TEMA 14

Iniciación a las Estadística y a la Probabilidad.

Y, por supuesto, algunas reflexiones.

TEMA 14.- Iniciación a la estadística y a la probabilidad.

OBJETIVOS:

1. Saber reconocer variables estadísticas, muestras y poblaciones en situaciones problemáticas de la vida cotidiana.
2. Entender e interpretar los distintos tipos de gráficas que se utilizan para representar variables estadísticas.
3. Construir gráficas estadísticas a partir de los valores de una variable.
4. Calcular la media aritmética de una muestra de una población.
5. Localizar la moda y la mediana de una distribución e interpretarla.
6. Entender la necesidad de la existencia de parámetros que midan la centralización y la dispersión de una distribución.
7. Resolver situaciones de la vida cotidiana relacionadas con variables estadísticas.
8. Reconocer y distinguir sucesos aleatorios en situaciones cotidianas, confeccionar tablas de frecuencias para su representación y resolver problemas sencillos de fenómenos aleatorios.

CONTENIDOS:

De conceptos:

1.- Introducción. Estadística.
2.- Población. Muestra. Variables estadísticas. Recogida de datos. Tabla de frecuencias. Frecuencia absoluta y frecuencia relativa.
3.- Gráficas estadísticas:
   Diagrama de barras, histograma, polígono de frecuencias, diagrama de sectores, pirámide de población y pictograma.
4.- Medidas estadísticas de centralización.
   Moda, mediana y la media aritmética.
5.- Medidas estadísticas de dispersión.
   Recorrido, desviación media, varianza y desviación típica.
6.- Azar y Probabilidad.
   Experimentos o fenómenos aleatorios, sucesos, frecuencia y probabilidad de un suceso. Regla de Laplace. Diagramas de árbol. Propiedades de la probabilidad.

De procedimientos:

1. Clasificación de variables estadísticas.
2. Valoración de la representatividad de una muestra de una población.
3. Cálculo de parámetros estadísticos de centralización: media, moda y mediana.
4. Localización de la mediana en la tabla de frecuencias e identificación de la moda en la tabla de frecuencias.
5. Construcción de diagramas de barras, histogramas, polígonos de frecuencias, diagrama de sectores, pirámides de población y pictogramas a partir de tablas de frecuencias de valores de una variable estadística.
6. Interpretación de distintos tipos de representaciones gráficas de variables estadísticas.
7. Resolución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana relacionadas con las variables estadísticas.
8. Planificación y realización de juegos y experiencias sencillas donde estudiar los fenómenos aleatorios.

De actitudes:

1. Reconocimiento y valoración de la utilidad de los lenguajes gráficos y estadísticos para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.
2. Valoración de la utilidad de la calculadora y los ordenadores en el tratamiento de la información.
3. Reconocimiento de las relaciones existentes entre el lenguaje gráfico y los conceptos estadísticos básicos.
4. Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos y expresar dichas relaciones en forma de parámetros de centralización o mediante gráficos.
5. Análisis crítico de la información estadística utilizada en los medios de comunicación habituales.
6. Gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de la información estadística.

14.1.- Introducción. Estadística.

Hoy día, en la televisión, en los periódicos, en revistas, en libros, etc., se ofrece multitud de información de todo tipo. Dentro de la diversidad informativa, además de los llamados gráficos o gráficas, que hemos estudiado en el tema anterior, abundan noticias como las siguientes:

Un 40 % de los niños entre 11 y 13 años desea adelgazar.

La economía española creció un 2'2 por ciento en el segundo trimestre.

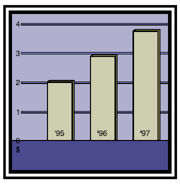
Por Comunidades Autónomas, las dos terceras partes de las pensiones contributivas del sistema de la Seguridad Social se reparten en siete comunidades: Cataluña y Andalucía, Madrid, la Comunidad Valenciana, Galicia, Castilla y León y el País Vasco. Los importes también varían de unas a otras comunidades, los más altos se registran en el País Vasco, el Principado de Asturias y la Comunidad de Madrid; y los más bajos en Galicia y Extremadura.

Excepción hecha de los libros de texto, más de las ¾ partes de los jóvenes españoles no llega a leer ni un solo libro al año.

La esperanza de vida creció en España. Con una media de 82,31 años, se sitúa al frente de los países europeos con mayor esperanza de vida, superando a Italia y Francia que ocupan el segundo y el tercer lugar con 79,12 y 78,89 años respectivamente, según datos del informe "Envejecimiento de la Población".

El español medio tiene una edad de 37 años, con una esperanza de vida de unos 75 años, una altura de 1'73 m, un peso de 76 kg, con una talla de pie entre el 40 y 41.

Algo más de la cuarta parte de los mayores reside en un edificio de pisos sin ascensor (26,1%), algo más entre las mujeres (27,3%), los mayores de 79 años (27,4%), los que viven solos (29,6%) y, como es lógico, los que residen en los municipios de tamaño intermedio o grande: aproximadamente cuatro de diez mayores en los municipios entre 50.000 y un millón de habitantes, y casi la mitad de los que residen en los grandes municipios (más de un millón de habitantes).



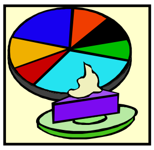
España gastó el 8,2% del PIB en prestaciones de protección social a la vejez, frente al 10,8% de la Unión Europea.

Más de la mitad de los jóvenes extremeños lee menos de 3 libros al año.

Estas informaciones describen la vida cotidiana de los habitantes de un país. Son noticias con datos estadísticos. A través de estudios estadísticos sobre cuestiones determinadas de la población de una provincia, comunidad o país, logramos conocer sus hábitos, costumbres o formas de vida.

Estadística es la ciencia que estudia los métodos para recoger y coleccionar los datos sobre aspectos de una determinada población, su clasificación y presentación gráfica y la interpretación y el análisis de los mismos para obtener algunas conclusiones fiables de toda la información recogida.

Una vez realizado un buen estudio estadístico, es posible hacer predicciones y prever actuaciones futuras con índices de fiabilidad bastante aceptables. Por ejemplo, saber antes de lanzarlo al mercado si un producto determinado encaja bien en los gustos de una determinada población. O prever el índice de paro que habrá en un determinado año. O qué ajustes debe hacer un Estado para conseguir el éxito de una determinada política económica. Etc.



Cuando se realiza un estudio estadístico, siempre nos referimos a grupos constituidos con muchos elementos, generalmente personas, pero también pueden ser referidos a animales u objetos. No tiene sentido "hacer una estadística" sobre sucesos aislados o grupos muy reducidos.

Lógicamente, las conclusiones extraídas de un estudio estadístico serán tanto más fiables y aprovechables cuanto mayor sea el número de observaciones y recogida de datos realizada.

A través del estudio de las nociones elementales de Estadística se proporciona a los alumnos los instrumentos básicos para saber interpretar las informaciones que utilizan estos métodos.

14. 2.- Población. Muestra. Variable estadística. Recogida de datos. Tabla de frecuencias. Frecuencia absoluta y frecuencia relativa.

POBLACIÓN

Se llama **población** al conjunto de todos los elementos sobre los que se hace un estudio estadístico.

MUESTRA

Se llama **muestra** a la parte (subconjunto) de la población que se considera como base en la investigación estadística.

Habitualmente la población suele ser muy grande y es imposible, o no es factible, estudiar cada uno de sus elementos; es entonces cuando se toma una muestra representativa de esa población para su estudio; muestra que debe servir para obtener conclusiones fiables sobre la población estudiada.

INDIVIDUO

Se llama **individuo** a cada uno de los elementos a los que se hace el estudio.

Hay que tener muy claro que un individuo **puede ser** *una* **persona,** *si se estudia a los habitantes de un país, por ejemplo; o puede ser un* **animal,** *si se estudia a cualquier especie de animales; o puede ser un objeto* **o cosa,** *si estudiamos por ejemplo los edificios de una ciudad, o los libros de una biblioteca, o los votos de una elección.*

VARIABLE ESTADÍSTICA

Se llama **variable estadística** a cada uno de los aspectos, características o propiedades que estudiamos en una determinada población.

☞ Cuando las variables que son objeto de estudio toman valores numéricos, se les llama **variables cuantitativas.**

- Dentro de éstas, se llaman **variables cuantitativas continuas** cuando entre dos valores se pueden dar todos los valores comprendidos en cada intervalo, es decir, que puede tomar cualquier valor.
- Y se llaman **variables cuantitativas discretas** cuando sólo toman valores aislados y no los intermedios entre dos valores, o sea, que entre dos valores cualesquiera discretos la variable no toma ningún valor.

☞ Si la variable no toma valores numéricos, es decir, no se puede expresar con números, se llama **variable cualitativa**.

RECOGIDA DE DATOS

En todo estudio estadístico se realiza una **recogida de datos,** que consiste en hacer una serie de preguntas de un cuestionario (o encuesta) a los individuos de la población (o muestra) objeto de estudio. También se puede hacer una recogida de datos mediante la observación directa de la población que se estudia.

La relación de preguntas que se hagan en la encuesta hay que reflexionarlas bien antes de lanzarse a las entrevistas. Deben ser fáciles de contestar y que no sean una gran cantidad. Una vez realizada la recogida de datos, se organizan, se hace una ordenación (como sea más conveniente) y se recuentan.

TABLA DE FRECUENCIAS

Después de la recogida de datos, éstos se organizan y se ordenan en tablas. Cuando están confeccionadas, se llama **frecuencia absoluta** de un dato al número de veces que éste se repite.

Se llama **frecuencia absoluta acumulada** de un dato determinado al resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los datos anteriores.

Se llama **frecuencia relativa** de un dato al cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de los datos tomados. Esta frecuencia (cociente) se suele expresar también en forma de porcentajes.

La organización y ordenación de los datos obtenidos en tablas de frecuencias nos facilita enormemente la interpretación del fenómeno estudiado.

Lógicamente, la suma de las frecuencias absolutas debe ser siempre igual al tamaño de la población, es decir, al número total de datos que se hayan recogido. La frecuencia relativa es siempre un número menor que la unidad **(1),** *y la suma de todas las frecuencias relativas es igual a la unidad* **(1).**

Veamos un ejemplo para comprender mejor los conceptos estadísticos explicados en la página anterior.

EJEMPLO 1:

A un grupo de alumnos de 2º de ESO del I.E.S. "Meléndez Valdés" les ha encargado su profesor de Matemáticas que hagan el estudio estadístico siguiente de todo el curso de 2º de la E.S.O.:

a) Asignaturas suspensas en la 1ª Evaluación.
b) Equipo de fútbol que más le gusta.
c) Color de pelo.
d) Estatura.

Como hay 110 alumnos en cuatro secciones, han decidido tomar una muestra representativa de 10 alumnos (5 chicas y 5 chicos) por sección. Los resultados fueron éstos:

POBLACIÓN ✏ 110 alu7mnos.

MUESTRA ✏ 40 alumnos.

INDIVIDUO ✏ Cada alumno de 2º de ESO.

RECOGIDA DE DATOS ✏ Tabla siguiente.

	Asignaturas suspensas	Equipo preferido	Color de pelo	Estatura en "cm"
1	0	Real Madrid	Castaño	159
2	0	Ninguno	Rubio	172
3	5	Barcelona	Rubio	151
4	1	Real Madrid	Rubio	159
5	2	Betis	Moreno	175
6	3	Sevilla	Castaño	159
7	3	Betis	Castaño	165
8	9	Barcelona	Castaño	153
9	0	Real Madrid	Castaño	180
10	1	Real Madrid	Rubio	160
11	1	Real Madrid	Moreno	159
12	3	At. Madrid	Moreno	160
13	3	Betis	Castaño	164
14	7	Ninguno	Castaño	158
15	10	Barcelona	Castaño	155
16	0	Real Madrid	Castaño	159
17	1	Betis	Rubio	165
18	3	Ninguno	Rubio	158
19	3	Betis	Moreno	159
20	0	Real Madrid	Castaño	177
21	4	Ninguno	Castaño	160
22	3	Betis	Castaño	170
23	6	Barcelona	Pelirrojo	151
24	5	Bilbao	Pelirrojo	151
25	0	Real Madrid	Castaño	161
26	0	Real Madrid	Castaño	163
27	1	Real Madrid	Castaño	159
28	3	Sevilla	Castaño	162
29	3	Valencia	Rubio	168
30	3	Sevilla	Rubio	161
31	2	At. Madrid	Moreno	159
32	2	Ninguno	Castaño	160
33	1	Real Madrid	Rubio	162
34	0	Real Madrid	Moreno	171
35	4	Barcelona	Castaño	156
36	1	Real Madrid	Castaño	170
37	1	Real Madrid	Castaño	178
38	0	Real Madrid	Castaño	175
39	0	Real Madrid	Rubio	159
40	3	Valencia	Moreno	160

Bien, pues como puedes observar, en la tabla anterior aparece la información completa obtenida de los individuos de la muestra. Evidentemente, esta tabla ya es útil para informarnos, pero no es fácil y rápida de interpretar si no organizamos y ordenamos todos los datos mejor. En realidad, podríamos decir que ésta es la recogida de datos "en bruto"; ahora es necesario hacer un recuento de cada variable estudiada, ponerlas en tablas de frecuencias y hallar sus frecuencias absolutas y relativas, así lograremos un análisis más certero, exacto y rápido que nos facilite la toma de conclusiones en el estudio. Veamos:

La **variable** "**Asignaturas** suspendidas en la 1ª Evaluación" **es cuantitativa,** porque de ella se toman datos numéricos (cantidades). Y dentro de las variables cuantitativas, es **discreta,** porque sólo puede tomar valores enteros, es decir, 0, ó 1, ó 2, ó 3, etc., ya que no tiene sentido suspender la cuarta parte de una asignatura (0'25), ó 3'37 asignaturas, ó 6'095 asignaturas. Como no puede tomar valores entre 0 y 1, ó entre 1 y 2, etc., por eso le llamamos variable cuantitativa discreta.

Tabla de frecuencias de la variable "Asignaturas suspensas"				
Variable cuantitativa discreta	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
0	10	10	1/4	25%
1	8	18	1/5	20%
2	3	21	3/40	7'5%
3	11	32	11/40	27'5%
4	2	34	1/20	5%
5	2	36	1/20	5%
6	1	37	1/40	2'5%
7	1	38	1/40	2'5%
8	0	38	0/40	0%
9	1	39	1/40	2'5%
10	1	40	1/40	2'5%
11	0	40	0/40	0%
Suma	40	40	40/40	100%

En cada tabla de frecuencias debe aparecer lo siguiente:

- En la columna de la izquierda, los valores que puede tomar. En este caso es de 0 a 11 asignaturas suspensas, que es el recorrido que puede tomar la variable.
- En la siguiente columna, las frecuencias (absolutas) con que se repite cada valor.
- En la siguiente, la frecuencia acumulada, sumando cada una y las anteriores.
- En la siguiente, la frecuencia relativa.
- En la última, los porcentajes de cada valor.

La **variable "Equipo preferido" es cualitativa**, porque de ella no se toman datos numéricos (cantidades). Uno es de un equipo o de otro, o sea, no hay números para estos datos.

Tabla de frecuencias de la variable "Equipo preferido"				
Variable cualitativa	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
Real Madrid	16	16	2/5	40%
Betis	6	22	3/20	15%
Barcelona	5	27	1/8	12'5%
Sevilla	3	30	3/40	7'5%
At. Madrid	2	32	1/20	5%
Valencia	2	34	1/20	5%
Bilbao	1	35	1/40	2'5%
Ninguno	5	40	1/8	12'5%
Suma	40	40	40/40	100%

La **variable "Color de pelo" es cualitativa**, porque de ella no se toman datos numéricos. Cada alumno tiene un color de pelo que no se mide ni se toma con números, sino con la cualidad color.

Tabla de frecuencias de la variable "Color de pelo"				
Variable cualitativa	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
Castaño	21	21	21/40	52'5%
Rubio	10	31	1/4	25%
Moreno	7	38	7/40	17'5%
Pelirrojo	2	40	1/20	5%
Suma	40	40	40/40	100%

La variable "Estatura" tiene muchos valores, desde 151 cm a 180 cm. Se dice que tiene un "recorrido" algo extenso, y por ello es **conveniente** que tomemos **tramos** (intervalos) de estatura para realizar la tabla de frecuencias. En este caso hemos tomado intervalos de 5 cm en 5 cm.

La **variable "Estatura" es cuantitativa**, porque de ella se toman datos numéricos. Y dentro de las variables cuantitativas, es **continua**, porque es posible que haya chicos o chicas en 2º de E.S.O. que midan 159 cm, otro 1593 mm, otro 1'5968 m, otro 15'9408 dm, etc. O sea, esta variable sí puede tomar valores entre 0 y 1, ó entre 156 cm y 157 cm, ó entre 1'79 m y 1'8 m, etc. Como puede tomar valores entre cualquier intervalo, por eso se le llama variable cuantitativa continua.

Tabla de frecuencias de la variable "Estatura (cm)"				
Variable cuantitativa continua	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
[151-155]	5	5	1/8	12'5%
[156-160]	17	22	17/40	42'5%
[161-165]	8	30	1/5	20%
[166-170]	3	33	3/40	7'5%
[171-175]	4	37	1/10	10%
[176-180]	3	40	3/40	7'5%
Suma	40	40	40/40	100%

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

EJEMPLO 2: (Para que lo hagas tú)

A un grupo de alumnos de 1º de ESO del I.E.S. "Meléndez Valdés" les ha encargado su profesor de Matemáticas que hagan el estudio estadístico siguiente de todo el curso de 1º de la E.S.O. :

a) Peso.
b) Número de hermanos que tienen.
c) Coeficiente intelectual de los alumnos.
d) Notas de Matemáticas de la 3ª Evaluación.

En 1º de la E.S.O. hay 4 secciones que tienen en total 90 alumnos, y ellos hacen la recogida de datos con una muestra de 32 alumnos (4 chicos y 4 chicas de cada sección). Los datos recogidos fueron éstos:

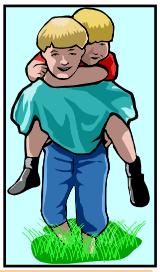
	Peso	Nº de hermanos	Coeficiente intelectual	Notas de "Mate"
1	39,00	0	115	Sobresaliente
2	74,10	0	112	Insuficiente
3	50,50	5	101	Suficiente
4	56,50	2	98	Suficiente
5	62,00	0	95	Suficiente
6	45,75	1	125	Insuficiente
7	51,00	0	109	Notable
8	40,60	1	109	Suficiente
9	66,25	4	105	Insuficiente
10	49,00	0	136	Notable
11	56,50	0	90	Insuficiente
12	48,50	0	120	Sobresaliente
13	47,00	2	80	Insuficiente
14	41,90	2	98	Insuficiente
15	62,00	4	105	Insuficiente
16	45,75	2	102	Bien
17	68,75	0	105	Insuficiente
18	56,50	2	90	Suficiente
19	50,00	1	110	Notable
20	56,50	0	106	Insuficiente
21	63,00	3	99	Insuficiente
22	70,25	1	105	Insuficiente
23	51,00	1	101	Insuficiente
24	68,10	0	97	Suficiente
25	54,40	1	81	Insuficiente
26	57,00	3	95	Suficiente
27	56,50	0	105	Insuficiente
28	60,80	0	113	Bien
29	42,00	0	78	Insuficiente
30	45,10	1	105	Insuficiente
31	45,60	0	98	Insuficiente
32	49,00	1	105	Insuficiente

Fíjate bien en el ejemplo resuelto nº 1 y realiza tú lo siguiente relativo al ejemplo nº 2:

a) ¿Qué representa la población, la muestra y un individuo?

b) La tablas de frecuencias de las variables estudiadas, haciéndolas igual que en el ejemplo 1.

Poseer una óptima salud mental no es nada fácil. Pensamos que una persona tiene una buena salud psíquica cuando posee una personalidad equilibrada que le hace disfrutar de un estado de ánimo provechoso, y de otras muchas cualidades descritas en algunas reflexiones anteriores, las cuales se reflejan positivamente en todas o casi todas sus acciones. Estas personas con ese equilibrio mental suelen gozar, entre otros, de una serie de factores que son casi imprescindibles, a saber: trabajos a los que dedican todos sus esfuerzos, tiempo de descanso entre sus diversas actividades, unas buenas relaciones familiares y sociales, cierto tiempo libre con el que completar una vida equilibrada y una gran capacidad humana para armonizar todo ello.



Otros, aquellos cuya personalidad está algo o muy lejos de ser equilibrada, tienen frecuentemente algunos –o la mayoría– de los siguientes factores negativos: poca lectura y mucha televisión, juegos inadecuados o en exceso (informática e Internet), problemas en las comidas, apasionados por las motos, amistades poco ejemplares, aficiones al tabaco, y/o alcohol, y/o sexo, y/o droga, etc. Todos ellos enganches negativos que impiden el desarrollo adecuado de su personalidad en formación.

Los primeros suelen gozar de buena salud, enferman pocas veces, tienen fortaleza mental, caen bien a los demás, tienen éxito en la mayoría de sus proyectos, ven la vida con optimismo, cumplen eficientemente sus propósitos, están siempre prestos a ayudar a los demás y, sobre todo, están a gusto con ellos mismos. Los otros, como la salud mental influye en todo, son más débiles, se sienten más deprimidos, les atacan más las enfermedades *(se aprovechan más los "cobardes" virus y las malignas bacterias para adueñarse de zonas del cuerpo donde ejercer su poder destructivo y dañino)*, no suelen terminar la mayoría de las buenas cosas que empiezan *–sí terminan, desgraciadamente, muchas de las negativas que comienzan–* y, sobre todo, tienen muy baja autoestima.

¿Tú, en qué grupo te ves más reflejado?

14.3.- Gráficas estadísticas.

En los estudios estadísticos es casi imprescindible la confección de gráficas que ayudan a captar de forma muy rápida el significado de dicho estudio. Al observar una gráfica logramos con sólo mirarla una información de ella, captando ágilmente de qué se trata, entendiendo mejor los datos y saltando a la vista las conclusiones que sea posible extraer de ellas. En resumen, **la gráfica nos ayuda a saber interpretar mejor el estudio estadístico**, porque clarifica mucho más todos los datos obtenidos.

Los tipos de gráficas estadísticas que vamos a estudiar en este tema son:

Diagramas de barras.

Histogramas.

Polígonos de frecuencias.

Diagramas de sectores.

Pirámides de población.

Pictogramas.

14.3.1.- Diagrama de barras.

Es una representación gráfica hecha en unos ejes perpendiculares, donde en el eje horizontal se levantan unas barras proporcionales para representar los valores o modalidades de la variable y en el eje vertical se representan las frecuencias absolutas de cada valor. En realidad es como si hiciéramos la representación gráfica en unos ejes de coordenadas donde sólo se utiliza el primer cuadrante.

Las barras que se levantan sobre el eje de abscisas deben ser todas de igual anchura, pero cada una con la altura correspondiente a su frecuencia absoluta.

Los diagramas de barras sirven para representar tanto variables cualitativas como cuantitativas, pero sólo es conveniente en cuantitativas cuando los valores que toma la variable no son muchos, y mejor si la variable es cuantitativa discreta.

DIAGRAMAS DE BARRAS:

A continuación tenemos varios diagramas de barras referidos a las tablas de frecuencias del ejemplo nº 1 de páginas anteriores.

Diagrama de barras nº 1. El de la variable cualitativa "Equipo preferido"

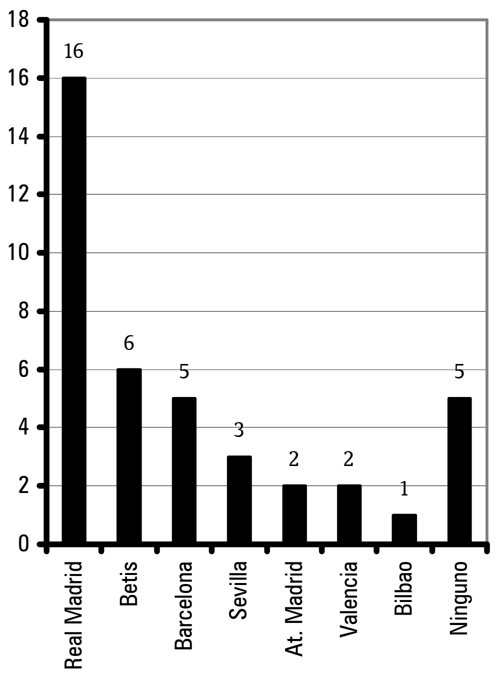


Diagrama de barras nº 2. El de la variable cualitativa "Color d pelo"

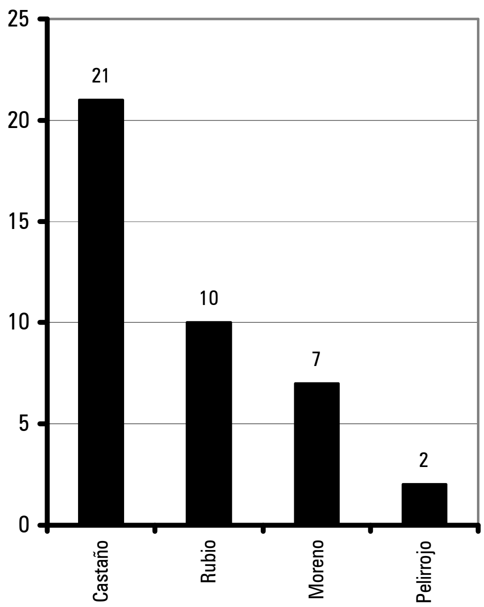
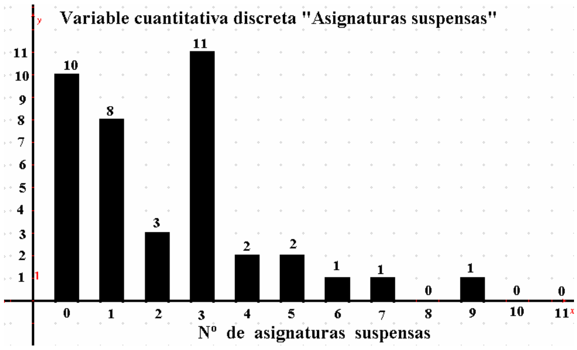


Diagrama de barras nº 3. El de la



14.3.2.- Histogramas.

Los histogramas son gráficas estadísticas parecidas a los diagramas de barras, pero se diferencian de ellos en lo siguiente:

1º) Que **los rectángulos de las barras están adosados** (como pegados) unos a otros, en lugar de separados como en el diagrama de barras.

2º) Que los rectángulos **suelen ser más anchos** que en los diagramas de barras.

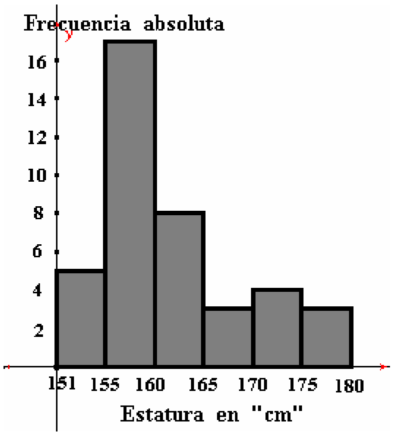
3º) Que habitualmente se utilizan **para representar** distribuciones de **variables cuantitativas continuas** que toman muchos valores.

Los rectángulos tendrán la misma base si los intervalos son todos de la misma amplitud, siendo las alturas proporcionales a las frecuencias; si no es así, la longitud de su base se adapta a las distintas amplitudes de los intervalos.

Veamos el ejemplo de histograma nº 1 sobre la "Estatura" del ejemplo anterior.

Tabla de frecuencias de la variable "Estatura"				
Variable cuantitativa continua	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
[151-155]	5	5	1/8	12'5%
[156-160]	17	22	17/40	42'5%
[161-165]	8	30	1/5	20%
[166-170]	3	33	3/40	7'5%
[171-175]	4	37	1/10	10%
[176-180]	3	40	3/40	7'5%
Suma	40	40	40/40	100%

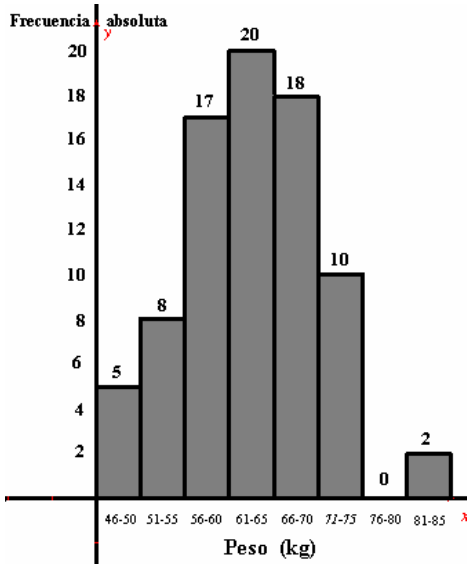
Histograma nº 1. El de la
variable cuantitativa continua "Estatura"



A continuación tenemos una tabla de frecuencias de la variable peso de alumnos en un curso de la E.S.O., del que obtenemos el ejemplo de histograma nº 2.

Tabla de frecuencias de la variable "Peso"				
Variable cuantitativa continua	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
[46-50]	5	5	1/16	6'25%
[51-55]	8	13	1/10	10%
[56-60]	17	30	17/80	21'25%
[61-65]	20	50	1/4	25%
[66-70]	18	68	9/40	22'5%
[71-75]	10	78	1/8	12'5%
[76-80]	0	78	0/80	0%
[81-85]	2	80	1/40	2'5%
Suma	80	40	80/80	100%

Histograma nº 2. El de la
variable cuantitativa continua "Peso"



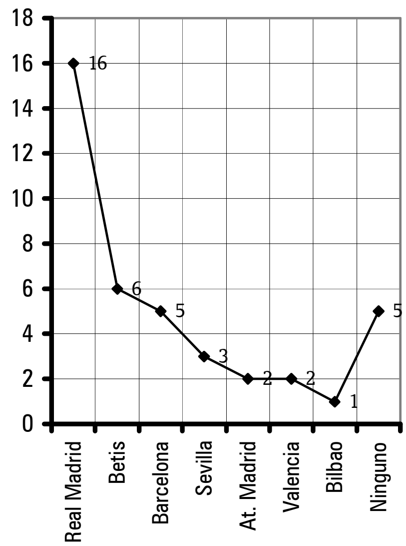
14.3.3.- Polígono de frecuencias.

Estas gráficas estadísticas se obtienen uniendo los puntos que determinan cada par de valores [variable (1º), frecuencia (2º)] del estudio realizado; así resulta una línea poligonal a la que llamamos polígono de frecuencias.

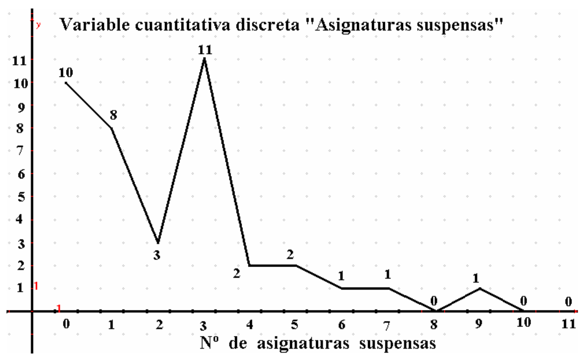
En realidad, si ya tenemos un diagrama de barras extraído de una tabla de frecuencias, **para dibujar la gráfica de un polígono de frecuencias basta unir los extremos superiores de cada barra**. Igual si tenemos un histograma: uniendo con una línea poligonal los puntos medios de las bases superiores de cada rectángulo obtenemos el polígono de frecuencias.

Veamos algunos ejemplos:

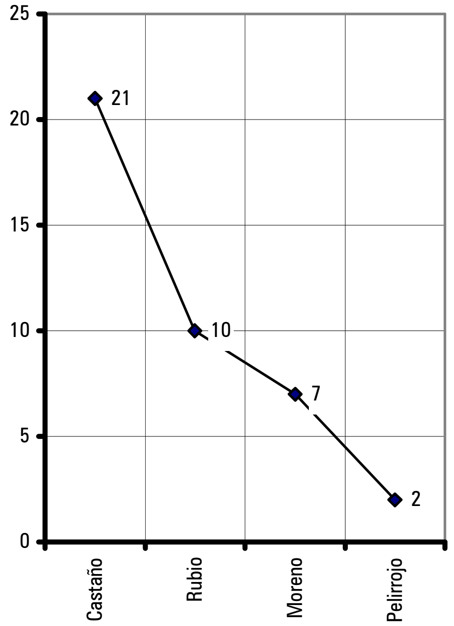
Polígono de frecuencias nº 1. El de la
variable cualitativa "Equipo preferido"



Polígono de frecuencias nº 2. El de la



Polígono de frecuencias nº 3. El de la variable cualitativa “Color de pelo”



14.3.4.- Diagrama de sectores.

Los diagramas de sectores se realizan dividiendo el círculo en sectores proporcionales a las frecuencias absolutas de cada dato. Cada valor posible de la variable estadística ocupa un sector del círculo representado, y la superficie de ese sector es proporcional a la frecuencia absoluta de ese valor. Así, la superficie correspondiente a cada valor (modalidad) se determina mediante una regla de tres:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Total de individuos (muestra) ....} & 360^\circ \\ \text{Frecuencia (del valor) ....} & x^\circ \end{array} \right\}$$

Lógicamente, el círculo estará dividido en tantos sectores como valores se hayan estudiado. Por ejemplo, si hacemos un estudio estadístico de los deportes de un grupo determinado y salen cinco deportes, pues el sector quedará dividido en cinco partes, proporcionales cada una a las frecuencias con que practican cada deporte. O si estudiamos las veces que han quedado campeones de la Liga de fútbol los diversos equipos españoles, pues el diagrama de sectores quedará dividido en tantas partes como equipos hayan quedado alguna vez campeón, o algunas veces campeones.

El diagrama de sectores es útil para representar variables de cualquier tipo.

Veamos ejemplos de diagramas de sectores:

Diagrama de sectores nº 1. El de la variable cualitativa “Equipo preferido”

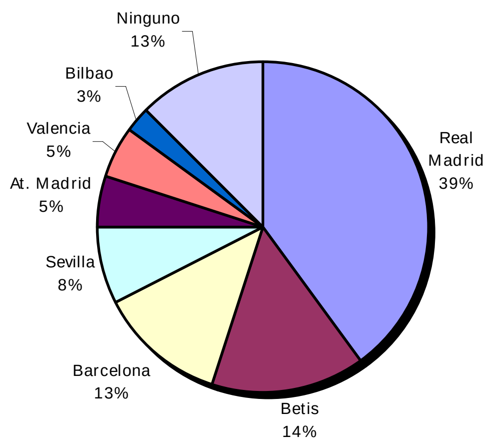


Diagrama de sectores nº 2. El de la variable cualitativa “Color de pelo”.

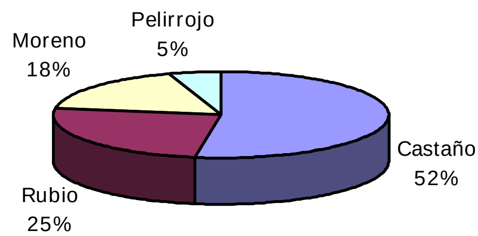
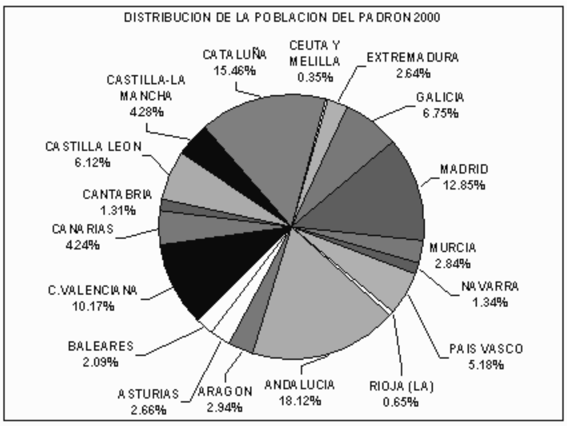


Diagrama de sectores nº 3. El de la Población española por Comunidades. Año 2000.



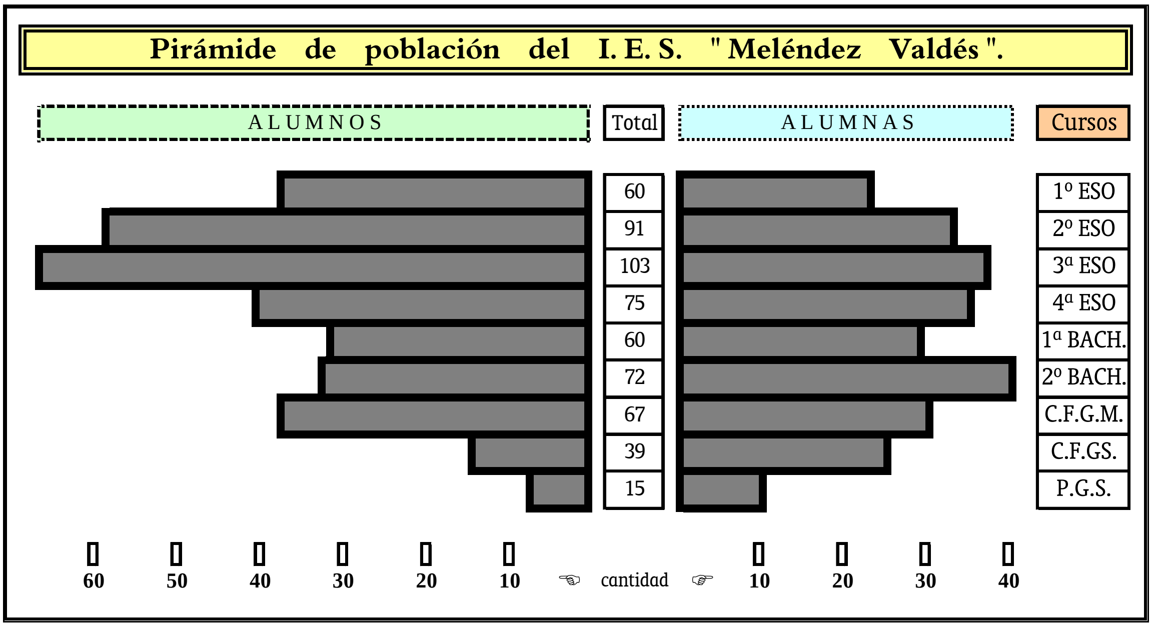
Cortesía de la página web: www.ine.es/censo2001/censos_estructura

14.3.5.- Pirámides de población.

Las pirámides de población son una forma de representación gráfica de datos estadísticos básicos (edad, sexo, etc.) de una población determinada (país, comunidad, provincia, localidad, colegio, etc.), lo que nos permite establecer comparaciones y observar fácil y rápidamente aspectos de dicha población que nos interesan ser estudiados.

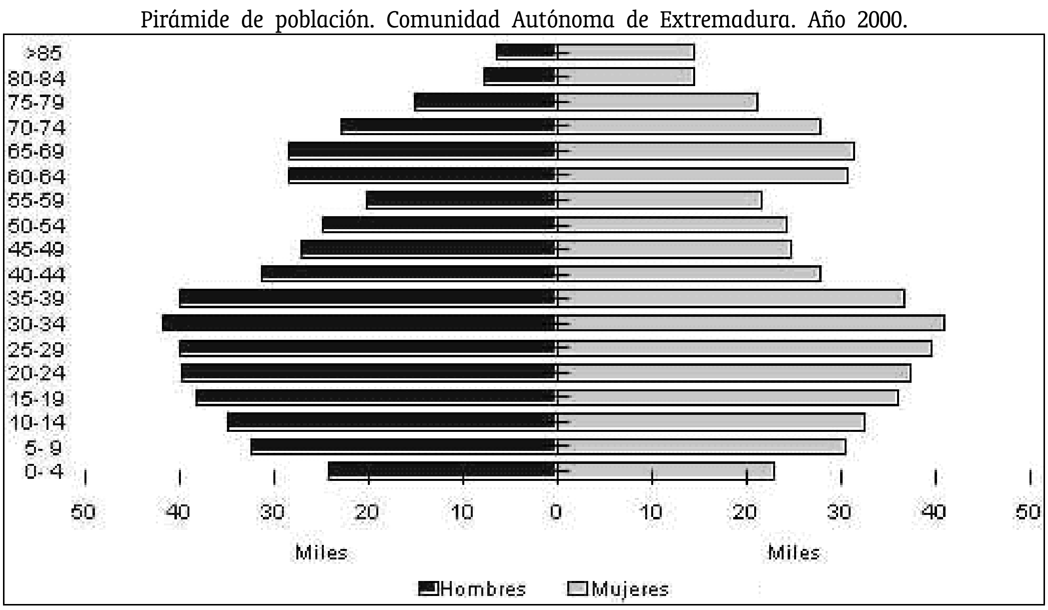
En realidad, estas representaciones son **dos histogramas** (correspondientes a los individuos de una determinada población), uno para un sexo y otro para otro, **colocados uno junto a otro a izquierda y derecha de un eje vertical**.

Pirámide de población nº 1



NOTA : Los datos de esta pirámide de población no corresponden con los oficiales de ningún curso escolar; es sólo un ejemplo.

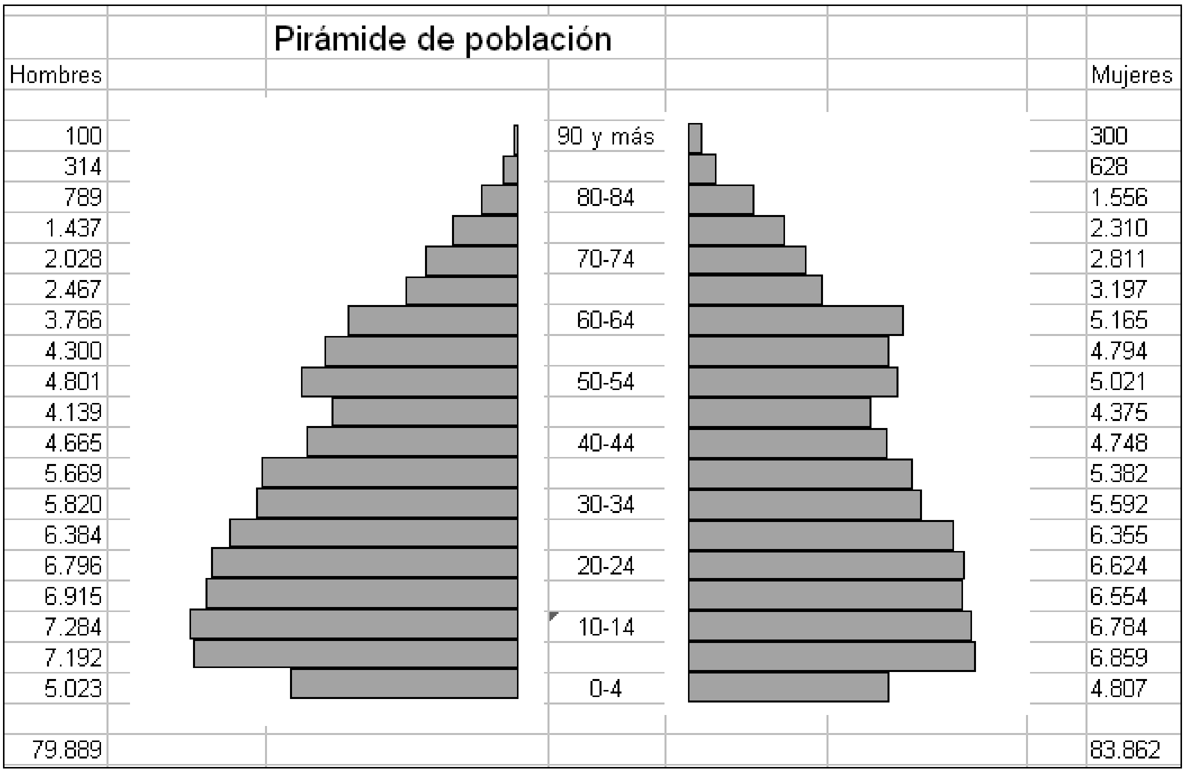
Pirámide de población nº 2



Fuente: Mapa de recursos de asistencia especializada, 2000. Subdirección General de Desarrollo, INSALUD
Cortesía de la página web: msc.es/insalud/sisinfo/pirámides

Pirámide de población nº 3

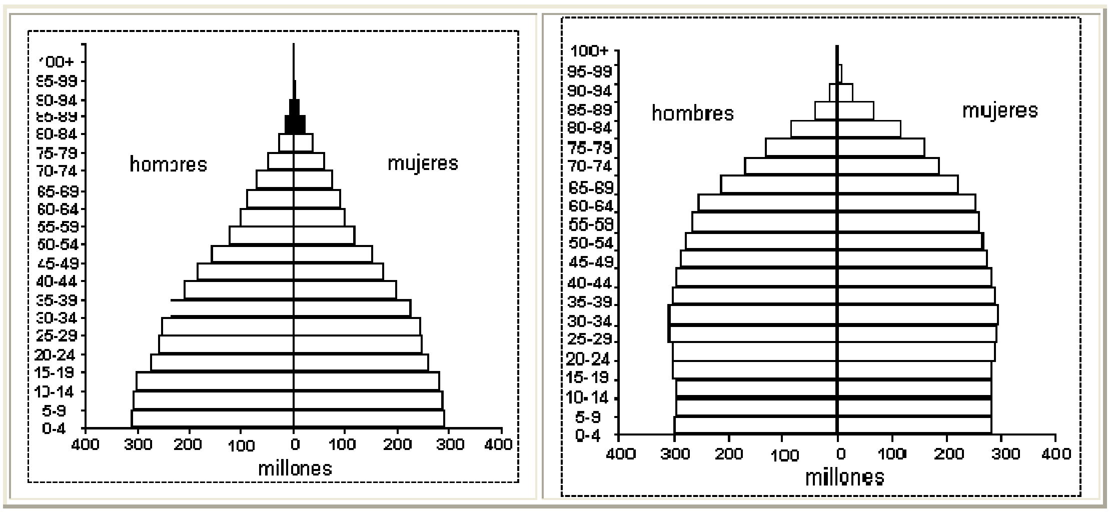
Ejemplo de pirámide de población de una determinada ciudad de 163.751 habitantez.



Cortesía de la página web: www.ced.uab.es/jperez/pags/DatosVejez.htm

Pirámide de población nº 4

A la izquierda la pirámide de la población mundial correspondiente al año 1998, y a la derecha la posible población mundial del año 2050.



Cortesía de la página web : www.eumed.net/cursecon/2/piramides_de_poblacion.htm

14.3.6.- Pictogramas.

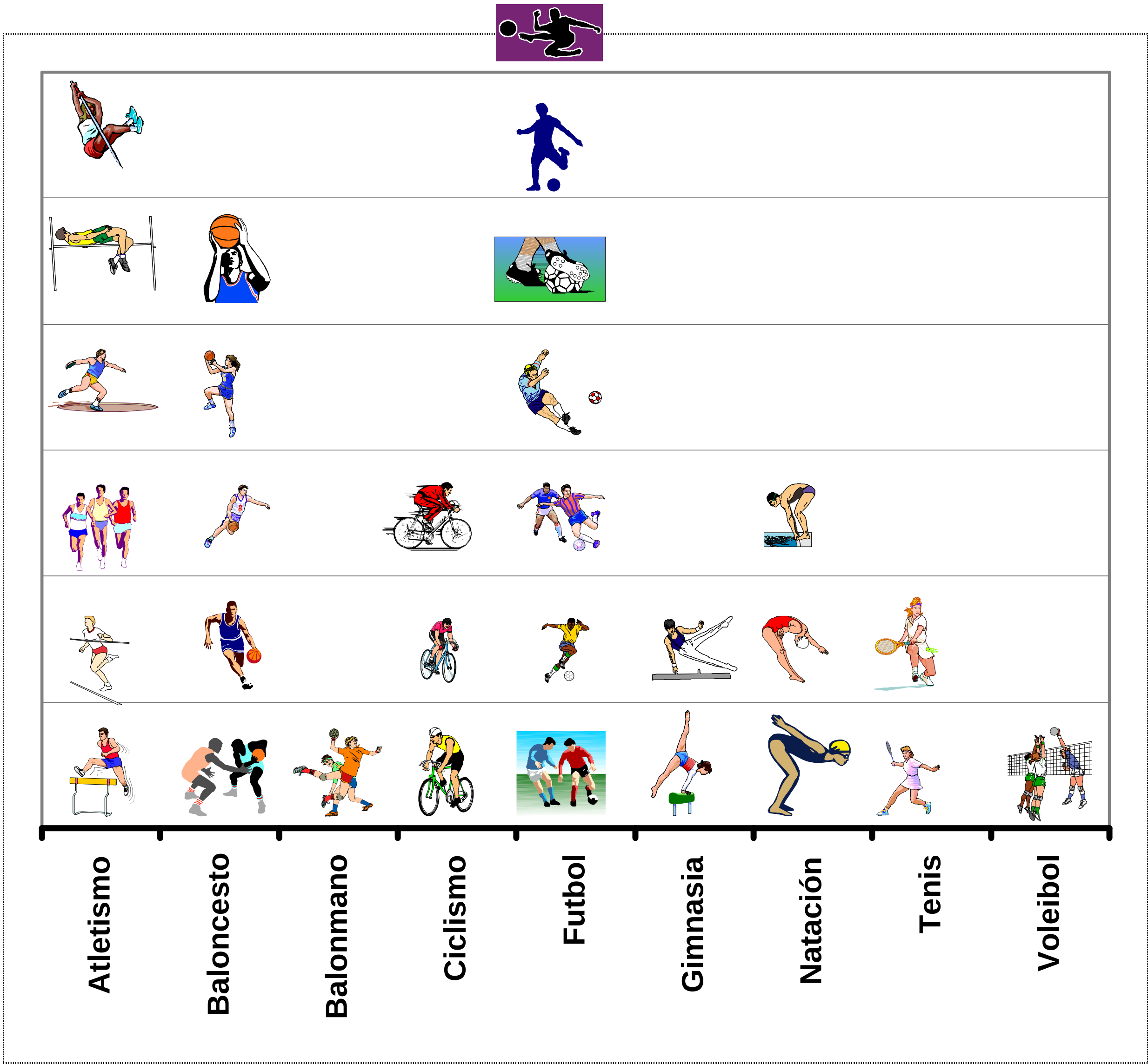
Los pictogramas son **representaciones gráficas de datos estadísticos en los que se emplean imágenes de los objetos que se están representando**, a saber, personas, animales o cosas. Las figuras que se utilizan son claramente alusivas al tema estudiado y, generalmente, relacionadas con el dibujo de forma llamativa.

En realidad, los pictogramas son como diagramas de barras (horizontales o verticales) donde en lugar de dibujar rectángulos (barras) se colocan imágenes relacionadas con la variable estudiada en las que cada una de ellas representa una cierta cantidad.

Uno de los inconvenientes que presentan estas gráficas es cuando la cantidad a representar no corresponde exactamente con el número al que simboliza cada figura, siendo necesario recortar la imagen 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/4, etc.

Pictograma nº 1

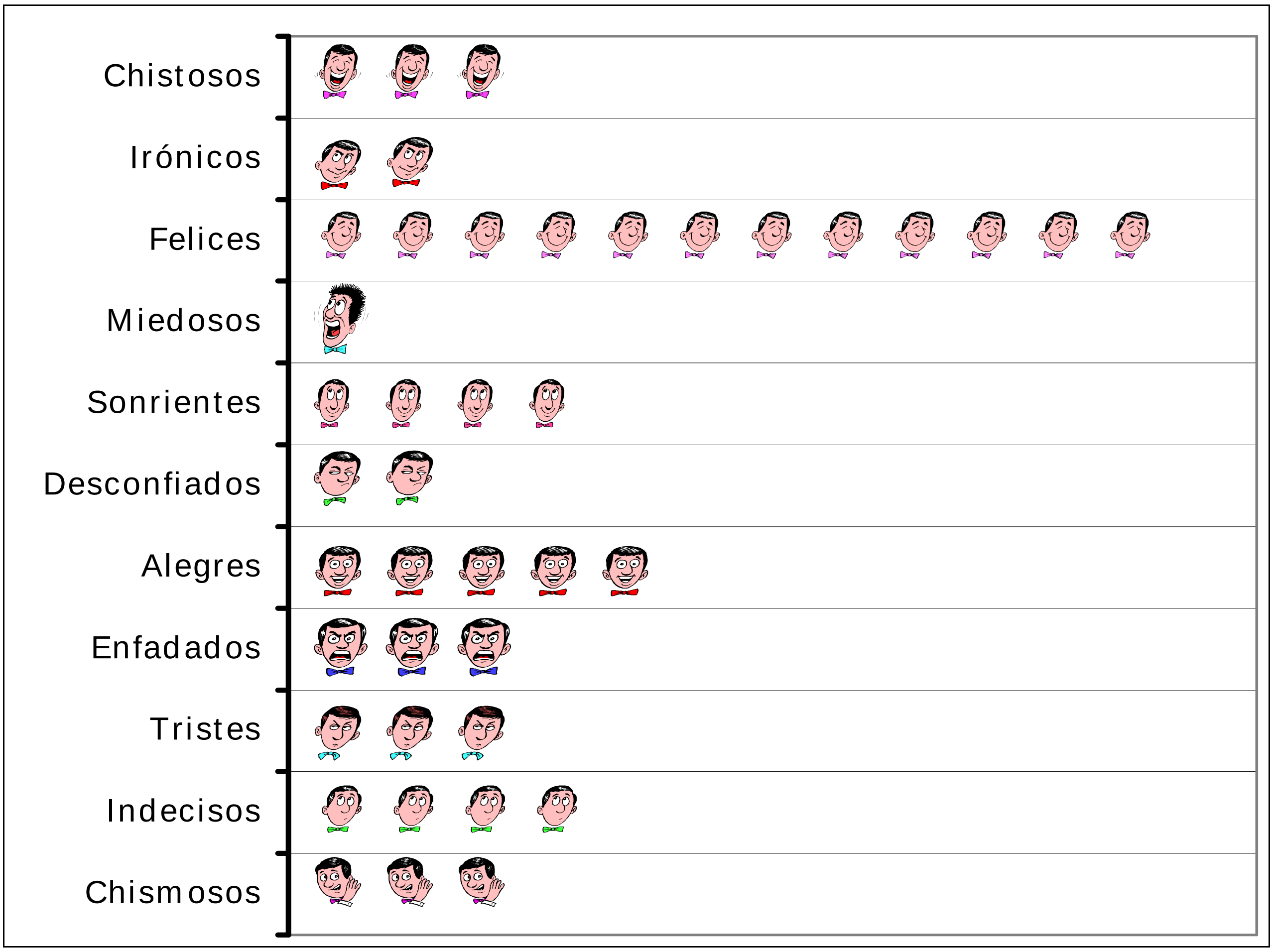
En el siguiente ejemplo se ha estudiado el deporte que más practican los jóvenes de una determinada ciudad.



Cada figura corresponde a un centenar de jóvenes practicantes de ese deporte.

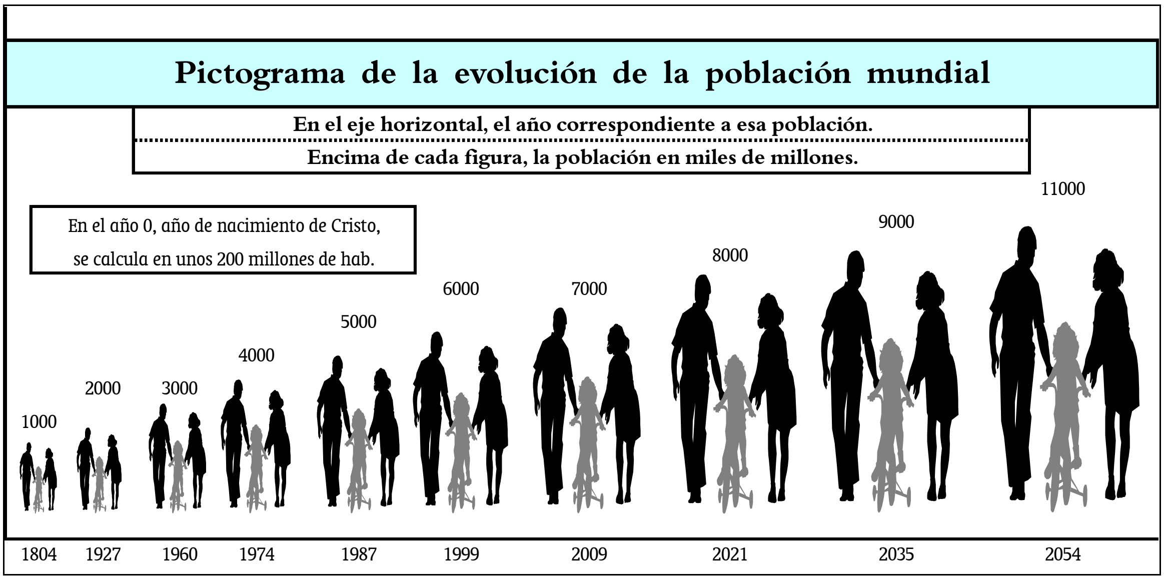
Pictograma nº 2

En el siguiente ejemplo se ha estudiado la característica predominante de los alumnos del IES "Meléndez Valdés" de entre las siguientes: chismoso, indeciso, triste, miedoso, alegre, desconfiado, sonriente, enfadado, feliz, irónico o chistoso.



Cada figura corresponde a una decena de alumn@s de la E.S.O. en el Instituto.

Pictograma nº 3



FUENTE DE LOS DATOS: la página web www.ofdp_rd.tripod.com

EJERCICIOS PARA RESOLVER

1.- Las notas de Matemáticas de un control de la 2ª evaluación de los alumnos de 2º de E.S.O. se corresponden con la siguiente tabla de resultados:

Calificaciones numéricas de 0 a 10.										
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	**5**	**0**	**9**	**18**	**21**	**8**	**9**	**0**	**5**	**2**
Cantidad de alumnos con cada nota.										

NOTA: En el citado examen, no había notas decimales.

Adaptando esta tabla a las calificaciones oficiales: **INS**uficiente (0 a 4), **SUF**iciente (5), **B**ien (6), **NOT**able (7 y 8) y **SOB**resaliente (9 y 10), realiza lo siguiente:

a) ¿Cuál es la población de este estudio estadístico? ¿Cuál es la variable? ¿De qué clase es la variable?

b) Una nueva tabla de frecuencias con el siguiente formato:

Tabla de frecuencias de la variable " ¿ ... ? "				
Variable ¿ ... ? ¿ ... ?	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
Sobresaliente				
Notable				
Bien				
Suficiente				
Insuficiente				
Suma				

c) Con los datos de esta nueva tabla que tú hagas, realiza estos gráficos estadísticos: diagrama de barras, histograma, polígono de frecuencias y diagrama de sectores.

d) Si la tabla inicial se completa haciendo la distinción entre chicos y chicas así:

Calificaciones numéricas de 0 a 10.										
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	**5**	**0**	**9**	**18**	**21**	**8**	**9**	**0**	**5**	**2**
Cantidad de alumnos con cada nota.										
Cantidades correspondientes a los chicos										
3	5	0	2	14	12	3	2	0	1	0
Cantidades correspondientes a las chicas										
0	0	0	7	4	9	5	7	0	4	2

Dibuja su pirámide de población.

e) Elige dibujos adecuados y realiza un pictograma de la tabla con SOB, NOT, B, etc.

2.- En cada uno de los apartados siguientes, indica cuál es la población del análisis estadístico correspondiente, cuál es la variable que se estudia y qué clase de variable es.

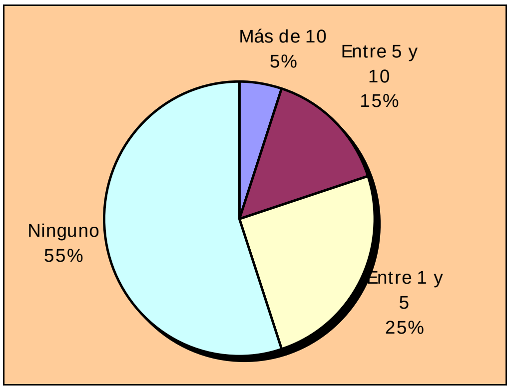
a) El año de nacimiento de los alumnos de un Instituto.
b) La cantidad de horas y/o fracción de horas que los alumnos de la E.S.O. dedican a ver la televisión.
c) Las asignaturas que más le gustan a los alumnos de 1º de E.S.O.
d) Cantidad de libros que leen los alumnos de Bachillerato a lo largo de un año.
e) Los estudios universitarios por los que se inclinan los alumnos una vez terminado su paso por el Instituto.

3.- Realizar lo siguiente:

a. Dividir la clase en cuatro grupos, atendiendo al orden alfabético o lista de la clase.
b. El **grupo 1º** hace un estudio estadístico de las edades de esta clase.
c. El **grupo 2º** hace un estudio del número de hermanos de cada alumno de esta clase.
d. El **grupo 3º** hace el estudio sobre la cualidad que más admiran en un profesor cada uno de los alumnos de esta clase. (Sólo citar una cualidad, no varias cada uno)
e. Y **el grupo 4º** estudia la estatura exacta de cada alumno.

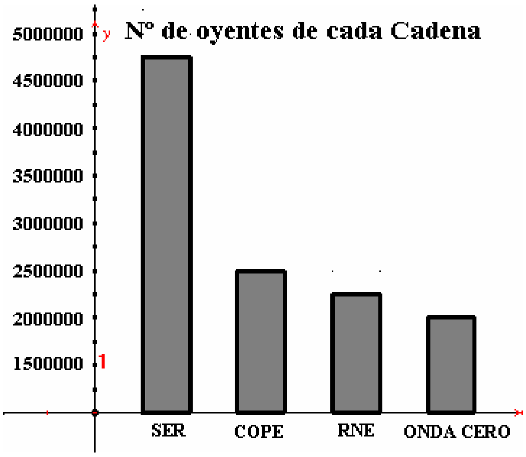
Cada grupo debe realizar una tabla de frecuencias como la del ejercicio "1b" y los gráficos estadísticos adecuados a su estudio.

4.- El diagrama de sectores de un estudio sobre los libros que suelen leer los 500 alumnos de un Instituto a lo largo de un año es el siguiente:



Realiza una tabla de frecuencias como la del ejercicio "1b" y dibuja un diagrama de barras con los datos de las cantidades de alumnos y no con los porcentajes.

5.- En la información referida al E.G.M. (Estudio General de Medios) en un medio de comunicación escrito aparece la siguiente información gráfica:



a) **¿Q**ué piensas de ella? ¿Te parece fiable? ¿Una simple mirada a las columnas te da idea exacta de la diferencia entre la cantidad de oyentes entre unas y otras emisoras de radio? ¿Crees que el periódico que ha sacado esta información es objetivo? ¿Por qué sí o no? Si crees que hay errores, ¿dónde y por qué?

b) **C**omo habrás descubierto, esta gráfica es engañosa, porque al observarla parece que la SER (4.750.000 oyentes) tiene más del doble de oyentes que la COPE (2.500.000 oyentes), por ejemplo, y no es así. Bien, pues realiza tú un diagrama de barras y otro de sectores que reflejen fielmente los datos del E.G.M.

6.- Si te mandan hacer un estudio sobre las marcas de coche preferidas por los habitantes de Extremadura, ¿crees que se debe entrevistar a todos los extremeños? ¿Qué se debería hacer?

7.- La siguiente tabla de frecuencias representa el tiempo medio (en minutos) que tardan diariamente unos alumnos de la Universidad de Extremadura en desplazarse a sus distintas Facultades.

Variable ¿ ... ? ¿ ... ?	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
[0, 5]	10			
[6, 10]	15			
[11, 15]	20			
[16, 20]	50			
[21, 25]	45			
[26, 30]	30			
[31, 35]	25			
[36, 40]	5			

Rellena la tabla anterior y realiza el diagrama de barras, el histograma, el polígono de frecuencias y el diagrama de sectores correspondientes.

8.- Un estudio estadístico sobre los signos del Zodiaco de los alumnos de Bachillerato y Ciclos formativos del I.E.S. "Meléndez Valdés" ha dado como resultado la siguiente tabla:

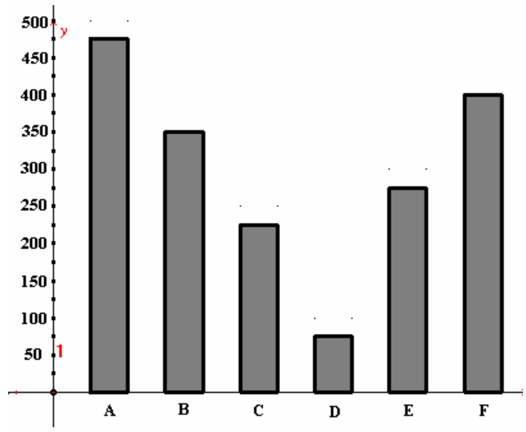
Tabla de frecuencias de la variable " ¿ ... ? "				
Variable	Fr. Abs.	Frec. Acum.	Frec. Rel.	Porcentaje
Aries	5			
Tauro	3			
Géminis	12			
Cáncer	18			
Leo	9			
Virgo	6			
Libra	2			
Escorpión	20			
Sagitario	6			
Capricornio	4			
Acuario	10			
Piscis	5			
Suma				

Rellena la tabla anterior y realiza el diagrama de barras, el histograma, el polígono de frecuencias y el diagrama de sectores correspondientes.

9.- Agruparos libremente de cinco en cinco –si sobran algunos puede haber equipos de 6 ó 7– y hacéis una pirámide de población del primer ciclo de la E.S.O. (1º y 2º cursos).

(Daré notas proporcionales a la corrección y calidad de sus trabajos a todos los grupos que lo hagan)

10.- Después de observar el diagrama de barras, invéntate una situación de algo cuyo estudio estadístico haya sido ése. Realiza la tabla de frecuencias y haces el diagrama de sectores.



14.4.- Medidas de centralización.

En un estudio estadístico hay una serie de valores que son más representativos que otros, es decir, unos datos centrales que nos ayudan a reducir nuestro estudio y nos aclaran mucho nuestros análisis, porque son los parámetros en torno a los cuales se agrupan los demás valores. Bien, pues a esos valores les llamamos medidas de centralización, que son la **moda, la mediana y la media**.

14.4.1.- Moda .

- La moda de un conjunto de datos estadísticos es el **valor más repetido** de la variable.
- O sea, es el valor que tiene mayor frecuencia absoluta.
- Lo que es lo mismo, en un diagrama de barras o en un histograma corresponde al rectángulo de mayor altura.
- Y en un diagrama de sectores al sector de mayor amplitud.
- Es posible que exista más de una moda, porque la frecuencia absoluta mayor se repita.
- Se representa de forma abreviada así → $\mathbf{M_o}$

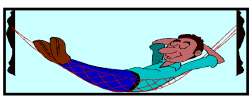
14.4.2.- Mediana .

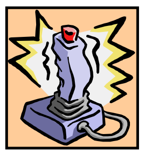
- La mediana es el **valor que está en medio** del conjunto de datos cuando éstos están ordenados.
- Lógicamente, si el número de datos es impar, la mediana está justo en medio de ellos.
- Cuando el número de datos es par, entonces la mediana es la media (semisuma) de los dos valores que se encuentran en medio de todos.
- Si los datos estás agrupados en una tabla, la mediana es el primer valor que tenga una frecuencia acumulada mayor que la mitad del número de datos. Y si el valor tiene de frecuencia acumulada el mismo número que N/2, entonces la mediana es la semisuma entre ese valor y el siguiente.
- La mediana tiene sentido únicamente para datos numéricos.
- Evidentemente, la mediana tiene tantos valores mayores que ella –*"por encima"*– como menores –*"por debajo"*–, porque está en medio de todos.
- Se representa de forma abreviada así → $\mathbf{M_e}$

14.4.3. Media aritmética .

- La media aritmética, o simplemente la media, de un conjunto de datos es la **suma de todos ellos dividido por el número de datos existentes**.
- Se calcula más rápidamente la media aritmética simple multiplicando cada valor por su frecuencia absoluta, sumando todos esos resultados y dividiendo por el nº total de datos.
- Cuando algunos valores (datos) tienen más peso que otros del conjunto estadístico, entonces a la media se le llama media aritmética ponderada, porque a dichos valores hay que tenerlos más en cuenta (valen más) que a los demás que se calcula multiplicando cada dato por su valor –llamado peso– y después igual que en la simple.
- La media aritmética no se puede calcular en estudios de variables cualitativas.
- Se representa de forma abreviada así → $\bar{x}$

¿Te has parado alguna vez a pensar en qué podrían hacer de provecho (positivo, formativo, beneficioso, de aprendizaje, recreativo, productivo, saludable, rentable, etc.) algunos adolescentes y jóvenes a lo largo de muchas mañanas y tardes de verano en lugar de levantarse perezosamente y perder horas y horas mirando a la "caja deformante" (TV) que cada vez forma menos, engancha más y droga perfectamente a la débil voluntad y a la ocupación fructífera del tiempo de los jóvenes? ¿O en lugar de dedicar gran parte del día a los video-juegos? ¿O en lugar de pasar las horas muertas tendido sin saber qué hacer?





EJEMPLO 1

Hallar la moda, la mediana y la media de un estudio estadístico recogido en la siguiente tabla:

Un grupo de quince amigos.														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
25	20	10	0	17	20	10	25	8	20	10	18	6	20	9
Veces que van al cine en un año.														

Nº de veces que se va al cine	Frecuencia
0	1
6	1
8	1
9	1
10	3
17	1
18	1
20	4
25	2

Moda → { ◦ **Dato de mayor frecuencia:**
→ 20 veces (van 4 amigos)
◦ **Ir 20 veces al cine en un año**

Un grupo de quince amigos.														
4	13	9	15	7	7	11	5	12	2	6	10	14	1	8
0	6	8	9	10	10	10	17	18	20	20	20	20	25	25
Veces que van al cine en un año.														

Mediana → { ◦ **Dato central de la serie ordenada:**
17 ocupa el lugar 8º (centro).
◦ **Ir 17 veces al cine.**

Nº de veces que se va al cine	Frecuencia	Producto
0	1	0
6	1	6
8	1	8
9	1	9
10	3	30
17	1	17
18	1	18
20	4	80
25	2	50
	15	218
Media aritmética	218/15	**14'53**

Media aritmética → { ◦ $\dfrac{\text{suma de todos los datos}}{\text{n° de datos}} = \; = \dfrac{218}{15} = 14'53$
◦ **La media es ir al cine 14'53 veces, o sea, entre 14 y 15 veces.**

EJEMPLO 2 (más completo)

Hallar la moda, la mediana y la media de un estudio estadístico sobre la cantidad de días de las vacaciones que las familias de un determinado pueblo se desplazan a otros lugares del lugar donde viven. Realiza también las gráficas estadísticas. Los datos recogidos de la muestra (100 familias) son los siguientes:

Nº de días que se desplazan cada una de las 100 familias									
25	**0**	**2**	**25**	**7**	**14**	**3**	**10**	**4**	**20**
14	**0**	**0**	**14**	**3**	**20**	**14**	**20**	**14**	**14**
5	**3**	**5**	**5**	**7**	**0**	**28**	**14**	**28**	**5**
2	**7**	**5**	**20**	**14**	**3**	**14**	**20**	**7**	**2**
7	**14**	**5**	**28**	**25**	**14**	**5**	**14**	**14**	**14**
4	**20**	**5**	**4**	**5**	**3**	**5**	**0**	**3**	**3**
14	**20**	**3**	**0**	**7**	**5**	**5**	**7**	**5**	**14**
3	**14**	**7**	**4**	**14**	**2**	**25**	**3**	**4**	**14**
20	**25**	**20**	**5**	**3**	**14**	**5**	**7**	**3**	**20**
10	**4**	**14**	**20**	**14**	**7**	**14**	**10**	**20**	**0**

Estos datos los ordenamos en una nueva tabla y después hacemos otra tabla completa con las frecuencias y porcentajes.

Tabla de datos ordenados en columnas verticales									
0	2	3	5	5	7	14	14	20	20
0	3	3	5	5	7	14	14	20	20
0	3	3	5	5	7	14	14	20	25
0	3	4	5	5	7	14	14	20	25
0	3	4	5	7	10	14	14	20	25
0	3	4	5	7	10	14	14	20	25
0	3	4	5	7	10	14	14	20	25
2	3	4	5	7	14	14	14	20	28
2	3	4	5	7	14	14	14	20	28
2	3	5	5	7	14	14	14	20	28

Tabla de frecuencias de la variable "Días de vac. fuera de..."					
Variable	F.Abs.	Producto	F.Acum.	F.Rel.	%
0 días	7	0	7	7/100	7%
2 días	4	8	11	4/100	4%
3 días	12	36	23	12/100	12%
4 días	6	24	29	6/100	6%
5 días	15	75	44	15/100	15%
7 días	10	70	54	10/100	10%
10 días	3	30	57	3/100	3%
14 días	23	322	80	23/100	23%
20 días	12	240	92	12/100	12%
25 días	5	125	97	5/100	5%
28 días	3	84	100	3/100	3%
Suma	100	1014	100	100/100	100%

Moda → ∘ Dato de mayor frecuencia: **La moda es ir 14 días** de vacaciones con desplazamientos (de 23 familias).

Mediana →

Es el dato central de la serie ordenada, o semisuma de los dos datos centrales si N (nº de datos) es par, o el primer valor que tiene una frecuencia absoluta acumulada mayor que N/2.

La calculamos de dos formas:

a) $\dfrac{7 \text{ (dato nº 50)} + 7 \text{ (dato nº 51)}}{2} = 7 \text{ días}$

b) $\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$

La 1ª Frec. Acum. mayor de 50 es → 54, y 54 corresponde al valor 7 días, luego la mediana es ir **7 días** de vacaciones con desplazamientos.

Media aritmética → ∘ $\dfrac{\text{suma de todos los datos}}{\text{nº de datos}} = \dfrac{1014}{100} = 10'14$

∘ **La media es** ir de vacaciones con desplazamientos **10** (10'14) **días**.

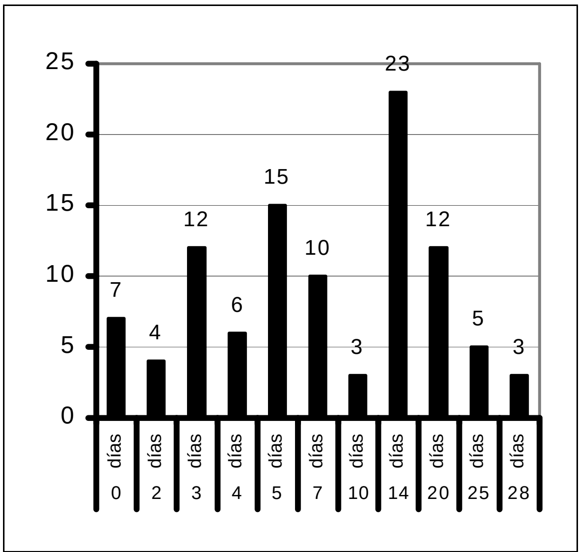
Así que tenemos lo siguiente:

☞ La **MODA** es ir 14 días de vacaciones.

☞ La **MEDIANA** es ir 7 días de vacaciones.

☞ La **MEDIA ARITMÉTICA** es ir, aproximadamente, 10 días de vacaciones.

Diagrama de barras :



Polígono de frecuencias :

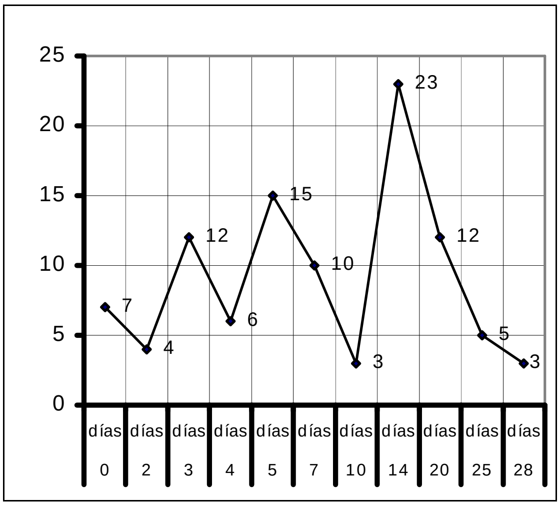
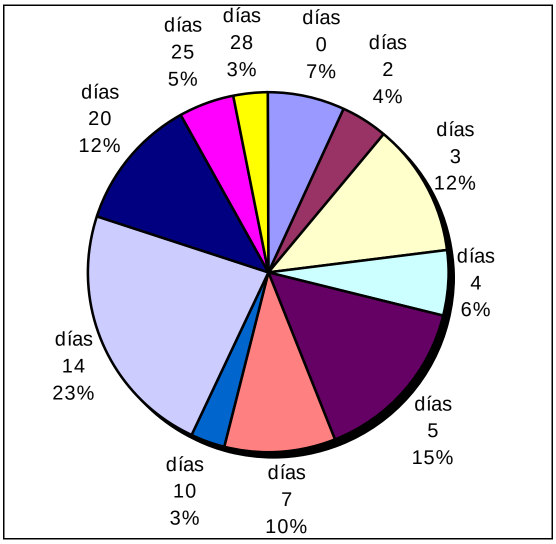


Diagrama de sectores :



EJERCICIOS PARA RESOLVER:

Nº 3.- Se hace una encuesta entre los alumnos de un centro educativo para realizar un estudio estadístico de la cantidad de hermanos de la citada población. La tabla obtenida de la muestra es:

Nº de hermanos de cada uno de los alumnos de la muestra.									
0	1	5	0	3	0	4	0	3	5
0	1	2	0	3	2	0	0	1	1
0	1	1	1	3	0	4	0	0	1
7	0	0	0	1	2	0	1	0	1
3	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	2	3	0	2	1	0	1
1	0	5	1	3	3	0	3	3	1
2	2	0	2	0	0	1	1	0	0

Resuelve este ejercicio fijándote en el ejemplo resuelto nº 2 anterior. Haciendo lo mismo que allí.

14.5.- Medidas de dispersión.

Las medidas de dispersión se suelen utilizar en las variables cuantitativas. En un estudio estadístico es siempre conveniente hallar las medidas de centralización (moda, mediana y media) porque determinan el punto central respecto al que tienden a agruparse los valores, pero no llegamos a tener una idea general de la separación (dispersión) de dichos datos, es decir, que sin conocer las medidas de dispersión es posible que obtengamos análisis y conclusiones erróneas del estudio porque no conocemos el grado de distribución de los datos con respecto a la media, o sea, la dispersión que se da entre todos ellos. Las medidas de dispersión que vamos a estudiar son **el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica**.

Tanto las medidas de centralización como las de dispersión nos sirven para comparar dos o más poblaciones en las que se ha/n estudiado la/s misma/s variable/s.

14.5.1.- El recorrido (o rango).

El recorrido es la **diferencia entre el valor máximo y el mínimo** de la distribución.

- Es muy fácil calcular, basta sólo hallar la diferencia entre el dato mayor y el menor de una variable. Lo llamaremos "**r**".
- Nos facilita una medida de dispersión que nos sirve para conocer el alcance de ésta, pero es una información muy limitada de la distribución de los datos, porque es un parámetro muy influido por los valores extremos.
- Si el recorrido es mayor, la concentración de la población es menor (datos muy dispersos), y viceversa.
- Cuando nos dan los datos por intervalos, el recorrido es la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primer intervalo.

14.5.2.- La desviación media .

El índice más utilizado como referencia para hallar las medidas de dispersión es la media aritmética. Llamamos **desviación de un dato** a la **diferencia entre éste y la media aritmética**. Y llamamos **desviación media a la media aritmética de las desviaciones de todos los datos**.

- Se calcula la diferencia entre cada uno de los datos y la media.
- Se suman los valores absolutos de todas esas diferencias obtenidas (desviaciones).
- Se divide por el nº de datos total.
- Y ese resultado es la desviación media.
- Se representa son el símbolo .... $\mathbf{D_m}$
- Cuando los datos están agrupados por intervalos, se toma en cada intervalo el valor medio *(marca de clase)* de los datos de dicho intervalo. Ése es el que se resta con la media para hallar las desviaciones. Las desviaciones obtenidas se multiplican por sus frecuencias, se suman todas y se divide por el nº de datos.

14.5.3.- La varianza .

La varianza es la **media aritmética de los cuadrados de todas las desviaciones**.

- La varianza viene expresada en unidades cuadradas.
- A mayor valor de la varianza, mayor dispersión de los datos, y viceversa.
- Cuando los datos estén agrupados en intervalos, se consideran las marcas de clase *(media de los dos datos de cada intervalo)* para hallar las desviaciones.
- Se representa son el símbolo .... σ^2.
  (El símbolo "σ" es una letra griega llamada sigma; es como si fuera la letra "s" de nuestro alfabeto)

14.5.4.- La desviación típica .

La **desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza**. Esta medida es de las más utilizadas y de las que mayor aplicación tiene en los estudios estadísticos.

- La desviación típica viene expresada en las mismas unidades que los datos.
- Se representa son el símbolo .... σ (sigma)
- **Desviación típica** → + $\sqrt{\text{varianza}}$
  ↓ ↓
  $$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$
- A menor valor de la desviación típica, menos dispersos se encuentran los datos con respecto a la media aritmética, y viceversa.

× ×

Después de definir las medidas de dispersión estadística, veamos un ejemplo resuelto para mejor comprender todos los conceptos anteriores.

EJEMPLO RESUELTO

En dos Institutos de la provincia de Badajoz se hace un estudio estadístico de las horas (por término medio) que practican deporte a la semana los alumnos de Bachillerato. A uno de ellos le llamamos I.E.S. "Dinámico" y al otro I.E.S. "Sedentario". Se ha escogido como muestra en cada Centro a 50 alumnos representativos de las diversas aceptaciones en la práctica deportiva. Los datos de cada estudio se recogen en estas tablas:

Recogida de datos del I.E.S. "Dinámico".

4	10	13	10	0	12	15	9	13	10
6	8	5	11	10	9	10	13	6	12
12	10	10	6	8	12	11	10	13	11
10	12	9	10	10	5	10	3	10	10
15	13	10	10	12	13	6	9	6	13

Recogida de datos del I.E.S. "Sedentario".

4	7	0	2	4	4	5	4	0	4
4	5	4	4	5	5	4	4	5	2
4	7	0	7	4	7	4	1	5	4
5	4	4	4	5	4	0	5	4	5
2	5	0	5	4	1	4	4	7	5

Hacer un estudio estadístico completo de este ejemplo donde se apliquen todos los conceptos explicados anteriormente: tablas de frecuencias, medidas de centralización y medidas de dispersión, comparando los resultados de ambos institutos.

DATOS ORDENADOS del I.E.S. "Dinámico".

0	3	4	5	5	6	6	6	6	6
8	8	9	9	9	9	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	12	12	12	12	12
12	13	13	13	13	13	13	13	15	15

DATOS ORDENADOS del I.E.S. "Sedentario".

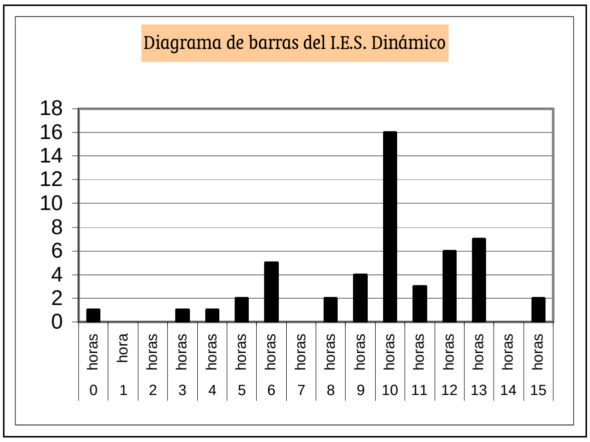
0	0	0	0	0	1	1	2	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	7	7	7	7	7

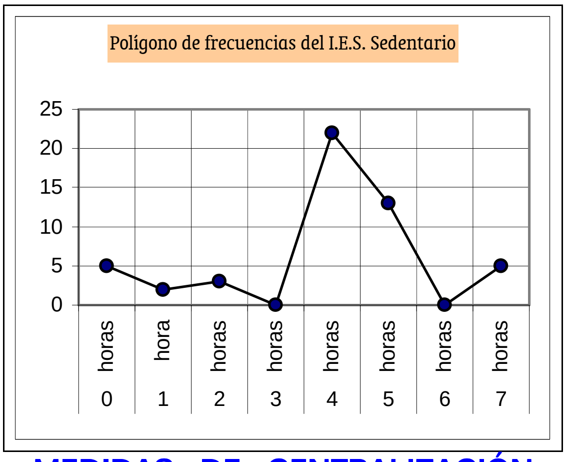
I. E. S. "Dinámico"
Tabla de frecuencias de la variable:
"horas semanales de práctica deportiva"

Variable	F.Abs.	Producto	F.Acum.	F.Rel.	%
0 horas	1	0	1	1/50	2%
1 hora	0	0	1	0/50	0%
2 horas	0	0	1	0/50	0%
3 horas	1	3	2	3/50	2%
4 horas	1	4	3	2/25	2%
5 horas	2	10	5	1/25	4%
6 horas	5	30	10	1/10	10%
7 horas	0	0	10	0/50	0%
8 horas	2	16	12	1/25	4%
9 horas	4	36	16	2/25	8%
10 horas	16	160	32	8/25	32%
11 horas	3	33	35	3/50	6%
12 horas	6	72	41	3/25	12%
13 horas	7	91	48	7/50	14%
14 horas	0	0	48	0/50	0%
15 horas	2	30	50	1/25	4%
Suma	50	485	50	50/50	100%

I. E. S. "Sedentario"
Tabla de frecuencias de la variable:
"horas semanales de práctica deportiva"

Variable	F.Abs.	Producto	F.Acum.	F.Rel.	%
0 horas	5	0	5	1/10	10%
1 hora	2	2	7	1/25	4%
2 horas	3	6	10	3/50	6%
3 horas	0	0	10	0/50	0%
4 horas	22	88	32	11/25	44%
5 horas	13	65	45	13/50	26%
6 horas	0	0	45	0/50	0%
7 horas	5	35	50	1/10	10%
Suma	50	196	50	50/50	100%





MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

MODAS:
"I.E.S. Dinámico" → 10 horas semanales
"I.E.S. Sedentario" → 4 horas semanales

MEDIANAS:
"I.E.S. Dinámico" → 10 horas semanales
"I.E.S. Sedentario" → 4 horas semanales

MEDIAS:
"I.E.S. Dinámico" → 9'56 horas semanales
"I.E.S. Sedentario" → 3'92 horas semanales

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

RECORRIDOS:

"I.E.S. Dinámico" → 15 { Diferencia entre mayor y menor dato
15 horas – 0 horas = 15

"I.E.S. Sedentario" → 7 { Resta entre mayor y menor dato.
7 horas – 0 horas = 7

La desviación de cada dato es la diferencia entre dicho dato y la media aritmética.

La DESVIACIÓN MEDIA es la media aritmética de la suma de los **valores absolutos** de todas las desviaciones halladas.

Nº Orden	Datos	Media	Diferencia
1	0	9,56	9,56
2	3	9,56	6,56
3	4	9,56	5,56
4	5	9,56	4,56
5	5	9,56	4,56
6	6	9,56	3,56
7	6	9,56	3,56
8	6	9,56	3,56
9	6	9,56	3,56
10	6	9,56	3,56
11	8	9,56	1,56
12	8	9,56	1,56
13	9	9,56	0,56
14	9	9,56	0,56
15	9	9,56	0,56
16	9	9,56	0,56
17	10	9,56	0,44
18	10	9,56	0,44
19	10	9,56	0,44
20	10	9,56	0,44
21	10	9,56	0,44
22	10	9,56	0,44
23	10	9,56	0,44
24	10	9,56	0,44
25	10	9,56	0,44
26	10	9,56	0,44
27	10	9,56	0,44
28	10	9,56	0,44
29	10	9,56	0,44
30	10	9,56	0,44
31	10	9,56	0,44
32	10	9,56	0,44
33	11	9,56	1,44
34	11	9,56	1,44
35	11	9,56	1,44
36	12	9,56	2,44
37	12	9,56	2,44
38	12	9,56	2,44
39	12	9,56	2,44
40	12	9,56	2,44
41	12	9,56	2,44
42	13	9,56	3,44
43	13	9,56	3,44
44	13	9,56	3,44
45	13	9,56	3,44
46	13	9,56	3,44
47	13	9,56	3,44
48	13	9,56	3,44
49	15	9,56	5,44
50	15	9,56	5,44

Suma de desviaciones	114,92
La desviación media es la media aritmética de esa suma	114.92 : 50 2,30

La DESVIACIÓN MEDIA del "I.E.S. Dinámico" es 2'30

La desviación de cada dato es la diferencia entre dicho dato y la media aritmética.

La DESVIACIÓN MEDIA es la media aritmética de la suma de los **valores absolutos** de todas las desviaciones halladas.

Nº Orden	Datos	Media	Diferencia
1	0	3,92	3,92
2	0	3,92	3,92
3	0	3,92	3,92
4	0	3,92	3,92
5	0	3,92	3,92
6	1	3,92	2,92
7	1	3,92	2,92
8	2	3,92	1,92
9	2	3,92	1,92
10	2	3,92	1,92
11	4	3,92	0,08
12	4	3,92	0,08
13	4	3,92	0,08
14	4	3,92	0,08
15	4	3,92	0,08
16	4	3,92	0,08
17	4	3,92	0,08
18	4	3,92	0,08
19	4	3,92	0,08
20	4	3,92	0,08
21	4	3,92	0,08
22	4	3,92	0,08
23	4	3,92	0,08
24	4	3,92	0,08
25	4	3,92	0,08
26	4	3,92	0,08
27	4	3,92	0,08
28	4	3,92	0,08
29	4	3,92	0,08
30	4	3,92	0,08
31	4	3,92	0,08
32	4	3,92	0,08
33	5	3,92	1,08
34	5	3,92	1,08
35	5	3,92	1,08
36	5	3,92	1,08
37	5	3,92	1,08
38	5	3,92	1,08
39	5	3,92	1,08
40	5	3,92	1,08
41	5	3,92	1,08
42	5	3,92	1,08
43	5	3,92	1,08
44	5	3,92	1,08
45	5	3,92	1,08
46	7	3,92	3,08
47	7	3,92	3,08
48	7	3,92	3,08
49	7	3,92	3,08
50	7	3,92	3,08

Suma de desviaciones	62,4
La desviación media es la media aritmética de esa suma	62.4 : 50 1,25

La DESVIACIÓN MEDIA del "I.E.S. Sedentario" es 1'25

DESVIACIONES MEDIAS:

"I.E.S. Dinámico" → 2'30

"I.E.S. Sedentario" → 1'25

La VARIANZA es la media aritmética de los cuadrados de todas las desviaciones.

Nº Orden	Datos	Media	Desviaciones	Cuadrados de D.
1	0	9,56	9,56	91,3936
2	3	9,56	6,56	43,0336
3	4	9,56	5,56	30,9136
4	5	9,56	4,56	20,7936
5	5	9,56	4,56	20,7936
6	6	9,56	3,56	12,6736
7	6	9,56	3,56	12,6736
8	6	9,56	3,56	12,6736
9	6	9,56	3,56	12,6736
10	6	9,56	3,56	12,6736
11	8	9,56	1,56	2,4336
12	8	9,56	1,56	2,4336
13	9	9,56	0,56	0,3136
14	9	9,56	0,56	0,3136
15	9	9,56	0,56	0,3136
16	9	9,56	0,56	0,3136
17	10	9,56	0,44	0,1936
18	10	9,56	0,44	0,1936
19	10	9,56	0,44	0,1936
20	10	9,56	0,44	0,1936
21	10	9,56	0,44	0,1936
22	10	9,56	0,44	0,1936
23	10	9,56	0,44	0,1936
24	10	9,56	0,44	0,1936
25	10	9,56	0,44	0,1936
26	10	9,56	0,44	0,1936
27	10	9,56	0,44	0,1936
28	10	9,56	0,44	0,1936
29	10	9,56	0,44	0,1936
30	10	9,56	0,44	0,1936
31	10	9,56	0,44	0,1936
32	10	9,56	0,44	0,1936
33	11	9,56	1,44	2,0736
34	11	9,56	1,44	2,0736
35	11	9,56	1,44	2,0736
36	12	9,56	2,44	5,9536
37	12	9,56	2,44	5,9536
38	12	9,56	2,44	5,9536
39	12	9,56	2,44	5,9536
40	12	9,56	2,44	5,9536
41	12	9,56	2,44	5,9536
42	13	9,56	3,44	11,8336
43	13	9,56	3,44	11,8336
44	13	9,56	3,44	11,8336
45	13	9,56	3,44	11,8336
46	13	9,56	3,44	11,8336
47	13	9,56	3,44	11,8336
48	13	9,56	3,44	11,8336
49	15	9,56	5,44	29,5936
50	15	9,56	5,44	29,5936

Suma de cuadrados de las desv.	463,48
Media de esa suma de cuadrados	463.48 : 50
VARIANZA del "I.E.S. Dinámico"	9,2696

La VARIANZA es la media aritmética de los cuadrados de todas las desviaciones.

Nº Orden	Datos	Media	Desviaciones	Cuadrado de D.
1	0	3.92	3.92	15.3664
2	0	3.92	3.92	15.3664
3	0	3.92	3.92	15.3664
4	0	3.92	3.92	15.3664
5	0	3.92	3.92	15.3664
6	1	3.92	2.92	8.5264
7	1	3.92	2.92	8.5264
8	2	3.92	1.92	3.6864
9	2	3.92	1.92	3.6864
10	2	3.92	1.92	3.6864
11	4	3.92	0.08	0.0064
12	4	3.92	0.08	0.0064
13	4	3.92	0.08	0.0064
14	4	3.92	0.08	0.0064
15	4	3.92	0.08	0.0064
16	4	3.92	0.08	0.0064
17	4	3.92	0.08	0.0064
18	4	3.92	0.08	0.0064
19	4	3.92	0.08	0.0064
20	4	3.92	0.08	0.0064
21	4	3.92	0.08	0.0064
22	4	3.92	0.08	0.0064
23	4	3.92	0.08	0.0064
24	4	3.92	0.08	0.0064
25	4	3.92	0.08	0.0064
26	4	3.92	0.08	0.0064
27	4	3.92	0.08	0.0064
28	4	3.92	0.08	0.0064
29	4	3.92	0.08	0.0064
30	4	3.92	0.08	0.0064
31	4	3.92	0.08	0.0064
32	4	3.92	0.08	0.0064
33	5	3.92	1.08	1.1664
34	5	3.92	1.08	1.1664
35	5	3.92	1.08	1.1664
36	5	3.92	1.08	1.1664
37	5	3.92	1.08	1.1664
38	5	3.92	1.08	1.1664
39	5	3.92	1.08	1.1664
40	5	3.92	1.08	1.1664
41	5	3.92	1.08	1.1664
42	5	3.92	1.08	1.1664
43	5	3.92	1.08	1.1664
44	5	3.92	1.08	1.1664
45	5	3.92	1.08	1.1664
46	7	3.92	3.08	9.4864
47	7	3.92	3.08	9.4864
48	7	3.92	3.08	9.4864
49	7	3.92	3.08	9.4864
50	7	3.92	3.08	9.4864

Suma de los cuadrados de las desviacione	167.68
Media de esa suma de cuadrados	167.68:50
VARIANZA del "I.E.S. Sedentario"	3.35

VARIANZAS:
"I.E.S. Dinámico" → 9'27
"I.E.S. Sedentario" → 3'35

NOTA: los cuadros anteriores, que están realizados en una hoja de cálculo, se podrían haber hecho con intervalos, es decir, de 0 a 3 horas, de 4 a 6 horas, etc. Intenta hacer tú alguno de ellos, a ver qué tal.

DESVIACIONES TÍPICAS:

Hallamos las raíces cuadradas positivas de las varianzas:

"I.E.S. Dinámico" → $\sqrt{9'27} = 3'04$

"I.E.S. Sedentario" → $\sqrt{3'35} = 1'83$

× × × × × × × × × × × × × × × × × × ×

OBSERVACIONES

- Al hacer un estudio estadístico con sólo las medidas de centralización disponemos de una información representativa, pero no poseemos una idea general suficiente de la distribución del conjunto de datos estudiado.

- Dentro de las medidas de centralización, la media aritmética es la más conocida, y también la más usada.

- Hay que saber analizar bien el valor de la media, porque ésta se ve muy vinculada a los datos extremos. Por ejemplo, si la estatura media de un grupo de diez personas es de 1'70 m, puede ser que haya cinco personas que midan 1'85 m y otras cinco midan 1'55, o también que cinco midan 1'75 y otras cinco 1'65. En el caso 1º hay cinco muy altas y cinco muy bajas, o sea, mucha dispersión, y en el caso 2º las diez tienen estaturas similares, es decir, poca dispersión; conclusiones que no podemos sacar sólo con saber la media.

- Es posible, en ciertos estudios estadísticos, que con sólo reflejar la moda, mediana y media lleguemos a obtener deducciones equivocadas.

- Para sacar buenas y correctas conclusiones es necesario conocer los parámetros de dispersión (recorrido, desviación media, varianza y desviación típica).

- Una de las medidas que más idea nos da del conjunto de datos es la desviación típica; cuanto mayor sea el valor de ella, más dispersos están los datos, y viceversa.

- En estadística se manejan muchos datos, con lo que necesariamente se deben realizar multitud de operaciones, así que es conveniente organizar esos datos muy bien en tablas adecuadas que nos ayuden a simplificar y tener una mejor visión de los procesos estadísticos.

- Los cálculos de un trabajo estadístico se pueden realizar en todas las calculadoras científicas, y no es muy difícil aprender a hacerlos, no obstante, hoy día, los modernos programas informáticos disponen de las llamadas hojas de cálculo. En un ordenador con hoja de cálculo es posible realizar miles de operaciones en segundos. Quizás en cursos posteriores, o en clases de Informática, aprendas a manejarlas, y también a quedarte sorprendido por lo que se puede hacer con ellas.

EJERCICIO Nº 1 PARA RESOLVER

Ayudándote del ejemplo resuelto anterior, realiza las tablas ordenadas, las gráficas y halla todas las medidas de centralización y dispersión de un estudio estadístico realizado sobre los coeficientes de inteligencia de los alumnos de tres clases de 2º de E.S.O. cuyos datos fueron los siguientes:

Recogida de datos del curso 2º A									
101	105	106	82	111	101	105	92	99	125
128	90	108	100	105	98	112	112	79	125
112	119	130	99	105	141	82	112	112	135

Recogida de datos del curso 2º B									
100	85	99	88	90	93	108	93	127	90
102	84	86	105	100	105	105	90	90	115
88	100	110	90	86	88	93	110	91	88

Recogida de datos del curso 2º C									
116	110	95	117	102	95	100	108	103	102
105	102	96	102	119	102	97	113	101	108
107	111	107	95	100	100	102	119	102	108

EJERCICIO Nº 2 PARA RESOLVER

Realiza otro estudio igual que el anterior sobre las siguientes recogidas de datos de las notas de Matemáticas obtenidas por los alumnos de 1º de E.S.O. de ahora en un Instituto y las que sacaban los de 7º de la antigua E.G.B. en un Colegio sobre evaluaciones de los mismos temas.

Recogida de notas de 1º de E. S. O.									
5	6	4	4	4	4	4	9	7	8
1	7	0	2	5	5	1	4	5	5
3	4	3	6	7	9	7	4	4	6
4	5	4	2	0	3	4	2	4	4
7	4	5	4	4	3	5	3	2	5
2	7	4	8	7	8	1	4	6	4
5	8	7	8	7	4	5	5	4	3

Recogida de notas de 7º de E. G. B.									
7	6	7	10	8	5	4	10	5	6
8	3	7	7	3	8	8	8	8	6
5	6	6	4	5	8	8	4	8	9
5	9	5	6	7	3	6	7	6	4
4	8	5	9	5	9	5	3	6	3
3	6	8	6	4	8	6	7	8	7
6	8	8	6	10	9	2	7	5	4

EJERCICIO Nº 3 PARA RESOLVER

A continuación tienes una tabla de frecuencias de un cierto estudio estadístico.

Tabla de frecuencias			
Variable	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
Tipo "a"			
Tipo "b"			30%
Tipo "c"		0'4	
Tipo "d"	45	0'15	
Tipo "e"	30		

Realiza los cálculos necesarios para completar la tabla, la representas en diagrama de barras, polígonos de frecuencias y diagrama de sectores y halla la moda, mediana y media.

EJERCICIO Nº 4 PARA RESOLVER

Con la ayuda de un estudio estadístico se puede conocer la regularidad y la eficacia de los jugadores en cualquier deporte. Bueno, y en cualquier actividad, pero en nuestro ejemplo nos vamos a centrar en el Balonmano.

Veamos: en la siguiente tabla aparecen anotados los goles de dos jugadores de Balonmano del I.E.S. "Meléndez Valdés" a lo largo de una competición.

Goles marcados por "PERICO"									
2	0	8	0	1	9	4	0	0	7
3	12	0	3	10	11	6	8	5	9

Goles marcados por "PAQUITO"									
4	5	5	5	4	3	3	5	3	6
8	7	3	4	3	3	5	7	3	3

Sabiendo que las medidas de centralización nos dan una buena idea de la **eficacia** de los jugadores y las medidas de dispersión nos indican cuánto de **regularidad** tienen, averigua cuál de los dos jugadores estudiados destaca más por su eficacia y cuál por su regularidad, o cuál por ambas. ¿A quién de los dos ficharías tú? ¿Por qué?

14.6.- Azar y Probabilidad.

Si buscamos en el diccionario la palabra **azar** encontramos lo siguiente: casualidad, caso fortuito.

Y si buscamos **probabilidad**, encontramos: verosimilitud o apariencia de verdad. Calidad de probable, que puede suceder.

La palabra azar nos da una idea de algo cuyo resultado no puede conocerse de antemano. Por ejemplo, el juego de dados es un juego de azar, porque no podemos predecir qué cara de dado va a salir. *(Bueno, si los dados no están trucados, claro)*

14.6.1.- Experimentos o fenómenos aleatorios.

Experimentos aleatorios son todos aquellos en los que los resultados que se van a obtener dependen de la suerte o del azar. En estos sucesos aleatorios se sabe qué posibles resultados pueden darse, pero no cuál de esos resultados va a salir exactamente. Por ejemplo, si en una bolsa tenemos 4 bolas de colores (rojo, azul, amarillo y verde), sabemos que puede salir uno de esos 4 colores, pero no cuál de ellos va a salir, ya que eso depende del azar. A estos sucesos aleatorios, cuando son juegos, se les llama juegos de azar, como las quinielas, la lotería, la ruleta, los dados, las cartas, el cupón de la Once, etc.

Asimismo, a los sucesos en los que sabemos de antemano cuales van a ser los resultados les llamamos **experimentos deterministas**. Por ejemplo, si en un laboratorio se produce una reacción química se sabe qué producto será el resultado de dicha reacción, o si lanzamos algún objeto al aire, sabemos que éste caerá, *bueno si no sucede nada raro, por ejemplo, que alguien lo coja.* Estos sucesos deterministas son generalmente propios de las ciencias químicas, físicas, etc.

14.6.2.- Sucesos.

Dentro de los experimentos aleatorios, llamamos **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles que se pueden dar.

Y a cada uno de los resultados posibles o probables se le llama **suceso elemental**.

Veamos unos ejemplos:

Experimento realizado	Espacio muestral	Sucesos elementales
Sacar una carta de una baraja española	1,2,3…de oros; 1,2,3…de copas, espadas y bastos E = 40	Sacar el 1 de oros, sacar el 2…
Lanzar un dado	1, 2, 3, 4, 5 y 6 E = 6	Sacar un 1, sacar un 2…
Lanzar una moneda	Cara o cruz E = 2	Sacar cara o sacar cruz

Suceso compuesto es el que está formado por más de 1 resultado de los posibles.

Suceso seguro es el que siempre se realiza, porque está formado por todos los resultados posibles de un experimento.

Un **suceso** **A** es **contrario** **(o complementario)** de otro $\overline{\mathbf{A}}$ cuando el resultado del 1º no se realiza si se realiza el resultado del 2º, y viceversa.

Suceso imposible es el que nunca tiene posibilidad de salir, es decir, nunca puede aparecer al realizar un suceso aleatorio. Un suceso imposible se representa así $\rightarrow$ $\varnothing$ (conjunto vacío)

Cuando tenemos dos o más sucesos, se llama **unión de sucesos** al suceso que resulta con la suma de los resultados de ellos, es decir, al que se realiza cuando se verifica uno u otro de los sucesos iniciales.

Se representa así $\rightarrow$ $\mathbf{A \cup B}$ $\left\{ \text{siendo A y B los nombres dados a los sucesos} \right.$

Y se llama **intersección de sucesos** al suceso que se realiza cuando se verifican de forma simultánea los sucesos iniciales, o sea, al suceso que tiene como resultados los resultados comunes de los sucesos dados.

Se representa así $\rightarrow$ $\mathbf{A \cap B}$ $\left\{ \text{siendo A y B los nombres dados a los sucesos} \right.$

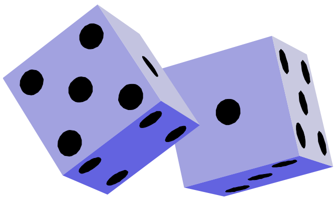
Sucesos compatibles son aquellos que se pueden verificar a la vez, o sea, que cuando se presenta un resultado éste puede estar dentro del espacio muestral de ambos sucesos. Si dos sucesos A y B son compatibles, se tiene que $A \cap B \neq \varnothing$.

Sucesos incompatibles son aquellos que no se pueden presentar a la vez, es decir, que cuando se presenta cualquier resultado de uno éste nunca puede estar dentro del espacio muestral del otro suceso. Si dos sucesos A y B son incompatibles, se tiene que $A \cap B = \varnothing$.

Sucesos dependientes son aquellos en los que el resultado de uno de ellos condiciona o afecta a la posible ocurrencia del otro.

Sucesos independientes son aquellos en los que el resultado de uno de ellos no condiciona ni incide en la ocurrencia del otro.

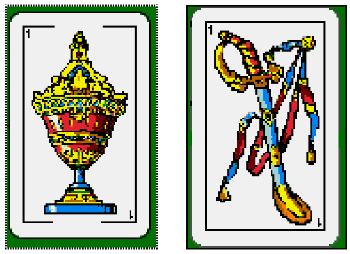
Veamos algunos ejemplos:



Experimento : LANZAR UN DADO	
Suceso compuesto	Tirar el dado y que salga un nº que sea par y múltiplo de 2.
Suceso seguro	Tirar el dado y que salga un nº entre el el 1 y el 6.
Sucesos contrarios	Tirar el dado y que salga un nº par con tirar el dado y que salga un º impar.
Suceso imposible	Tirar el dado y que salga un nº mayor de 6, o que salga una letra, etc.
Unión de sucesos A y B	A (que salga impar) y B (que salga primo) $A \cup B = U$ (que salga 1, 2, 3 y 5)
Intersección de sucesos C y D	C (que salga par) y D (que salga primo) $C \cap D = I$ (que salga 2)
Sucesos compatibles	F (que salga par) G (que salga múltiplo de 3)
Sucesos incompatibles	H (que salga impar) J (que salga par)

EJERCICIO PARA RESOLVER

Realiza un cuadro como el anterior referido al juego de cartas con baraja española.



14.6.3.- Frecuencias y probabilidad de un suceso.

Fíjate en los siguientes casos:

1) Es **imposible** que saque una cara con 7 puntos en un dado normal que tiene en sus caras respectivas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 puntos.

2) Es **casi imposible** que yo haga un viaje a Marte.

3) Es **poco posible** que yo me eche novia en Holanda

4) Es **posible** que al tirar una moneda me salga cara.

5) Es **muy posible** que no saque una figura de una baraja de cartas españolas.

6) Es **casi seguro** que me toque el reintegro en el Cupón de la Once, porque llevo 9 cupones y sólo me falta la terminación 0.

7) Es **seguro** que de una bolsa que contiene 4 bolas (una roja, otra amarilla, otra verde y otra blanca) yo saque al mismo tiempo tres bolas y las tres sean de distintos colores.

En todas las expresiones anteriores pretendemos medir la confianza que tenemos en que esos sucesos citados ocurran. Con el estudio de la magnitud **probabilidad** conseguiremos medir de forma numérica, y no con palabras más o menos inseguras, las posibilidades de que sucesos aleatorios tengan lugar.

Cuando realizamos un experimento aleatorio, debemos ir anotando las veces que lo hacemos, las veces que ocurre cada suceso elemental de los posibles en ese experimento y los porcentajes obtenidos en cada uno de ellos. Así, en cada experimento hay que estudiar lo siguiente:

Frecuencia absoluta es el número de veces que se repite un suceso en un experimento aleatorio.

Frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta de un suceso y el número de experimentos realizados.

Hagamos algunos experimentos.

Nº 1.- Con una moneda.

En una moneda, los sucesos elementales son dos: que salga cara o que salga cruz. Si lanzamos la moneda 50 veces, puede ser que salga 25 veces cara y 25 veces cruz, pero lo más normal es que no sea así, y que la cara, o la cruz, salga algunas veces más. Por ejemplo, como dice la siguiente tabla de nuestro experimento, cara ha salido 29 veces y cruz 21.

Lanzamos la moneda al aire y anotamos las veces que sale cara y las que sale cruz.

Nº de lanzamientos	cara	cruz
50	29	21
100	44	56
200	92	108
400	208	192
800	414	386
1600	775	825
2000	985	1015

Sin embargo, a medida que el nº de lanzamientos aumenta, se observa que el nº de veces que sale una y otra tiende a regularizarse. Es decir, como vemos en la tabla siguiente, la frecuencia relativa tiende a valer 0'50, o sea, que, aunque no salgan las mismas veces la cara y la cruz, a medida que aumenta significativamente el nº de lanzamientos, todas las frecuencias relativas tienden a igualarse en un valor que, como veremos más adelante, es la probabilidad del suceso experimentado.

Tabla de frecuencias del suceso salir cara al ir lanzando el dado al aire.

Nº de lanzamientos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
50	29	0,58
100	44	0,44
200	92	0,46
400	208	0,52
800	414	0,52
1600	775	0,48
2000	985	0,49

Nº 2.- Con un dado de caras 1 al 6.

En este 2º experimento, observamos en la tabla siguiente las frecuencias absolutas y relativas de las veces que salió 1, ó 2, ó 3, ó 4, ó 5, ó 6, una vez que fue lanzado el dado 100 veces.

Tabla de frecuencias del suceso salir cara al ir lanzando el dado al aire.

Sucesos elementales	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	13	0,13
2	17	0,17
2	19	0,19
2	15	0,15
2	16	0,16
2	20	0,20
	100 Suma de lanzamientos	1 Suma de frec. rel.

Observamos que la suma de las frecuencias relativas de todos los sucesos es 1.

Fíjate ahora en la siguiente tabla. En ella hemos anotado los "números" de los 100, de los 200 y de los 300 lanzamientos. Vemos que las frecuencias relativas, al igual que pasaba con la moneda en el experimento 1º, se van acercando (regularizando) a un número cuando el experimento se va repitiendo una cantidad grande de veces

Tabla de frecuencias del suceso salir cara al ir lanzando el dado al aire.

Suc. elem.	Fre. abs.	Frec. rel.	Fre. abs.	Frec. rel.	Fre. abs.	Frec. rel.
1	13	0,13	33	0,17	48	0,16
2	17	0,17	32	0,16	46	0,15
3	19	0,19	37	0,19	52	0,17
4	15	0,15	36	0,18	47	0,16
5	16	0,16	30	0,15	54	0,18
6	20	0,20	32	0,16	53	0,18
	100 Nº lanz.	1 + F.Rel.	200 Nº lanz.	1 + F.Rel.	300 Nº lanz.	1 + F.Rel.

Al generalizar lo observado en estos dos experimentos y otros muchos semejantes que se pudieran realizar, se llegaría a la **Ley de los grandes números**, que se considera el primer teorema fundamental de la teoría de la probabilidad, y su enunciado es el siguiente:

La frecuencia relativa de los resultados de un cierto experimento aleatorio tienden a estabilizarse en cierto número cuando el experimento se realiza gran cantidad de veces, y a ese número al que tienden le llamamos probabilidad,

Probabilidad es la medida de la posibilidad de que un suceso se verifique cuando aumenta el número de repeticiones, o lo que es lo mismo, la proporción de veces a la que tiende a ocurrir ese suceso al realizar un número indefinido de pruebas.

En ciertos experimentos aleatorios se puede decir que cada uno de los sucesos elementales tienen las mismas posibilidades de ocurrir. En tales experiencias diremos que esos experimentos tienen **sucesos equiprobables**. Ejemplos: los lanzamientos de una moneda o de un dado.

En caso contrario, es decir, cuando los sucesos no tienen la misma probabilidad de obtenerse, los llamaremos **sucesos no equiprobables**.

14.6.4.- Regla de Laplace.

El francés Pierre Simon **LAPLACE** vivió a finales de siglo XVIII y principios del XIX. Destacó en varias disciplinas. A él se debe la fórmula con la que se calcula de forma práctica la probabilidad de un suceso. Veamos:

La **Ley de Laplace** dice que la **probabilidad** de un suceso en un experimento aleatorio en el que todos los **resultados** son **equiprobables** es igual al **cociente** entre el número de sucesos elementales **favorables** y el número de sucesos elementales **posibles**.

Resumimos los conceptos fundamentales :

⊗ **Frecuencia absoluta** ⟩ → **Nº de veces que se repite**

⊗ **Frecuencia relativa** ⟩ $= \dfrac{\textbf{Frecuencia absoluta}}{\textbf{Nº de realizaciones}}$

⊗ **Probabilidad** ⟩ $= \dfrac{\textbf{Nº de casos favotables}}{\textbf{Nº de casos posibles}}$

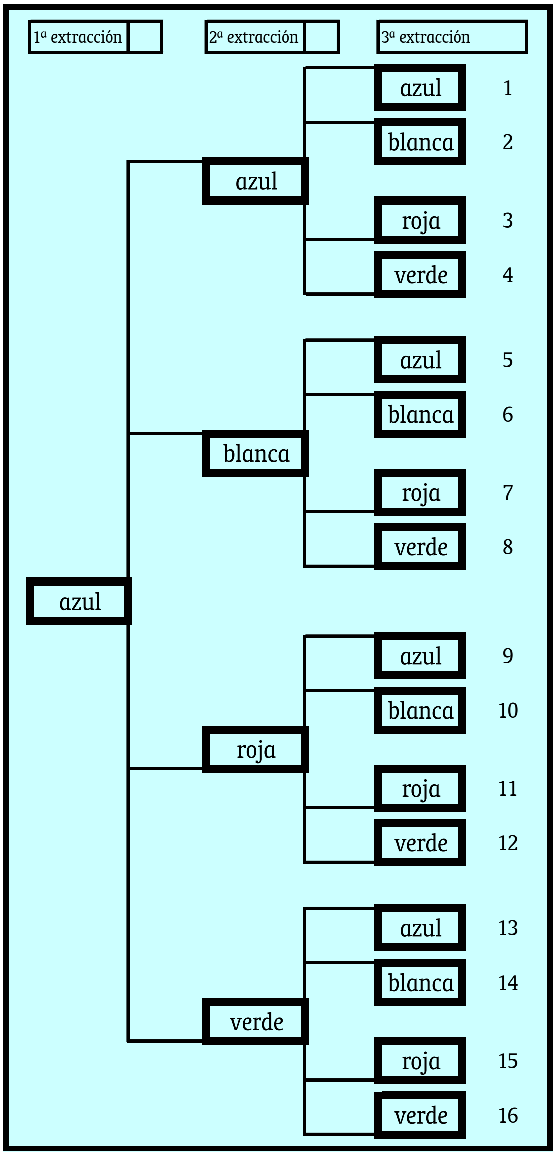
14.6.5.- Diagramas de árbol.

Hasta ahora, los ejemplos citados (monedas y dados) son fácilmente comprensibles y sencillos de hacer sus recuentos de sucesos. Sin embargo, hay experimentos aleatorios de varias pruebas en los que nos debemos ayudar de los llamados **diagramas de árbol** para establecer de forma correcta el espacio muestral y el recuento de los casos posibles y los favorables. Veamos cómo hacerlo.

El diagrama de árbol, como su propio nombre indica, consiste en ir confeccionando un árbol con todas las posibilidades del experimento a realizar. Para ello, las ramas de ese árbol serán líneas que se van multiplicando con todos los sucesos elementales posibles. Resulta de mucha utilidad cuando se quiere hacer un recuento de todas las alternativas posibles de ciertos experimentos de azar.

Veamos un ejemplo:

El experimento consiste en averiguar cuál es la probabilidad de sacar tres bolas azules consecutivas de una bolsa en la que hay cuatro bolas (azul, blanca, roja y verde).



Este diagrama de árbol nos ha servido para saber que estableciendo la primera bola que sale la azul hay 16 posibilidades, y sólo una de ellas, la 1ª, coincide con el caso favorable.

Nos basta sólo con este diagrama para determinar que hay 64 casos posibles y sólo uno favorable, ya que saliendo la primera bola la blanca habría otros 16, con la roja otras 16 e igual con la verde. O sea, que los tres diagramas de árbol restantes tendrían cada uno otros 16 sucesos posibles. Y ahora hallemos la probabilidad pedida:

$$\otimes \;\left| \text{Probabilidad} \right\rangle = \frac{\text{N° de casos favotables}}{\text{N° de casos posibles}}$$

$$\otimes \; P(\text{azul}, \text{azul}, \text{azul}) = \frac{1}{64}$$

14.6.5.- Propiedades de la probabilidad.

Experimento A: Tirar un dado, de los normales, y que salga un número múltiplo de 7. Está claro que éste es un **suceso imposible**, porque en el dado sólo tenemos del 1 al 6. Veamos su probabilidad:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{0}{6} = 0$$

La probabilidad de un suceso imposible es 0.

::::::::::::::::::::::::::::::::::::

Experimento B: Tirar un dado, de los normales, y que salga un número del 1 al 6. Está claro que éste es un **suceso seguro**, porque este suceso ocurrirá siempre. Veamos su probabilidad:

$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6}{6} = 1$$

La probabilidad de un suceso seguro es 1.

::::::::::::::::::::::::::::::::::::

Experimento C: Sacar de una baraja de cartas española un figura (sota, caballo o rey). Veamos su probabilidad:

$$P(C) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{12}{40} = 0'30$$

::::::::::::::::::::::::::::::::::::

Experimento D: Sacar de una baraja de cartas española una que sea "oros" o "bastos". Veamos su probabilidad:

$$P(D) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{20}{40} = 0'50$$

::::::::::::::::::::::::::::::::::::

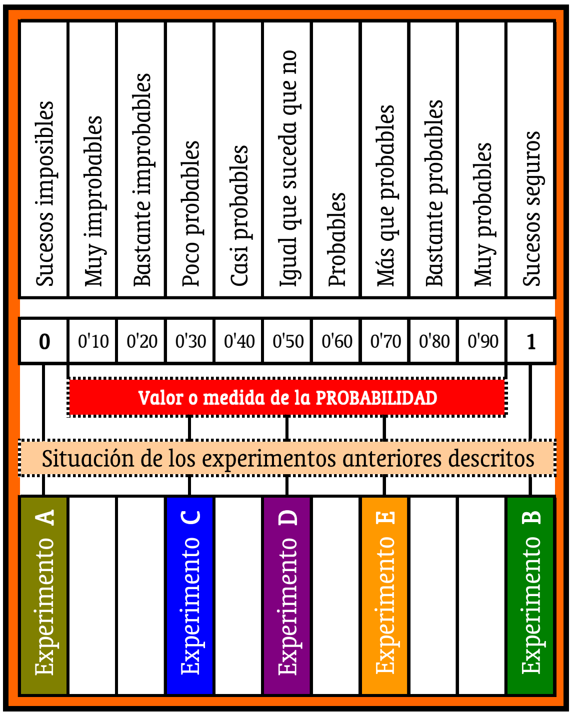
Experimento E: Sacar de una baraja de cartas española una que no sea figura. Veamos su probabilidad:

$$P(E) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{28}{40} = 0'70$$

::::::::::::::::::::::::::::::::::::

La probabilidad de un suceso que no sea ni imposible ni seguro estará siempre entre 0 y 1. Podríamos establecer una escala orientativa para "calibrar" cómo es la probabilidad obtenida en cualquier experimento aleatorio. Veamos:

Escala de la Probabilidad:



Probabilidad del suceso contrario.

EXPERIMENTO: Sacar una bola de una bolsa que tiene 16 bolas, 6 de ellas amarillas y 10 verdes.

SUCESO "F": Sacar una bola amarilla.
SUCESO "G": Sacar una bola verde.

Estos dos sucesos son contrarios (o complementarios), porque si sucede el "F" no sucede el "G", y viceversa.

Veamos sus probabilidades:

$$P(F) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6}{16} = 0'375$$

$$P(G) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{10}{16} = 0'625$$

$$\begin{cases} P(F) + P(G) = 0'375 + 0'625 = 1 \\ P(F) = 1 - P(G) \\ P(G) = 1 - P(F) \end{cases}$$

Probabilidad de sucesos incompatibles y sucesos compatibles.

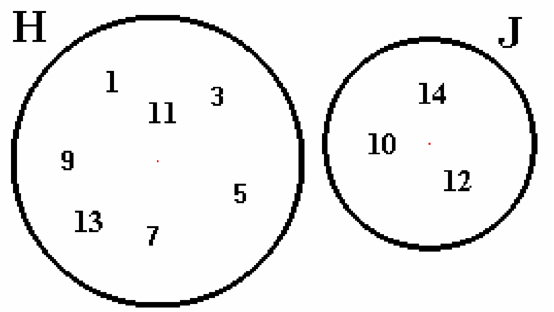
EXPERIMENTOS con los números 1 al 14 metidos en una bolsa.

SUCESO "H": Sacar un número impar.

SUCESO "G": Sacar un número par de dos cifras.

Estos dos sucesos, "H" y "G", son **sucesos incompatibles**, porque no pueden verificarse a la vez, ya que o sucede uno u otro.

Hacemos una representación en diagrama de Venn.



Veamos sus probabilidades y la de la unión de dichos sucesos:

$$P(H) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{7}{14}$$

$$P(J) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{14}$$

$$H \cup J = \{1,3,5,7,9,10,11,12,13,14\}$$

$$P(H \cup J) = \frac{10}{14}$$

$$P(H \cup J) = P(H) + P(J) = \frac{7}{14} + \frac{3}{14} = \frac{10}{14}$$

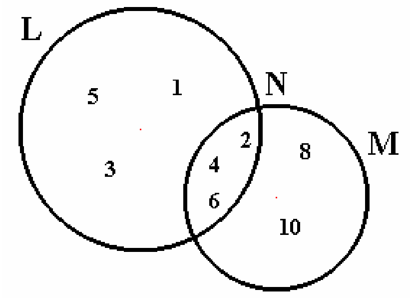
==============================

SUCESO "L": Sacar un número menor de 6.

SUCESO "M": Sacar un número par del 1 al 10.

Estos dos sucesos, "L" y "M", son **sucesos compatibles**, porque algunos resultados de ellos pueden ser comunes, es decir, ambos sucesos pueden verificarse a la vez.

Hacemos una representación en diagrama de Venn.



Veamos sus probabilidades y la de la unión de dichos sucesos:

$$P(L) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6}{14}$$

$$P(M) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{14}$$

$$L \cup M = \{1,2,3,4,5,6,8,10\} \rightarrow P(L \cup M) = \frac{8}{14}$$

$$L \cap M = \{2,4,6\} \rightarrow P(L \cap M) = \frac{3}{14}$$

$$\frac{8}{14} + \frac{3}{14} = \frac{6}{14} + \frac{5}{14}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$P(L \cup M) + P(L \cap M) = P(L) + P(M)$$

⊗ Despejamos en la anterior igualdad :

$$P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M)$$

⊗ Luego:

$$P(L \cup M) = \frac{6}{14} + \frac{5}{14} - \frac{3}{14} = \frac{8}{14}$$

IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

Hacemos un resumen de los conceptos fundamentales explicados sobre la probabilidad:

⇛ Un **experimento aleatorio** es el que depende de la suerte o el azar.

⇛ El **suceso elemental** es cada uno de los casos o resultados posibles de obtenerse.

⇛ **Espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados o suceso elementales.

⇛ Un **suceso**, en general, es el formado por una parte (subconjunto) del espacio muestral.

⇛ **Suceso seguro** es el que sucede siempre, o sea, el que está formado por todo el espacio muestral.

⇛ **Suceso imposible** es el que no ocurre nunca. Se representa con el símbolo $\varnothing$ (conjunto vacío).

⇛ Dos **sucesos** son **compatibles** si tienen posibilidad de realizarse de forma simultánea.

⇛ Cuando dos **sucesos** no tienen ningún suceso elemental común, se dicen que son **incompatibles**.

⇛ Un **suceso** es **contrario** de otro si son incompatibles y si no sucede uno sucede el otro.

⇛ Cuando los resultados de un suceso dependen de los de otro, los **sucesos** son dependientes. En caso contrario, son **independientes**.

⇛ La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que el suceso se repite.

⇛ La **frecuencia relativa** de un suceso es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de pruebas realizadas.

⇛ La **probabilidad** es la medida de la posibilidad de que un suceso se realice.

⇛ Dos **sucesos** son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de producirse.

⇛ La probabilidad de un suceso se calcula con la **Ley de Laplace**, es decir, dividiendo el nº de casos favorables entre el número de casos posibles,

⇛ La **medida de la probabilidad** de un suceso oscila entre 0 (suceso imposible) y 1 (suceso seguro).

⇛ A veces, en ciertos sucesos, para averiguar la cantidad de casos posibles, es necesario hacer un **diagrama de árbol**, que es un diagrama con ramificaciones (líneas) que se van abriendo hasta obtener todas las posibilidades de un experimento formado por varias pruebas.

⇛ La **probabilidad de dos sucesos contrarios** o complementarios es siempre igual a 1.

⇛ La **probabilidad de dos sucesos incompatibles** es la suma de las probabilidades de ambos.

⇛ La **probabilidad de dos sucesos compatibles** es igual a la suma de las probabilidades de ambos menos la probabilidad de la intersección de ambos.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

SOLUCIONES en las págs. 1144 a 1150.

1.- El profesor de Ciencias Sociales tiene 125 alumnos de E.S.O. en las 4 secciones en las que imparte clase. Quiere hacer una encuesta sobre la cantidad de provincias españolas que han visitado, y para ello ha preguntado a 10 alumnos de cada clase. Señala cuál es la población del estudio, cuál la muestra y qué clase de variable.

2.- En cada uno de los apartados siguientes, especifica la población y la variable, diciendo si es cuantitativa o cualitativa. Si es variable cuantitativa, explica brevemente si es cuantitativa discreta o continua. ANAYA 3º (1º)

a) El radio de cajas cilíndricas.
b) El color que más gusta.
c) La venta de pasteles.
d) Horas dedicadas a ver cine.
e) Número de sillas de los hogares.
f) Emisora de radio preferida.

3.- El profesor de Física y Química ha llevado al laboratorio del Instituto a un grupo de alumnos para hacer prácticas. En una de ellas, dio a cada alumno un termómetro para medir la temperatura de un compuesto obtenido en una reacción química. Los resultados que obtuvieron fueron éstos:

Medidas de "t" tomadas por los 16 alumnos							
20,1	20,9	20,5	20,6	20,8	20,5	19,7	19,8
20,3	20,6	19,6	21	20,4	20,7	19,5	20,2

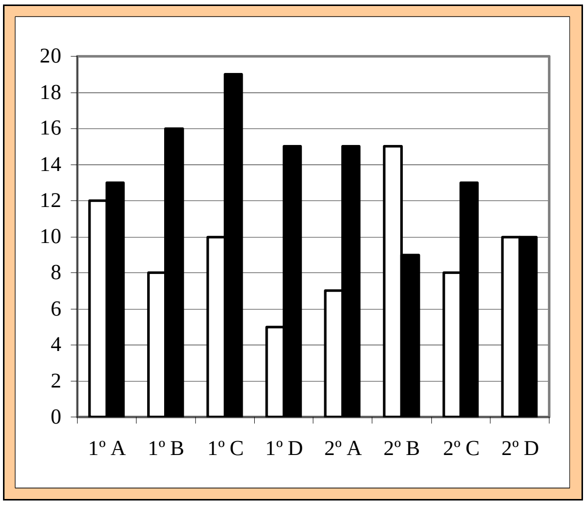
Ordenando los termómetros de 1 al 8 en la 1ª fila y del 9 al 16 en la 2ª, ¿cuál fue el que hizo la medición más exacta de la temperatura?

4.- Las notas de tres alumnos en varios controles de una asignatura han sido las siguientes:

Paulino	4.5	5.75	7.25	7.5	8
Dionisia	8	6.25	5	4.25	4
Olegario	5	6	4.75	5.25	7.5

¿Qué notas crees que les pondrá el profesor en la global de la evaluación?

5.- En el siguiente diagrama de barras se han representado los resultados de la 2ª Evaluación del Primer Ciclo de la E.S.O. (1º y 2º). Las barras blancas son los alumnos con todas aprobadas y las negras la cantidad de alumnos con 1 ó más suspensos.



Responde o realiza lo siguiente:

a) ¿Cuántos alumnos hay en cada clase?
b) ¿Qué clase tuvo más suspensos y cuál más aprobados? ¿Y menos suspensos y menos aprobados?
c) ¿Hay más suspensos en 1º ó en 2º? Calcula los porcentajes de suspensos.
d) Según los resultados, ¿cuál es el mejor de los grupos?

6.- Clodomiro cogió la gripe, como todos los años, por el mes de enero. Las temperaturas tomadas a lo largo de un día fueron las siguientes:

Horas	2	6	10	14	17	20	24
Temp.	39.4	38	36.9	37.8	38.5	37.5	36.5

Dibuja el polígono de frecuencias.

7.- En un Instituto se ha preguntado a sus alumnos por el grado de satisfacción que manifiestan, en general, con la enseñanza impartida en él. Los resultados fueron éstos:

Muy satisfechos	**180**
Bastante satisfechos	**90**
Satisfechos	**495**
Poco satisfechos	**45**
Casi nada satisfechos	**72**
Nada satisfechos	**18**

a) ¿Qué clase de variable es y cuál es la población?
b) Completa la tabla con la frecuencia relativa y los porcentajes correspondientes.
c) Representa la encuesta en un diagrama de sectores.

8.- Severiana quiere sacar un notable (de 8) en la global de la 1ª evaluación de Lengua. Hasta ahora sus notas son: 7'5, 9, 9'5, 7 y 6. Le falta hacer el control final de la evaluación que su profesor puntúa doble (vale por dos exámenes). ¿Qué nota deberá obtener?

9.- El "profe" de "Mate" ha encargado a un grupo de 2º de E.S.O. del I.E.S. "Meléndez Valdés" que hagan una encuesta entre los alumnos de Secundaria sobre sus preferencias entre las distintas asignaturas impartidas. El resultado fue el siguiente:

Asignaturas que más gusta	Frec. absoluta
Ciencias Naturales	36
Ciencias Sociales	19
Cultura Clásica	10
Educación Física	75
Física y Química	20
Francés	8
Informática	50
Inglés	25
Lengua	45
Matemáticas	55
Plástica	18
Religión	8
Tecnología	31

Completa la tabla con las frecuencias relativas y los porcentajes respectivos. Después, piensa un poco a ver cuál será la mejor manera o el gráfico más idóneo para presentar esta información y lo dibujas.

10.- Fermina, alumna universitaria, discute con su profesor de Física, porque ella piensa que las notas de sus controles le daban aprobado (media = 5) y, sin embargo, él la ha suspendido en junio. La verdad es que este profesor es muy exigente y riguroso en sus normas y métodos evaluativos.

La asignatura se divide en dos partes (de octubre a febrero y de febrero a mayo). En la 1ª parte Fermina ha hecho seis controles con estas notas: 3, 5, 6, 4, 7'5, 3 (media de 4'75); y en la 2ª parte ha hecho cuatro controles con estas notas: 7, 4, 6, 4 (media de 5'25). Ella sabe que el profesor nunca aprueba a nadie si no tiene de media 5 ó más, ni siquiera aprueba aunque le falten centésimas, o sea, ni teniendo un 4'97 de media lo considera aprobado. Puedes explicar qué pasó, o qué criterios de evaluación tenía el inflexible profesor.

11.- La tabla siguiente recoge los datos obtenidos al lanzar un dado (de caras 1 al 6) 50 veces.

Recogida de datos en 50 lanzamientos									
3	1	6	2	5	3	2	4	3	4
5	1	1	5	6	1	2	6	5	5
6	3	5	3	2	3	2	4	2	5
4	2	6	5	5	6	1	3	1	6
3	4	5	3	5	3	5	4	2	4

Ordena los datos, realiza la tabla con las frecuencias absolutas y relativas y dibujas correctamente el diagrama de barras que le corresponda. Realiza la suma de todos los puntos obtenidos en los lanzamientos y calculas la media, la moda y la mediana.

12.- Se sabe que la media de diez números es igual a 6. Y que al añadir un nuevo número la media aumenta una unidad. ¿Podrías averiguar cuál es ese número añadido?

13.- Realiza una pirámide de población de una región imaginaria "A" con los siguientes datos:

Edades	Hombres	Mujeres
81 a ...	5000	8000
71 a 80	7000	12000
61 a 70	11000	18000
51 a 60	18000	23000
41 a 50	14000	21000
31 a 40	16000	19000
21 a 30	22000	25000
11 a 20	12000	16000
0 a 10	10000	13000

14.- Averigua en cada apartado si lo que se dice es cierto o falso, explicando brevemente tu respuesta:

a) La media aritmética y la mediana de una serie de datos coincide siempre con uno de ellos.

b) El color de pelo es una variable cuantitativa continua.
c) El nº de televisores de una población es una variable cuantitativa discreta.
d) Al estudiar las notas de una clase homogénea, su desviación típica será mínima.
e) En todos los estudios estadísticos la moda está siempre presente entre los datos.
f) Puede haber dos estudios estadísticos cuya media, moda y mediana sean las mismas y tener uno distribución muy dispersa y otro poco dispersa.

15.- Invéntate una serie de 7 datos cuya media aritmética sea 13, el recorrido 19 y la moda 10.
CASALS 2º Y PITÁGORAS 8º

16.- ¿Cuál es el número que falta en la siguiente serie de datos si la moda es 10? Y si la media aritmética fuera 11, ¿cuál sería ese número?

12, 9, 5, 16, 10, 6, 12, 8, 10, 11, 12, 9, 10 y ¿…?

17.- En una reunión de tutores de 3º de E.S.O., preparando la reunión de padres de cada principio de curso, se obtuvo la siguiente tabla sobre uno de los aspectos estudiados:

Gastos medios por alumno en cada fin de semana

Gasto	Número de alumnos
1 a 3 euros	2
4 a 6 euros	15
7 a 9 euros	12
10 a 12 euros	23
13 a 15 euros	20
16 a 18 euros	14

Completa la tabla con los productos, las frecuencias relativas, los porcentajes y hallas la media, moda y mediana.

18.- Calcula la mediana de los siguientes datos:

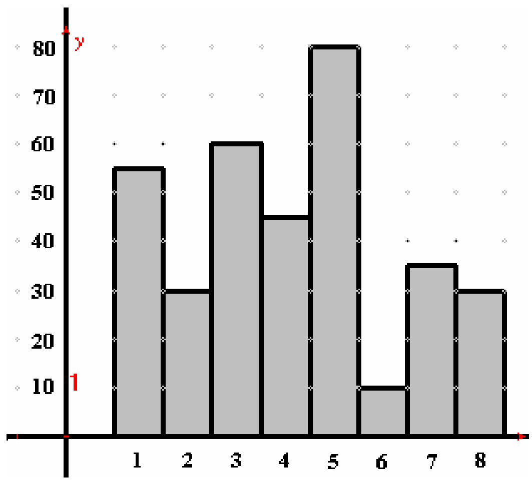
6, 8, 2, 9, 7, 4, 3, 8, 2 y 9.

19.- Un grupo de alumnos del I.E.S. "Meléndez Valdés" de Villafranca ha realizado un estudio sobre las preferencias televisivas de los alumnos de la E.S.O. Los primeros resultados fueron los siguientes:

	A	B	C	D
1	Dibujos animados	24	24	%
2	Deportes	60	84	%
3	Documentales	9	93	%
4	Musicales		129	12 %
5	Películas	15		%
6	Espectáculos	21		%
7	Concursos		195	%
8	Telebasura			%
9	Informativos	12		%
10	De debate	3		%
				%

a) Completa la tabla.
b) ¿Qué clase de variable es la estudiada?
c) ¿Cuál es la muestra?
d) ¿Cuál sería la moda?
e) ¿Qué es lo que menos ven en TV?
f) ¿Qué representa la columna B? ¿Y la C? ¿Y la D?
g) Haz un diagrama de sectores.

20.- En la localidad de Sillontele se ha realizado un estudio estadístico sobre las horas diarias que sus ciudadanos adolescentes y jóvenes ven la televisión. Los resultados se representan en el siguiente gráfico:



a) ¿Cómo llamamos a este gráfico estadístico?
b) ¿A cuántas personas del pueblo se entrevistó?
c) Calcula la media de horas diarias de televisión con las que se "forman" los jóvenes del pueblo.
d) ¿Y cuál es la moda y la mediana de ese estudio?
e) ¿Sabrías hallar la desviación típica?

21.- A continuación tienes una tabla de frecuencias de un cierto estudio estadístico.

Tabla de frecuencias			
Variable	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
Tipo "1"		0'02	
Tipo "2"	450	0'3	
Tipo "3"			
Tipo "4"			48%
Tipo "5"	120		

Realiza los cálculos necesarios para completar la tabla y la representas en diagrama de barras.

22.- La siguiente tabla recoge un estudio estadístico sobre las horas semanales que los alumnos dedican a las tareas de estudio en su casa. Está realizado en un Instituto "potable" teniendo como población los cursos de 3º de E.S.O.

Recogida de datos									
2	10	14	3	6	12	16	4	20	13
4	5	8	10	12	10	9	6	5	8
3	6	9	10	8	3	4	19	22	13
14	12	3	3	9	8	24	2	7	12
5	6	8	18	15	16	18	5	17	12
9	11	1	12	15	12	12	9	15	12
6	5	8	13	12	16	12	10	7	5

Ordena los datos y los agrupas en los intervalos siguientes: 1 a 3, 4 a 6, 7 a 9, 10 a 12, 13 a 15, 16 a 18, 19 a 21 y 22 a 24. Realiza su representación en diagrama de barras. Y halla los parámetros de centralización y dispersión.

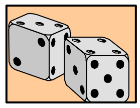
23.- Explica brevemente en cada apartado por qué lo que se dice en él es verdadero o por qué es falso.

a) Los experimentos deterministas dependen de la suerte.
b) Se llama espacio muestral al conjunto formado por todos los resultados posibles de un determinado experimento aleatorio.
c) La frecuencia relativa es el número de veces que se repite un suceso.
d) La probabilidad de un experimento aleatorio es el cociente entre todos los casos posibles y los casos favorables.
e) La probabilidad de un suceso y su contrario son siempre iguales.
f) Los sucesos A (obtener nº par) y B (obtener nº impar) en un dado normal son sucesos compatibles.
g) La probabilidad de un suceso es 1'25.
h) La probabilidad de un suceso seguro fue de 0'6

24.- Calcula las siguientes probabilidades:

a) Sacar cruz en una moneda.

Con un dado de parchís:

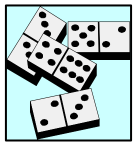


b) Sacar un cuatro.
c) Sacar un nº impar.
d) Sacar un nº primo.

Con una baraja española:

e) Sacar un rey.
f) Sacar una figura.
g) Sacar "oros".
h) Sacar el cinco de "espadas".
i) Sacar "copas" o "bastos".

Con un juego de dominó:
(Si no sabes bien cómo es este juego, investígalo hasta informarte bien)



j) Sacar un tres en uno de sus cuadrados.
k) Sacar una "blanca".
l) Sumar seis en una ficha.
m) Sacar los mismos puntos en cada cuadro.

25.- Entre las 120 veces que hemos sacado una carta de una baraja española ha salido una "sota" 15 veces y un "as" 9 veces. Calcula las frecuencias absolutas y relativas de los sucesos.
A = Sacar una "sota".
B = Sacar un "as".

26.- Ambrosio y Apolinar tienen dos cajas (X e Y) de cartón cerradas. En la caja X hay 5 bolas de color amarillo y 3 de color azul, y en la Y hay 4 de color amarillo y dos de color azul. Apuestan algo a sacar una bola amarilla. Ambrosio coge de la caja X y Apolinar de la caja Y. ¿Quién crees que tiene más posibilidades de ganar?

27.- Al lanzar dos dados de parchís al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener entre los dos 8 puntos? ¿Y la de sumar 11 puntos?

28.- ¿Cuáles son los sucesos contrarios de los expuestos en los siguientes apartados? Calcula también las probabilidades de los mencionados y los contrarios.

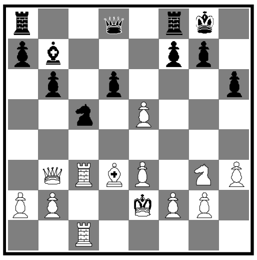
a) Al lanzar un dado de parchís que salga par.
b) Al sacar una carta de baraja española que salga un "as" o un "caballo".
c) Coger una ficha "doble" en un juego de dominó.

29.- Si abrimos un libro de 200 páginas, ¿cuál es la probabilidad de abrirlo por una página que sea múltiplo de 5? ¿Y por una página que contenga un 0?

30.- ¿Cuál es el espacio muestral al lanzar al mismo tiempo una moneda de cara y cruz y un dado de jugar al parchís?

31.- Si participas en una rifa con números del 1 al 500 en la que cada número vale 2'50 euros, ¿cuánto debes gastarte para tener una probabilidad del 0'06 de acertar?

32.- Uno de los juegos más atractivo, apasionante, entretenido y enriquecedor, además de milenario, es el ajedrez. No es precisamente un juego de azar, sino todo lo contrario. Sin embargo, puede servirnos para calcular probabilidades metiendo todas sus fichas en una bolsa, y así te informas de qué va. Quizás te guste. Desde luego este juego merece la pena mucho más que otras muchas cosas en las que pierden el tiempo banalmente gran parte de adolescentes y jóvenes.



a) Probabilidad de sacar un peón de la bolsa.
b) Sacar un rey.
c) Sacar una torre.
d) Sacar un peón negro.
e) Sacar un alfil blanco.
f) Sacar una reina y el suceso contrario.

33.- Si tenemos cuatro monedas y queremos saber cuáles son las probabilidades de diversos sucesos, lo más conveniente es realizar un diagrama de árbol para conocer con exactitud los casos favorables y los totales. Bien, pues manos a la obra. Realiza el correspondiente diagrama de árbol y calcula después las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) De que salgan dos caras al menos.
b) De que salgan dos caras y dos cruces.
c) De que salgan cuatro caras.
d) De que no salga ninguna cara.
e) De que salgan tres cruces y una cara en cualquier orden.
f) De que salga más de una cruz.
g) De que salgan tres caras seguidas.
h) De que salgan dos caras y dos cruces alternativamente.

34.- En diagramas de árbol, atendiendo a la probabilidad de cada rama, ¿cómo se halla la probabilidad de un camino determinado? ¿Y la probabilidad de varios caminos?

35.- En una determinada clase de E.S.O., se sabe que la probabilidad de que un alumno tenga los ojos azules es de 0'15, la de que tenga el pelo castaño es de 0'8 y la de que al mismo tiempo sea de pelo castaño y tenga los ojos azules es de 7/20. Averigua las probabilidades siguientes:

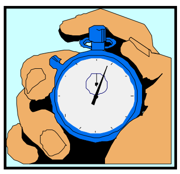
a) Que sea o de pelo castaño o de ojos azules.
b) Que no tenga el pelo castaño.
c) Que no tenga ojos azules.

36.- Disponemos de 27 bolitas con las letras del abecedario español. Se meten en una bolsa y se consideran los sucesos siguientes A, B y C. Después de observar los siguientes conjuntos de letras, calcula lo que te piden a continuación.

A = {a, b, c, d, e, f, g}
B = {a, e, i, o, u}
C = {todas las consonantes}

a) Probabilidad de A ∩ C.
b) Probabilidad de B ∪ C.
c) Probabilidad de A ∪ B.
d) Probabilidad de B ∩ C.

En las páginas siguientes tienes las soluciones a todos los ejercicios sobre Estadística y Probabilidad propuestos. Dedícale tiempo y atención a la corrección, porque la mejor manera de aprender es intentar de forma concentrada realizar los ejercicios y después observar detenidamente los errores, si los hay, para completar un buen proceso de aprendizaje.



SOLUCIONES DE LOS 36 EJERCICIOS DE LAS PÁGS. 1139 A 1143.

1.- SOLUCIONES.

La población son 125 alumnos. La muestra es de 40 alumnos. La variable es cuantitativa discreta.

2.- SOLUCIONES.

Variables cualitativas: b) y f).
Variables cuantitativas discretas: c) y e).
Variables cuantitativas continuas: a) y d).

3.- SOLUCIONES.

Pues hacemos la media de las 16 medidas, que es 20'33. Y, por lógica, deducimos que el termómetro que haya realizado la medición más cercana a la media será el más exacto, o al menos el de más fiabilidad. Observando el cuadro siguiente vemos que ha sido el que ocupa el lugar 9º, ya que su medida (20'3) es la más próxima a la media.

20.1	20.9	20.5	20.6	20.8	20.5	19.7	19.8
20.3	20.6	19.6	21	20.4	20.7	19.5	20.2
Media de las 16 mediciones : 325.2/16 = **20.33**							

4.- SOLUCIONES.

						Media
Dionisia	4.5	5.75	7.25	7.5	8	6.60
Paulino	8	6.25	5	4.25	4	5.50
Olegario	5	6	4.75	5.25	7.5	5.70

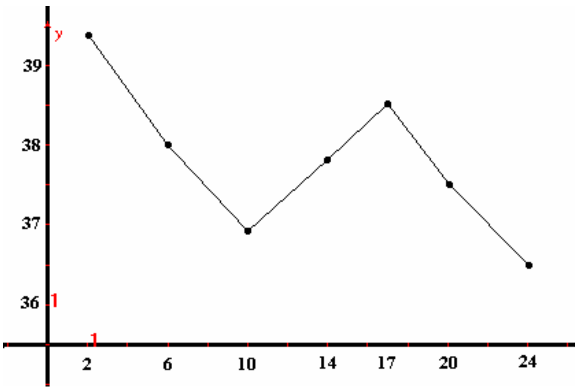
Seguramente, Dionisia sacará NOTABLE *–le subirá al 7 de media por ir progresando-*, Paulino tendrá SUFICIENTE *–le bajará al 5 por ir rindiendo cada vez menos-* y Olegario obtendrá un BIEN *–subirá un poco hasta el 6 por mantener su rendimiento-*.

5.-SOLUCIONES.

a) 25 (1º A), 24 (1º B), 29 (1º C), 20 (1º D), 22 (2º A), 24 (2º B), 21 (2º C) y 20 (2º D).
b) Más suspensos en 1º C (19) y más aprobados en 2º B (15). Menos aprobados en 1º D (5) y menos suspensos en 2º B (9).
c) En 1º hay más suspensos (63) que en 2º (47). 64 % en 1º y 54 % en 2º.
d) El grupo mejor es 2º B.

6.- SOLUCIONES.

El polígono de frecuencias es el siguiente:

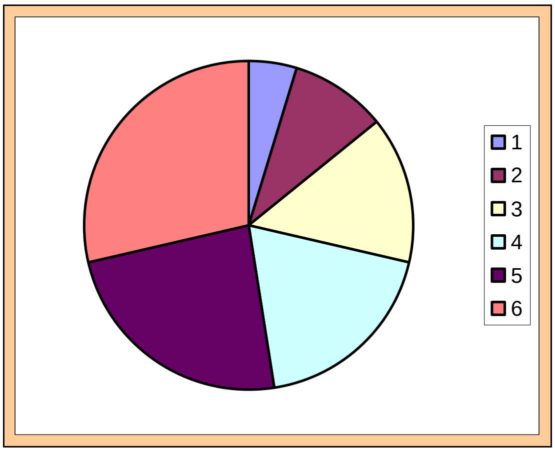


7.- SOLUCIONES.

a) Es una variable cualitativa
b) La tabla es la siguiente:

	Satisfacción	Frec. absoluta	Frec. relativa	%
1	Muy satisfechos	180	0,20	20
2	Bastante satisfechos	90	0,10	10
3	Satisfechos	495	0,55	55
4	Poco satisfechos	45	0,05	5
5	Casi nada satisfechos	72	0,08	8
6	Nada satisfechos	18	0,02	2
		900	**1**	**100**

c) El diagrama de sectores es éste:



8.- SOLUCIONES.

- ⊗ **Los cinco controles hechos suman 39.**
- ⊗ **Tiene que sumar 56 (7 . 8).**
- ⊗ **Le faltan aún 17 puntos → 17 : 2 = 8'5**
- ⊗ **Deberá sacar en el último un 8'5.**

⇒ **Resuelto con una ecuación sería :**

$$\frac{7'5+9+9'5+7+6+2x}{7}=8$$

$$39 + 2x = 56 \rightarrow x=\frac{56-39}{2}=8'5$$

10.- SOLUCIONES.

Bueno, por una parte está claro que Fermina hace las media de sus medias (1ª parte, 4'75, que es la media de los 6 controles, y 2ª parte, 5'25, que es la media de los cuatro controles) y le da nota 5, o sea, aprobado. Sin embargo, el profesor no hace la media de las dos medias, sino la media de los 10 exámenes realizados. Y así no llega al 5, ya que esa media es 4.95. Y por eso la suspende. Veamos más detenidamente los cálculos:

⊗ **Cálculos de Fermina :**

$$\text{Media total} = \frac{\text{Media}_{1^a\ \text{parte}} + \text{Media}_{2^a\ \text{parte}}}{2} = \frac{4'75+5'25}{2}=5$$

⊗ **Cálculos del Profesor :**

1ª parte → Suma total = 4'75 . 6 (notas) = 28'5

2ª parte → Suma total = 5'25 . 4 (notas) = 21

Suma de todo el año = 28'5 + 21 = 49'5

$$\text{Media final} = \frac{49'5}{10\ (\text{notas})} = 4'95$$

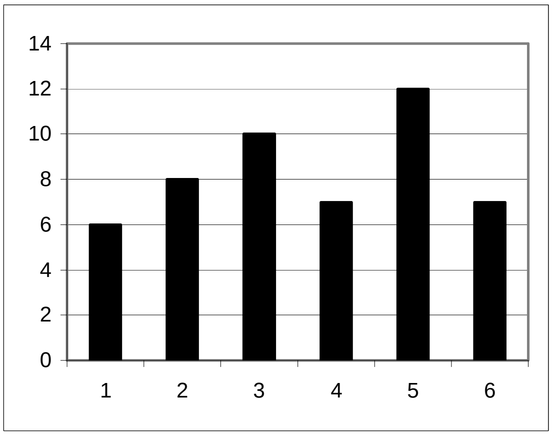
Y, según sus criterios, le suspendió con razón.

Este problema nos demuestra que no es lo mismo hacer la media de una cantidad determinada de datos que hacer medias de partes de los datos y después hallar la media total de esas medias.

11.-SOLUCIONES.

Datos ordenados									
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	6	6	6	6	6	6	6

Sucesos elementales	Frec. absoluta	Productos	Frec. relativa	%
1	6	6	0,12	12
2	8	16	0,16	16
3	10	30	0,20	20
4	7	28	0,14	14
5	12	60	0,24	24
6	7	42	0,14	14
	50	**182**	**1**	**100**



⊗ **Media** $= \frac{182}{50} = 3'64$

⊗ **Moda → Salir la cara del 5.**

⊗ **Mediana → La media de los lanzamiento que ocupan los lugares 25º y 26º en los ordenados, que es un 4.**

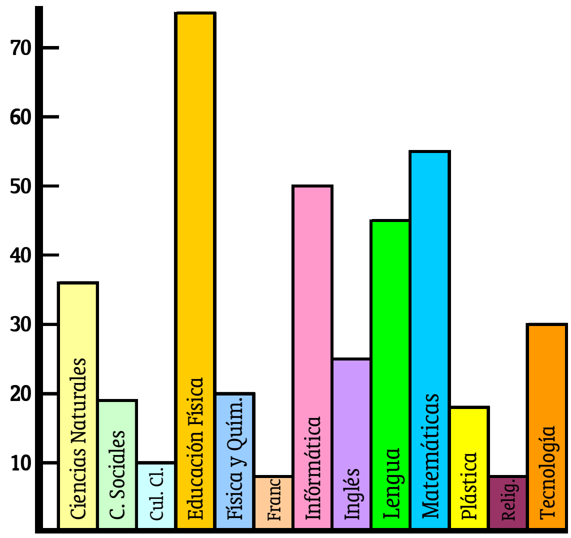
Por necesidades de espacio, colocamos aquí el nº 9, que debería haber ido en la otra columna.

9.- SOLUCIONES.

La tabla de frecuencias pedida es ésta:

Asignaturas que más gusta	Frec. absoluta	Frec. relativa	%
Ciencias Naturales	36	0,09	9
Ciencias Sociales	19	0,05	5
Cultura Clásica	10	0,03	3
Educación Física	75	0,19	19
Física y Química	20	0,05	5
Francés	8	0,02	2
Informática	50	0,13	13
Inglés	25	0,06	6
Lengua	45	0,11	11
Matemáticas	55	0,14	14
Plástica	18	0,05	5
Religión	8	0,02	2
Tecnología	31	0,08	8
	400	**1**	**100**

El gráfico más idóneo para representar la encuesta sería un histograma de barras como el siguiente:



12.- SOLUCIONES. En la columna de la derecha.

⊗ **Los diez números iniciales suman 60 (10 . 6).**

⊗ **Al haber once datos y ser la nueva media 7, deberán sumar 77 (11 . 7).**

⊗ **Le faltan aún 17 (77 - 60) puntos, luego el nº añadido es 17.**

⇒ **Resuelto con una ecuación sería :**

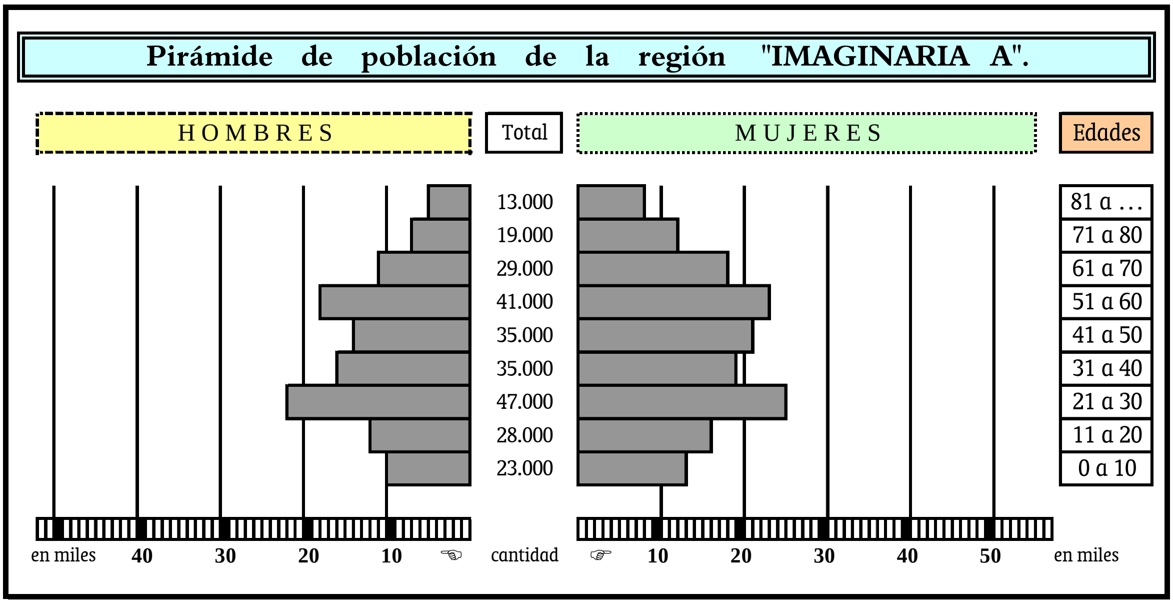
$$\text{Media}_{2^a} = \frac{(\text{Media}_{1^a}) \cdot (n^o \text{ datos}_{1^o}) + x}{n^o \text{ datos}_{2^o}}$$

$$7 = \frac{6.10 + x}{11} \Rightarrow 77 = 60 + x \Rightarrow x = 17$$

14.- SOLUCIONES.

a) Falso. Puede que sí y puede que no.
b) Falso. Es una variable cualitativa.
c) Cierto. No puede haber ¼ de televisor, etc.
d) Cierto. Sus datos estarán muy agrupados.
e) Cierto. La moda es el valor más repetido.
f) Cierto. Por ejemplo: A (2, 4, 7, 7, 7, 7, 17) y B (6, 6, 7, 7, 7, 9, 9).

13.- SOLUCIONES. La pirámide de población pedida es ésta:



15.- SOLUCIONES.

3	20	10	22	11	15	10
Media de los 7 datos : 91 / 7 = 13						
Recorrido : 22 - 3 = 19						
Moda : 10						

⊗ **Para que la moda sea 10, falta un 10, porque hay tres 12 y tres 10, y la moda es el dato más repetido.**

⊗ **Hay trece datos y el que falta catorce. Luego para que la media dé 11 deben sumar 154 (14.11), y como los trece conocidos suman 130:**

$$\frac{130 + x}{14} = 11 \Rightarrow x = 24$$

16.- SOLUCIONES.

17.- SOLUCIONES.

Gastos medios por alumno cada fin de semana				
Gasto	Frec. abs.	X	Frec. relat.	%
1 a 3 euros	2	4	0,02	2%
4 a 6 euros	15	75	0,17	17%
7 a 9 euros	12	96	0,14	14%
10 a 12 euros	23	253	0,27	27%
13 a 15 euros	20	280	0,23	23%
16 a 18 euros	14	238	0,16	16%
Sumas ⇒	**86**	**946**	**1**	**100%**

Media = **11 euros (946/86)**

Moda = **Gastar entre 10 y 12 euros**

Mediana (dato nº 43; marca de clase de 10 a 12) = **11**

18.- SOLUCIONES:

⊗ **Ordenados los datos, vemos que los dos centrales son el 6 y el 7.**

⊗ **La mediana es la media de esos dos.**

$$\textbf{Mediana} = \frac{6+7}{2} = 6'5$$

2	2	3	4	6	7	8	8	9	9

19.- SOLUCIONES.

a) Completa la tabla.

	A	B	C	D
1	Dibujos animados	24	24	8 %
2	Deportes	60	84	20 %
3	Documentales	9	93	3 %
4	Musicales	36	129	12 %
5	Películas	15	144	5 %
6	Espectáculos	21	165	7 %
7	Concursos	30	195	10 %
8	Telebasura	90	285	30 %
9	Informativos	12	297	4 %
10	De debate	3	300	1 %
		300		100 %

b) Es una variable cualitativa.

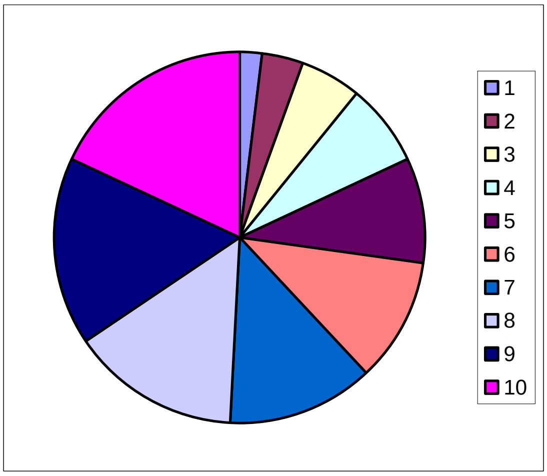
c) La muestra es de 300 alumnos.

d) La moda es ver la telebasura.

e) Los programas de debate y los documentales son los menos vistos.

f) La columna B es la frecuencia absoluta. La C la frecuencia acumulada. La D el porcentaje de cada modalidad.

g) El diagrama de sectores es el siguiente.



20.- SOLUCIONES.

a) Es un histograma.

b) La muestra es de 350 (entrevistados).

c) $\text{Media} = \dfrac{1360}{350} = 4'44$ horas diarias.

d) $\begin{cases} \text{Moda} \rightarrow 5 \text{ (ver 5 horas diarias de tele).} \\ \text{Mediana} \rightarrow 4 \text{ (ver 4 horas).} \end{cases}$

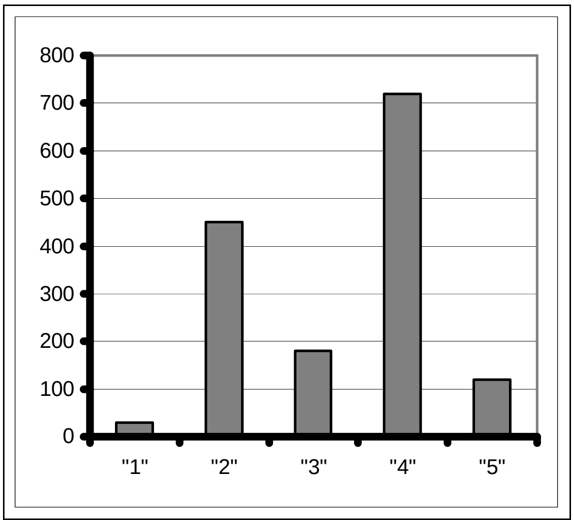
e) Desviación típica $\rightarrow \sigma = 2'18$

Horas	Frec. Abs.	Producto	Desviaciones por productos	Cuadrado de desviaciones
1	55	55	178,75	580,94
2	30	60	67,5	151,88
3	60	180	75	93,75
4	45	180	11,25	2,81
5	80	400	60	45
6	10	60	17,5	30,63
7	35	245	96,25	264,69
8	30	240	112,5	421,88
	345	1420	618,75	1591,5625
		4,44	**1,93**	**4,97**
		Media	**Desviación media**	**Varianza**

Desviación típica = 2.18

21.- SOLUCIONES.

Tabla de frecuencias			
Variable	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Porcentaje
Tipo "1"	30	0,02	2%
Tipo "2"	450	0,3	30%
Tipo "3"	180	0,12	12%
Tipo "4"	720	0,48	48%
Tipo "5"	120	0,08	8%
	1500	1	100%



22.- SOLUCIONES.

Como hay demasiados datos, los agrupamos en intervalos. VER LA TABLA SIGUIENTE. Con las marcas de clase obtenemos:

⊗ **Media aritmética** $= \dfrac{661}{70} = 9'44$

⊗ **Moda** $= \dfrac{10+12}{2} = 11$

Nota: se ha cogido 10 y 12 por ser la clase modal más repetida (17 veces). Y la moda es la media (o marca de clase).

⊗ **La mediana es el dato que ocupa el lugar 35º (8 + 14 + 13), que es 9.**

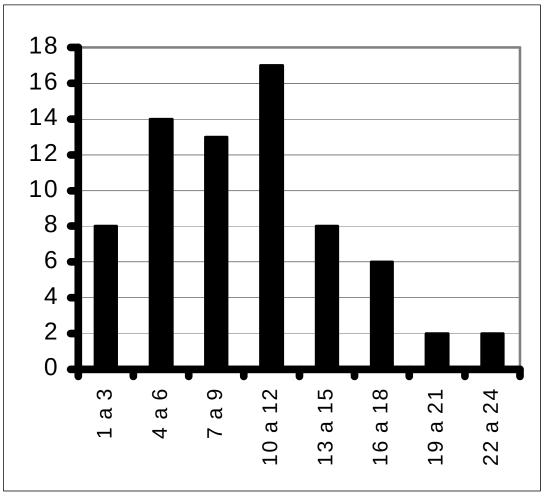
⊗ **Desviación media** $= \dfrac{281}{70} = 4'01$

⊗ **Varianza** $= \dfrac{1775'23}{70} = 25'36$

⊗ **Desviación típica** $= \sqrt{25'36} = 5'04$

Intervalos de horas	Marca de clase	Frec. abs.	x	Desv.	Desv. al cuadrado
1 a 3	2	8	16	60,8	463,30
4 a 6	5	14	70	64,4	297,53
7 a 9	8	13	104	20,8	33,70
10 a 12	11	17	187	23,8	32,85
13 a 15	12	8	96	19,2	45,70
16 a 18	17	6	102	44,4	327,67
19 a 21	20	2	40	20,8	215,90
22 a 24	23	2	46	26,8	358,58
		70	661	281,0	1775,23
			9,443	4,014	25,36
					5,04

El diagrama de barras es el siguiente:



23.- SOLUCIONES.

a) Falso, porque en los experimentos deterministas los resultados se conocen de antemano y no dependen de la suerte.
b) Cierto.
c) Falso, porque el número de veces que se repite un suceso es la frecuencia absoluta, y la frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el nº de veces que se ha hecho el experimento.
d) Falso; es justamente al revés: los casos favorables entre los totales.
e) Falso, porque la probabilidad de un suceso es igual a 1 menos la probabilidad del suceso contrario.
f) Falso, porque son sucesos incompatibles, ya que no pueden darse al mismo tiempo por no tener ningún resultado común.
g) Falso, porque el valor de la probabilidad oscila entre 0 (suceso imposible) y 1 (suceso seguro).
h) Falso, por la explicación del apartado anterior.

24.- SOLUCIONES.

P (apartado "a") = $\frac{1}{2}$; P ("b") = $\frac{1}{6}$;

P ("c") = $\frac{3}{6}$; P ("d") = $\frac{4}{6}$; P ("e") = $\frac{4}{40}$;

P ("f") = $\frac{12}{40}$; P ("g") = $\frac{10}{40}$; P ("h") = $\frac{1}{40}$;

P ("i") = $\frac{20}{40}$; P ("j") = $\frac{8}{28}$; P ("k") = $\frac{8}{28}$;

P ("l") = $\frac{4}{28}$; P ("m") = $\frac{7}{28}$.

Simplifícalas tú.

25.-SOLUCIONES..

Frecuencia absoluta "A" → 15

Frecuencia relativa "A" = $\frac{15}{120} = \frac{1}{8}$

Frecuencia absoluta "B" → 9

Frecuencia relativa "B" = $\frac{9}{120} = \frac{3}{40}$

26.- SOLUCIONES....

Tiene más probabilidad de sacar una bola amarilla Apolinar. Veamos las probabilidades de Ambrosio y Apolinar, y la reducimos a M.D.C.

$$P(X) = \frac{5}{8}\left[\frac{15}{24}\right] \; ; \; P(Y) = \frac{4}{6}\left[\frac{16}{24}\right]$$

27.- SOLUCIONES.

Tabla del espacio muestral del experimento con dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	1 + 1	1 + 2	1 + 3	1 + 4	1 + 5	1 + 6
2	2 + 1	2 + 2	2 + 3	2 + 4	2 + 5	**2 + 6**
3	3 + 1	3 + 2	3 + 3	3 + 4	**3 + 5**	3 + 6
4	4 + 1	4 + 2	4 + 3	**4 + 4**	4 + 5	4 + 6
5	5 + 1	5 + 2	**5 + 3**	5 + 4	5 + 5	**5 + 6**
6	6 + 1	**6 + 2**	6 + 3	6 + 4	**6 + 5**	6 + 6

$$P(\text{sumar } 8) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{sumar } 11) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

28.- SOLUCIONES.

a) El suceso contrario o complementario es que salga impar.

b) El suceso contrario es que no salga ni "as" ni "caballo".

c) El suceso complementario es que no salga un "doble".

$$P(\text{"a"}) = \frac{3}{6}\left[\frac{1}{2}\right] \; ; \; P(\text{contrario}) = \frac{3}{6}\left[\frac{1}{2}\right].$$

$$P(\text{"b"}) = \frac{8}{40}\left[\frac{1}{5}\right] ; \; P(\text{contrario}) = \frac{32}{40}\left[\frac{4}{5}\right].$$

$$P(\text{"c"}) = \frac{7}{28}\left[\frac{1}{4}\right] ; \; P(\text{contrario}) = \frac{21}{28}\left[\frac{3}{4}\right].$$

⊗ **Comprueba tú que las probabilidades de cada suceso y su contrario suman siempre 1.**

29.- SOLUCIONES.

$$P(\text{múltiplo de } 5) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{20}{200} = 0'1$$

$$P(\text{con un } 0) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{29}{200} = 0'145$$

30.-SOLUCIONES.

1-cara, 2-cara, 3-cara, 4-cara, 5-cara, 6-cara,

1-cruz, 2-cruz, 3-cruz, 4-cruz, 5-cruz y 6-cruz.

31.- SOLUCIONES.

⊗ $P = 0'06 \rightarrow \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{x}{500}$

$$\left[0'06 = \frac{x}{500}\right] \rightarrow 0'06 \cdot 500 = x = 30$$

O sea, que tiene que comprar 6 papeletas.

También se podría resolver así:

⊗ $6\ \% \rightarrow \left[\frac{6}{100} = \frac{x}{500}\right] \rightarrow x \rightarrow 30$ **números**

⊗ **30 . 2'50 euros = 75 euros**

32.- SOLUCIONES.

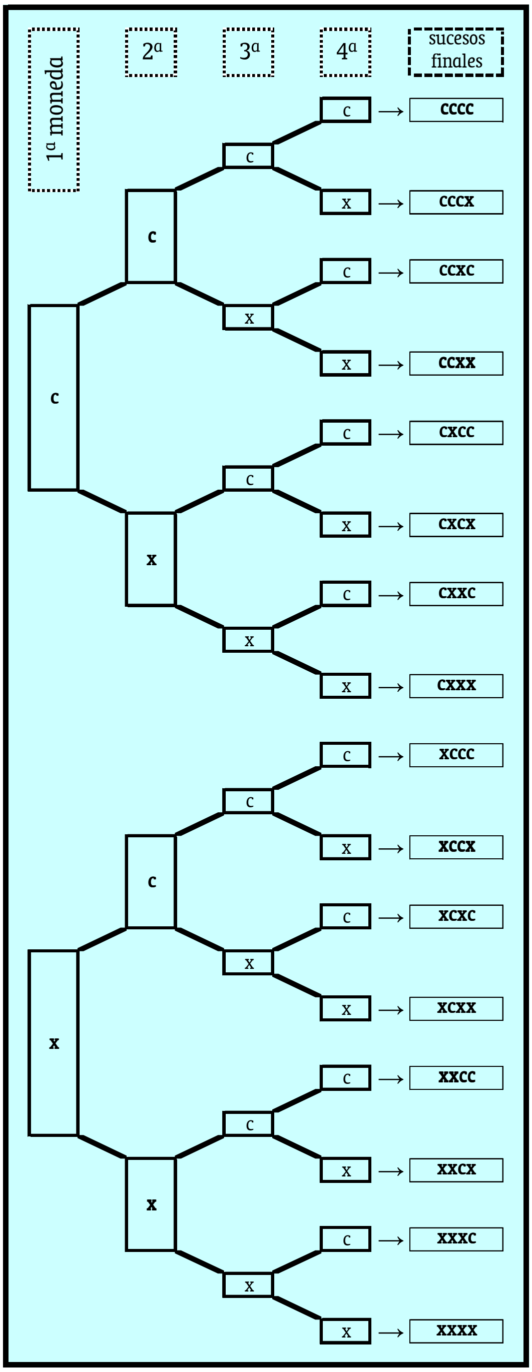
$P(\text{"a"}) = \frac{16}{32}$; $P(\text{"b"}) = \frac{2}{32}\left[\frac{1}{16}\right]$;

$P(\text{"c"}) = \frac{4}{32}\left[\frac{1}{8}\right]$; $P(\text{"d"}) = \frac{8}{32}\left[\frac{1}{4}\right]$;

$P(\text{"e"}) = \frac{2}{32}\left[\frac{1}{16}\right]$; $P(\text{"f"}) = \frac{2}{32}\left[\frac{1}{16}\right]$;

$P(\text{el contrario de "f"}) = \frac{30}{32}\left[\frac{15}{16}\right]$.

33.- SOLUCIONES.



$P(\text{"a"}) = \frac{11}{16}$; $P(\text{"b"}) = \frac{6}{16}\left[\frac{3}{8}\right]$;

$P(\text{"c"}) = \frac{1}{16}$; $P(\text{"d"}) = \frac{1}{16}$;

$P(\text{"e"}) = \frac{4}{16}\left[\frac{1}{4}\right]$; $P(\text{"f"}) = \frac{11}{16}$;

$P(\text{"g"}) = \frac{3}{16}$; $P(\text{"h"}) = \frac{2}{16}\left[\frac{1}{8}\right]$.

34.- SOLUCIONES.

La probabilidad de cualquier camino es igual al producto de probabilidades de cada rama necesaria para recorrerlo. Y la de varios caminos se obtiene sumando las probabilidades de cada uno de ellos.

35.- SOLUCIONES.

$P(\text{"a"}) = 0'15 + 0'8 - \frac{7}{20} = 0'6$

$P(\text{"b"}) = 1 - 0'8 = 0'20$

$P(\text{"c"}) = 1 - 0'15 = 0'85$

36.- SOLUCIONES.

⊗ A y B son sucesos compatibles.

⊗ A y C son sucesos compatibles.

⊗ B y C son sucesos incompatibles.

$P(A \cap C) = \frac{5}{27} = 0'18...$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) =$

$= \frac{5}{27} + \frac{22}{27} = \frac{27}{27} = 1$

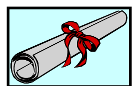
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{7}{27} + \frac{5}{27} - \frac{2}{27} = \frac{10}{27} = 0'37...$

$P(B \cap C) = \frac{0}{27} = 0$

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>

Se terminaron los 14 temas. ¿Qué tal? "Mucha tela", verdad. Tienes razón. Son 14 temas muy densos que sirven para 1º, 2º y 3º. Sin lugar a dudas se podrían haber desarrollado de forma mucho más corta, e incluso más atractiva.



Los centenares de páginas que tienen los dos tomos están ocupados en gran parte por ejercicios y problemas resueltos, sean como complemento de los temas o como controles, de ahí su densidad. Pienso, por eso lo decidí así, que es imprescindible y necesario para los buenos alumnos disponer de muchos y muy diversos ejercicios y proble+-mas resueltos, porque eso le hace avanzar en su aprendizaje de forma muy significativa. Espero haber acertado, al menos en un porcentaje aceptable de estudiantes.

¿Cuál de las dos imágenes de esta reflexión conseguirás?