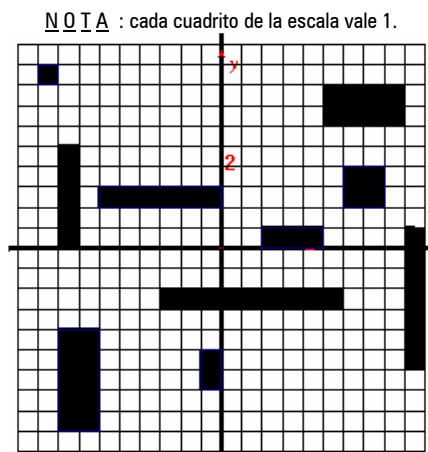
13.8.- EJERCICIOS PARA RESOLVER:

1.- ¿Cuál de las gráficas representa la siguiente relación entre las horas de estudio y las calificaciones obtenidas por tres estudiantes?

- Narciso ha estudiado tres horas y ha obtenido de nota un 5.
- Joaquina ha estudiado cuatro horas y ha obtenido un 6.
- Simeón ha estudiado dos horas y ha obtenido un 4.



2.- Señala las coordenadas de los cuatro vértices de las figuras sombreadas que tengan en sus vértices algunos de sus valores (x, y) nulos.



٢٠٠٠

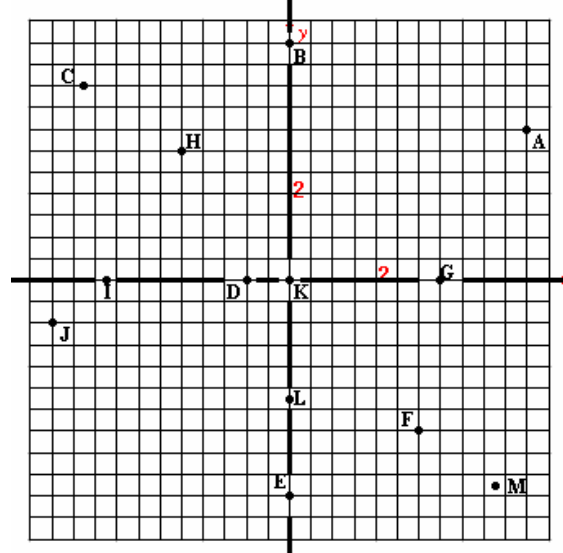
En los dos últimos meses de cada curso académico, a saber, mayo y junio de cada año, es cuando los buenos estudiantes dedican sus definitivos esfuerzos con vistas a alcanzar la meta propuesta, que no es otra que terminar la formación que ha recibido durante nueve meses con el mejor aprovechamiento posible, de acuerdo siempre con sus posibilidades. Desgraciadamente, en los tiempos actuales, esto no sucede así en un número significativo de estudiantes. Espero y deseo que tú te encuentres en el grupo de los alumnos positivos, esforzados y perseverantes, y lleves a buen término una máxima que sirve para todo en la vida: "Las carreras se ganan y se pierden, la mayoría de las veces, en los metros finales".

No eches en saco roto estas últimas semanas lo que te has sacrificado a lo largo de este curso. Realiza un empuje final, y tú mismo te alegrarás al final de tu carrera (curso actual). **Redir es obtener unos resultados satisfactorios;** y yo espero que tú consigas un rendimiento, al menos, aceptable.

?? ??

3.- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos representados en los ejes siguientes? Hazlo por orden alfabético. ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada decimal? ¿Cuáles son los puntos con alguna coordenada nula?

N O T A : cada cuadrito de la escala vale 1.

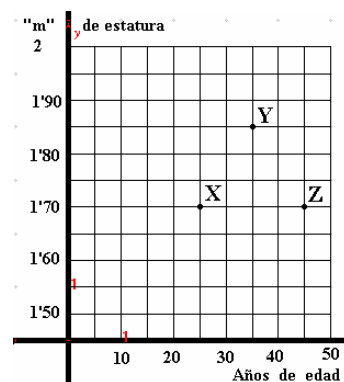


4.- Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:

A (-3, 7); B (0, -5); C (9/2, 8); D (-1'5, 0)
E (6, -5); F (-5/2, -8'5); G (0/4, 3).

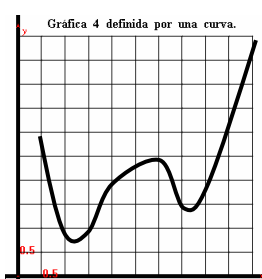
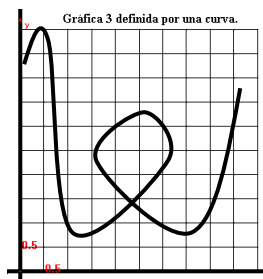
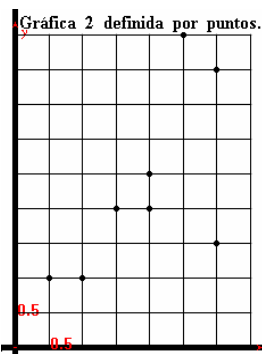
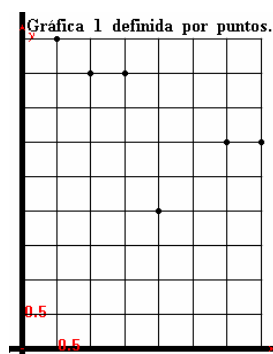
5.- En la gráfica siguiente se han representado la edad y la talla de varias personas. Después de observarla, responde si son ciertas o falsas estas afirmaciones:

- a) La edad mayor es la de la persona Y.
- b) La estatura mayor es la de la persona Z.
- c) La persona X tiene más estatura que la Z.
- d) La persona Y tiene más estatura que las personas X y Z.
- e) Las edades de X y Z son iguales.
- f) La estatura de X y Z es la misma.



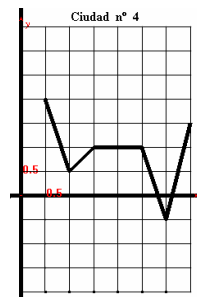
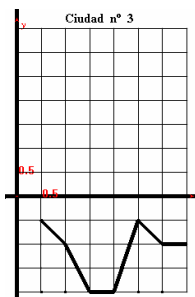
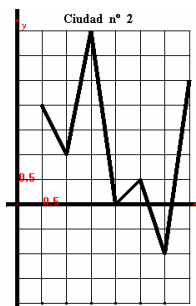
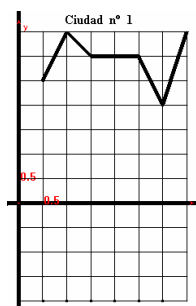
Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

6.- ¿Cuáles de las siguientes gráficas crees que representan funciones y cuáles no? Razona tus respuestas. N O I A : cada cuadrado de la escala vale 1.



7.- En las gráficas siguientes se representa la temperatura mínima obtenida cada día en una semana de invierno en distintas ciudades.

N O I A : cada cuadrado de la escala en el eje de ordenadas vale 1. En el eje de abscisas ponemos L, M, X, J, V, S y D.



- Si por lógica tuvieras que asignar cada gráfica a una de estas ciudades: Badajoz, Burgos, Teruel y Berlín, ¿cómo lo harías?
- ¿En cuál de las ciudades existe mayor oscilación en las temperaturas?
- Sólo en una de ellas el termómetro marcó un día 0 °C. ¿En cuál?

- ¿En cuál de ellas estuvieron siempre bajo cero?
- ¿Cuál es la máxima "t" de las gráficas? ¿Y la mínima?
- ¿Qué dominio y qué recorrido tiene cada una?
- ¿En cuál de ellas hubo un día + 3° C? ¿Qué día?

8.- Relaciona las magnitudes "cantidad de fotografías" y precio rellenando la tabla siguiente, realizando la gráfica y resolviendo si unes o no los puntos obtenidos.

Nº de fotografías	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Precio en €	1'50	3	4'50						

9.- Una vez finalices la tabla siguiente, realiza la gráfica correspondiente y decides si tiene sentido o no unir los puntos de cada par de valores. Las variables son la cantidad de litros de gasolina y el precio.

Nº de fotografías	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Precio en €	0'90	1'80		3'60					

+++++

Conversación entre unos jóvenes de Bachillerato del I.E.S. "Meléndez Valdés" en una de las clases de tutoría;

ZENÓN : "Pienso que es muy fácil criticar a los jueces porque no nos ponemos en su lugar. Impartir justicia es una tarea bastante difícil, y yo creo que los jueces lo hacen bien, aunque quizás se equivoquen a veces, como todos".

TOBIAS : "No estoy de acuerdo. Primero, porque para eso han estudiado su carrera, y segundo, porque condenan con mucha más facilidad las faltas o delitos de los pobres que las de los ricos".

NATIVIDAD : "Yo lo tengo muy claro, sobre todo después de ver los ejemplos de los juicios importantes de los últimos años. Primero, la mayoría de los jueces tienen siempre muy en cuenta a quién están juzgando, casi más en cuenta que aquello por lo que lo juzgan; segundo, sólo se atreven a aplicar bien la justicia cuando "el poderoso" está casi 'caído' o en decadencia total, porque si no es así la mayoría no se atreven".

ROSALÍA : "Además, cómo es posible que para dictar sentencias de cosas gordas y muy graves de gente 'pesada' se tarden tantos años y para juzgar a gente llana por cosas mucho menos importantes lo hacen enseguida, cuando debe ser igual para todos".

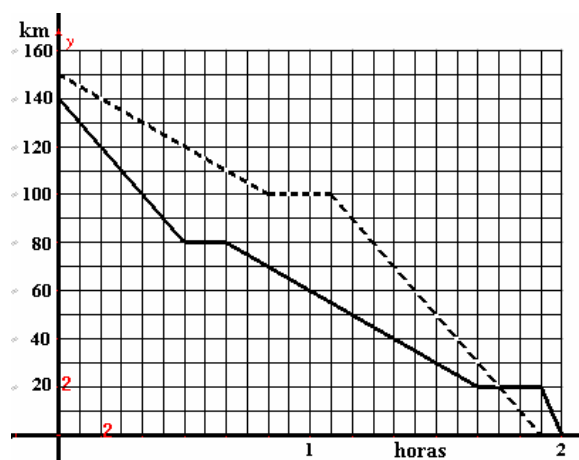
ELISEO : "Pues yo opino que la justicia que tenemos no es más que un fiel reflejo de la sociedad en que vivimos, así que...".

ESPERANZA : "Bueno, creo que generalizar conlleva siempre a generar juicios falsos de algunas personas, es decir, que habrá jueces cabales que siempre obran de acuerdo con su conciencia y otros que se dejan llevar del 'peso' de la persona a la cual juzgan".

Tú, ¿en qué opiniones te sitúas ?

=====

10.- El trayecto de vuelta a casa de dos familias en sus respectivos coches se ha representado en las gráficas siguientes. El continuo corresponde al coche "C - 1" y el trazo discontinuo al coche "C - 2".

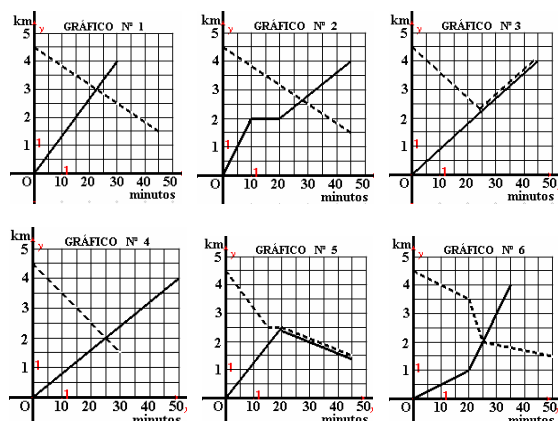


- ¿A qué distancia se encontraba cada uno del lugar de llegada? ¿Qué tiempo ha empleado cada uno en volver? Sin contar los descansos, ¿a qué velocidad media realizó el viaje de vuelta cada uno?
- A los 30 minutos de la salida, ¿dónde se encontraba cada uno? ¿Y pasadas 1 hora y 20 minutos?
- Señala los tramos de parada que hizo cada uno.
- ¿Se encontraron en algún lugar ambos? ¿A cuántos kilómetros de la llegada? ¿Qué tiempo quedaba a cada uno para llegar?
- El coche "C - 1" realizó el recorrido en tres tramos, y el "C - 2" en dos tramos. De los cinco tramos, ¿cuál fue el más veloz?

11.- En las gráficas siguientes se han representado seis situaciones distintas de dos peatones que recorren una distancia. En ellas se ha relacionado el tiempo tardado y la distancia de los trayectos. El peatón "A" viene representado por la línea continua y el peatón "B" por la línea discontinua. El "B" sale de una distancia de 4'5 km del lugar donde se encuentra "A". A continuación describimos las seis situaciones para que tú las identifiques con cada gráfica.

- Los dos peatones salen a la misma velocidad, se encuentran y emprenden el camino juntos al lugar de destino de "A".
- Los dos salen a la misma velocidad en el primer tramo. Después, "A" llega muy rápido en otro tramo y "B" realiza un tramo muy rápido para terminar con otro lento.
- Los dos realizan el recorrido en un solo tramo, y "A" hace su trayecto más rápido.
- El peatón "B" realiza un descanso y al final de ese reposo se une con "A" para cubrir juntos el camino hasta el destino de "B".

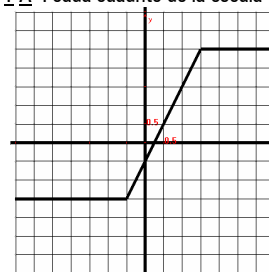
- Sin descansar ni cambiar de ritmo, "A" hace el trayecto que más tarda y "B" el más rápido.
- El peatón "A" descansa y el "B" hace todo sin descansar.



- ¿A qué distancia de su salida estaba el destino de "A"? ¿Y el de "B"?
- ¿Cuánto tardaron cada uno de ellos en cada recorrido?
- En la gráfica en la que "B" descansa, ¿a los cuántos minutos y a qué distancia de la salida de "B" se encontraron?
- ¿Quién hizo el mayor descanso y de cuánto?

12.- En la siguiente gráfica se ha representado una función ("f"). ¿Cuánto vale $f(x)$ para $x = 2$? ¿Y para $x = -3$? ¿Cuánto vale "x" para $f(x) = -1$? ¿En qué punto aproximado la variable dependiente es nula?

NOTA : cada cuadrito de la escala vale 1.



13.- ¿En cuáles de los apartados las dependencias descritas corresponden a funciones y en cuáles no?

- El área de un círculo y su radio.
- Un número y su cuadrado.
- A cada estudiante de una clase su talla.
- El volumen de un hexaedro y su arista.
- La temperatura de un lugar y su altitud.
- Cada número natural y la suma de sus divisores.
- A cada provincia española le hace corresponder sus municipios.
- El espacio recorrido por un coche y tiempo empleado.

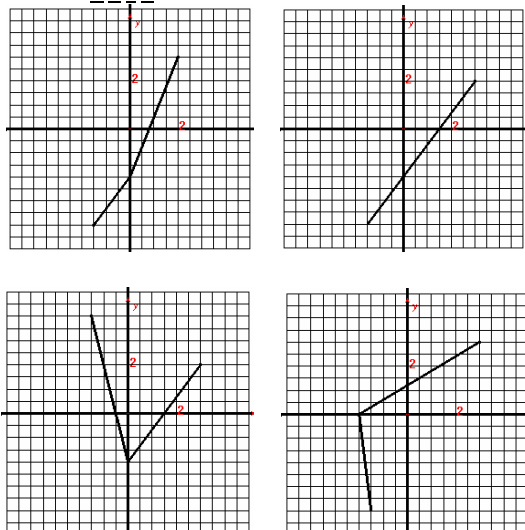
Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

14.- Conociendo la siguiente tabla de valores,

x	6	0	-3
f(x)	4	-4	-8

Averigua cuál de las siguientes gráficas es representativa de la función de esa tabla.

NOTA : cada cuadrito de la escala vale 1.

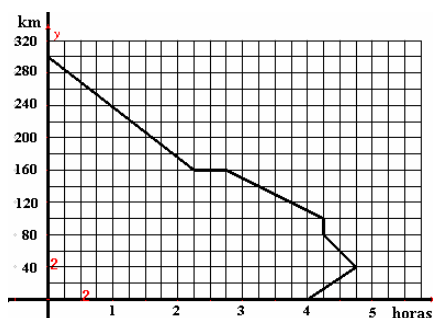


15.- Un sótano dedicado al aparcamiento de coches tiene las siguientes tarifas:

- Un mínimo (sólo por la vigilancia) de 90 céntimos de euro.
- La 1ª hora o fracción (parte de ella) a 1'40 €.
- La 3ª hora o fracción a 1'20 €.
- Y la 4ª hora y siguientes a 1 €.

Realiza la gráfica que relaciona la variable tiempo aparcado (independiente) y la dependiente coste del aparcamiento para un periodo de 7 horas.

16.- Detecta los posibles errores que tiene la siguiente gráfica que representa el trayecto de vuelta a casa de las vacaciones de una familia.



17.- Tenemos una función definida por el siguiente texto:

“f(x) que asocia a cada número entero el 4”.

¿Cuál/es de las siguientes afirmaciones crees que es correcta?

- El punto D (1'25, 4) pertenece a la gráfica de dicha función.
- El punto E $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ pertenece f(x).
- El punto F (0, 4) pertenece a la gráfica.
- El punto G (-9, 4) pertenece a la gráfica.
- El punto H $(\sqrt{3}, 4)$ pertenece a la gráfica.
- El punto I (4, -2) pertenece a la gráfica.

18.- Una función viene definida por el siguiente texto:

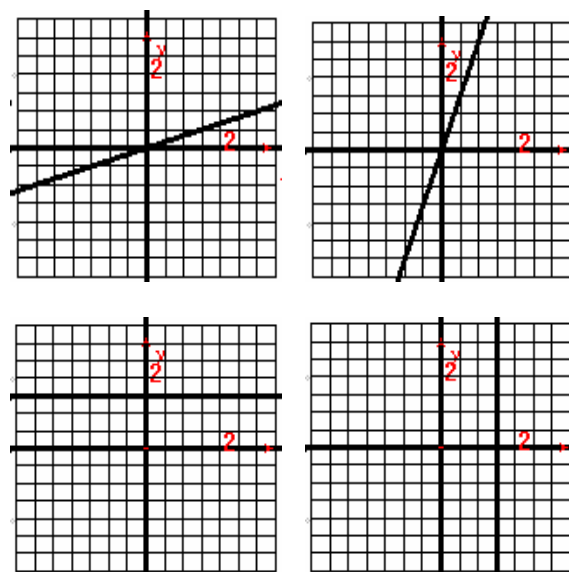
“Asocia a cada número su triple”.

¿Cuál/es de las siguientes ecuaciones (expresiones algebraicas) le/s corresponde/n?

- $f(x) = 3 + x$
- $f(x) = \frac{1}{3}x$
- $f(x) = \frac{x}{3}$
- $y = x \cdot 3$
- $y = x + \frac{1}{3}$
- $f(x) = 3x$

19.- ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde a la función del ejercicio anterior expresada verbalmente?

NOTA : cada cuadrito de la escala vale 1.



20.- ¿Cuáles de las siguientes tablas corresponden a funciones y cuáles no?

a)

x	y
6	5
6	2
4	0
4	-3
0	4
-1	8
-5	10

b)

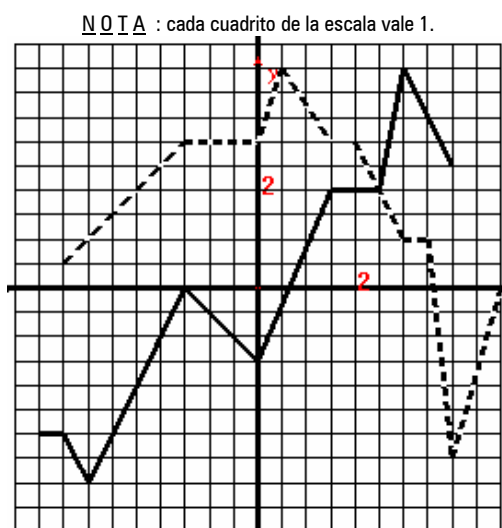
x	f (x)
8	2
4	1
0	0
-1	-0,25
-2	-0,5
-6	-1,5
-11	-2,75

c)

x	y
12	7
7	2
2	-3
0	2
-3	-8
-8	-13
-15	-20

21.- Deduce cuál es la expresión algebraica (ecuación) correspondiente de la tabla del ejercicio anterior que representa a una función.

22.- Después de observar las dos gráficas representadas, rellena el cuadro en tu cuaderno y contesta a las preguntas siguientes de abajo.

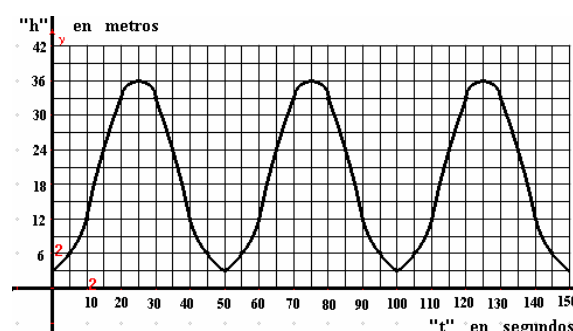


	Gráfica continua	Gráfica discontinua
Dominio		
Recorrido		
Crecimiento		
Decrecimiento		
Máximos		
Mínimos		
Discontinuidad		
Periodicidad		

- Señala los intervalos en los que cada gráfica tiene variable dependiente menor de 0 ($x < 0$). E igual para variable independiente mayor de 0 ($x > 0$).
- ¿En qué puntos cortan o tocan a los ejes cada una?
- ¿Para qué valores de "x" hay mayor tasa de variación entre una gráfica y otra? ¿Cuál es dicha tasa?

23.- Ezequiel ha llevado a una tienda-estudio de fotografías su carrete de 30 fotos para el revelado. Le cobran 4 € por revelado más 1'50 € por cada foto. Representa la gráfica de la función del precio en función de la cantidad de fotos y estudia su dominio, recorrido, crecimiento o decrecimiento, discontinuidades, máximos y mínimos.

24.- En las fiestas del Carmen va a venir una gran noria. En cada uno de los viajes que se dan con cada billete, la noria da 10 vueltas. En la gráfica siguiente se representa la función correspondiente al movimiento de una de las cubetas de dicha noria.



- ¿Es una gráfica periódica? ¿Por qué sí o no?
- ¿Cuál es el período?
- ¿A qué altura máxima del suelo llega? ¿Cómo se llama a esta característica de la función? ¿Dónde tiene esta función el mínimo?
- ¿Cuántos segundos tarda en dar la noria una vuelta completa?
- Señala el intervalo creciente, decreciente y las tasas de variación de cada uno de ellos en la vuelta 2ª.
- ¿A qué altura se encuentra la cubeta que se describe cuando la noria lleva 3 minutos de ese viaje?
- ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cubeta se encuentre en la vuelta 7ª a 12 metros del suelo en el tramo ascendente? ¿Y esa misma vuelta pero en el tramo descendente?
- ¿Qué tiempo se tarda en las 10 vueltas de cada viaje?

25.- ¿En cuáles de los apartados las dependencias descritas corresponden a funciones y en cuáles no?

- A cada persona le hacemos corresponder su N.I.F.
- A cada número le asocia su raíz cuadrada.
- El tiempo que se tarda en realizar una obra y la cantidad de operarios que han trabajado.
- A cada número le hace corresponder su raíz cúbica.
- El cariño de una persona y su altura.
- A cada número le hace corresponder sus factores primos.
- La edad de una persona y su peso.
- El coste de la electricidad y los kw consumidos.

26.- A continuación tienes una serie de expresiones algebraicas (ecuaciones) que definen a funciones. Expresa mediante lenguaje normal (usual, en expresión verbal) cada una de ellas.

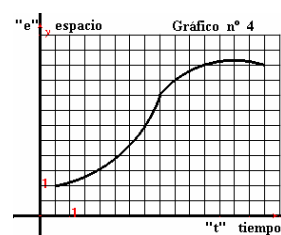
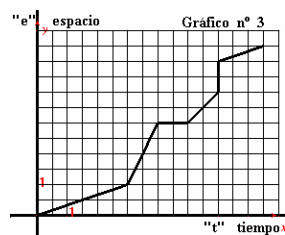
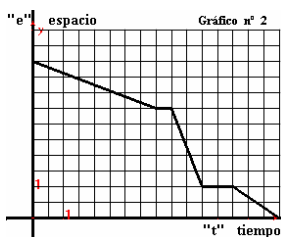
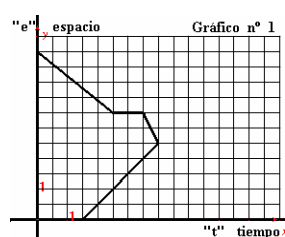
a) $y = 5x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

c) $y(x) = x^2 - 6$

d) $f(x) = \frac{2x + 10}{3}$

27.- ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa a movimientos (de personas andando, ciclistas, coches u otros móviles, etc.) y cuáles no? ¿Por qué?



28.- La expresión algebraica de una función es:

$$y = \frac{5}{3-x}$$

¿Cuál de los siguientes valores: -3 , $-2,5$, 0 , $1,25$, 3 y 8 , de la variable independiente no pertenece a su dominio? ¿Por qué?

29.- En la gráfica de una función, ¿una recta paralela al eje de ordenadas puede cortar a dicha gráfica en dos puntos? ¿Y si la recta es perpendicular al eje de ordenadas? Razona tus respuestas.

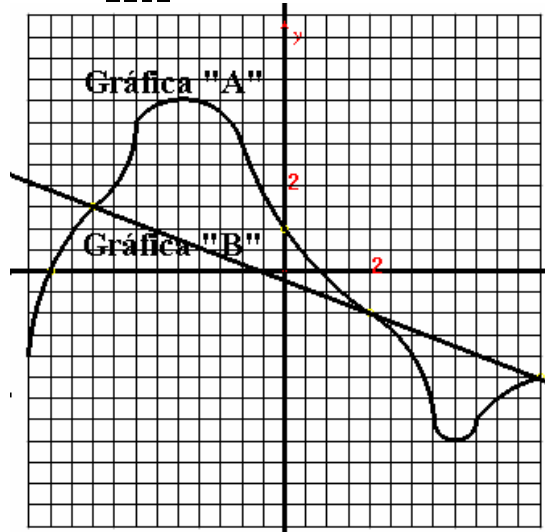
30.- Cuando al representar la gráfica de una función la escala de valores de la variable independiente o dependiente es muy extensa y sólo nos interesa representar unos pocos valores consecutivos, ¿cómo deberemos dibujar el inicio del eje donde vamos a omitir los valores

precedentes? Por ejemplo, vamos a representar la evolución de la fiebre en un enfermo durante las 24 horas del día, pero sólo queremos que aparezca en la gráfica los valores del último tercio del día.

31.- Se han representado dos funciones, "A" (trazado curvo) y "B" (trazado recto).

- ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes de ambas gráficas?
- ¿Cómo es función "A" en el intervalo entre " $x = -11$ " y " $x = -9$ "? ¿Y entre " $x = 4$ " y " $x = 7$ "? Señala sus tasas de variación.
- ¿Hay algún mínimo en las funciones? ¿Dónde?
- ¿Entre qué valores de la variable independiente se cumple que la función "A" es positiva?
- En "A", ¿para qué valores de " x " se cumple que " $y > 2$ "?
- ¿Cuál es el intervalo (tramo) en el que se cumple que la función "A" $>$ que la función "B"? ¿Y en qué intervalo menor?
- Señala las coordenadas de los puntos que cumplen que la función "A" = la función "B".

NOTA: cada cuadrito de la escala vale 1.



32.- A ver qué grado de comprensión de los conceptos has adquirido. Responde a las preguntas siguientes de forma razonada.

- Si en una función se cumple que $f(-5) > f(-9)$, ¿se puede deducir con toda seguridad que es decreciente en ese intervalo?
- Señala si las gráficas de las dependencias siguientes pueden ser continuas o no.
 - Los km recorridos en una etapa ciclista y la altitud alcanzada, o sea, el perfil de la etapa.
 - Cantidad de fotocopias y sus precios.
 - Variación del peso de un bebé en su primer año de vida.
 - El coste de un paquete postal con su peso.

33.- Dibuja en tu cuaderno, en cuatro ejes de coordenadas distintos (dos y dos, o sea, dos gráficas), gráficas con las siguientes condiciones:

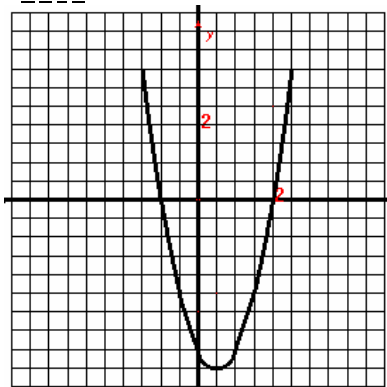
- Una que sea continua, con trazado curvo, sólo descendente, con dominio $[-4, 6]$ y recorrido $[0, 5]$.
- Otra discontinua, con dos trazados rectos.

34.- Se dispone de una cuerda de 50 cm para formar un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 10 cm. ¿Cuánto medirán los lados iguales? Es fácil, verdad. Pues 20 cm cada uno. ¿Y si el lado desigual lo formamos con 8 cm? Pues está claro, los otros dos medirán 21 cm, ya que el perímetro del triángulo no varía, es siempre de 50 cm. Bien, pues realiza una tabla de valores con dominio entre 4 y 18 (tú sólo haces los valores pares). Representa su gráfica. ¿Tiene sentido unir los puntos representados? Por último, obtener la expresión algebraica (ecuación) que define a la función que hemos descrito.

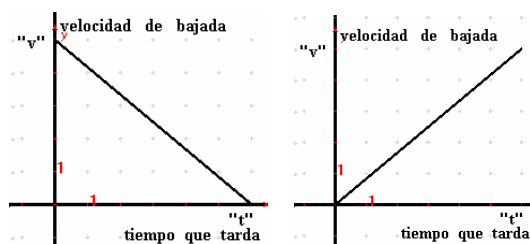
35.- ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponde a la gráfica dibujada a continuación?

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x - 8 \\ y &= x^2 - 2x - 8 \\ y &= 3x^2 + 8 \\ y &= -x^2 + 4x - 8 \end{aligned}$$

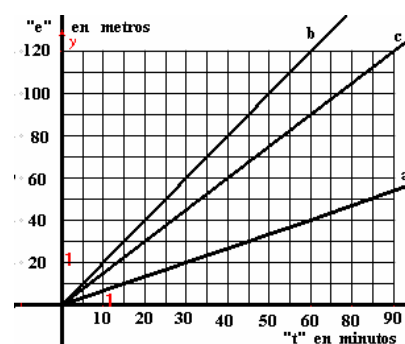
NOTA: cada cuadrado de la escala vale 1.



36.- ¿Cuál de las dos gráficas siguientes representa la dependencia entre el tiempo que tarda una persona en resbalar por un tobogán de un parque acuático y la velocidad con que se cae de él?



37.- En los ejes de coordenadas se han representado las gráficas que relacionan las velocidades (tiempo/espacio) de un coche, una moto y un ciclista que parten al mismo tiempo para hacer un recorrido.



- Señala qué recta (¿a, b, c?) debería ser la gráfica lógica de cada recorrido.
- ¿Cuál es la velocidad media de cada uno?

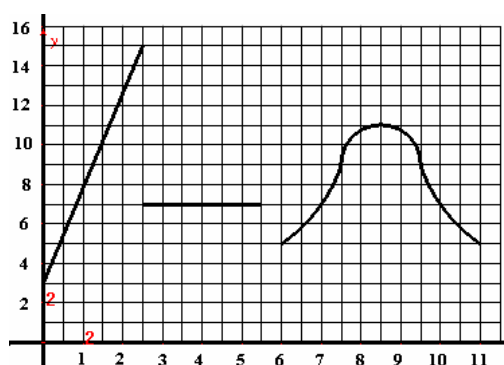
38.- Un domingo, después de haber pasado el fin de semana en un cortijo que distaba algunos kilómetros de su pueblo, Doroteo se levanta temprano y decide dar un buen paseo que terminará en el pueblo. Para dibujar la gráfica de este paseo se dan los siguientes datos:

- El cortijo está a 5 km del pueblo.
- En la 1ª hora se aleja 6 km.
- Después hace un descanso de 15 minutos.
- A continuación anda, ya en dirección al pueblo, hora y media a una velocidad de 4 km/h.
- Vuelve a descansar durante media hora.
- Por último, se pone otra vez a andar y llega al pueblo a los 45 minutos del último descanso.

39.- ¿Cuáles de las siguientes características son magnitudes y cuáles no?

- El radio de la rueda de una moto.
- El afecto que una persona tiene a otra.
- El espacio que separa dos ciudades.
- El olor de una bella flor.

40.- Los tres trazos de la gráfica representan a una función. Responde a las preguntas.



- ¿Cuáles son las discontinuidades que aparecen?
- Señala los intervalos crecientes o decrecientes donde los haya, indicando las tasas de variación de cada uno.
- ¿Hay algún/os máximo/s o mínimo/s?
- ¿En qué intervalo hay un tramo de función constante?
- Indica los valores de $f(0)$, $f(2^+)$, $f(3^-)$, $f(5)$, $f(6)$ y $f(11)$.
- ¿Cómo es la función en $f(7)$ y en $f(10)$?

41.- El profesor de Matemáticas encarga hacer una gráfica en la que se represente la dependencia entre estas dos magnitudes:

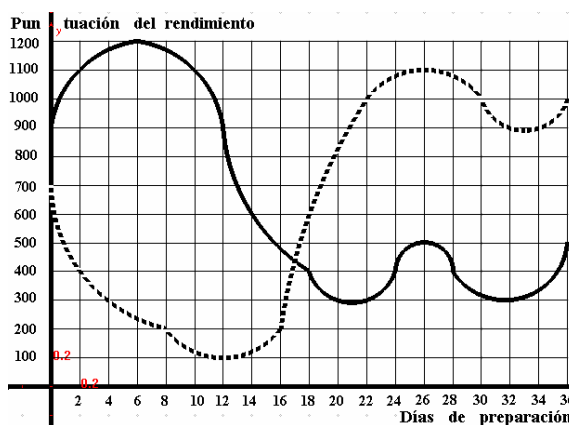
- Los estudiantes de una clase de 2º de E.S.O.
- Su estatura.

¿Crees que habría que unir los puntos que se obtienen en dicha dependencia? ¿Por qué sí o por qué no?

42.- Las gráficas representadas en la página siguiente relacionan los días de preparación –casi dos meses, previos a una competición– de dos atletas y sus puntuaciones de rendimiento global, valorado a través de una serie de parámetros deportivos. La gráfica de línea continua corresponde al **atleta nº 1**, que llamaremos **Sergio**, y la discontinua al **atleta nº 2**, que llamaremos **Victoria**.

Realiza el estudio de estas gráficas respondiendo a las preguntas relacionadas a continuación de la gráfica y siguiendo los pasos explicados en la pregunta 13.6

Los ejercicios sobre gráficas son un poco largos, como habrás observado, sobre todo éstos de análisis de varias, pero para aprender bien a interpretar las gráficas no hay más remedio que saber bien todos los conceptos.



NOTA : Fíjate detenidamente en el ejemplo resuelto de la pregunta 13.6 que te ayudará bastante en este ejercicio.

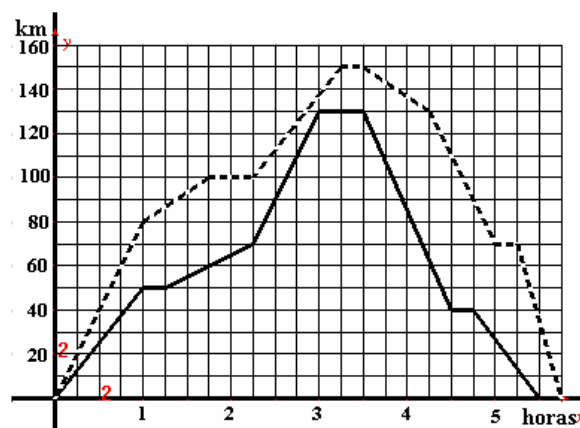
- ¿Cuántos días duró la preparación? ¿Qué rendimiento (puntuación global de la preparación deportiva) final obtuvo cada uno? ¿Qué diferencia hubo entre ellos y a favor de quién?
- ¿Quién empezó la preparación con una base deportiva mejor? ¿Con cuántos puntos de diferencia?
- ¿A los cuántos días alcanzó Sergio su mejor rendimiento deportivo? ¿Y Victoria? ¿Cuáles fueron sus respectivas puntuaciones en esos días? ¿Cómo llamamos a estas dos situaciones en las características de las funciones?
- ¿Entre qué días se produjo la mayor diferencia entre sus rendimientos? Aproximadamente, ¿qué diferencia de valores había entre ellos en ese intervalo?
- ¿En qué días, aproximadamente, tuvieron Sergio y Victoria las mismas puntuaciones a lo largo de toda la preparación? ¿Cuáles eran esas puntuaciones?
- ¿Alguna vez llegaron a tener un rendimiento idéntico en un mismo día? ¿Qué día y qué puntuación fue la coincidente?
- ¿Entre qué tramos el rendimiento de Sergio fue superior al de Victoria? ¿Y viceversa?
- ¿Qué día/s decayó más el rendimiento de cada uno y a cuánto descendió en cada caso su puntuación? ¿Cómo llamamos a esta característica o propiedad de las funciones?
- Señala los intervalos de crecimiento, decrecimiento y tasas de variación obtenidos a lo largo de la preparación por cada uno de ellos. ¿Entre qué días se produjo el mayor descenso de Sergio y el mayor crecimiento de Victoria en sus puntuaciones?
- ¿Cuál es la puntuación más repetida por Sergio en toda su preparación?
- A tu juicio, ¿quién crees que realizó la mejor preparación. ¿Por qué?

43.- Dos amigos salen a las 9 de un domingo con sus bicicletas a mover un poco las articulaciones y elevar a ratos sus p.p.m. (pulsaciones por minuto) activar su corazón. Recorren 15 km en la primera hora. Descansan 30 minutos, y continúan su camino durante dos horas hasta el km 55 del lugar de origen. Allí, durante 2 horas, pasean por el lugar, comen y se distraen. Después, emprenden el camino de regreso a una velocidad lenta de 250 metros por minuto durante 1 hora. Paron media hora a refrescar un poco, y siguen dando a los pedales 60 minutos a una velocidad considerable de medio hectómetro cada 6 segundos. Descansan otros 30 minutos disfrutando de la buena tarde, y hacen el último tramo hasta el pueblo a 20 km/h, llegando a las 6 de la tarde.

Dibuja la gráfica de la dependencia entre la distancia y el tiempo de la ruta ciclo-turista descrita.

NOTA : toma la escala de la variable independiente de $\frac{1}{2}$ hora en $\frac{1}{2}$ hora y la de la variable dependiente en 5 en 5 km.

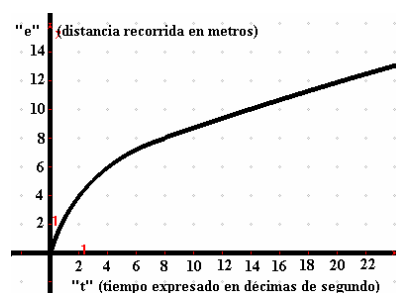
44.- En los ejes siguientes se muestran dos gráficas que representan los recorridos de dos autobuses de cercanías —ida y vuelta a las poblaciones cercanas— de una gran ciudad. La gráfica de trazo continuo es la de la línea de autobuses n° 1 y la de trazo discontinuo de la línea de autobuses n° 2. Responde a las preguntas que aparecen debajo.



- ¿Qué magnitudes representan las variables independiente (x) y la dependiente (y)?
- ¿Cuántos km hace cada uno de ellos en el trayecto completo de ida y vuelta? ¿Y qué tiempo emplea cada uno en las idas, en las vueltas y en total?
- Señala los tramos de parada (“descanso”) de cada uno de ellos, indicando a qué distancia se encuentran del inicio y el tiempo empleado en cada parada.
- ¿Qué velocidades medias alcanzaron cada uno en la 1ª hora del recorrido?

- ¿Con qué velocidad media terminó cada uno el último tramo de la vuelta?
- ¿Qué tramo de ida o vuelta realiza cada uno de ellos a más velocidad? ¿A qué velocidad? ¿Y cuál a menos y a qué velocidad? Los tramos citados en cada uno, ¿son crecientes o decrecientes?
- En estas gráficas hay tramos crecientes y decrecientes. Si en lugar de ser viajes de ida y vuelta fueran sólo de ida, ¿habría tramos crecientes y decrecientes? Razona tu respuesta.
- ¿Cuál es la situación de cada uno a la hora de salir? ¿Y a los 135 minutos de la partida? ¿Qué están haciendo ambos entre las 3:15 y 3:30 h después de iniciar el recorrido?
- ¿Cuál es la distancia entre uno y otro a las 5:15 h de la salida?
- ¿Cuánto tiempo lleva empleado cada uno a los 60 km del viaje de ida? Describe la situación de cada uno a los 130 km del viaje de vuelta? ¿Qué tiempo queda a cada uno para concluir la vuelta cuando faltan 20 km para llegar?
- Una vez pasada una hora, ¿en qué momento se encuentran menos distantes uno de otro? ¿Cuántos km lo separan?
- ¿Cuánto tiempo ha pasado cuando se encuentran separados uno de otro a la mayor distancia? ¿Cuántos km lo separan?

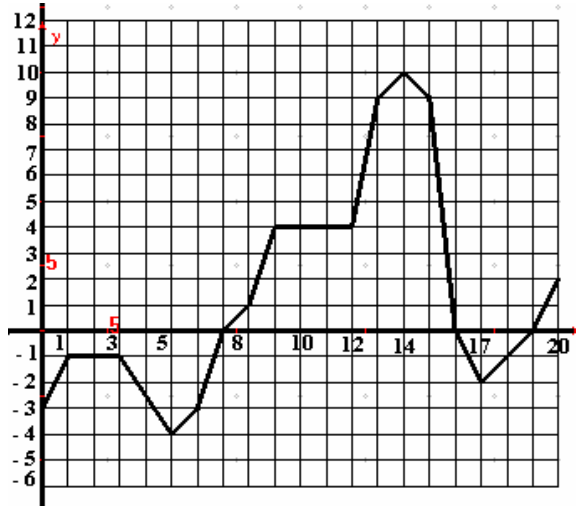
45.- Se ha realizado una gráfica en la que se relaciona la distancia que recorre un velocista en los dos primeros segundos de la carrera de 100 metros lisos. Descríbela. La gráfica es la siguiente:



46.- Dada una función “f” que asocia a cada número entero su doble menos 5 unidades, calcula lo siguiente:

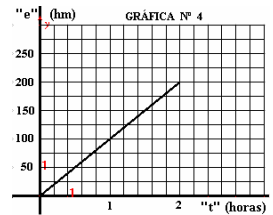
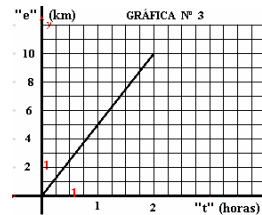
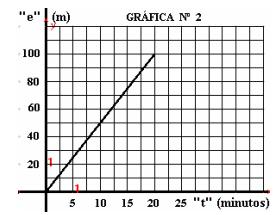
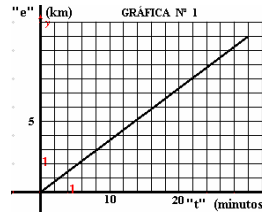
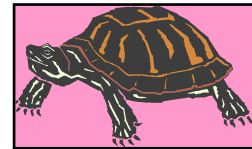
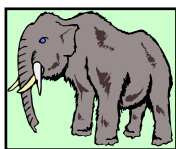
- $f(-11)$, $f(-8)$, $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$ y $f(10)$.
- ¿Para qué valores de la variable independiente la función vale : $f(x) = -10$, $f(x) = -5$, $f(x) = -3$, $f(x) = 1$ y $f(x) = 4$?

47.- En la gráfica siguiente se ha representado la evolución de las temperaturas de los veinte primeros días de un mes de febrero. Como ves, en el **eje de abscisas** se han representado los días y el **eje de ordenadas** las temperaturas medias de cada uno de ellos. Después de observar con detenimiento dicha gráfica, responde a las preguntas formuladas a continuación.



- ¿Qué temperatura hizo el día 6 de ese mes? ¿Y el día 13? ¿Y el último día del dominio representado?
- ¿Qué días la temperatura estuvo a 0°C ? ¿Y a 4°C ? ¿Y a 1° bajo cero? ¿Y a 1° sobre cero?
- Señala las coordenadas del máximo y el mínimo de la gráfica.
- En la gráfica aparecen cuatro tramos crecientes. Señala el de mayor tasa de variación absoluta de los cuatro y di cuál es esa tasa.
- De los dos intervalos decrecientes de la gráfica, señala el de menor tasa de variación absoluta y di cuál es dicha tasa.
- ¿Cuál es el recorrido de dicha gráfica?

48.- Se han representado las gráficas de los trayectos recorridos por una tortuga, un elefante, un caballo y un deportista. El orden de menor a mayor velocidad coincide con el descrito anteriormente. Señala cuál es la velocidad de cada uno y cuál es la gráfica correspondiente a dichos movimientos.



Es muy frecuente opinar que gran culpa de la falta de valores y deficiencias de nuestros chicos y jóvenes la tiene la televisión. Si así fuera, es que la calidad de la educación que damos muchos padres de hoy día está por debajo de lo que debiera ser, porque habría razones de más para preocuparse por la formación de nuestros hijos. Es indudable que la TV de hoy día es mayoritariamente basura que no ayuda nada a la educación, antes al contrario, ya que casi todo lo que transmite es lo opuesto a una verdadera escala de valores; pero realmente donde se inicia la consecución o la falta de unos valores positivos para la educación de nuestros chicos y jóvenes es en la familia.

Los papeles que debemos tener los padres con nuestros hijos no son nada fáciles, incluso hay que saber diferenciar bien el papel de padre y el de madre, porque no deben ser los mismos.

Se entiende a veces, de forma errónea en mi opinión, que a los niños no se les debe "traumatizar" con tareas o deberes, que deben aprender jugando, que no hay que pasarse en ciertas exigencias, etc., cuando lo mejor es habituarlos cuanto antes a sus trabajos, al esfuerzo y a las obligaciones. Actuamos de forma más cómoda tomando el papel de amigos de nuestros hijos en lugar de mantener siempre el papel de padres, con lo que nos resulta más llevadero el ceder que ellos que sostener una postura decididamente firme. Cuando tenemos a los hijos pequeños soltamos a veces estas expresiones: "Qué encanto de niño; me lo comería", y con el paso de los años nos arrepentimos de no habérnoslo "comido" con todo el cariño, afecto y comprensión posibles y de no haberlo educado convenientemente, sea por esto, por eso o por aquello.



Y también, pensamiento muy extendido, se cree que el colegio o el instituto van a suplir las faltas de casa y sustituir en cierto modo el papel de los padres. Y los que así piensan están totalmente equivocados, porque la educación y los valores deben provenir, casi en su totalidad, de haberlos "mamado" en casa.

13.9.- Funciones cuya representación es una recta.

A las funciones cuyas gráficas son rectas, se las denomina **funciones lineales**. Son aquellas funciones cuya ecuación (representación algebraica) es de la forma " $y = mx + n$ ", donde " m " y " n " son números cualesquiera.

☞ Cuando " $n = 0$ ", $\Rightarrow$ " $y = mx + 0$ ", es decir, $\Rightarrow$ " $y = mx$ " $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Se llaman **Funciones de PROPORCIONALIDAD DIRECTA**.

☞ Cuando " $n \neq 0$ ", $\Rightarrow$ " $y = mx + n$ ", $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Se llaman **Funciones AFINES**.

☞ Cuando " $m = 0$ ", $\Rightarrow$ " $y = 0 \cdot x + n$ ", es decir, $\Rightarrow$ " $y = n$ " $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Se llaman **Funciones CONSTANTES**.

Hay algunas gráficas que son rectas y, sin embargo, no son representativas de funciones. Por ejemplo, como veremos más adelante en el tema, aquellas que son rectas paralelas al eje de ordenadas; éstas no son funciones porque para un valor de " x " (variable independiente) existe más de un valor de " y " (variable dependiente), y como ya sabemos (ver pregunta 13.4) una función sólo tiene un único valor de " y " para cada valor de " x ". Serían funciones cuyas ecuaciones son del tipo " $x = k$ ".

Estudiemos más detenidamente cada una de las funciones mencionadas.

13.9.1.- Funciones de PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

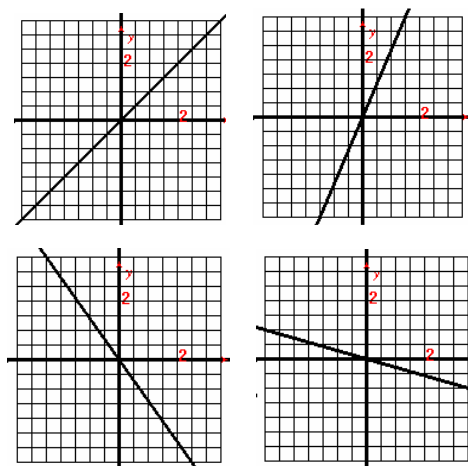
Las funciones de la forma " $y = mx$ " ($m \neq 0$) son **funciones de proporcionalidad directa**, es decir, representan la relación o dependencia entre dos **magnitudes** que son **directamente proporcionales** —repasar conceptos en el tema 6—, que son aquellas en las que al doble de una corresponde el doble de la otra, a la mitad la mitad, al triple el triple, a la $\frac{3}{4}$ partes de una las $\frac{3}{4}$ de la otra, etc. En ellas, la letra "**m**" de su ecuación representa a la constante de proporcionalidad, o sea, el número constante que nos sirve para ir calculando los valores de " y " al ir dando valores a la " x ".

Ejemplos de magnitudes directamente proporcionales:

- Los kg de alimentos y su coste.
- El espacio recorrido por un móvil a velocidad constante y el tiempo empleado.
- Los km recorridos por un taxi y el precio del viaje.
- La cantidad de fotocopias y su coste.
- ... *A ver si sabes tú otros ejemplos* ...

Cada uno de los ejemplos anteriores es una relación de proporcionalidad directa, con lo que todos son funciones y tienen sus gráficas lineales.

La gráfica de todas estas funciones son **rectas que pasan por el origen de coordenadas**, es decir, por el punto (0,0), como las cuatro gráficas siguientes.



Estas cuatro gráficas, y las de los ejemplos anteriores de relaciones entre magnitudes, si las hiciéramos, tienen como ecuación representativa:

$$y = mx$$

NOTA: En todas las gráficas que no se especifique otra cosa, cada cuadrado de la escala vale 1, tanto del eje de abscisas como del eje de ordenadas.

A la constante de proporcionalidad, “**m**”, se le llama **pendiente de la recta, y mide su inclinación** (ángulo que forma con el sentido positivo del eje OX, o sea, con el eje de abscisas; a medida que la pendiente es mayor, mayor va siendo la inclinación).

La pendiente (**m**) de una recta de función de proporcionalidad *-que pasa por (0,0)-* se calcula dividiendo cualquier valor de la variable dependiente “**y**” entre su correspondiente valor de la variable independiente “**x**”.

$$m = \frac{y}{x}$$

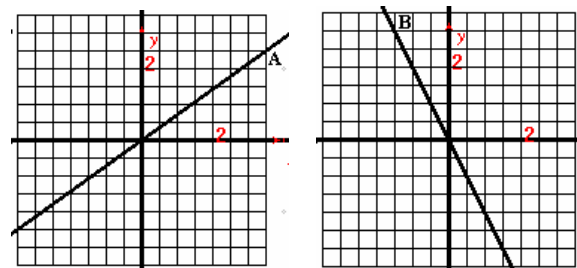
La pendiente (**m**) es la variación (positiva o negativa) que experimenta la “**y**” cuando aumenta la “**x**” en una unidad. Veamos:

☞ Si $m > 0$ (positiva), la recta está situada en el primer y tercer cuadrante, y es ascendente (creciente), porque cuando aumenta la “**x**”, aumenta la “**y**”.

☞ Si $m < 0$ (negativa), la recta está situada en el 2º y 4º cuadrante, y es descendente (decreciente), porque cuando aumenta la “**x**”, disminuye la “**y**”.

Veamos algunos ejemplos:

Punto A (7, 5) $\rightarrow y = \frac{5}{7}x$	Punto B (-3, 6) $\rightarrow y = -\frac{6}{3}x = -2x$
$y = mx \rightarrow m = \frac{y}{x} = \frac{5}{7}$	$y = mx \rightarrow m = \frac{y}{x} = \frac{6}{-3} = -2$



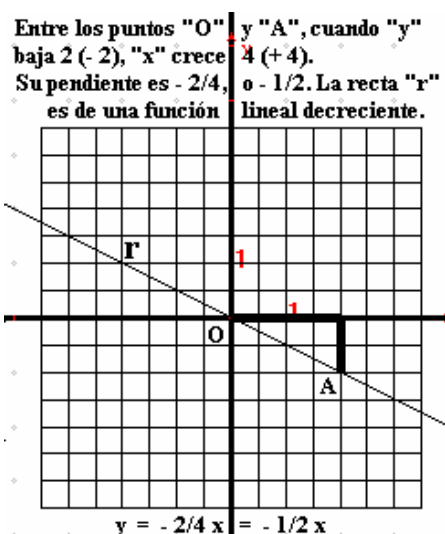
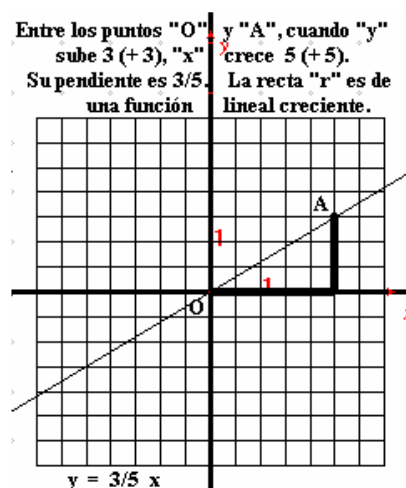
Las dos rectas anteriores representan funciones lineales de proporcionalidad directa, porque pasan por el origen (0, 0). La de la izquierda de pendiente positiva y la de la derecha negativa.

Analicemos sus características:

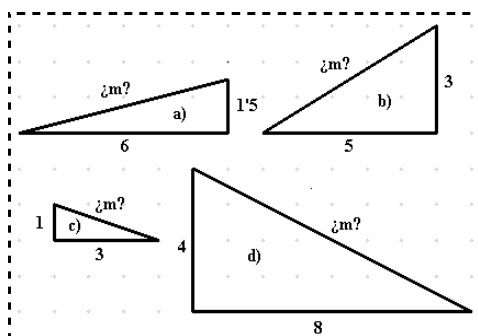
1ª recta:	◦ Pendiente $\rightarrow m = \frac{5}{7} > 0$ ◦ Recta creciente ◦ Cuando aumenta “x” $\rightarrow$ aumenta “y”
-----------	---

2ª recta:	◦ Pendiente $\rightarrow m = \frac{6}{-3} = -2 < 0$ ◦ Recta decreciente ◦ Cuando crece “x” $\rightarrow$ decrece “y”
-----------	---

Seguimos con los ejemplos 3º y 4º. En el 3º, la función lineal representada tiene pendiente positiva (recta ascendente), y en el ejemplo 4º, pendiente negativa (recta descendente). Veamos más detalles:



EJERCICIO.- Averigua la pendiente de las rectas que contienen a las hipotenusas de los siguientes triángulos rectángulos:



¿Recuerdas las reglas de tres (simples y compuestas), o los porcentajes, o los repartos proporcionales, o los problemas de interés simple? Todo esto lo estudiamos en el tema 6 (La proporcionalidad). En todos estos problemas se relacionan magnitudes. Bien, pues si representamos gráficamente las relaciones de magnitudes directamente proporcionales obtenemos siempre una recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0), es decir, son gráficas de funciones lineales. Por ello, las funciones lineales de la forma " $y = m(x)$ " se llaman también **funciones de proporcionalidad directa**, porque en ellas se relacionan magnitudes que son directamente proporcionales. Las pendientes de estas rectas, " m ", **representan el coeficiente, factor o constante de proporcionalidad**.

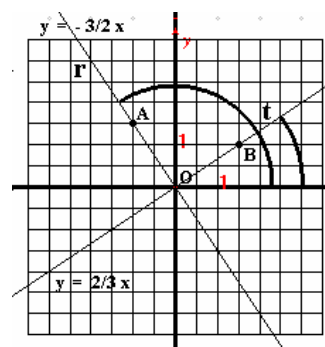
La **inclinación de una recta** es el **ángulo** que forma ésta **con el eje de abscisas**, tomando el sentido positivo. Lógicamente, ese ángulo depende de la pendiente (" m ") que tenga dicha recta, o sea, a mayor pendiente, mayor ángulo (inclinación).

∠ Si $m > 0$ (positiva), el **ángulo** que forma con el eje **OX** es **agudo**.

∠ Si $m < 0$ (negativa), el **ángulo** que forma con el eje **OX** es **obtuso**.

∠ Si $m = 0$ (nula), el **ángulo** que forma con el eje **OX** es **0°**.

Veamos ejemplos de dos funciones, una de pendiente positiva y otra negativa.



En la recta "t", como tiene pendiente positiva (mayor de 0, o sea, $2/3$), el ángulo de su inclinación es agudo.

En la recta "s", como tiene pendiente negativa (menor de 0, o sea, $-3/2$), el ángulo que forma su inclinación es obtuso.

Observa que cuando dos rectas son perpendiculares, como sucede en este caso con las rectas "r" y "t", sus pendientes son opuestas e inversas.

Una función lineal la podemos reconocer con :

⇒ El estudio (análisis) de si al doble le corresponde el doble, a la mitad la mitad, al triple el triple, a la octava parte la octava parte, etc. El test de proporcionalidad directa.

⇒ Comprobando si los cocientes entre parejas (pares de valores) son siempre iguales, con lo que hay constante (factor o coeficiente) de proporcionalidad (m).

⇒ Observando si su gráfica pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0).

¿ Cómo podemos representar la gráfica de una función lineal de proporcionalidad directa conociendo su expresión algebraica, es decir, su ecuación ? Veamos:

➡ La función lineal es una recta.

➡ Sabemos que pasa por el origen de coordenadas, punto (0, 0).

➡ Obteniendo las coordenadas de cualquier otro punto de la recta ya tenemos su gráfica, porque una recta queda determinada por dos puntos. Para ello basta darle un valor a " x " (abscisa, variable independiente o valor original) y calcular su correspondiente valor de " y " (ordenada, variable dependiente o imagen). Así, de esta forma tendremos las coordenadas de dos puntos por los que pasa la recta (gráfica) de la ecuación dada.

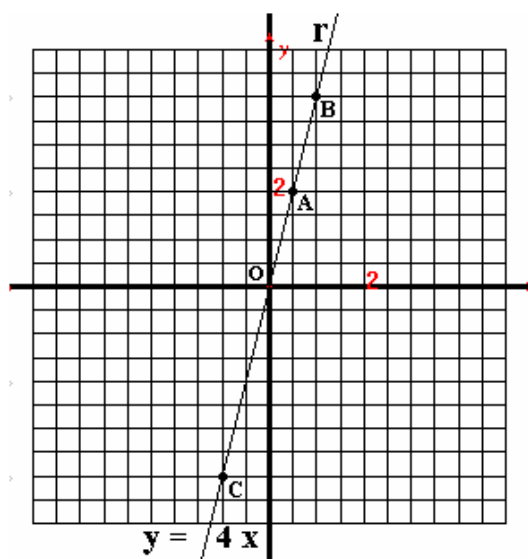
EJEMPLOS RESUELTOS:

1.- Obtener la gráfica de la función que tiene por ecuación $y = 4x$.

- La función es lineal, porque es de la forma $y = mx$.
- Pasa por el origen $\rightarrow$ punto $O(0, 0)$
- Calculamos las coordenadas de varios puntos, aunque basta con uno, pero conviene conocer más de uno para prevenir el posible error, ya que si sólo hacemos uno y nos equivocamos, dibujaremos una recta errónea. Haciendo más de uno, es más fácil que descubramos un posible error si no nos coinciden los puntos en una misma recta. También es conveniente dar algunos valores negativos porque así practicas el cálculo con ellos y no olvidas los mecanismos elementales con enteros.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } x = 1 \rightarrow y = 4x = 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow \text{punto A}(1, 4) \\ \text{Para } x = 2 \rightarrow y = 4x = 4 \cdot 2 = 8 \Rightarrow \text{punto B}(2, 8) \\ \text{Para } x = -2 \rightarrow y = 4 \cdot (-2) = -8 \Rightarrow \text{punto C}(-2, -8) \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \text{Pendiente} \\ \text{de la recta} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación: } \left\{ \begin{array}{l} y = 4x \\ y = mx \\ m(\text{pendiente}) = 4 \end{array} \right. \\ \text{Veamos cómo hallarla también con las coordenadas de cada punto:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Con el punto "A"} \rightarrow (1, 4) \\ m = \frac{y}{x} = \frac{4}{1} = 4 \text{ (pendiente)} \\ \text{Con el punto "B"} \rightarrow (2, 8) \\ m = \frac{y}{x} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (pendiente)} \\ \text{Con el punto "C"} \rightarrow (-2, -8) \\ m = \frac{y}{x} = \frac{-8}{-2} = 4 \text{ (pendiente)} \end{array} \right. \end{array} \right.$



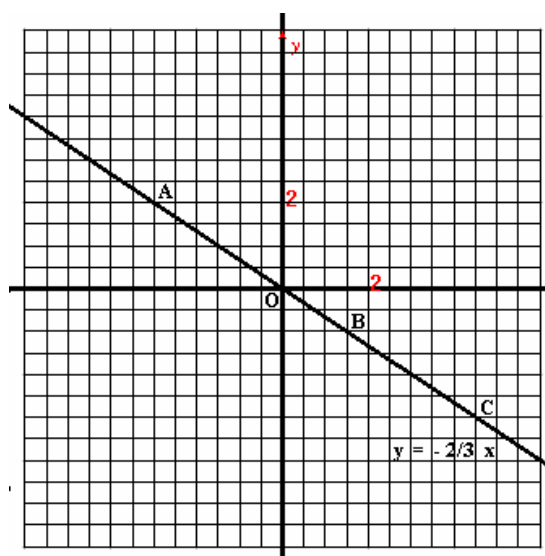
2.- Dibuja la recta que representa a una función lineal cuya expresión algebraica es la siguiente:

$$y = -\frac{2}{3}x$$

- La función es lineal, porque es de la forma $y = mx$.
- Pasa por el origen $\rightarrow$ punto $O(0, 0)$
- Calculamos las coordenadas de varios puntos:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } x = -6 \rightarrow y = \frac{-2x}{3} = \frac{-2 \cdot (-6)}{3} = 4 \Rightarrow \text{punto A}(-6, 4) \\ \text{Para } x = 3 \rightarrow y = \frac{-2x}{3} = \frac{-2 \cdot 3}{3} = -2 \Rightarrow \text{punto B}(3, -2) \\ \text{Para } x = 9 \rightarrow y = \frac{-2x}{3} = \frac{-2 \cdot 9}{3} = -6 \Rightarrow \text{punto C}(9, -6) \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \text{Pendiente} \\ \text{de la recta} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación: } \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x \\ y = mx \\ m(\text{pendiente}) = -\frac{2}{3} \end{array} \right. \\ \text{Hállala tú con las coordenadas de cada punto:} \end{array} \right.$



3.- Bueno, pensarás que los dos ejemplos anteriores se hacen muy largos. Es verdad, pero el motivo de hacerlos tan largos es para que te enteres bien y lo comprendas todo mejor. En realidad, no es necesario resolverlos de forma tan extensa cuando lo domines bien. Veamos uno resuelto de modo normal.

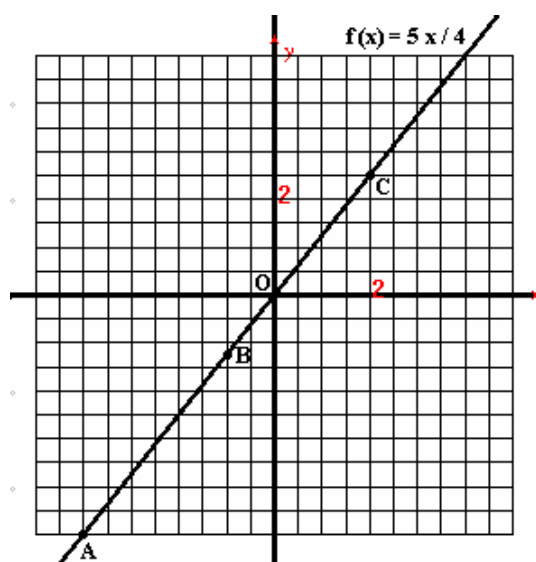
Hallar la gráfica de la función cuya ecuación es:

$$f(x) = \frac{5x}{4}$$

CÁLCULO DE LOS VALORES

- Para " $x = -8$ " $\rightarrow f(x) = 5 \cdot (-8) / 4 = -10$
- Para " $x = -2$ " $\rightarrow f(x) = 5 \cdot (-2) / 4 = -2.5$
- Para " $x = 4$ " $\rightarrow f(x) = 5 \cdot 4 / 4 = 5$
- Etc.

TABLA DE VALORES		
Puntos	Coordenadas	
	Abscisa	Ordenada
A	- 8	- 10
B	- 2	- 2.5
C	4	5
...	...	...



4.- Para que respondas a las siguientes preguntas referidas al ejercicio anterior :

- Observando su ecuación, ¿cuál es la pendiente de la función lineal representada?
- Deduce también la pendiente por medio de las coordenadas de cada punto representado "A", "B", "C".
- ¿Obtienes la misma pendiente en cada caso?
- Busca otros dos puntos que pertenezcan a dicha recta, uno en el primer cuadrante y otro en el tercero, y halla sus coordenadas.

000000000000000000000000000000

¿ Cómo podemos obtener la ecuación (expresión algebraica) de una función lineal de prop. dir. a través de su gráfica ?

Veamos:

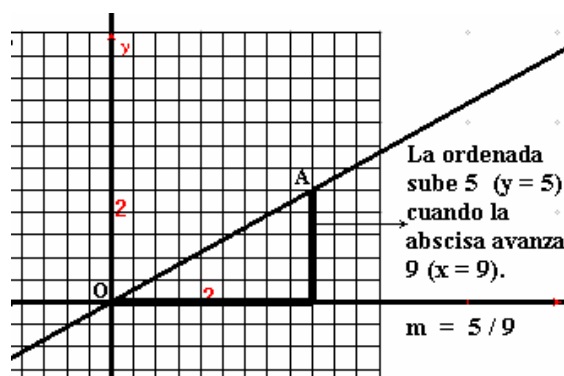
Para establecer la ecuación de una función lineal conocida su gráfica, sólo es necesario hallar el valor de la pendiente ("**m**") de dicha recta.

Para obtener la pendiente de una recta se forma una fracción que tiene por numerador la variación (positiva hacia arriba, negativa hacia abajo) que experimenta la "**y**" y por denominador la variación de la "**x**" (positiva hacia la derecha, negativa hacia la izquierda) entre dos de los puntos de la recta.

Como hablamos de función lineal (de prop. dir.), siempre conocemos uno de los dos puntos que necesitamos, es decir, el origen **O(0, 0)**. Entonces nos basta con buscar un punto, y siempre será más sencillo y rápido encontrar uno cuyas coordenadas sean números enteros.

EJEMPLOS RESUELTOS:

5.- ¿Cuál es la ecuación de la siguiente función?

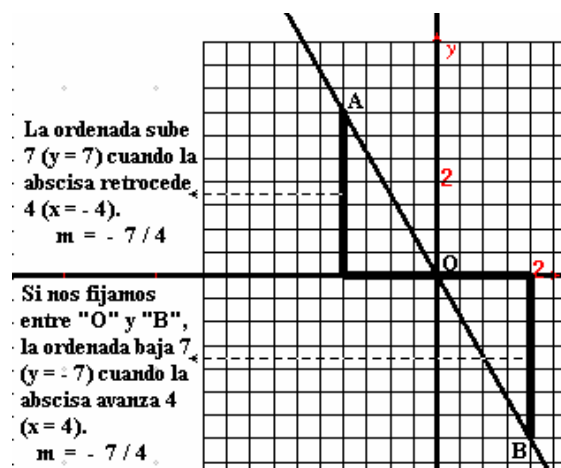


En la gráfica hemos analizado cómo cambia, entre dos puntos ("O" y "A"), la variable dependiente "y" en función de la variación experimentada por la variable independiente "x".

◦ Pendiente $\rightarrow "m" = \frac{\text{variación de "y"}}{\text{variación de "x"}} = \frac{5}{9}$

◦ Ecuación $\rightarrow \begin{cases} y = m x \\ y = \frac{5}{9} x = \frac{5x}{9} \end{cases}$

6.- Averigua qué expresión algebraica representa a la recta representada en los ejes de coordenadas.



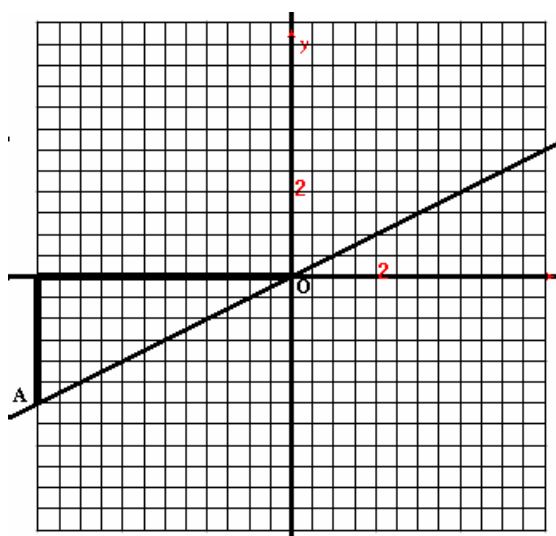
En la gráfica anterior observamos que da igual que nos fijemos entre los puntos "O" y "A" que entre los puntos "O" y "B". La pendiente, lógicamente, es la misma. Veamos lo observado entre "O" y "A":

◦ Pendiente $\rightarrow "m" = \frac{\text{variación de "y"}}{\text{variación de "x"}} = \frac{7}{-4}$

◦ Ecuación $\rightarrow \begin{cases} y = m x \\ y = \frac{-7}{4} x = \frac{-7 x}{4} \end{cases}$

7.- Para que lo hagas tú :

Observando la gráfica, calcula la ecuación de la recta representada.



|||||

¿ Cómo podemos averiguar la ecuación de una función lineal (de prop. dir.) y representar su gráfica conociendo las coordenadas de un punto de su recta ?

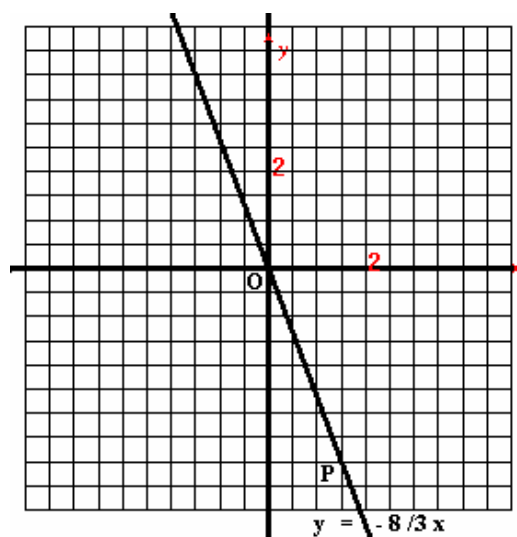
- En primer lugar, calculamos su pendiente (m), que será el cociente entre la ordenada y la abscisa del punto conocido.
- Conocida su pendiente, sabemos su ecuación ($y = m x$).
- Su gráfica, al ser función de proporcionalidad directa, será una recta que pasa por el origen $(0, 0)$ y por el punto dado (x, y) .

EJEMPLOS RESUELTOS:

8.- Averigua la ecuación y la gráfica de la función lineal cuya recta pasa por el punto P $(3, -8)$.

⊗ Pendiente :
 $y = m x \rightarrow -8 = m \cdot 3 \rightarrow m = \frac{-8}{3}$

⊗ Ecuación $\rightarrow y = \frac{-8}{3} x$



EJERCICIOS PARA RESOLVER :

9.- Sabemos que la recta que representa a una función lineal pasa por un punto cuyas coordenadas son las soluciones de $\sqrt{49}$. Calcula su pendiente, su ecuación y su gráfica.

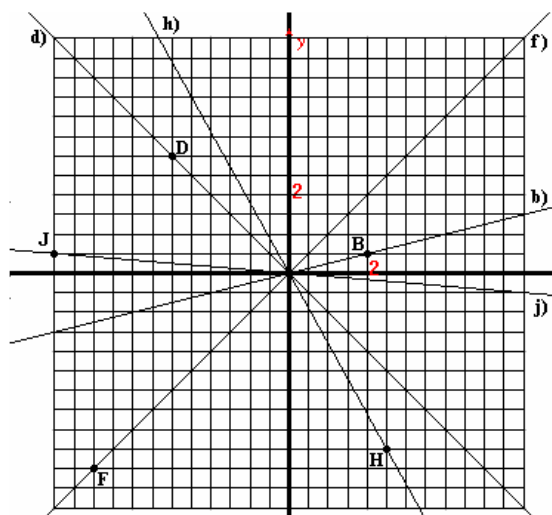
10.- Calcula lo que te piden en cada apartado.

En los apartados a), c), e), g), i) del recuadro siguiente, averiguas la pendiente y dibujas la gráfica de cada función.

En los apartados b), d), f), h), j) de la gráfica de abajo, calculas la pendiente y la ecuación de cada gráfica.

a) $y = 3x$	c) $y = -\frac{2}{5}x$	e) $y = -5x$
g) $y = x$	i) $y = \frac{1}{4}x$	

En los ejes de coordenadas siguientes se han representando cinco rectas que pasan por el origen de coordenadas. En cada una de ellas se ha señalado un punto que te ayudará a calcular su pendiente y hallar su ecuación. En la parte exterior se ha puesto el apartado que corresponde a cada una: b), d), f), h), j).



11.- Dibuja en unos ejes de coordenadas cartesianas dos rectas con pendientes positivas (una de ellas menor de 1 y otra con valor entero) y otras dos con pendientes negativas (una de ellas mayor de -1 y otra con valor entero), representativas todas de funciones lineales. Averigua también sus pendientes y sus ecuaciones.

12.- ¿Es posible dibujar las gráficas de dos rectas de proporcionalidad directa que pasen por un mismo punto -de coordenadas enteras- del segundo cuadrante y que una sea de pendiente ascendente y otra descendente? Razona tu respuesta.

13.- ¿Dónde se cortan las rectas que representan a funciones lineales de proporcionalidad directa?

14.- ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del tercer cuadrante? ¿Y la del segundo cuadrante?

15.- ¿A qué ecuaciones de las siguientes pertenecen cada uno de los puntos señalados?

Ecuaciones

a) $y = 6x$ b) $y = -\frac{3}{4}x$ c) $y = -7x$

Puntos:

A (-12, 9), B (0,0), C (3, 18), D (2, 1'5), F (2, -14)

Y con estos ejercicios terminamos el estudio de la función lineal de proporcionalidad directa. Repasemos :

- ☞ Las funciones lineales de proporcionalidad directa pasan por el origen de coordenadas, es decir, por el punto O (0, 0).
- ☞ Su ecuación general es de la forma " $y = mx$ ".
- ☞ Nos sirven de modelo para representar las relaciones entre magnitudes directamente proporcionales.
- ☞ Dentro de su expresión algebraica, " $y = mx$ " (ecuación), "m" representa la constante (factor o coeficiente) de proporcionalidad, que es el coste por unidad en la relación entre las magnitudes que se estudien.
- ☞ También llamamos pendiente a la constante de proporcionalidad "m". La pendiente nos indica el grado de variación de la "y" al variar la "x", y se calcula formando el cociente entre la variación de la variable dependiente ("y") y el de la variable independiente ("x").
- ☞ La pendiente ("m") de una recta nos indica la inclinación de ésta, es decir, el ángulo que forma con el sentido positivo del eje de abscisas ("OX"). A mayor pendiente de una recta, mayor es su inclinación (ángulo), y a menor pendiente, menor ángulo forma con el eje "OX".
- ☞ Cuando la pendiente ("m") es positiva, la recta es creciente; si la pendiente ("m") es negativa, la recta es decreciente.

13.9.2.- Funciones AFINES.

Empecemos con un ejemplo:

Una de las muchas empresas de telefonía móvil tiene establecidos los siguientes baremos para calcular el coste de las llamadas:

- Cuota fija por establecimiento de llamada: 0'15 €.
- Cada minuto a 0'25 €.

En este ejemplo estamos relacionando las magnitudes tiempo (de llamada) y coste (precio en euros). Estudiémosla con algunos valores:

CÁLCULO DE VALORES (puntos)

- Para 1 minuto → $1 \cdot 0'25 + 0'15 = 0'40$ €
- Para 2 minutos → $2 \cdot 0'25 + 0'15 = 0'65$ €
- Para 3 minutos → $3 \cdot 0'25 + 0'15 = 0'90$ €
- Para 4 minutos → $4 \cdot 0'25 + 0'15 = 1'15$ €
- Para 5 minutos → $5 \cdot 0'25 + 0'15 = 1'40$ €
- Para "x" minutos → "x" · 0'25 + 0'15 = "y" €
- Ecuación de la función → $y = 0'25x + 0'15$

TABLA DE VALORES							
	A	B	C	D	E	F	...
x	1	2	3	4	5	?	...
y	0'40	0'65	0'90	1'15	1'40	?	...

Si igualamos algunas razones (x/y) de las cantidades de esta tabla de valores para intentar formar proporciones, veremos que no es posible hacerlo:

$$\left[\frac{1}{0'40} \neq \frac{2}{0'65} \right] \rightarrow 1 \cdot 0'65 \neq 0'40 \cdot 2 \rightarrow 0'65 \neq 0'80 \rightarrow \text{NO}$$

$$\left[\frac{3}{0'90} \neq \frac{5}{1'40} \right] \rightarrow 3 \cdot 1'40 \neq 0'90 \cdot 5 \rightarrow 4'2 \neq 4'5 \rightarrow \text{NO}$$

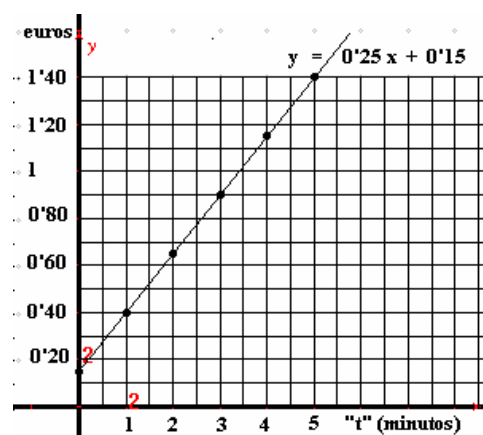
Etc.

¿Recuerdas por qué sucede esto? Pues porque no son magnitudes directamente proporcionales. Es verdad que al aumentar una (el tiempo) aumenta la otra (coste), pero no de una forma proporcional, es decir, al doble no corresponde el doble, ni a la mitad la mitad, etc.

Si no tuviéramos en cuenta el precio del establecimiento de llamada (0'15 €), sino sólo el tiempo empleado, entonces sí serían directamente proporcionales (compruébalo tú haciendo la tabla correspondiente). Pero al incluir en la relación de las dos magnitudes un parámetro inicial, ésta deja de ser de proporcionalidad y se convierte en una función que no pasa por el origen de coordenadas a la que llamaremos **función afín** –función lineal de la forma " $y = mx + n$ "–.

Veamos la representación gráfica de la función de nuestro ejemplo anterior.

NOTA : cada cuadrado de abscisas vale 0'5 y de ordenadas 0'10.



Observamos que la recta de esta función lineal, es decir, de esta función afín, no pasa por el origen (0, 0). En realidad corta al eje de ordenadas en el punto (0, 0'15), que corresponde a la cantidad inicial que se paga en cada llamada.

Haber si sabes responder a estas preguntas sobre el ejemplo anterior:

- ¿Cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente de la función?
- ¿Cuál es la pendiente?
- ¿Por qué en la representación gráfica anterior sólo hemos tenido en cuenta el primer cuadrante de los ejes de coordenadas?

Bien, pues después de haber analizado este ejemplo, estudiemos un poco más detenidamente las funciones lineales del tipo " $y = mx + n$ ", es decir, a las funciones llamadas afines. Y para mejor comprenderlas, veamos sus diferencias con respecto a la ya estudiadas de proporcionalidad directa.

1ª diferencia :

Las ecuaciones de las funciones afines son de la forma “ $y = m x + n$ ”. Las de proporcionalidad directa “ $y = m x$ ”, pues el término “ n ” es nulo.

2ª diferencia :

Las gráficas de las funciones afines no pasan por el origen de coordenadas. Las de proporcionalidad directa sí.

3ª diferencia :

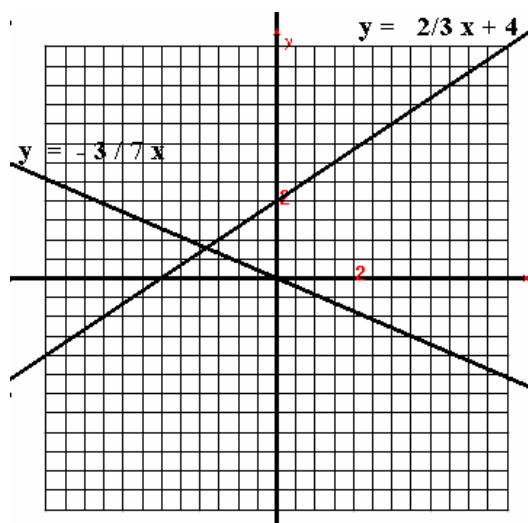
La pendiente de las funciones afines es el cociente $(y - n) / x$, o lo que es lo mismo, el coeficiente de “ x ” una vez se ha despejado la “ y ”. En las de proporcionalidad directa la pendiente es el cociente y/x .

4ª diferencia :

Las gráficas de las funciones afines cortan al eje de abscisas en el punto $(-n/m, 0)$ y al eje de ordenadas en el punto $(0, n)$. Las de proporcionalidad directa en el punto $(0, 0)$ para los dos ejes.

Veamos con ejemplos estas diferencias:

A continuación tenemos las gráficas de dos funciones, una afín (del tipo “ $y = m x + n$ ”) y otra de proporcionalidad directa (del tipo “ $y = m x$ ”). Intenta tú resolver las diferencias entre ellas descritas anteriormente antes de verlas en la columna siguiente.



Veamos las diferencias entre las dos funciones:

1ª)	{	Ecuación de la func. afín $\rightarrow y = \frac{2}{3}x + 4$
		Ecuación de la func. de prop. $\rightarrow y = \frac{3}{-7}x$
2ª)	{	La recta de la func. afín no pasa por (0,0).
		La recta de la func. de prop. directa sí.
3ª)	{	Pendiente de la func. afín $\rightarrow m = \frac{2}{3}$
		Pendiente de la func. de prop. $\rightarrow m = \frac{3}{-7}$
4ª)	{	Cortes func. afín { Con OX $\rightarrow (-6, 0)$
		Con OY $\rightarrow (0, 4)$
	{	Cortes func. prop. { Con OX $\rightarrow (0, 0)$
		Con OY $\rightarrow (0, 0)$

Debes tener muy en cuenta lo siguiente en las funciones afines (“ $y = m x + n$ ”):

- 1 La pendiente (“ m ”) es el coeficiente de la “ x ” una vez que se ha despejado la “ y ” en su ecuación.
- 2 Cuando “ y ” está despejada, a “ n ” se le llama ordenada en el origen, porque es el valor de “ y ” cuando la “ $x = 0$ ”, o sea, el corte con el eje “OY”, ya que no pasan por el origen sino por el punto (0, n) del eje OY, que es el de partida de la función para los valores positivos de la variable independiente “ x ”.
- 3 Las rectas representativas de funciones afines que tienen la misma pendiente (“ m ”) pero distinta ordenada en el origen (“ n ”) son todas paralelas.
- 4 Las rectas representativas de funciones afines que tienen distinta pendiente (“ m ”) pero la misma ordenada en el origen (“ n ”) pasan todas por el mismo punto $(0, n)$, formando un haz de rectas.
- 5 Las ecuaciones de las funciones afines son de la forma $y = m x + n$, pero la forma general de estas ecuaciones es la siguiente:

Ecuación de 1º grado con 2 incógnitas.

$$a x + b y = c \rightarrow \begin{cases} a : \text{coeficiente de "x"} \\ b : \text{coeficiente de "y"} \\ c : \text{término independiente} \end{cases}$$

$$\text{En ella} \rightarrow m = \frac{-a}{b} \quad \text{y} \quad n = \frac{c}{b}$$

Volvamos a ver ejemplos para llegar a tener las ideas muy claras sobre estos conceptos tan importantes para el estudio de funciones en este curso y, sobre todo, en los próximos, en los cuales te serán imprescindibles como base para una adecuada y correcta comprensión de otros tipos de funciones.

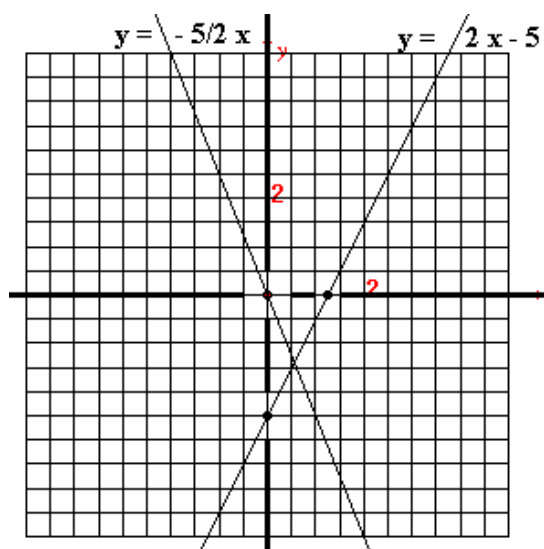
Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

EJEMPLO RESUELTO N° 1.

A continuación tienes una serie de expresiones algebraicas que representan a ecuaciones de distintas funciones. Clasifícalas, escribe el valor de sus pendientes, señala los puntos de cortes con los ejes y represéntalas en ejes de coordenadas.

a) $y = \frac{5}{-2}x$	b) $y = 2x - 5$
c) $y = 4x$	d) $y = -\frac{x}{5} + 2$

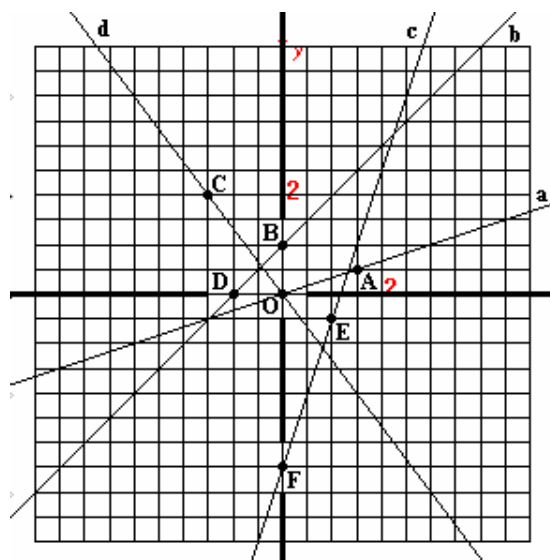
$a) y = \frac{-5}{2}x \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ Función de prop. directa} \\ \circ m = \frac{-5}{2} \\ \circ \text{ Corte con OY} \rightarrow (0, 0) \\ \circ \text{ Corte con OX} \rightarrow (0, 0) \end{cases}$
$b) y = 2x - 5 \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ Función afín} \\ \circ m = 2 \\ \circ \text{ Corte con OY} \rightarrow (0, -5) \\ \circ \text{ Corte con OX} \rightarrow (2.5, 0) \end{cases}$



EJERCICIO PARA TI. Ayudándote de la resolución de los apartados a) y b) anteriores, resuelve los apartados c) y d) del mismo modo.

EJEMPLO RESUELTO N° 2.

En los siguientes ejes de coordenadas aparecen cuatro rectas. Clasifícalas, escribe el valor de sus pendientes, señala sus ordenadas en el origen, el punto de corte con OX y la ecuación de cada una de ellas.



Recta "a":

- Es de una función de prop. directa, porque pasa por el origen $O(0, 0)$.
- Como cuando "y" sube 1 "x" avanza 3:
 $m = \frac{1}{3}$
- Ordenada en el origen $\rightarrow 0$
- Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$
- Su ecuación $\rightarrow y = \frac{1}{3}x$

Recta "b":

- Es de una función afín, porque no pasa por O.
- Como cuando "y" sube 2 "x" avanza 2:
 $m = \frac{2}{2} = 1$
- Ordenada en el origen $\rightarrow 2 \rightarrow "B"(0, 2)$
- Corte con OX $\rightarrow "D"(-2, 0)$
- Su ecuación $\rightarrow y = x + 2$

EJERCICIO PARA TI. Ayudándote de la resolución anterior de las rectas "a" y "b", resuelve las rectas "c" y "d" de la misma manera.

EJEMPLO RESUELTO N° 3.

Dada la ecuación $y = -\frac{4}{3}x + 6$ y la tabla de valores siguiente, realiza los apartados que aparecen a continuación.

	A	B	C	D	E
x	12	6	0	-3	-9
y	?	?	?	?	?

Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

- Decir qué clase de función es.
- Completar la tabla de valores.
- Representar la función.
- ¿Cuál es su pendiente? ¿Es de recta ascendente o descendente?
- Halla los puntos de corte con los ejes.

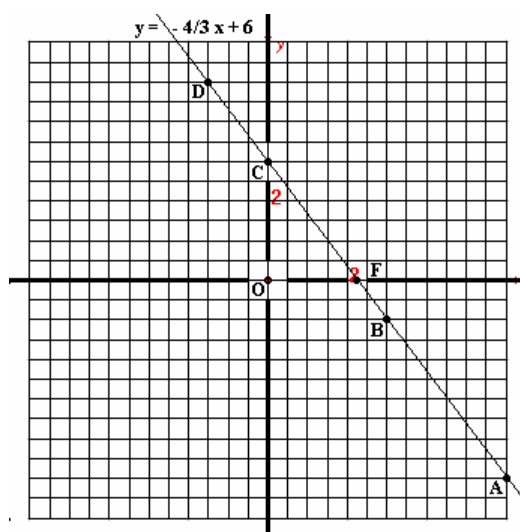
RESOLUCIÓN:

- Es una función afín, porque no pasa por el origen $(0, 0)$, o porque es de la forma " $y = m x + n$ ".

- Resulta la siguiente tabla:

TABLA DE VALORES		
Puntos	Coordenadas	
	Abscisa	Ordenada
A	12	- 10
B	6	- 2
C	0	6
D	- 3	10
E	- 9	18

- Esta es su gráfica:



- La pendiente es: $m = \frac{-4}{3}$

Es una recta descendente, ya que tiene pendiente negativa ($m < 0$).

- Los puntos de corte con los ejes son:

Con el eje OY $\rightarrow (0, 6)$
Con el eje OX $\rightarrow (4.5, 0)$

EJERCICIOS Nº 4 y Nº 5.

Una vez hayas estudiado detenidamente el ejemplo resuelto nº 3, realiza tú los ejercicios 4 y 5 contestando a los mismos apartados del citado ejemplo nº 3. (Se deben hacer separados y en gráficas distintas)

EJERCICIO Nº 4

Ecuación:

$$y + 1 = - 2x$$

EJERCICIO Nº 5

Ecuación:

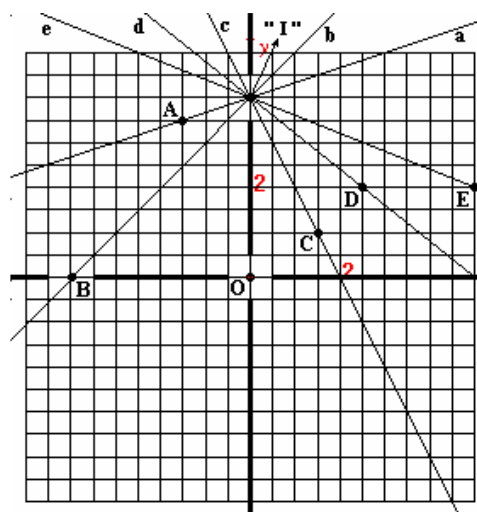
$$- 3y = - x$$

TABLA DE VALORES		
Puntos	Coordenadas del nº 4	
	Abscisa	Ordenada
A	5	?
B	1	?
C	0	?
D	- 4	?
E	- 6	?

TABLA DE VALORES		
Puntos	Coordenadas del nº 5	
	Abscisa	Ordenada
A	9	?
B	?	2
C	?	0
D	?	- 1
E	- 6	?

EJERCICIO Nº 6.

Dadas las siguientes cinco rectas en los ejes de coordenadas, contesta a lo que te piden más abajo.



- ¿A qué clase de funciones representan las rectas "a", "b", "c", "d", "e"?
- ¿Qué valor tiene de pendiente cada una de las rectas? ¿Son iguales? ¿Cuáles son rectas de pendiente ascendente y cuáles descendentes?
- ¿Cuál es la ordenada en el origen de dichas rectas? ¿Son iguales? ¿En qué punto corta cada una de ellas al eje de ordenadas?
- Calcula la ecuación representativa de cada recta.
- ¿Qué se deduce tanto de la gráfica como del estudio realizado de dichas funciones?

Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

Te ayudo un poco a resolver el ejercicio anterior: para ello te hago todo lo relativo a la recta "a".

Sobre la recta "a":

- Es de una función **afín**, porque no pasa por el origen (0, 0).
- Si nos fijamos en el punto "A", con respecto al punto "I" (intersección de las cinco rectas), vemos que "y" (variable dependiente) baja "1" (-1) cuando "x" (variable independiente) retrocede "3" (-3). O sea, que su pendiente es:

$$m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{ascendente}$$

- Su ordenada en el origen es "8", ya que corta al eje OY en el punto (0, 8) → "I"
- Su ecuación es:

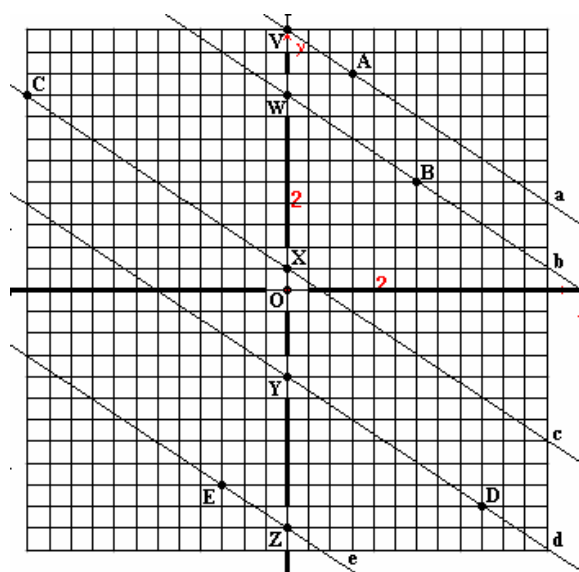
$$\left\{ \begin{array}{l} \circ m = \frac{1}{3} \\ \circ n \text{ (ordenada en el origen)} = 8 \\ \circ y = m x + n \\ \circ y = \frac{1}{3} x + 8 \end{array} \right.$$

- Cuando resuelvas todas, podrás sacar qué se deduce de estas gráficas.

Bueno, tú no debes hacer todo tan largo como lo hago yo en el cuadro anterior; si resulta tan extenso es para ayudarte a comprenderlo mejor, pero si lo sabes bien, basta con un par de renglones por recta.

EJERCICIO N° 7.

Después de observar detenidamente las rectas que aparecen en los ejes de coordenadas, debes contestar a los apartados siguientes:



- ¿A qué clase de funciones representan las rectas "a", "b", "c", "d", "e"?
- ¿Qué valor tiene de pendiente cada una de las rectas? ¿Son iguales? ¿Son rectas de pendiente ascendente o descendente?
- ¿Cuál es la ordenada en el origen de dichas rectas? ¿Son iguales? ¿En qué punto corta cada una de ellas al eje de ordenadas?
- Calcula la ecuación representativa de cada recta.
- ¿Qué se deduce tanto de la gráfica como del estudio realizado de dichas funciones?

Otra vez te resuelvo lo que concierne a la recta "a" representada en los ejes; eso te ayudará en las otras.

Sobre la recta "a":

- Es de una función **afín**, porque no pasa por el origen (0, 0).
- Si nos fijamos en el punto "A", con respecto al punto "V", vemos que "y" (variable dependiente) baja "2" (-2) cuando "x" (variable independiente) avanza "3" (3). O sea, que su pendiente es:

$$m = \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3} \rightarrow \text{descendente}$$

- Su ordenada en el origen es "12", ya que corta al eje OY en el punto (0, 12) → "V"
- Su ecuación es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ m = \frac{-2}{3} \\ \circ n \text{ (ordenada en el origen)} = 12 \\ \circ y = m x + n \\ \circ y = \frac{-2 x}{3} + 12 \end{array} \right.$$

- Cuando resuelvas todas, podrás sacar qué se deduce de estas gráficas.

En realidad no hay que hacer un cuadro tan amplio para cada recta. Fíjate cómo lo haría un alumno que ya domina esto y no necesite hacer tantos pasos:

Recta "a"

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{afín} \\ \circ m = \frac{-2}{3} \rightarrow \text{descendente} \\ \circ \text{ordenada en el origen} \rightarrow 12 \\ \circ y = \frac{-2}{3} x + 12 \end{array} \right.$$

13.9.3.- Funciones CONSTANTES.

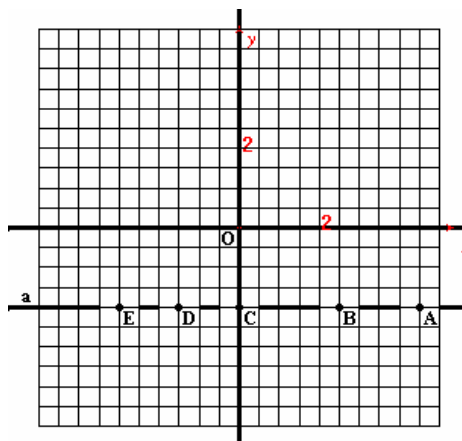
Dentro de las funciones lineales, es decir, aquellas cuya representación es una recta, se llaman funciones constantes a todas las que tienen como gráficas rectas paralelas al eje de abscisas. La ecuación de las funciones constantes es de la forma $y = n$ ($y = mx + n$, donde $m = 0$).

Al ser nula ($m = 0$) la pendiente de las funciones constantes, al aumentar la “x”, la “y” ni aumenta ni disminuye, o sea, se mantiene constante. Veamos un ejemplo:

Función constante de ecuación $\rightarrow y = -4$

TABLA DE VALORES		
Puntos	Coordenadas del nº 4	
	Abscisa	Ordenada
A	9	-4
B	5	-4
C	0	-4
D	-3	-4
E	-6	-4
Etc.	?	-4

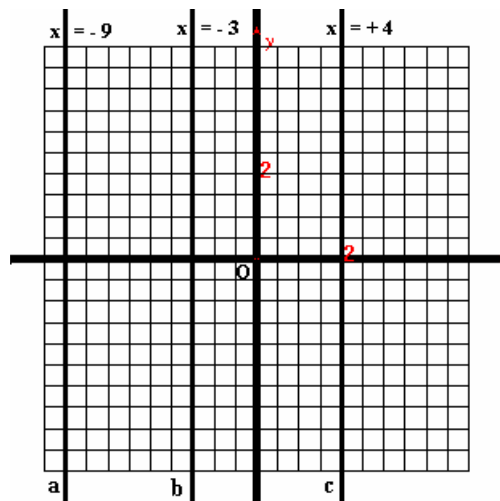
NOTA: La recta “a”, que representa a la función constante de ecuación $y = -4$, debería tener el trazado continuo, pero en los ejes lo hemos hecho discontinuo para distinguir mejor los puntos A, B, C, D y E representados.



Es conveniente que sepas que hay otras rectas paralelas al eje de ordenadas que no representan a funciones, ya que a cada valor de “x” (variable independiente) no corresponde un único valor de “y” (variable dependiente), sino infinitos valores de “y”. La ecuación de esas rectas es de la forma siguiente: $a = x$; o si quieres mejor: $x = a$, donde “a” representa el valor fijo que toma la abscisa en esa recta.

Es decir, que para cualquier valor de la “y” el valor de “x” siempre es el mismo.

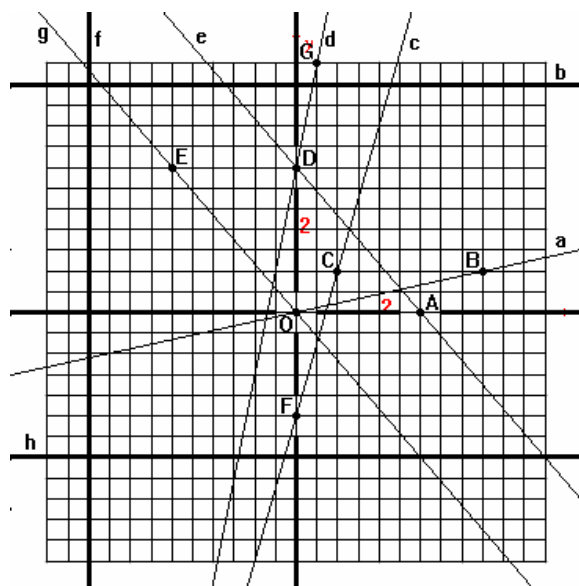
Aunque estas rectas no son funciones, veamos algunos ejemplos:



EJERCICIO Nº 8.

Después de observar detenidamente las rectas que aparecen en los ejes siguientes:

- Clasifica a las que representan a funciones según sean de proporcionalidad directa, afines, constantes y di también cuáles no son funciones.
- Calcula la ecuación de cada una de ellas ayudándote de los ejercicios resueltos anteriormente..



13.10.- ¿Cómo hallar la ecuación de una recta?

Aunque casi siempre hemos puesto la ecuación de la recta en la forma “ $y = m x + n$ ”, como ya dijimos en la pregunta 13.9.2 en la 5ª consideración a tener en cuenta en la funciones afines, la ecuación de la recta en la forma general es la siguiente : “ $a x + b y = c$ ”.

$$a x + b y = c \rightarrow$$

- Si $a \neq 0, b \neq 0, c = 0 \rightarrow y = \frac{-a}{b} x \rightarrow$ Recta que pasa por el origen (función de prop. directa)
- Si $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \rightarrow y = \frac{-a}{b} x + \frac{c}{b} \rightarrow$ Recta que no pasa por el origen (función afín)
- Si $a = 0, b \neq 0, c \neq 0 \rightarrow y = \frac{c}{b} \rightarrow$ Recta paralela al eje de abscisas (función constante)
- Si $a \neq 0, b = 0, c \neq 0 \rightarrow x = \frac{c}{a} \rightarrow$ Recta paralela al eje de ordenadas (NO es función)

13.10.1.- Ecuación de la forma punto-pendiente.

Cuando conocemos la pendiente de una recta, “ m ”, y un punto cualquiera de ella, $P(x_1, y_1)$, la forma general de la ecuación de dicha recta es la siguiente :

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Veamos algunos ejemplos resueltos.

EJEMPLO RESUELTO Nº 1.

¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas de cada uno de los apartados siguientes?

a) $\begin{cases} \text{Con pendiente} \rightarrow m = -\frac{1}{2} \\ \text{y que pasa por el punto} \rightarrow A(5, -3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Con pendiente} \rightarrow m = 5 \\ \text{y que pasa por el punto} \rightarrow B(-2, 0) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{Con pendiente} \rightarrow m = \frac{4}{-9} \\ \text{y que pasa por el punto} \rightarrow C(-6, -8) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{Con pendiente} \rightarrow m = -3 \\ \text{y que pasa por el punto} \rightarrow D(0, -4) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{Con pendiente} \rightarrow m = 0 \\ \text{y que pasa por el punto} \rightarrow E(1, 7) \end{cases}$

EJERCICIOS PARA TI.- Ayudándote de la resolución siguiente del ejercicio nº 1a, resuelve los apartados b), c), d) y e) del mismo modo.

RESOLUCIÓN del ejercicio nº 1a :

Aplicamos la ecuación de la forma punto - pendiente :

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow \begin{cases} \circ m = -\frac{1}{2} \\ \circ x_1 = 5 \\ \circ y_1 = -3 \end{cases}$$

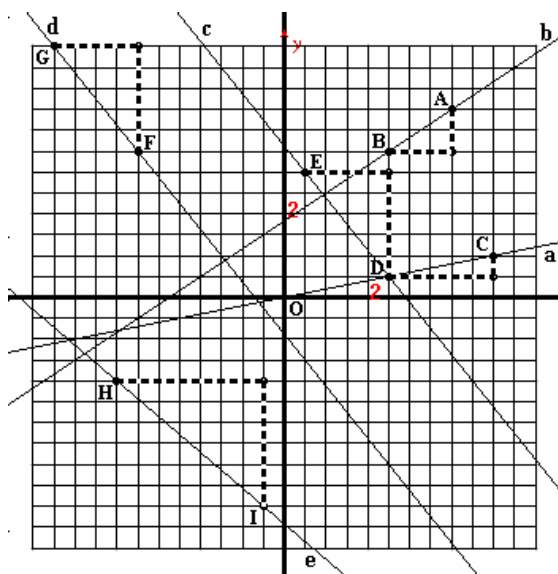
$$y = -\frac{1}{2}(x - 5) + (-3) \quad / \cdot 2$$

$$2y = -x + 5 - 6$$

$$x + 2y = -1 \rightarrow \text{Ecuación de la recta}$$

EJEMPLO RESUELTO Nº 2.

¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas representadas en los ejes de coordenadas siguientes?



RESOLUCIÓN del ejercicio nº 2d:

En las cinco rectas se señalan dos puntos de coordenadas enteras para poder calcular la pendiente de cada una; después, con ella y con las coordenadas de uno de los dos puntos señalados, aplicamos la ecuación de la forma punto – pendiente. En la recta "d", la ordenada "y" baja (disminuye) 5 (-5) cuando la abscisa "x" crece (aumenta) 4 (+4).

Luego la pendiente es $-\frac{5}{4}$. De los puntos "F" y "G", elegimos el punto F (-7, 7) para la ecuación.

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow \begin{cases} \circ m = -\frac{5}{4} \\ \circ x_1 = -7 \\ \circ y_1 = 7 \end{cases}$$

$$y = -\frac{5}{4}(x + 7) + 7 \quad / \cdot 4$$

$$4y = -5x - 35 + 28$$

$$5x + 4y = -7 \rightarrow \text{Ecuación de la recta}$$

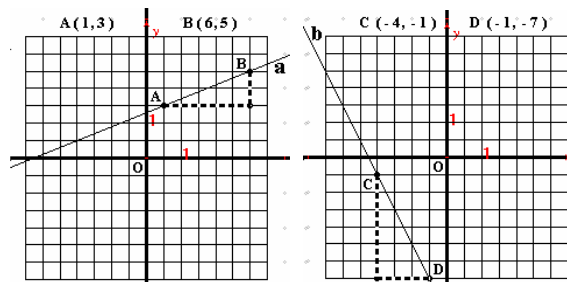
EJERCICIOS PARA TI.- Ayudándote de la resolución anterior de la recta "d", resuelve de la misma manera –pero de forma menos extensa– las rectas "a", "b", "c" y "e".

13.10.2.-Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Cuando conocemos dos puntos cualesquiera de una recta, es posible calcular la pendiente de dicha recta. Así, a partir de los dos puntos obtenemos su pendiente y con uno de los dos puntos podemos calcular su ecuación aplicando la forma general de la ecuación punto-pendiente explicada en la pregunta anterior.

En el ejemplo nº 2 de la pregunta anterior, vemos cómo obtenemos la pendiente de una recta al ver en su gráfica dos de sus puntos con coordenadas enteras. Para ello nos fijamos en la variación que experimenta la "y" cuando varía la "x", **contando unidades (cuadritos) que sube o baja "y" con respecto a los que crece o decrece "x"**. La pendiente de la recta es igual al cociente que tiene por numerador la variación de la ordenada "y" y como denominador la variación de la abscisa "x" entre dos puntos cualesquiera de la recta, con su correspondiente signo cada coordenada.

EJEMPLO RESUELTO Nº 1.



En los ejes de la izquierda tenemos la recta "a", con dos de sus puntos señalados, "A" y "B". Nos basta la observación gráfica, porque las coordenadas de los puntos son valores enteros, para calcular su pendiente, ya que "y" sube 2 cuando "x" crece 5. O sea:

$$m = \frac{2}{5} \rightarrow \text{pendiente de la recta "a"}$$

En los ejes de la derecha tenemos la recta "b", con dos de sus puntos señalados, "C" y "D". Vemos que "y" baja 6 (-6) cuando "x" aumenta 3. Luego su pendiente es:

$$m = \frac{-6}{3} = -2 \rightarrow \text{pendiente de la recta "b"}$$

Si cogiéramos otros dos puntos cualesquiera de dichas rectas, la pendiente, lógicamente, seguiría siendo la misma. Compruébalo tú mismo.

Bien, pues además de obtener la pendiente por la observación gráfica de dos puntos "A" y "B" de una recta, podemos hallarla de forma más matemática con la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \text{siendo} \begin{cases} \bullet \begin{cases} \text{Coordenadas de un} \\ \text{punto A}(x_1, y_1) \end{cases} \\ \bullet \begin{cases} \text{Coordenadas de otro} \\ \text{punto B}(x_2, y_2) \end{cases} \end{cases}$$

Calculemos con esta fórmula las pendientes de las rectas "a" y "b" dibujadas más arriba.

Recta "a":

$$\begin{bmatrix} A(1, 3) \\ B(6, 5) \end{bmatrix} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{6 - 1} = \frac{2}{5}$$

Recta "b":

$$\begin{bmatrix} C(-4, -1) \\ D(-1, -7) \end{bmatrix} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - (-1)}{-1 - (-4)} = \frac{-6}{-3} = -2$$

Ya hemos visto como tanto con la observación gráfica de los dos puntos de cada recta como con la fórmula hemos obtenido las pendientes, con lo que ahora sólo nos queda aplicar la ecuación de la forma punto-pendiente tomando uno de los dos puntos en cada una de ellas. Veamos:

RESOLUCIÓN del ejercicio nº 1.

Rectas "a":

Aplicamos la ecuación de la forma punto - pendiente:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow \begin{cases} \circ m = \frac{2}{5} \\ \circ x_1 = 1 \\ \circ y_1 = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{5}(x - 1) + 3 \quad / \cdot 5$$

$$5y = 2x - 2 + 15$$

$$-2x + 5y = 13 \rightarrow \text{Ecuación de la recta "a"}$$

Rectas "b":

Aplicamos la ecuación de la forma punto - pendiente:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow \begin{cases} \circ m = -2 \\ \circ x_1 = -4 \\ \circ y_1 = -1 \end{cases}$$

$$y = -2(x + 4) + (-1)$$

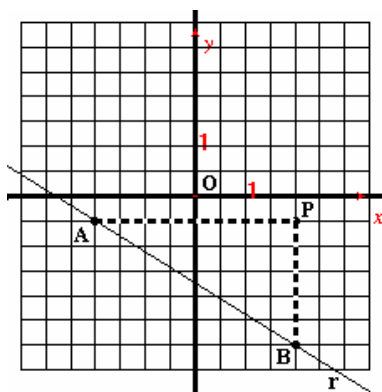
$$y = -2x - 8 - 1$$

$$2x + y = -9 \rightarrow \text{Ecuación de la recta "b"}$$

EJEMPLO RESUELTO Nº 2.

Dados los puntos A (-4, -1) y B (4, -6) de una recta, hallar su representación gráfica y mediante las fórmulas calcular su pendiente y hallar su ecuación.

RESOLUCIÓN:



Recta "r":

$$\left[\begin{matrix} A(-4, -1) \\ B(4, -6) \end{matrix} \right] \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 + 1}{4 + 4} = \frac{-5}{8}$$

Aplicamos la ecuación de la forma punto - pendiente:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow \begin{cases} \circ m = \frac{-5}{8} \\ \circ x_1 = 4 \\ \circ y_1 = -6 \end{cases}$$

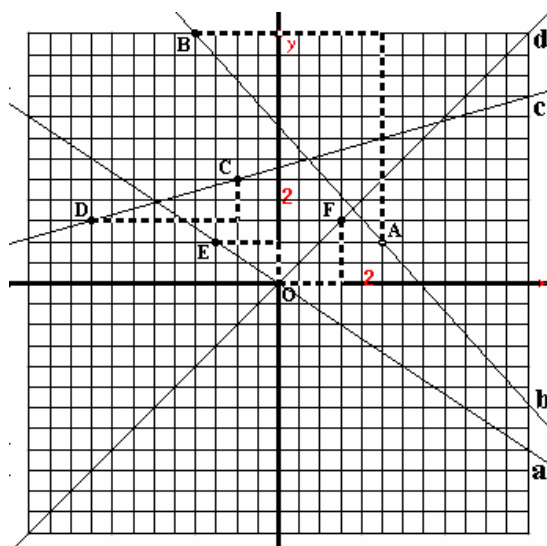
$$y = -\frac{5}{8}(x - 4) - 6 \quad / \cdot 8$$

$$8y = -5x + 20 - 48$$

$$5x + 8y = -28 \rightarrow \text{Ecuación de la recta "r"}$$

EJERCICIOS PARA RESOLVER:

3.- Halla las ecuaciones de las rectas representadas en los ejes calculando sus pendientes mediante la observación de sus dos puntos señalados y después aplicando la ecuación de la forma punto-pendiente.



4.- Averigua las ecuaciones de las rectas que contienen a los puntos que se indican en cada apartado. Las llamas "a", "b", "c", "d" y "e", igual que sus respectivos apartados, y las representas en ejes de coordenadas.

- Puntos K (-5, 7) y L (4, -1).
- Puntos M (2, -1) y N (-8, 6).
- Puntos Ñ (8, 5) y O (0, 0).
- Puntos P (-3, -4) y Q (0, 5).
- Puntos R (0, -9) y S (-7, -2).

13.11.- Estudio conjunto de dos rectas y sus ecuaciones.

En el tema 5 de MATYVAL I, que trata de la Iniciación al Álgebra, vimos la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Recordarás que había tres métodos para resolverlos: por sustitución, por reducción y por igualación.

Por otra parte, en este tema 13, Iniciación a las Gráficas, hemos visto en la pregunta anterior (13.10) que la forma general de la ecuación de una recta es " $a x + b y = c$ ", que es la manera de ordenar las ecuaciones de dos incógnitas para resolverlas por el método de reducción. ¿Te acuerdas?

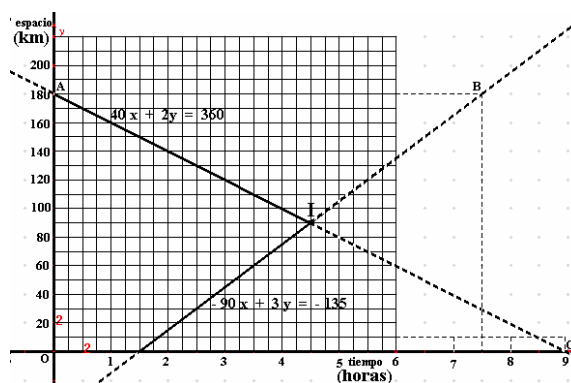
También hemos explicado en la pregunta 13.6 de este tema el análisis de gráficas conjuntas. Bien, pues en esta pregunta del tema 13 vamos a ver el estudio conjunto de gráficas que son rectas, y explicaremos además cómo resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Las funciones lineales nos ayudan a explicar y a examinar multitud de contextos de la vida cotidiana en los que dos magnitudes tienen relaciones que pueden ser representadas mediante rectas.

Cuando observamos dos o más rectas representadas en unos mismos ejes de coordenadas, a través del estudio de sus pendientes podemos comparar las magnitudes relacionadas, o hallar valores desconocidos en función de otros, también prevenir el comportamiento de algunas magnitudes a través de su gráfica, etc.

Veamos algunos ejemplos que nos ayudarán bastante más a comprender la teoría.

EJEMPLO RESUELTO N° 1.- En los ejes siguientes se han representado las rectas cuyas ecuaciones son " $40 x + 2 y = 360$ " (ciclista 1º) y " $-90 x + 3 y = -135$ " (ciclista 2º). Son las gráficas que relacionan el movimiento uniforme (espacio recorrido en un cierto tiempo a una velocidad constante) de dos ciclistas que salen de sus pueblos respectivos por la carretera que los une y van al encuentro uno de otro.



Analicemos poco a poco las gráficas:

- La variable independiente (" x ") representa el tiempo en horas. Y la variable dependiente (" y ") representa el espacio en km.
- Vamos a despejar en ambas la " y " :

$$\begin{cases} 40x + 2y = 360 \\ -90x + 3y = -135 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -20x + 180 \\ y = 30x - 45 \end{cases}$$

- Así, con las ecuaciones de esta forma, sabemos de forma rápida sus pendientes y sus ordenadas en el origen :

1ª recta	$\begin{cases} m_1 = -20 \\ \text{ordenada en el origen} \rightarrow 180 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{El signo } - \text{ significa que viene hacia "O" (va restando km)} \end{cases}$
2ª recta	$\begin{cases} m_2 = 30 \\ \text{ordenada en el origen} \rightarrow -45 \end{cases}$	

¿Qué nos quiere decir esto? Analicemos las gráficas.

Que el **primer ciclista** baja 20 (" y ") cada 1 (" x ") que avanza, es decir, que recorre 20 km cada 1 hora, con lo que su velocidad es **20 km/h**.

Que el **2º ciclista** sube 30 (" y ") cada 1 (" x ") que avanza, o sea, que recorre 30 km cada 1 hora. Su velocidad es de **30 km/h**.

Que el punto de partida del **1º** ciclista, es decir, su pueblo, está a **180 km** (ordenada en el origen) de **O**.

Que la ordenada en el origen del **2º** ciclista es **-45** es algo más difícil de comprender. Intentémoslo. Al empezar el movimiento el **1º** ciclista, el **2º** ciclista está a **45 km** negativos, es decir, que cuando empieza el **1º** todavía le faltan al **2º** **45 km** (**1 hora y media**, puesto que su velocidad es de **30 km/h**) para empezar. Claro, el concepto de espacio negativo no se comprende, ¿verdad? En fin, si lo entiendes, bien, y si no, pues en cursos posteriores lo lograrás.

- El 2º ciclista inicia el movimiento en el punto (1'5, 0), que nos quiere decir que **comienza** el recorrido al encuentro de 2º a la hora y media, o sea, **a los 90 minutos** de haber salido el 2º ciclista.
- El punto de intersección de las dos rectas es **I**, cuyas coordenadas son **(4'5, 90)**. O sea, que los dos ciclistas se encuentran a las **4 horas y media de haber salido el 1º** —o a las 3 horas de haber salido el 2º— **y a 90 km del pueblo del 2º**, del origen —o a 90 km del pueblo del 1º—.
- Lógicamente, el ciclista 2º, si continúa su recorrido hacia el pueblo del 1º (punto "B"), llegará después de **6 horas** (a 30 km/h → 180 km) de haber salido. Y el 1º llegará al otro pueblo (punto "C") a las **9 horas** (a 20 km/h → 180 km).
- Las rectas deberían tener todo su trazado continuo, pero sólo hemos quedado éste en la parte de ellas que es objeto de estudio, ya que la parte más importante a analizar es desde la salida hasta el punto de encuentro de ambos.
- En realidad, en los ejes se ha resuelto el sistema de coordenadas de una forma gráfica, viendo en qué punto se cortan las dos rectas que representan a cada ecuación.
- También se puede resolver el sistema, como ya vimos en el tema 5, por alguno de los tres métodos estudiados. En este caso, como tenemos despejadas las "y", resolvemos el sistema por igualación. Veamos:

$$\begin{cases} 40x + 2y = 360 \\ -90x + 3y = -135 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -20x + 180 \\ y = 30x - 45 \end{cases}$$

Igualamos los segundos miembros de las ecuaciones de la derecha:

$$-20x + 180 = 30x - 45$$

$$-50x = -225$$

$$x = 4'5 \text{ Sustituimos "x"}$$

$$y = 30x - 45 = 30 \cdot 4'5 - 45 = 135 - 45 = 90$$

Solución del sistema $\rightarrow \begin{cases} \circ x = 4'5 \\ \circ y = 90 \end{cases}$

Y así terminamos el estudio de estas dos rectas representativas de un movimiento, en este caso de ciclistas.

EJEMPLO RESUELTO Nº 2.

Resuelve gráfica y numéricamente el siguientes sistemas de ecuaciones.

- Resolución numérica:

$$\begin{cases} 2y = -3x \\ 4x - y = 11 \end{cases}$$

Por sustitución $\rightarrow \begin{cases} 2y = -3x \\ 4x - 11 = y \end{cases} \rightarrow$

$$2 \cdot (4x - 11) = -3x$$

$$8x - 22 = -3x$$

$$11x = 22 \rightarrow x = 2$$

Sustituimos el valor de "x = 2" en la 4ª:

$$y = 4x - 11 = 4 \cdot 2 - 11 = -3$$

SOLUCIONES $\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

- Resolución gráfica:

EJERCICIO Nº 2

Ecuación 1ª:

$$y = -\frac{3}{2}x$$

EJERCICIO Nº 2

Ecuación 2ª:

$$y = 4x - 11$$

CÁLCULO DE LOS VALORES

De la 1ª ecuación:

- Para " $x = 8$ " $\rightarrow y = -3 \cdot 8 / 2 = -12$
- Para " $x = 4$ " $\rightarrow y = -3 \cdot 4 / 2 = -6$
- Para " $x = 0$ " $\rightarrow y = -3 \cdot 0 / 2 = 0$
- Para " $x = -2$ " $\rightarrow y = -3 \cdot (-2) / 2 = 3$
- Para " $x = -6$ " $\rightarrow y = -3 \cdot (-6) / 2 = 9$

De la 2ª ecuación:

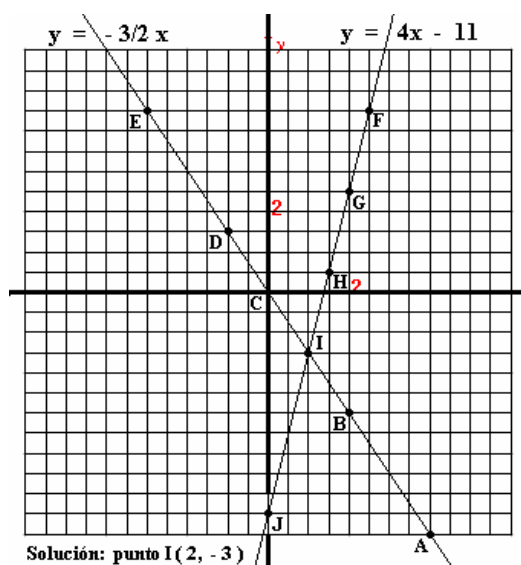
- Para " $x = 5$ " $\rightarrow y = 4 \cdot 5 - 11 = 9$
- Para " $x = 4$ " $\rightarrow y = 4 \cdot 4 - 11 = 5$
- Para " $x = 3$ " $\rightarrow y = 4 \cdot 3 - 11 = 1$
- Para " $x = 2$ " $\rightarrow y = 4 \cdot 2 - 11 = -3$
- Para " $x = 0$ " $\rightarrow y = 4 \cdot 0 - 11 = -11$

TABLA DE VALORES		
Puntos	Coordenadas	
	Abscisa	Ordenada
A	8	-12
B	4	-6
C	0	0
D	-2	3
E	-6	9

TABLA DE VALORES		
Puntos	Coordenadas	
	Abscisa	Ordenada
F	5	9
G	4	5
H	3	1
J	0	-11

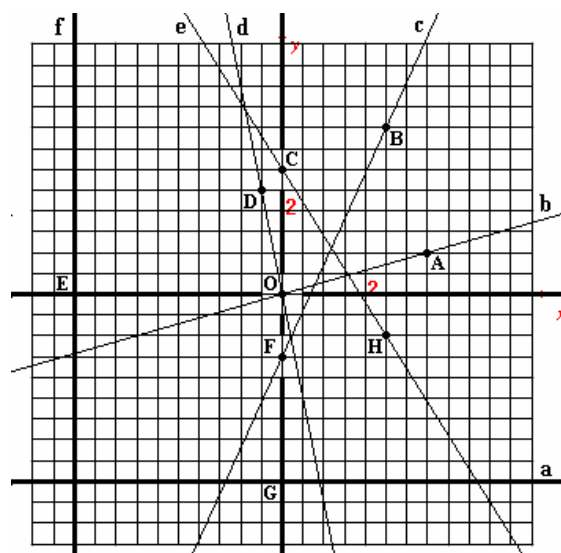
Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

De las tablas de valores obtenemos la representación gráfica con la solución, que será el punto de corte de ambas rectas, es decir, el punto "I" cuyas coordenadas son $(2, -3)$, lo que quiere decir que esos dos valores, " $x = 2$ " e " $y = -3$ " son los únicos que satisfacen a ambas rectas (ecuaciones), o sea, que por él pasan las dos rectas.



EJEMPLO RESUELTO N° 3.

A continuación tienes la representación de seis rectas en unos ejes de coordenadas, y debajo las seis ecuaciones que corresponden a dichas rectas. Asócialas debidamente.



Las seis ecuaciones son las siguientes :

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1) $5y + 8x = 30$ | 2) $0 = 7x - 2y$ |
| 3) $y + 9 = 0$ | 4) $15 + 5y = 11x$ |
| 5) $-y = 5x$ | 6) $0 = -10 - x$ |

En primer lugar, ponemos todas las ecuaciones en la forma que nos interesa, que es la siguiente:

$$y = mx + n,$$

con lo cual calculamos rápidamente sus pendientes y ordenadas en el origen.

1) $y = -\frac{8}{5}x + 6$	2) $y = \frac{7}{2}x$
3) $y = -9$	4) $y = \frac{11}{5}x - 3$
5) $y = -5x$	6) $x = -10$

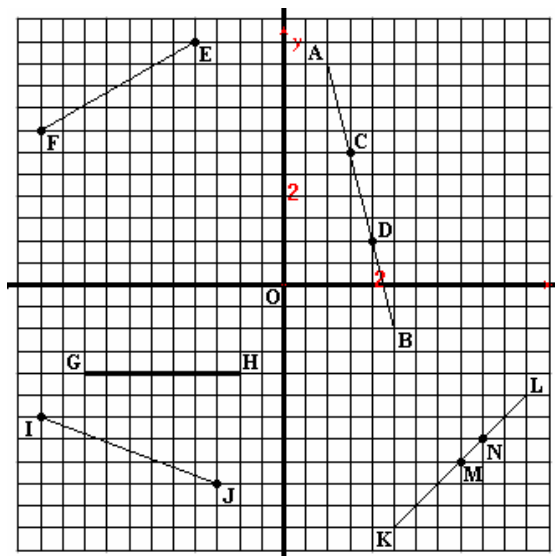
Con las ecuaciones de esta forma, sólo nos queda observar detenidamente las rectas para asociar a cada una su ecuación. Por ejemplo:

- *Observamos la recta "a". Es de una función constante, con pendiente nula y ordenada en el origen -9 (punto de corte con el eje de ordenadas). Corresponde con la ecuación n° 3.*
- *Observamos la recta "b". Es de una función de proporcionalidad directa, porque pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$. Si nos fijamos en el punto "A", vemos que "y" sube 2 cuando "x" avanza 7, o sea, de pendiente $2/7$. Luego corresponde a la ecuación n° 2.*
- *Etc.*

Ecuación 1	$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ pendiente: } m = \frac{8}{-5} \\ \circ \left[\begin{array}{l} \text{ordenada en} \\ \text{el origen} \end{array} : +6 \end{array} \right. \right\}$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta "e"} \\ \text{función} \\ \text{afín} \end{array} \right.$
Ecuación 2	$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ pendiente: } m = \frac{7}{2} \\ \circ \left[\begin{array}{l} \text{ordenada en} \\ \text{el origen} \end{array} : 0 \end{array} \right. \right\}$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta "b"} \\ \text{función de} \\ \text{prop. dir.} \end{array} \right.$
Ecuación 3	$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ pendiente: } m = 0 \\ \circ \left[\begin{array}{l} \text{ordenada en} \\ \text{el origen} \end{array} : -9 \end{array} \right. \right\}$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta "a"} \\ \text{función} \\ \text{constante} \end{array} \right.$
Ecuación 4	$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ pendiente: } m = \frac{11}{5} \\ \circ \left[\begin{array}{l} \text{ordenada en} \\ \text{el origen} \end{array} : -3 \end{array} \right. \right\}$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta "c"} \\ \text{función} \\ \text{afín} \end{array} \right.$
Ecuación 5	$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ pendiente: } m = -5 \\ \circ \left[\begin{array}{l} \text{ordenada en} \\ \text{el origen} \end{array} : 0 \end{array} \right. \right\}$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{recta "d"} \\ \text{función de} \\ \text{prop. dir.} \end{array} \right.$
Ecuación 6	$\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{recta "f"} \\ \text{esta recta no es función} \end{array} \right.$		

13.12.- EJERCICIOS RESUELTOS:

1.- Calcula la pendiente de cada segmento dibujado en los ejes.



SOLUCIONES DEL EJERCICIO N° 1 :

- AB →
- Si nos fijamos en los extremos, vemos que "y" baja 12 (-12) cuando "x" avanza 3 (+3).
 - $m = \frac{-12}{3} = -4$
 - Igual tendríamos si nos fijamos en los puntos "C" y "D": "y" baja 4 cuando "x" avanza 1.
 - $m = \frac{-4}{1} = -4$
- EF →
- "y" sube 4 (+4) cuando "x" avanza 7.
 - $m = \frac{4}{7}$
- GH →
- "y" se mantiene, ni sube ni baja, o sea, cambio 0, cuando "x" avanza 7.
 - $m = \frac{0}{7} = 0$

Sigue tú haciendo los demás.

2.- A continuación, en cada apartado, aparece la ecuación de una recta y las coordenadas de dos puntos. Debes averiguar si los dos puntos, uno, o ninguno pertenecen a la recta representativa de cada ecuación.

- a) $12 + y = -3x \rightarrow (0, -12) \text{ y } (4, 0)$
 b) $y = -\frac{x}{5} + 1 \rightarrow (5, 0) \text{ y } (-10, -1)$
 c) $\frac{3y}{4} - \frac{2x}{5} = 36 \rightarrow (2, -6) \text{ y } (15, 56)$
 d) $y = -\frac{6}{10}x \rightarrow (0, 0) \text{ y } (-20, 12)$
 e) $-x = 5 \rightarrow (-5, 6) \text{ y } (-5, -4)$
 f) $-2(3 + 5x) = 4y - 1 \rightarrow \left(1, \frac{-15}{4}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

SOLUCIONES DEL EJERCICIO N° 2 :

Para saber si un punto pertenece a una determinada recta se sustituyen sus coordenadas (x, y) en la ecuación de dicha recta, y si ese par de valores satisface a dicha ecuación, es decir, si se mantiene la igualdad, SÍ PERTENECE, y si no, pues NO.

- a) $12 + y = -3x \rightarrow (0, -12) \text{ y } (4, 0)$
 Sustituimos 0 (x) y -12 (y) y 4 (x) y 0 (y):
 $\begin{cases} 12 + (-12) = -3 \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Sí está.} \\ 12 + 0 = -3 \cdot 4 \Rightarrow 12 \neq -12 \rightarrow \text{No está.} \end{cases}$
 b) $y = -\frac{x}{5} + 1 \rightarrow (5, 0) \text{ y } (-10, -1)$
 Sustituimos 5 (x) y 0 (y) y -10 (x) y -1 (y):
 $\begin{cases} 0 = -\frac{5}{5} + 1 \Rightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Sí está.} \\ -1 = -\frac{(-10)}{5} + 1 \Rightarrow -1 \neq 3 \rightarrow \text{No está.} \end{cases}$

Resuelve tú los demás apartados.

3.- Dadas las siguientes expresiones algebraicas de funciones, clasifícalas, escribe sus pendientes, sus ordenadas en el origen y dices si son crecientes o decrecientes.

- a) $f(x) = -3x$ b) $y = 7$
 c) $y = \frac{1}{6}x + 8$ d) $-2y + 1 = x$
 e) $f(x) = -4$ f) $x = -3$
 g) $y = x$ h) $y = 0$
 i) $f(x) = \frac{-5x}{9} + 6$ j) $y = \frac{x}{3} - 2$
 k) $\frac{6x}{4} - \frac{5y}{3} = -2$ l) $-\frac{1}{6}x - 2y + 5 = 0$

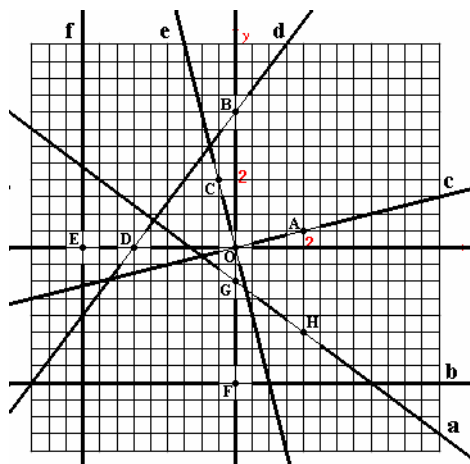
SOLUCIONES DEL EJERCICIO N° 1 :

- a) $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Función de proporcionalidad directa} \\ \circ \text{ Pendiente} \rightarrow m = -3 \\ \circ \text{ Ordenada en el origen} \rightarrow 0 \\ \circ \text{ Recta decreciente} \end{array} \right.$
- b) $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Función constante} \\ \circ \text{ Pendiente} \rightarrow m = 0 \\ \circ \text{ Ordenada en el origen} \rightarrow 7 \\ \circ \text{ Recta paralela al eje de abscisas,} \\ \quad \text{o sea, ni creciente ni decreciente.} \end{array} \right.$
- c) $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Función afín} \\ \circ \text{ Pendiente} \rightarrow m = \frac{1}{6} \\ \circ \text{ Ordenada en el origen} \rightarrow 8 \\ \circ \text{ Recta creciente} \end{array} \right.$
- d) $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ En primer lugar, despejamos "y" para} \\ \quad \text{ponerla en la forma "y = mx + n":} \\ \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ \circ \text{ Función afín} \\ \circ \text{ Pendiente} \rightarrow m = -\frac{1}{2} \\ \circ \text{ Ordenada en el origen} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \circ \text{ Recta decreciente} \end{array} \right.$

Las otras que faltan, de e) hasta l), hazlas tú una vez aprendas de estas cuatro resueltas.

4.- Observa detenidamente las rectas representadas y respondes a lo siguiente de cada una:

- Calcular su pendiente.
- Hallar su ordenada en el origen.
- Escribir su ecuación.
- Notificar las coordenadas de los puntos de corte con los ejes.
- Decir qué clase de función es.



SOLUCIONES DEL EJERCICIO N° 1 :

- recta "a" $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \circ m = \frac{-3}{4} \\ \circ \text{ Ordenada en el origen} \rightarrow n = -2 \\ \circ y = mx + n \rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2 \\ \circ \text{ Corte con "OX": Hay que igualar} \\ \quad \text{"y" a 0 y calcular "x":} \\ \quad 0 = \frac{-3x}{4} - 2 \Rightarrow x = \frac{8}{-3} \\ \quad \text{Punto de corte (OX)} \rightarrow \left(\frac{-8}{3}, 0 \right) \\ \circ \text{ Corte con "OY"} \rightarrow (0, -2) \\ \circ \text{ Es la recta de una FUNCIÓN AFÍN.} \end{array} \right.$
- recta "b" $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \circ m = 0 \\ \circ \text{ Ordenada en el origen} \rightarrow n = -8 \\ \circ y = mx + n \rightarrow y = 0 \cdot x - 8 = -8 \\ \circ \text{ Corte con "OX": no hay, ya que es} \\ \quad \text{paralela al eje de abscisas.} \\ \circ \text{ Corte con "OY"} \rightarrow (0, -8) \\ \circ \text{ FUNCIÓN CONSTANTE.} \end{array} \right.$
- recta "c" $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \circ m = \frac{1}{4} \\ \circ \text{ Ordenada en el origen} \rightarrow n = 0 \\ \circ y = mx + n \rightarrow y = \frac{1}{4}x - 0 \rightarrow y = \frac{x}{4} \\ \circ \text{ Corte con "OX"} \rightarrow (0, 0) \\ \circ \text{ Corte con "OY"} \rightarrow (0, 0) \\ \circ \text{ Función de proporcionalidad directa.} \end{array} \right.$

Sigue tú haciendo las demás. ¡OJO!

Las RECTAS "a" y "d" son PERPENDICULARES, y también las rectas "c" y "e". Bien, pues observa cómo son sus pendientes entre cada pareja de rectas perpendiculares. Si lo haces todo bien, deben salirte PENDIENTES OPUESTAS E INVERSAS.

5.- Representa en unos ejes de coordenadas las rectas cuyas ecuaciones son:

- a) $3y - 12 + \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Valores de "x":} \\ -12, -6, 0, 6 \end{array} \right.$
- b) $-10 - x - \frac{5y}{4} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Valores de "x":} \\ -10, -5, 0, 5 \end{array} \right.$
- c) $\frac{x}{24} = \frac{y}{5} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Elige tú los valores y una} \\ \text{escala adecuada en todas} \\ \text{las siguientes.} \end{array} \right.$
- d) $1 + 3y = 7$
- e) $f(x) = \frac{-x}{50}$
- f) $4 \cdot (3 - y) = -2x - 4y$

SOLUCION :

1ª forma de resolverlo :

- a) En primer lugar, despejamos la "y" para poner la ecuación en la forma "y = mx + n" :

$$y = -\frac{1}{6}x + 4 \rightarrow \begin{cases} \circ \text{ Ordenada en el origen} = 4 \\ \circ \text{ pendiente} \rightarrow m = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Con esto ya podemos dibujar la gráfica (recta). Sabemos que corta al eje OY en el punto (0, 4), por ser su ordenada en el origen 4. Y desde ese punto bajamos una unidad (y = -1) y avanzamos seis (x = 6) a la derecha, ya que la pendiente es -1/6; así obtenemos otro punto de la recta. Y uniendo los dos tenemos la recta de esa ecuación.

Ver la gráfica primera.

SOLUCIONES:

2ª forma de resolverlo :

- a) En primer lugar, despejamos la "y" para poner la ecuación en la forma "y = mx + n" :

$$y = -\frac{1}{6}x + 4 \rightarrow \begin{cases} \text{Esto nos sirve para hallar} \\ \text{la tabla de valores} \end{cases}$$

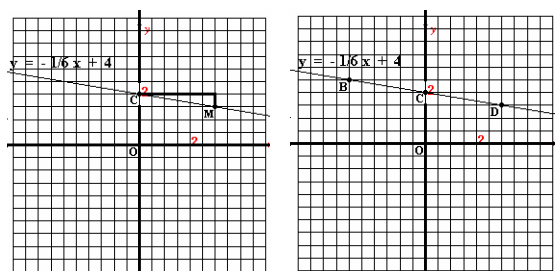
- Para "x = -12" → "y = 6"
- Para "x = -6" → "y = 5"
- Para "x = 0" → "y = 4"
- Para "x = 6" → "y = 3"

Luego la recta pasa por los puntos :

A (-12, 6), B (-6, 5), C (0, 4), D (6, 3)

Y ya dibujamos la gráfica.

Ver la gráfica segunda :



Realiza tú las demás igual que las dos anteriores.

6.- En unos grandes almacenes, debido a las últimas investigaciones que demuestran que a la rica y completa dieta mediterránea una de las pocas cosas que le falta es el consumo habitual de soja, han decidido promocionar los artículos de alimentación que contienen soja. Para ello han rebajado un determinado porcentaje igual para todos ellos. Por ejemplo: un bote de soja germinada que antes costaba 3'60 euros vale ahora 2'70 euros.

Con esta información, responde:

- ¿Cuánto costará ahora un recipiente de lecitina de soja que antes valía 4'50 euros?
- ¿Cuánto costaba antes un yogur de soja que ahora vale 1'12 euros?
- ¿Cuál es la ecuación que expresa la relación de precio actual en función del precio inicial?
- Haz una tabla dando a "x" los valores 1 a 10.
- Representa esta función de proporcionalidad.

AJUSTE INICIAL :

Calculamos el % de rebaja :

$$V. I. \cdot F. V. = V. F.$$

$$3'60 \cdot x = 2'70 \Rightarrow x = \frac{2'70}{3'60} = 0'80 \Rightarrow 80 \%$$

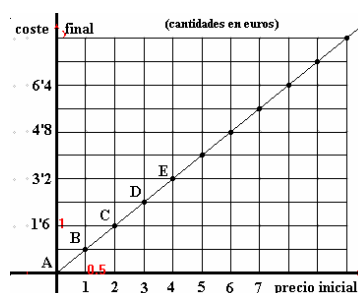
Se paga el 80 % → rebaja del 20 %.

- $$\begin{cases} V. I. \cdot F. V. = V. F. \\ 4'50 \cdot 0'80 = x \end{cases}$$

3'60 € = x → Coste actual de la lecitina.
- $$\begin{cases} V. I. \cdot F. V. = V. F. \\ x \cdot 0'80 = 1'12 \end{cases}$$

x = 1'40 € → Coste anterior del yogur.
- Ecuación → y = 0'80 x

TABLA DE VALORES						
Puntos	A	B	C	D	E	?
x (precio inicial)	0	1	2	3	4	?
y (precio actual)	0	0'80	1'60	2'40	3'20	?

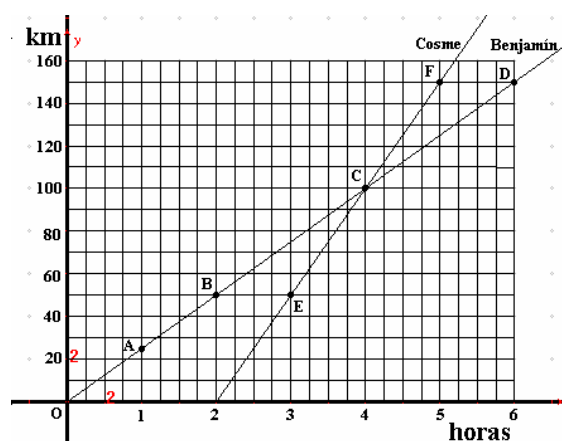


- 7.- Benjamín y Cosme todos los domingos hacen deporte, uno ciclismo y otro motorismo. El último domingo Benjamín sale a las 8 de la mañana a una velocidad media de 25 km/h. Cosme sale a su encuentro con su nueva vespino 120 minutos más tarde a una velocidad media de 50 km/h. Realiza:
- Las gráficas de los dos movimientos.
 - Halla sus expresiones algebraicas.
 - ¿A qué hora y a qué distancia del pueblo se encuentran?

Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

SOLUCIONES DEL Nº 7:

a) Las gráficas son éstas:



b) Cosme : $y = 25x \rightarrow (e = v \cdot t)$

Benjamín : $y = 50(x - 2) = 50x - 100$
 $e = v \cdot t = 50(x - 120 \text{ minutos}) =$
 $= 50(x - 2 \text{ horas}) = 50x - 100$

c) Se encuentran a las 2 horas después de haber salido Cosme y a los 100 km del pueblo.

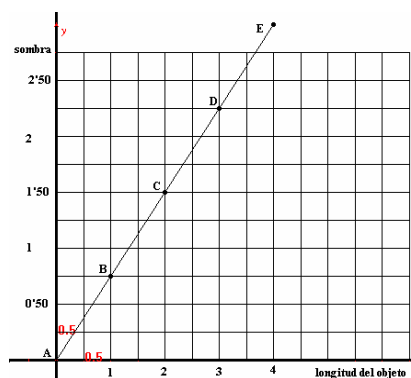
8.- Recuerda que la sombra del cualquier cosa es directamente proporcional a su altura. Bien, pues éste es el problema. El palo de la portería del patio de recreo mide 2 m. A las 11 de la mañana proyecta una sombra de 1'5 m. Estudiando la longitud de la sombra en función de la longitud del objeto, realiza lo siguiente:

- Una tabla de valores.
- La representación de la función.
- Escribes su ecuación.

La constante de proporcionalidad ("k") entre las dos magnitudes, que es la pendiente ("m"), la hallamos de esta forma:

$$k = m = \frac{y}{x} = \frac{\text{sombra del objeto}}{\text{su longitud}} = \frac{1'5}{2} = 0'75$$

TABLA DE VALORES						
Puntos	A	B	C	D	E	?
x (largo-objeto)	0	1	2	3	4	?
y (su sombra)	0	0'75	1'5	2'25	3	?

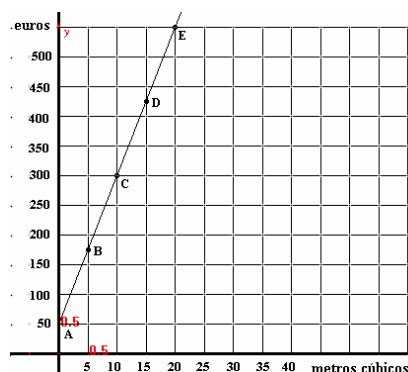


Ecuación de la función $\rightarrow y = 0'75x$

9.- En la empresa Aqualia de Villafranca, dentro de no muchos años, *debido al derroche constante que todos hacemos del líquido-elemento, y a la sequía que va poco a poco invadiendo nuestra CASA (el planeta Tierra)*, tendrán una tarifa fija de 50 euros y un precio de 25 euros por cada m³ (metro cúbico = 1000 litros) de agua consumido. Relacionando el importe de la factura en función del consumo de agua, realiza:

- Una tabla de valores.
- La representación de la función.
- Escribes su ecuación.

TABLA DE VALORES						
Puntos	A	B	C	D	E	?
x (m. c.)	0	5	10	15	20	?
y (importe)	50	175	300	425	550	?



Ecuación de la función $\rightarrow y = 50 + 25x$

10.- Representa las rectas que cumplan las condiciones de cada uno de los apartados, halla también sus ecuaciones y las escribes en la forma general ($ax + by = c$):

- Pasa por el origen de coordenadas y tiene una pendiente de -2 .
- Tiene de pendiente $4/3$ y pasa por el punto $(-2, 1)$.
- Pasa por los puntos $(-10, -1)$ y $(4, -5)$.
- Una función de proporcionalidad directa que pasa por $(7, -8)$.
- Paralela a " $f(x) = -2/3x - 5$ " y que pasa por $(4, 7)$.
- Perpendicular a " $y = 4x + 6$ " y que pasa por $(0, -3)$.

SOLUCIONES :

- Si pasa por el origen, es de la forma " $y = mx$ "
 - Luego su ecuación es $\rightarrow y = -2x \Rightarrow 2x + y = 0$
- Aplicamos la ecuación punto - pendiente:
 - " $y = m(x - x_1) + y_1$ " $\rightarrow \begin{cases} m = 4/3 \\ x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$
 - Luego su ecuación es $\rightarrow y = \frac{4}{3}(x + 1) + 2$
 $4x - 3y = -10$
- Lo vamos a hacer de otra forma de como se hizo en la pregunta 13.10.2. Allí se halló la pendiente con la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;
 - sin embargo, ahora sustituiremos los valores de los dos puntos en la ecuación de la forma " $y = mx + n$ " y hallaremos " m " y " n ".
 - $\begin{cases} 1 = m \cdot (-10) + n \\ -5 = m \cdot 4 + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 10m = n \\ 4m + n = -5 \end{cases}$
 - Resolvemos por sustitución:
 - $4m + 1 + 10m = -5 \rightarrow m = \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7}$
 - $n = 1 + 10m = 1 + 10 \cdot \frac{-3}{7} = -\frac{23}{7}$
 - Así que su ecuación es:
 - $y = -\frac{3}{7}x - \frac{23}{7} \Rightarrow 3x + 7y = -23$

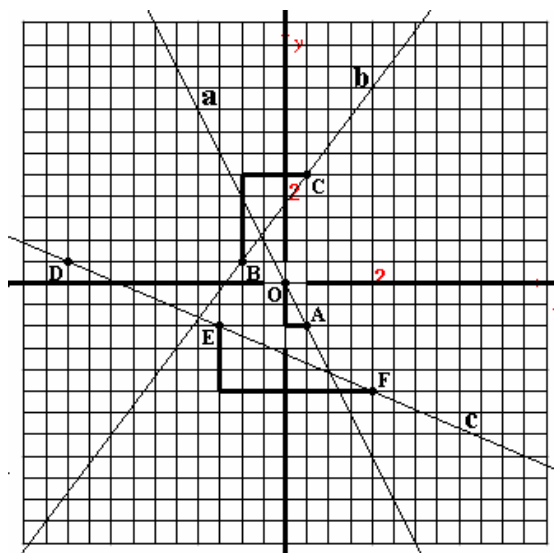
Realiza tú los apartados d), e), f).

A continuación tienes la representación de las tres rectas "a", "b" y "c". Lo hemos hecho así:

☞ Para la recta "a": nos situamos en el origen $(0,0)$, porque es de proporcionalidad directa, y desde él bajamos 2 y crecemos 1, porque su pendiente es -2 ($y = -2, x = 1$).

☞ Para la recta "b": nos situamos en el punto $(-1, 2)$ y desde él subimos 4 y aumentamos 3, porque su pendiente es $4/3$ ($y = 4, x = 3$).

☞ Para la recta "c": marcamos los dos puntos $(-10, 1)$ y $(4, -5)$ y los unimos.



11.- ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes de la función $y = \frac{x}{-8} - 3$?

a	A $(-24, 0)$ y B $(0, 3)$
b	A $(24, 0)$ y B $(0, -3)$
c	A $(0, -24)$ y B $(-3, 0)$
d	A $(0, 3/8)$ y B $(3, 0)$
e	Ningún apartado anterior es correcto.

SOLUCIÓN $\rightarrow$ Apartado "e".

Para saber las coordenadas de los cortes con los ejes "OX" y "OY" hay que igualar a 0 "y" y "x", con lo que se obtienen los dos puntos. Veamos:

$$\begin{cases} \circ \text{Corte con OX} \rightarrow 0 = \frac{x}{-8} - 3 \rightarrow \begin{cases} x = -24 \\ A(-24, 0) \end{cases} \\ \circ \text{Corte con OY} \rightarrow y = \frac{0}{-8} - 3 \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ B(0, -3) \end{cases} \end{cases}$$

12.- A continuación, en cada apartado, aparece la ecuación de una recta con alguna letra diferente de "x" e "y". Hay que calcular dicha letra para que cada ecuación (recta) cumpla las condiciones que se indican.

Tema 13. Iniciación a las gráficas. Funciones.

a) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } 3x + 6 = \mathbf{a}y \\ \circ \text{ Debe ser paralela a "y = -\frac{x}{6} + 2" \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } 2x - y = \mathbf{b} \\ \circ \text{ Debe pasar por el punto } (-3, 0) \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } \frac{5y}{\mathbf{c}} - 1 = -\frac{3x}{2} \\ \circ \text{ Debe ser perpendicular a " - 4y = \frac{5x}{2} " \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } y = -\mathbf{d}x + 9 \\ \circ \text{ Debe pasar por el punto } (0, -2) \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } -2y = -\frac{3x}{\mathbf{e}} \\ \circ \text{ Debe ser paralela a " \frac{3}{y} = -\frac{8}{5x} " \end{array} \right.$

f) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } 10x - 4 + \mathbf{f}x = 0 \\ \circ \text{ Debe ser perpendicular a " \frac{3}{y} = -\frac{8}{5}x " \end{array} \right.$

a) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } 3x + 6 = \mathbf{a}y \\ \circ \text{ Debe ser paralela a "y = -\frac{x}{6} + 2" \end{array} \right.$

⊗ En primer lugar, ponemos en la forma conveniente:

$$y = \frac{3}{a}x + \frac{6}{a} \rightarrow \text{pendiente: } m = \frac{3}{a}$$

⊗ Como deben tener pendientes iguales:

$$\frac{3}{a} = \frac{-1}{6} \rightarrow 18 = -a \rightarrow \mathbf{a = -18}$$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } 2x - y = \mathbf{b} \\ \circ \text{ Debe pasar por el punto } (-3, 0) \end{array} \right.$

⊗ Sustituimos los valores del punto: $[-3(x), 0(y)]$

$$2x - y = b \rightarrow 2 \cdot (-3) - 0 = b \rightarrow \mathbf{b = -6}$$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación: } \frac{5y}{\mathbf{c}} - 1 = -\frac{3x}{2} \\ \circ \text{ Debe ser perpendicular a " - 4y = \frac{5x}{2} " \end{array} \right.$

⊗ Ponemos en la forma eficaz ambas ecuaciones:

$$y = -\frac{3c}{10}x + \frac{2c}{10} \rightarrow \text{pendiente: } m = -\frac{3c}{10}$$

$$y = -\frac{5}{8}x \rightarrow \text{pendiente: } m = -\frac{5}{8}$$

⊗ Como deben tener pendientes opuestas e inversas:

$$\frac{-3c}{10} = \frac{8}{5} \rightarrow -15c = 80 \rightarrow \mathbf{c = -\frac{16}{3}}$$

Realiza los demás tú.

13.- Averiguar las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

Las ecuaciones son :

$$\text{Recta "a" } \rightarrow 2x = \frac{-y}{3}$$

$$\text{Recta "b" } \rightarrow 7y - 77 = 11x$$

$$\text{Recta "c" } \rightarrow -10x - 14y - 70 = 0$$

$$\text{Recta "d" } \rightarrow \frac{y}{2} = -4 + \frac{0}{5}x$$

SOLUCIONES :

Ponemos todas en la forma " $y = mx + n$ " para representarlas de forma más rápida después:

$$\text{Recta "a" } \rightarrow y = -6x$$

$$\text{Recta "b" } \rightarrow y = \frac{11}{7}x + 11$$

$$\text{Recta "c" } \rightarrow y = -\frac{5}{7}x - 5$$

$$\text{Recta "d" } \rightarrow y = -8$$

Después, sustituimos " $x = 0$ " e " $y = 0$ " en cada ecuación y obtenemos $(0, ?)$ e $(?, 0)$, que serán respectivamente los puntos de corte con los ejes "OY" y "OX".

Una vez resueltos, las soluciones son :

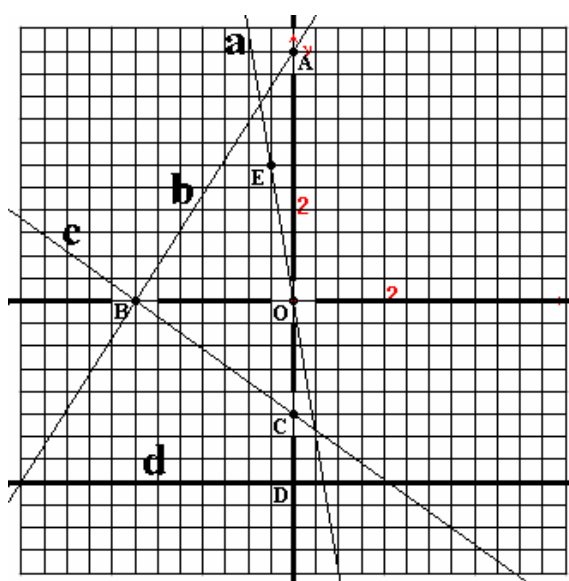
$$\text{Recta "a" } \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Corte con OX } \rightarrow (0, 0) \\ \circ \text{ Corte con OY } \rightarrow (0, 0) \end{array} \right.$$

$$\text{Recta "b" } \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Corte con OX } \rightarrow (-7, 0) \\ \circ \text{ Corte con OY } \rightarrow (0, 11) \end{array} \right.$$

$$\text{Recta "c" } \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Corte con OX } \rightarrow (-7, 0) \\ \circ \text{ Corte con OY } \rightarrow (0, -5) \end{array} \right.$$

$$\text{Recta "d" } \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Corte con OX } \rightarrow \text{Es paralela} \\ \circ \text{ Corte con OY } \rightarrow (0, -8) \end{array} \right.$$

A continuación tienes la representación gráfica de dichas rectas.



14.- Se tiene la siguiente tabla de una función de proporcionalidad directa. Debes completar los valores que faltan, hallar la ecuación y representar la función.

TABLA DE VALORES						
Puntos	A	B	C	D	E	?
x (var. indep.)		-4	0	2		?
y (var. dep.)	-7'5			1'5	6	?

SOLUCIÓN :

Como las coordenadas del punto "D" son 2 y 1'5, calculamos la pendiente (constante de proporcionalidad) :

$$m = \frac{y}{x} = \frac{1'5}{2} = 0'75 \rightarrow \text{Luego su ecuación es :}$$

$$y = m x \Rightarrow y = 0'75 x \rightarrow \text{Y calculamos los valores :}$$

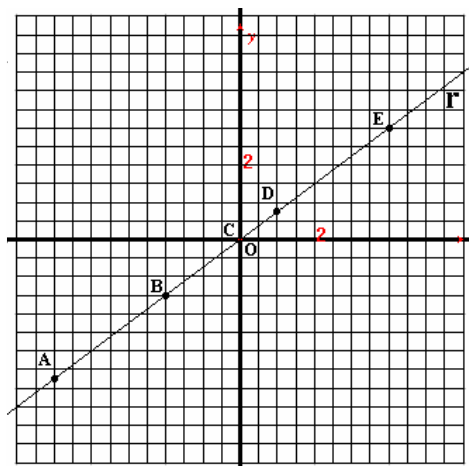
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A } (?, -7'5) \rightarrow -7'5 = 0'75 x \rightarrow \\ x = \frac{-7'5}{0'75} = -10 \rightarrow \text{A } (-10, -7'5) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{B } (-4, ?) \rightarrow y = 0'75 \cdot (-4) \rightarrow \\ y = -3 \rightarrow \text{B } (-4, -3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{C } (0, ?) \rightarrow y = 0'75 \cdot 0 \rightarrow \\ y = 0 \rightarrow \text{C } (0, 0) \end{array} \right.$$

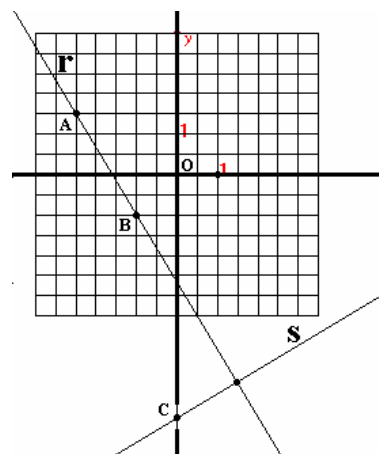
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{E } (?, 6) \rightarrow 6 = 0'75 x \rightarrow \\ x = \frac{6}{0'75} = 8 \rightarrow \text{E } (8, 6) \end{array} \right.$$

TABLA DE VALORES						
Puntos	A	B	C	D	E	?
x (var. indep.)	-10	-4	0	2	8	?
y (var. dep.)	-7'5	-3	0	1'5	6	?



15.- ¿Qué ecuación tiene la recta "s" ?

NOTA : las coordenadas de "C" son (0, -12).



SOLUCIÓN :

1º) Hallamos la pendiente de la recta "r":

$$m = -5/3$$

2º) Como las rectas "r" y "s" son perpendiculares, sus pendientes son opuestas e inversas. Y la ordenada en el origen de "s" es -12. Luego la ecuación es :

$$y = \frac{3}{5} x - 12$$

16.- Hallar el punto de corte de cada uno de los pares de rectas cuyas ecuaciones vienen expresadas en los siguientes apartados. Lo haces de forma numérica (soluciones del sistema) y gráfica (representando las rectas en unos ejes).

Primer Sistema	→	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Recta "a"} \rightarrow 3y = -2x - 8 \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow -10, -4, -1, 8) \\ \text{Recta "b"} \rightarrow 3x - 2y = 27 \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow 1, 5, 9, 11) \end{array} \right.$
Segundo Sistema	→	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Recta "c"} \rightarrow 4x = 5y \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow -10, 0, 5, 10) \\ \text{Recta "d"} \rightarrow 5y - 35 = 4x \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow -10, -5, 0, 5) \end{array} \right.$
Tercer Sistema	→	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Recta "e"} \rightarrow -4x - 2y = 20 \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow -9, -6, 0, 1) \\ \text{Recta "f"} \rightarrow 6y - 3x = 15 \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow -7, -5, -1, 3) \end{array} \right.$
Cuarto Sistema	→	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Recta "g"} \rightarrow 5x + 8y = 8 \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow -8, 0, 8) \\ \text{Recta "h"} \rightarrow 4y + 8 = \frac{-5x}{2} \\ \text{(Valores de "x"} \rightarrow -8, 0, 8) \end{array} \right.$

$$\begin{cases} \text{Primer Sistema} \rightarrow \begin{cases} \text{Recta "a"} \rightarrow 3y = -2x - 8 \\ (\text{Valores de "x"} \rightarrow -10, -4, -1, 8) \end{cases} \\ \text{Recta "b"} \rightarrow 3x - 2y = 27 \\ (\text{Valores de "x"} \rightarrow 1, 5, 9, 11) \end{cases}$$

Ordenamos y resolvemos el sistema por reducción:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -8 \quad / \cdot 2 \\ 3x - 2y = 27 \quad / \cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -16 \\ 9x - 6y = 81 \end{cases}$$

$$13x = 65 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = -6$$

Despejamos la "y" en las dos ecuaciones para ponerlas en la forma "y = m x + n":

$$\text{Recta "a"} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \rightarrow \left\{ m = -\frac{2}{3} \right.$$

Y hacemos la tabla de valores para representarla:

$$\text{Recta "a"} \rightarrow \begin{cases} \text{Para "x"} = -10 \rightarrow "y" = 4 \\ \text{Para "x"} = -4 \rightarrow "y" = 0 \\ \text{Para "x"} = -1 \rightarrow "y" = -2 \\ \text{Para "x"} = 8 \rightarrow "y" = -8 \end{cases}$$

La recta pasa por los puntos:

A (-10, 4), B (-4, 0), C (-1, -2), D (8, -8)

$$\text{Recta "b"} \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{27}{2} \rightarrow \left\{ m = \frac{3}{2} \right.$$

Y hacemos la tabla de valores para representarla:

$$\text{Recta "b"} \rightarrow \begin{cases} \text{Para "x"} = 1 \rightarrow "y" = -12 \\ \text{Para "x"} = 3 \rightarrow "y" = -9 \\ \text{Para "x"} = 9 \rightarrow "y" = 0 \\ \text{Para "x"} = 11 \rightarrow "y" = 3 \end{cases}$$

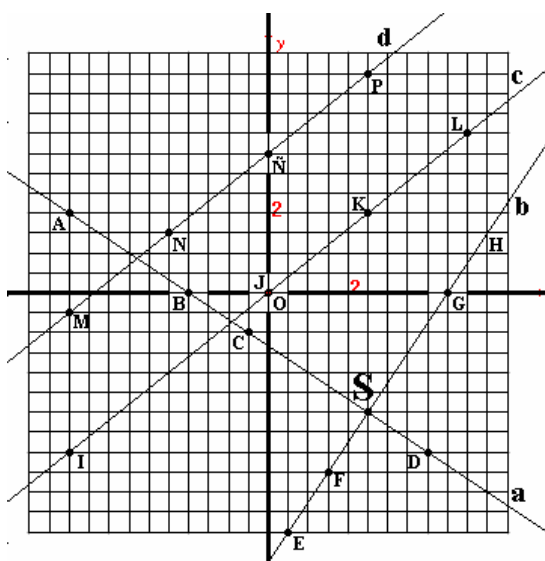
La recta pasa por los puntos:

E (1, -12), F (3, -9), G (9, 0), H (11, 3)

Las dos rectas "a" y "b" son

perpendiculares. Observa que sus **pendientes son opuestas e inversas**.

Como se puede observar en la gráfica, el punto de corte de las dos rectas "a" y "b" es **S (5, -6)**, que es la solución del sistema.



$$\begin{cases} \text{Segundo Sistema} \rightarrow \begin{cases} \text{Recta "c"} \rightarrow 4x = 5y \\ (\text{Valores de "x"} \rightarrow -10, 0, 5, 10) \end{cases} \\ \text{Recta "d"} \rightarrow 5y - 7 = 4x \\ (\text{Valores de "x"} \rightarrow -10, -5, 0, 5) \end{cases}$$

Intentamos resolver el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} 4x = 5y \\ 5y - 7 = 4x \end{cases} \rightarrow 5y - 7 = 5y \rightarrow$$

$$5y - 5y = 7 \rightarrow 0y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{0} \dots$$

Y vemos que no tiene solución.

Es un sistema incompatible.

En la gráfica entendemos mejor porque no tiene solución, ya que son rectas paralelas.

Despejamos la "y" en las dos para ponerlas en la forma "y = m x + n":

$$\text{Recta "c"} \rightarrow y = \frac{4}{5}x \rightarrow \left\{ m = \frac{4}{5} \right.$$

Y hacemos la tabla de valores para representarla:

$$\text{Recta "c"} \rightarrow \begin{cases} \text{Para "x"} = -10 \rightarrow "y" = -8 \\ \text{Para "x"} = 0 \rightarrow "y" = 0 \\ \text{Para "x"} = 5 \rightarrow "y" = 4 \\ \text{Para "x"} = 10 \rightarrow "y" = 8 \end{cases}$$

La recta pasa por los puntos:

I (-10, -8), J (0, 0), K (5, 4), L (10, 8)

$$\text{Recta "d"} \rightarrow y = \frac{4}{5}x + 7 \rightarrow \left\{ m = \frac{4}{5} \right.$$

Y hacemos la tabla de valores para representarla:

$$\text{Recta "d"} \rightarrow \begin{cases} \text{Para "x"} = -10 \rightarrow "y" = -1 \\ \text{Para "x"} = -5 \rightarrow "y" = 3 \\ \text{Para "x"} = 0 \rightarrow "y" = 7 \\ \text{Para "x"} = 5 \rightarrow "y" = 11 \end{cases}$$

La recta pasa por los puntos:

M (-10, -1), N (-5, 3), Ñ (0, 7), P (5, 11)

Las dos rectas "c" y "d", al ser **paralelas**, no se cortan. Como puedes observar, tienen sus **pendientes iguales**.

Los otros dos sistemas los haces tú fijándote en la resolución de los dos primeros.

17.- En la ecuación "y = m x + n", ¿qué valor deben tener "m" y "n" para que la gráfica representativa sea la bisectriz del cuadrante 1º? ¿Y qué valor debe tener "m" para que la gráfica representativa sea decreciente?

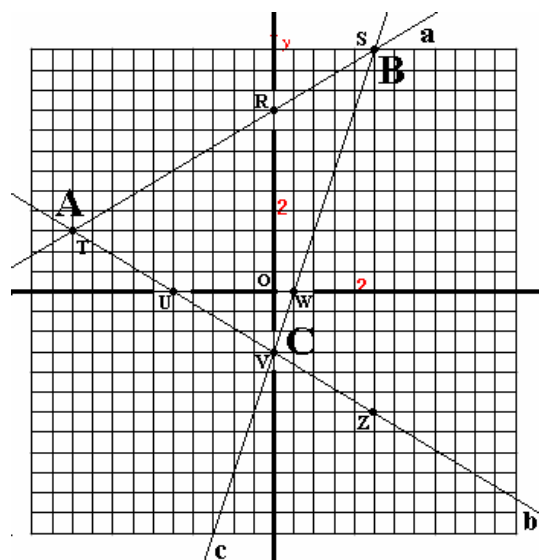
SOLUCIÓN:

- ⊗ Para que la gráfica sea la de la bisectriz del primer cuadrante, "m" = 1 y "n" = 0.
- ⊗ En toda función decreciente → "m" < 0.

18.- Las ecuaciones de tres rectas que se cortan formando un triángulo son:

$$\begin{array}{l} \text{Recta "a"} \rightarrow 5y - 3x = 45 \\ \text{Recta "b"} \rightarrow 6 + 2y = \frac{-6x}{5} \\ \text{Recta "c"} \rightarrow \frac{2y + 6}{6} = x \end{array}$$

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de dicho triángulo? Hazlo de forma gráfica, (representando todo en unos ejes de coordenadas) y de forma algebraica (numérica, o sea, resolviendo los sistemas).



SOLUCIONES :

SOLUCIÓN GRÁFICA :

En primer lugar ponemos las tres ecuaciones en la forma " $y = mx + n$ " :

$$\begin{array}{l} \text{Recta "a"} \rightarrow y = \frac{3}{5}x + 9 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{3}{5} \\ \text{ordenada en el origen} \end{array} \right\} \rightarrow 9 \\ \text{Recta "b"} \rightarrow y = -\frac{3}{5}x - 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{3}{5} \\ \text{ordenada en el origen} \end{array} \right\} \rightarrow -3 \\ \text{Recta "c"} \rightarrow y = 3x - 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 3 \\ \text{ordenada en el origen} \end{array} \right\} \rightarrow -3 \end{array}$$

Ahora las representamos como ya sabemos:

- "a" { Nos situamos en $(0, 9) \rightarrow$ Ordenada en el origen.
Desde ahí, subimos 3 y avanzamos 5 ($m = 3/5$)
Unimos esos dos puntos (R,S) y tenemos la recta.
- "b" { Nos situamos en $(0, -3) \rightarrow$ Ordenada en el origen.
Desde ahí, bajamos 3 y avanzamos 5 ($m = -3/5$)
Unimos esos dos puntos (V,Z) y tenemos la recta.
- "c" { Nos situamos en $(0, -3) \rightarrow$ Ordenada en el origen.
Desde ahí, subimos 3 y avanzamos 1 ($m = 3$)
Unimos esos dos puntos (V,W) y tenemos la recta.

Marcamos los tres puntos de corte, que son los vértices del triángulo pedido, y definimos sus coordenadas, en este caso con exactitud, porque son enteras.

$$A(-10, 3), B(5, 12), C(0, -3)$$

SOLUCIONES :

RESOLUCIÓN ALGEBRAICA :

Se trata de resolver tres sistemas; que son los que forman la combinación de las tres ecuaciones tomadas de dos en dos, ya que las soluciones de cada sistema son las coordenadas de los tres puntos donde se cortan las tres rectas, o sea, los vértices del triángulo.

$$\text{Sistema 1} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rectas} \\ \text{"a" y "b"} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x + 5y = 45 \\ 6x + 10y = -30 \end{array} \right.$$

$$\text{Una vez resuelto: solución} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -10 ; y = 3 \\ \text{Punto A}(-10, 3) \end{array} \right.$$

$$\text{Sistema 2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rectas} \\ \text{"a" y "c"} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x + 5y = 45 \\ 6x - 2y = 6 \end{array} \right.$$

$$\text{Una vez resuelto: solución} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 ; y = 12 \\ \text{Punto B}(5, 12) \end{array} \right.$$

$$\text{Sistema 3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rectas} \\ \text{"b" y "c"} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 10y = -30 \\ 6x - 2y = 6 \end{array} \right.$$

$$\text{Una vez resuelto: solución} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 ; y = -3 \\ \text{Punto C}(0, -3) \end{array} \right.$$

Así tenemos los tres vértices del triángulo :

$$A(-10, 3), B(5, 12), C(0, -3)$$

Este **tema 13** va a resultar **bastante extenso**. Es verdad. Pero no está **preparado** sólo para 1º, ni siquiera sólo para 2º, sino **más bien para toda la E.S.O.**, porque siempre que se den funciones, sobre todo cuando se expliquen otros tipos de las que aquí se dan vendrá muy bien recordar todos estos conceptos y ejercicios, que aunque extensos tienen muchas explicaciones y creo que muy detalladas. Todo ello ayudará, al que voluntariamente se preste y se esfuerce, a conseguir una mayor comprensión y un mejor dominio de todas las nuevas funciones que vaya estudiando. **Al menos esa ha sido mi pretensión**, y espero que sea útil a ciertos alumnos.

13.13.- EJERCICIOS PARA RESOLVER:

1.- Completa en tu cuaderno las siguientes frases:

- Por un punto pasa/n _____ recta/s.
- Por dos puntos pasa/n _____ recta/s.
- Por tres puntos pasa/n _____ recta/s si _____.
- Por un punto pasa/n _____ recta/s paralela/s a otra dada.
- Por un punto y con la misma pendiente pasa/n _____ recta/s.
- Por una misma ordenada en el origen pasa/n _____ recta/s.

2.- Al hacer una representación gráfica en unos ejes de coordenadas cartesianas:

(señala la respuesta correcta)

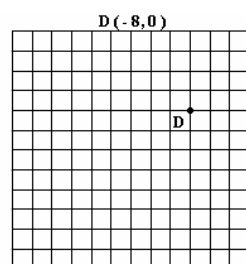
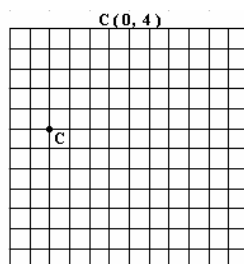
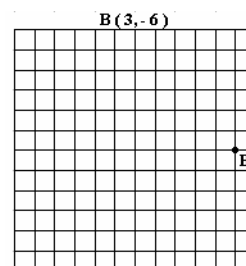
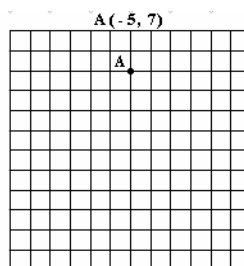
- El eje de abscisas y el eje de ordenadas deben tener distintas unidades de medida en sus cuadrillos.
- Pueden tener las mismas unidades de medida en sus cuadrillos los ejes OX y OY, pero no es necesario.
- La escala de los dos ejes tiene que ser siempre igual.
- Ninguna de las anteriores.

3.- Observando la siguiente expresión, responde a estas preguntas:

$$y = mx + n$$

- ¿Qué representa “m” en la siguiente expresión?
- ¿Y qué representa “n”?
- ¿Y la expresión entera?
- ¿Cuánto debe ser el valor de “m” para que la función sea decreciente?
- ¿Y el valor de “n” para que sea una función cuya recta pase por el origen de coordenadas?
- Si “n” es negativo, ¿qué quiere decir?
- ¿Cómo es “m” en las rectas paralelas?
- ¿Cómo es “m” en las rectas perpendiculares?

4.- A continuación tienes cuatro puntos con sus respectivas coordenadas en cada uno de los grupos de cuadrículas, pero no aparecen los ejes. Dibuja donde le correspondan los ejes a cada uno.



5.- Si $y = x - \frac{1}{5}$ es la ecuación de una función.

¿Cuál de las siguientes proposiciones es la correcta?

- Su gráfica es una curva.
- Su gráfica es una recta paralela al eje OX.
- Es una recta paralela al eje OY.
- Es una recta que pasa por el origen.
- Ninguna de las anteriores.

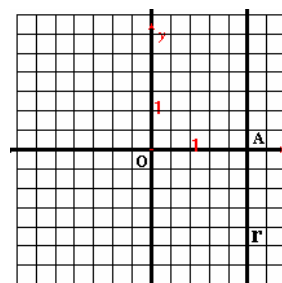
6.- La tabla de valores de una función es:

x	3	0	-2
y	-5	-2	0

¿Cuál es su ecuación?

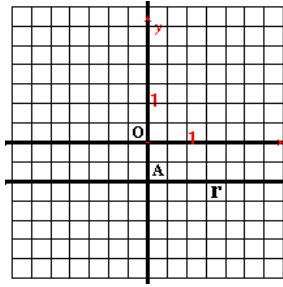
- $f(x) = x - 8$
- $y = -2x$
- $f(x) = -x - 2$

7.- ¿Cuál es la ecuación que representa a la recta “r” representada en los ejes siguientes?



- $y = 5$
- $f(x) = x + 5$
- $y = -5$
- $f(x) = x - 5$
- $x = 5$
- Ninguna

8.- ¿Qué expresión algebraica tiene la función representada en la siguiente gráfica?



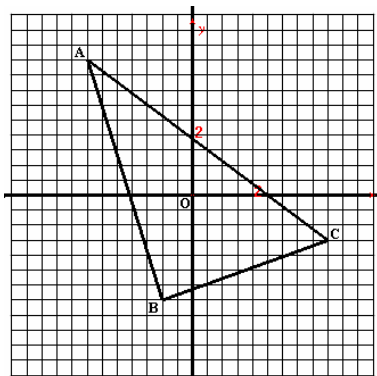
- a) $f(x) = 2$ b) $y = x - 2$ c) $f(x) = y - 2$
d) $x = -2$ e) $f(x) = -2x$ f) Ninguna

9.- De las afirmaciones de los siguientes apartados, sólo una es falsa, ¿cuál y por qué?

- a) Se puede conocer la ecuación de una recta conociendo su pendiente y un punto.
b) Una recta se puede representar sabiendo que es de proporcionalidad directa y conociendo su pendiente.
c) Toda recta de función afín queda determinada por el valor de su ordenada en el origen.
d) Conociendo dos puntos cualesquiera de cualquier recta se sabe cuál es su expresión algebraica.

10.- Dadas las coordenadas de los puntos $(0, -10)$, $(-2, 0)$, $(-1, -15)$, $(3, -25)$, hay uno de ellos que no pertenece a la recta de la función afín siguiente: " $y = -5x - 10$ ". ¿Cuál es?

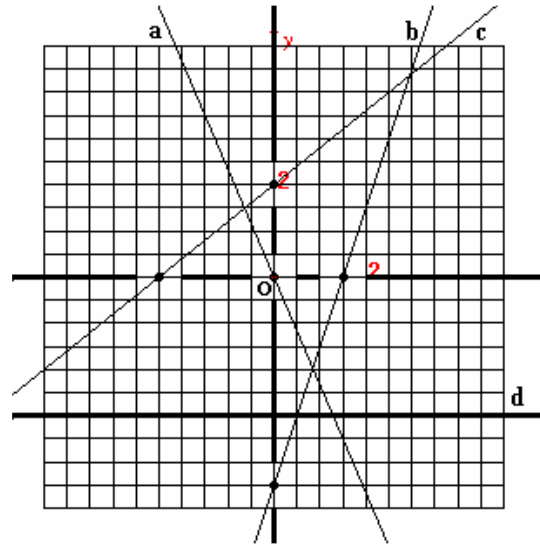
11.- ¿Qué pendiente tiene cada lado del triángulo representado en los ejes?



12.- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la de una función constante que tiene como valor de ordenada en el origen el número entero -5 ?

- a) $f(x) = x - 5$ b) $y = -5x$
c) $x = -5$ d) $f(x) = 4x - 5$
e) $f(x) = \frac{x}{-5}$ f) $-2y = 10$

13.- ¿Cuál es la ordenada en el origen de cada una de las rectas representadas en los ejes de coordenadas?



14.- Realiza las operaciones necesarias para quedar las ecuaciones siguientes en la forma práctica " $y = mx + n$ ".

- a) $2y + \frac{x}{3} = 0$
b) $1 - 4y = -5x$
c) $\frac{3(x - 2y)}{4} = -1$
d) $-5(-y + 3x) = x - 6$

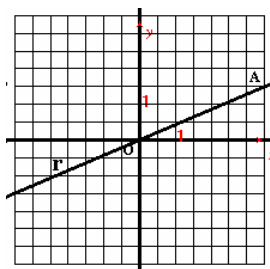
Después, realiza lo siguiente:

- a) Escribe de cada una de ellas qué clase de función es.
b) Averigua su pendiente.
c) También su ordenada en el origen.
d) Y halla las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de cada una de ellas.

15.- Tenemos el siguiente texto: "Una función hace corresponder a cualquier número el número entero -4 ". Y debemos elegir cuál es la expresión de las siguientes que le corresponde a dicha función. Explicándolo, claro.

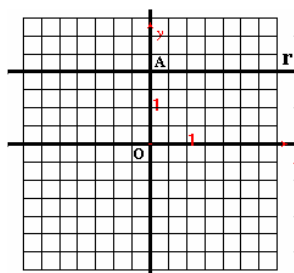
- a) $f(x) = -4x$ b) $f(x) = -4 + x$
c) $f(x) = -4$ d) Ninguna

16.- ¿Qué función representa la recta dibujada en los ejes de coordenadas siguientes? ¿Por qué?



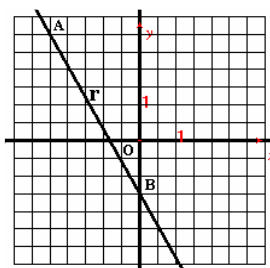
- a) Función constante b) Función afín
c) Función de proporcionalidad directa d) Ninguna

17.- ¿Qué función representa la recta dibujada en los ejes de coordenadas siguientes? ¿Por qué?



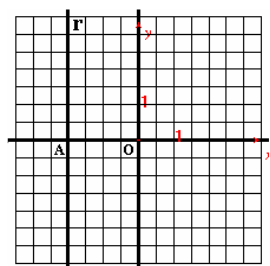
- a) Función constante b) Función afín
c) Función de proporcionalidad directa d) Ninguna

18.- ¿Qué función representa la recta dibujada en los ejes de coordenadas siguientes? ¿Por qué?



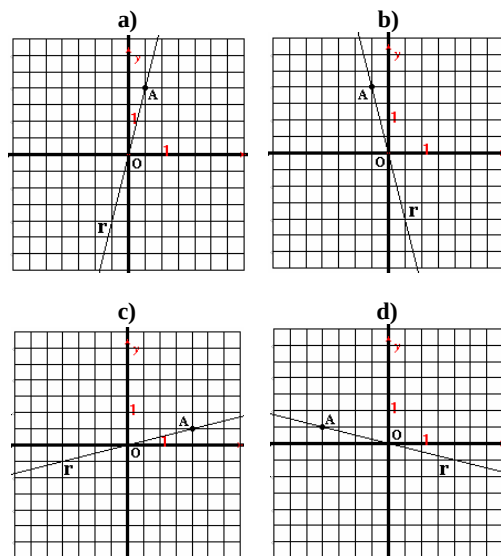
- a) Función constante b) Función afín
c) Función de proporcionalidad directa d) Ninguna

19.- ¿Qué función representa la recta dibujada en los ejes de coordenadas siguientes? ¿Por qué?



- a) Función constante b) Función afín
c) Función de proporcionalidad directa d) Ninguna

20.- ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función " $f(x) = -4x$ ". ¿Por qué?



21.- ¿Algunas de estas rectas son paralelas? ¿Y hay algunas que sean perpendiculares? Explica de forma razonada tus respuestas.

NOTA: no es necesario que las representes, basta sólo con observar detenidamente sus ecuaciones.

a) $y = -2x$	b) $f(x) = \frac{x}{2} - 5$
c) $f(x) = 2x - 5$	d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
e) $y = \frac{x}{-2}$	f) $f(x) = x + 3$

22.- ¿Cuánto debe valer " n " en la ecuación de la forma " $y = m x + n$ " para que dicha recta pase por el punto $(0, -6)$?

23.- Dibuja en unos ejes de coordenadas:

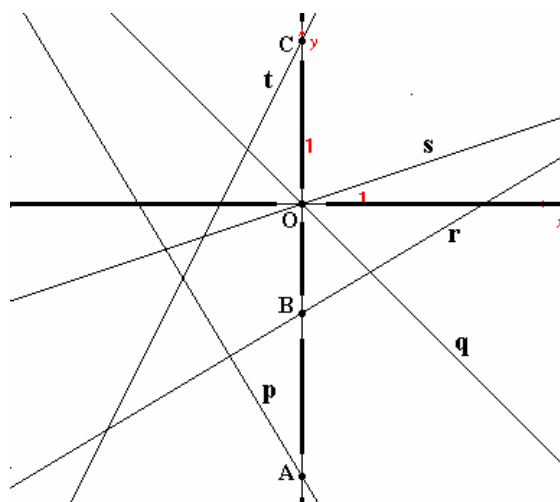
- Una recta de función constante que atravesase el 2º cuadrante.
- La bisectriz del 3º cuadrante.
- Una recta de función de proporcionalidad directa con pendiente negativa.
- Una recta que no sea función.
- Una recta de función afín con ordenada en el origen negativa.
- Averigua las ecuaciones de todas las rectas de los apartados anteriores.
- Una curva que sea función.
- Una curva que no sea función.

24.- ¿Están alineados los puntos A (-7, 10), B (5, -1) y C (9, 2)?

25.- Si una recta pasa por estos dos puntos: (-3, -2) y (9, -10), ¿cuáles son los valores de las ordenadas para los puntos que tienen de abscisas " $x = 6$ ", " $x = 0$ ", " $x = -6$ " y " $x = -12$ "?

26.- En los ejes se han representado las rectas "p", "q", "r", "s". Estúdialas pausadamente y si di es cierto o no lo que se afirma en los apartados siguientes. No olvides razonar lo que digas.

NOTA : todas las rectas están dibujadas a la misma escala.



Las ecuaciones de cada recta son las siguientes:

Recta "p" $\Rightarrow y = m_1 x + b_1$

Recta "q" $\Rightarrow y = m_2 x + b_2$

Recta "r" $\Rightarrow y = m_3 x + b_3$

Recta "s" $\Rightarrow y = m_4 x + b_4$

Recta "t" $\Rightarrow y = m_5 x + b_5$

- Hay tres funciones afines y dos de proporcionalidad directa.
- $b_5 > 0$; $b_1 < 0$.
- $m_1 > 0$; $m_2 > 0$.
- Las rectas "p" y "q" son decrecientes.
- $m_1 < m_2 < m_5 < m_3 < m_4$.
- $b_4 < 0$.
- La ordenada en el origen de la recta "q" es mayor que la de la recta "p".
- $b_2 = 0$.
- $b_4 = b_2$.
- La solución de las rectas "q" y "s" está en el origen de coordenadas.

27.- La expresión algebraica de una función es " $y = -3 - x$ ". ¿Cuál crees que es la afirmación correcta de las siguientes? ¿Por qué?

- Para " $x = 7$ ", le corresponde un valor de la variable dependiente de " $y = 4$ ".
- Cuando la variable independiente vale -4 , la variable dependiente toma el valor -7 .
- Si damos a " x " el valor " 3 ", " y " vale " 0 ".
- La variable independiente vale " -7 " cuando la variable dependiente vale " 4 ".
- Ninguna de ellas es cierta.

28.- Representa en unos ejes de coordenadas distintos, con los valores indicados, las funciones cuyas ecuaciones son las siguientes. Al terminar cada una, escribes qué clase de función es, si es creciente o decreciente, cuál es su pendiente y cuál su ordenada en el origen.

a) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación } \rightarrow f(x) = -3x \\ \circ \text{ Valores de "x" } \rightarrow -4, -1, 0, 2, 3 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación } \rightarrow y = \frac{4}{3}x - 5 \\ \circ \text{ Valores de "x" } \rightarrow -3, 0, 6, 9. \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación } \rightarrow f(x) = \frac{1}{-2}x \\ \circ \text{ Valores de "x" } \rightarrow -12, -8, 0, 4, 10 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación } \rightarrow y = -2x + 4 \\ \circ \text{ Valores de "x" } \rightarrow -7, -5, 0, 1, 3 \end{array} \right.$

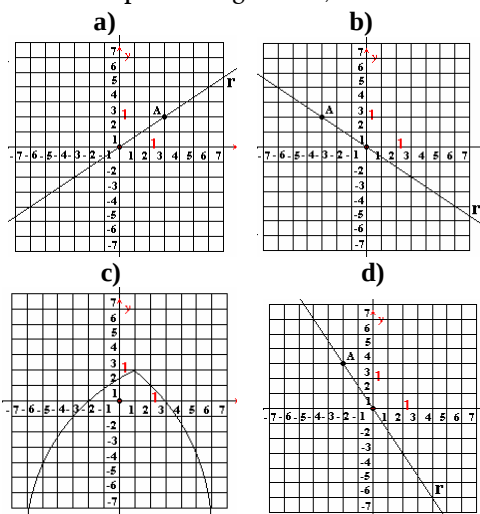
e) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación } \rightarrow y = -8 \\ \circ \text{ Valores de "x" } \rightarrow -6, -2, 0, 4, 9 \end{array} \right.$

f) $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Ecuación } \rightarrow x = -5 \end{array} \right.$

29.- En la ciudad de Badajoz se cobra 2 euros por la bajada de bandera en los taxis; después, se paga 1'75 euros por cada 2 km de trayecto. Haciendo el estudio del coste de cada viaje realizado en función de la distancia recorrida, realiza:

- Una tabla de valores.
- La representación de la función.
- Escribes su ecuación.

30.- Queremos saber cómo es la gráfica de una función cuya expresión algebraica es: $f(x) = -2/3 x$. De las cuatro opciones siguientes, ¿cuál es cierta?



31.- Una función viene representada por la siguiente expresión algebraica: $f(x) = 5$. ¿Cuál de las proposiciones que te ofrecen a continuación crees que responde a la gráfica de esa función?

- Corresponde a una línea curva que pasa por el punto (0, 5).
- La gráfica es una línea recta que corta al eje de abscisas en “x = 5”.
- Es una línea recta que pasa por el origen y corta al eje de ordenadas en “y = 5”.
- Es una recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto (0, 5).
- Es una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto (5, 0).

32.- Se tiene la siguiente tabla de una función de proporcionalidad directa. Completar los valores que faltan, hallar la ecuación y representar la función.

TABLA DE VALORES						
Puntos	A	B	C	D	E	?
x (var. indep.)		-5			6	?
y (var. dep.)	-12		0	4/5	9	?

33.- ¿Qué ecuación tiene la recta que pasa por los puntos (0, -7) y (3, 8)? ¿Cuánto vale la ordenada de un punto perteneciente a dicha recta que tiene por abscisa -1?

34.- Sin necesidad de hacer nada, o sea, sin resolver sistemas ni hacer gráficas, sino sólo observando las ecuaciones, ¿cuáles de las siguientes rectas son paralelas y cuáles perpendiculares?

a) $y = -3x + 1$	b) $y = \frac{4x}{-5} + 2$
c) $y = -\frac{4x}{5} - 3$	d) $y = \frac{-4}{5}x + 6$
e) $y = \frac{x}{3}$	f) $-y = \frac{4x}{5} - 8$

35.- Con sólo el cálculo mental de las coordenadas, averigua la pendiente de las rectas que pasan por cada pareja de puntos.

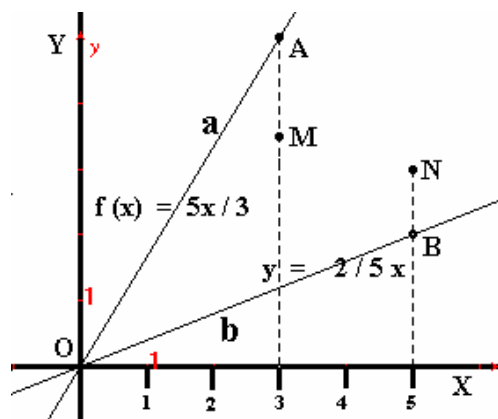
- M (0, 0) y N (-3, 1).
- P (-2, 4) y Q (-6, 5).
- R (3, 9) y S (-5, 0).
- T (0, -4) y U (0, -1).
- V (8, 0) y W (-3, -7).

Al final, lo compruebas representándolos en unos ejes de coordenadas.

36.- Cumpliendo las condiciones indicadas en cada apartado, debes calcular la ecuación de cada recta y representarlas. (Conviene hacer cada dos o tres rectas en ejes distintos)

- De una función constante que corta al eje de ordenadas en el punto (0, 10).
- De una función de proporcionalidad directa que pasa por el punto (-5, -9).
- De una función afín que pasa por los puntos cuyas coordenadas son (-4, 7) y (0, -2).
- De una recta cuya constante de proporcionalidad es 2/9.
- De una recta que tiene -6 de ordenada en el origen y es paralela a otra cuya ecuación es: “y = -5x”.
- De una recta cuya pendiente es “m = 3/8” y se corta con otra, de ecuación “y = -2x + 8”, en el eje de ordenadas.
- De una recta que pasa por (3, -6) y (-2, 5).
- De la bisectriz del 2º y 4º cuadrante.
- De una recta que es paralela a otra de ecuación “y = -5/6x - 7” y que pasa por (5, 0).
- De una recta que pasa por el origen y cuando la variable independiente vale -7 la variable dependiente vale -2.

37.- Observa detenidamente las gráficas y explica si lo que se dice en los apartados siguientes es correcto o no.



- Una de las rectas “a” y “b” es creciente y otra decreciente.
- Las coordenadas del punto “B” son (5, 2).
- Las dos gráficas son de funciones de proporcionalidad directa.
- La pendiente de “b” es mayor que la de “a”.
- La ordenada del punto “M” es menor de “5”.
- La ordenada del punto “A” vale “5”.
- El punto (0, 0) no pertenece ni a “a” ni a “b”.
- La ordenada del punto “N” es mayor de 2.
- Los puntos (– 9, – 15) y (– 15, – 6) pertenecen a la recta “a” pero no a la recta “b”.
- Las pendientes de las dos rectas son > 0.
- Si trazamos las rectas de “O” a “M” y de “O” a “N”, la pendiente de “ON” es mayor que la de “OM”.
- La pendiente de la recta que pasa por “M” y “N” es menor de 0.

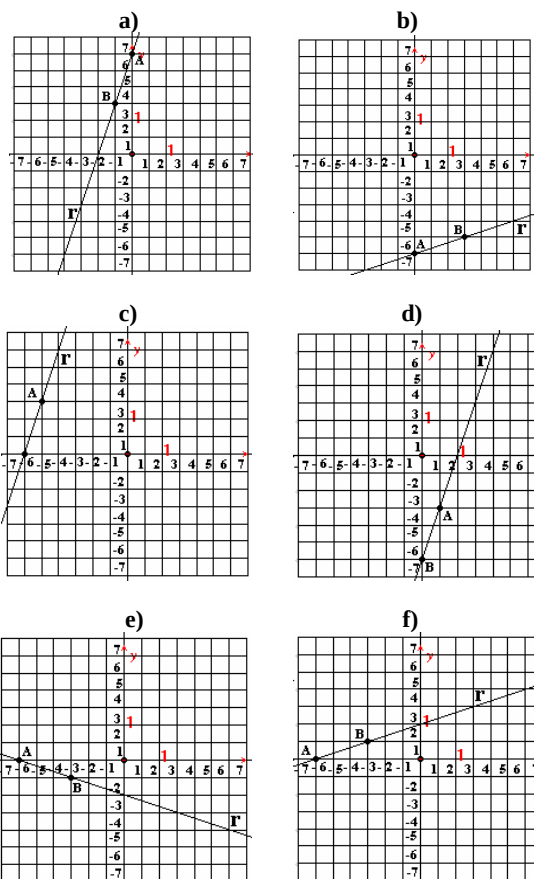
38.- ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes de estas funciones?

a) $f(x) = -5x$	b) $y = -4x - 8$
c) $y = 7$	d) $x = -6$

39.- Bruno y Remigio viven en pueblos distintos que distan por carretera 20 km. Cada domingo salen a realizar el habitual recorrido en bicicleta hasta un pueblo situado en la misma carretera. Bruno, que vive en el pueblo más distante del pueblo al que van, sale a las 8.30 de la mañana a una velocidad media de 25 km/h. Remigio sale 120 minutos más tarde de su pueblo a 30 km/h. Teniendo en cuenta sólo la ida, se pide lo siguiente:

- Dibujar las gráficas de ambos movimientos.
- Hallar las ecuaciones de las rectas resultantes.
- Averiguar numérica y gráficamente a cuántos km de distancia de cada pueblo se encuentra el pueblo al que fueron y cuánto tiempo empleó cada uno.

40.- ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función “ $y = 3x - 6$ ”? ¿Por qué?

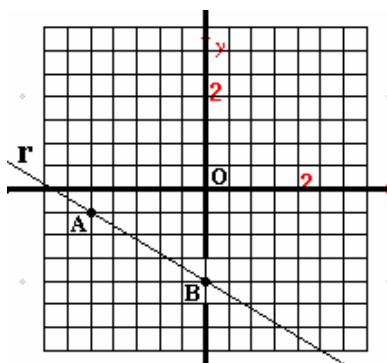


41.- Narciso, cuando va a dar sus paseos matutinos, tiene una medida media de cada paso estimada en 80 cm. Según esto, realiza lo siguiente:

- Relacionando el espacio recorrido en función de la cantidad de pasos que da, ¿cuál es la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?
- ¿Cuántos km habrá recorrido al cabo de 4500 pasos? Si ha andado una mañana 6 km, ¿cuántos pasos habrá dado?
- ¿Qué clase de función es? Escribe su ecuación.
- Tomando en la escala de los ejes unidades de 500 pasos y de km, haces una tabla de valores de 500 a 5000 pasos y representas dicha recta.

42.- ¿Qué valor debes darle a la letra “a” de la ecuación de la función siguiente para que su gráfica sea la de la recta representada?

$$y = \frac{3}{-5}x + a$$



- a) “a = 4” b) “a = 0” c) “a = -4”
d) “a = 1/4” e) “a = -1/4” f) Ninguna

43.- Tres alumnos, al expresar una función, indican lo siguiente:

Hermenegildo → La función es $y = \frac{1}{3}x$.

Martina → La función hace corresponder a cada número su tercera parte.

Perpetua → La función es $f(x) = \frac{-1}{-3}x$.

Olegario → La expresión algebraica de la función es la siguiente $f(x) = \frac{x}{3}$.

Telmo → La ecuación de la función es $y = x : 3$.

Según esto, ¿cuál de los apartados siguientes crees que expone la afirmación correcta?

- a) Las definiciones de cada uno corresponden a funciones distintas.
b) Las definiciones de Hermenegildo y Martina son de las mismas funciones; las otras todas de distintas funciones.
c) Sólo hay una definición que es de distinta función; las demás corresponden todas a la misma función.
d) Ninguna definición es correcta.
e) Las cinco expresiones corresponden a la misma función.

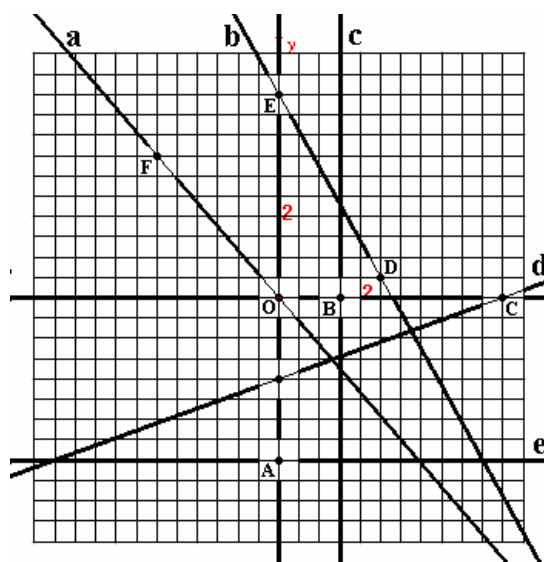
44.- Después de observar las gráficas de la columna siguiente, haces:

⇒ Escribir la pendiente de cada recta.

⇒ Hallar la ordenada en el origen de cada una.

⇒ Calcular la ecuación de cada recta.

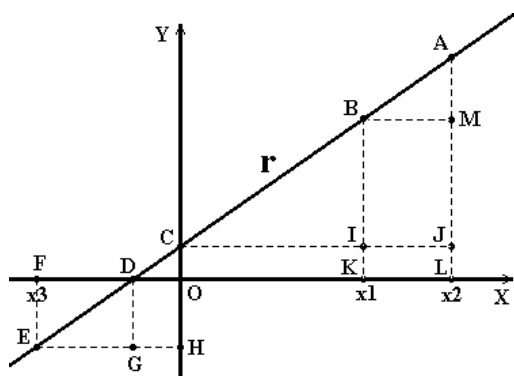
⇒ Decir cuáles son los puntos de corte de cada una de ellas con los ejes.



45.- Representa las rectas que cumplan las condiciones de cada uno de los apartados, halla también sus ecuaciones:

- a) Que pasa por el origen de coordenadas y tiene una pendiente de $-5/2$.
b) La recta tiene de pendiente -3 y pasa por el punto $(-4, 6)$.
c) Que pasa por los puntos $(-1, -7)$ y $(0, 6)$.
d) Una función de proporcionalidad directa que pasa por $(-2, 5)$.
e) Paralela a “ $f(x) = x/8 + 1$ ” y que pasa por $(-5, 7)$.
f) Perpendicular a “ $y = -x/5 - 1/2$ ” y que pasa por $(-3, 8)$.
g) Que tiene de pendiente “ $m = -9/4$ ” y pasa por el punto $(-6, 5)$.
h) La recta tiene de ordenada en el origen -4 y pasa por el punto $(7, 3)$.
i) Es paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto $(8, -1)$.
j) Que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta “ $-2x + 5y - 3 = 0$ ”.
k) Es una recta paralela al eje OX y pasa por el punto $(-6, -9)$.

46.- Dada la siguiente gráfica:



Di si son verdaderas o falsas las afirmaciones de cada apartado, razonando brevemente tus respuestas.

- La abscisa de los puntos "B" e "I" es el segmento "CI".
- La ordenada del punto "D" es la distancia "GH".
- $f(x_1) = BK$.
- $f(x_2) = OL$.
- $f(x_3) = EF$.
- La pendiente de la recta "r" es MJ / OK .
- Las coordenadas de "C" son $(OC, 0)$.
- La pendiente de la recta "r" es GE / GD .
- La función representada es afín.
- La ordenada en el origen de la recta "r" es "OH".
- $f(x_2) - f(x_1) = AM$.
- La pendiente de "r" es creciente, o sea, mayor de 0.
- La ordenada en el origen de "r" es "OC".
- La recta "r" corta al eje de abscisas en el punto "C" y al eje de ordenadas en el punto "D".
- Los cocientes GD/GE , OC/OD , IB/IC , MA/MB son todos iguales.

47.- Hallar los puntos de cortes, de forma numérica (soluciones del sistema) y gráfica (representando las rectas en unos ejes), de cada uno de los pares de rectas cuyas ecuaciones vienen expresadas en los siguientes apartados:

a) $\begin{cases} y = -1 + 2x \\ y = -3x - 1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2y = -2x + 12 \\ 4x = 2y \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ y = 3x \end{cases}$	d) $\begin{cases} \frac{4x}{3} + 2y = \frac{8}{3} \\ -\frac{3}{2}x = -3 - 5y \end{cases}$

48.- ¿Cómo crees que sería la gráfica de una función cuya ecuación es $f(x) = -3x^2$?

49.- Intenta hacer la representación gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{5}x^2$ dándole a la "x" los siguientes valores: -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20. Toma cada cuadrado de tu cuaderno como 5 de escala. ¿Qué te sale?

50.- Averiguar las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

Recta "a" $\rightarrow \frac{y}{2} = -x + 3$
 Recta "b" $\rightarrow 7.5x + 5y = 0$
 Recta "c" $\rightarrow 8x - 2y + 2 = 0$
 Recta "d" $\rightarrow \frac{y}{4} - 2 = -\frac{0}{3}x$

51.- Las ecuaciones de tres rectas que se cortan formando un triángulo son:

Recta "a" $\rightarrow 6x - 3y + 24 = 0$
 Recta "b" $\rightarrow 2y = -\frac{2}{3}x - 12$
 Recta "c" $\rightarrow \frac{5y - 10}{3} = -\frac{5x}{3}$

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de dicho triángulo? Intenta hacerlo de forma algebraica (numérica) y de forma gráfica, como en el ejemplo resuelto nº 14.

Te daré algunas pistas:

- Un punto tiene como abscisa -2.
- Otro de ordenada -4.
- Y el que queda tiene de ordenada la suma de las dos coordenadas del anterior.
- Los vértices se encuentran en el 2º, 3º y 4º cuadrante.

52.- Se sabe que las coordenadas de los vértices de un triángulo son las siguientes:

$A(8, 10)$, $B(-10, 4)$ y $C(0, -6)$.

Averiguar cuáles son las expresiones algebraicas (ecuaciones) que definen a las rectas que contienen a los tres lados de dicho triángulo.

Hazlo gráficamente y numéricamente.