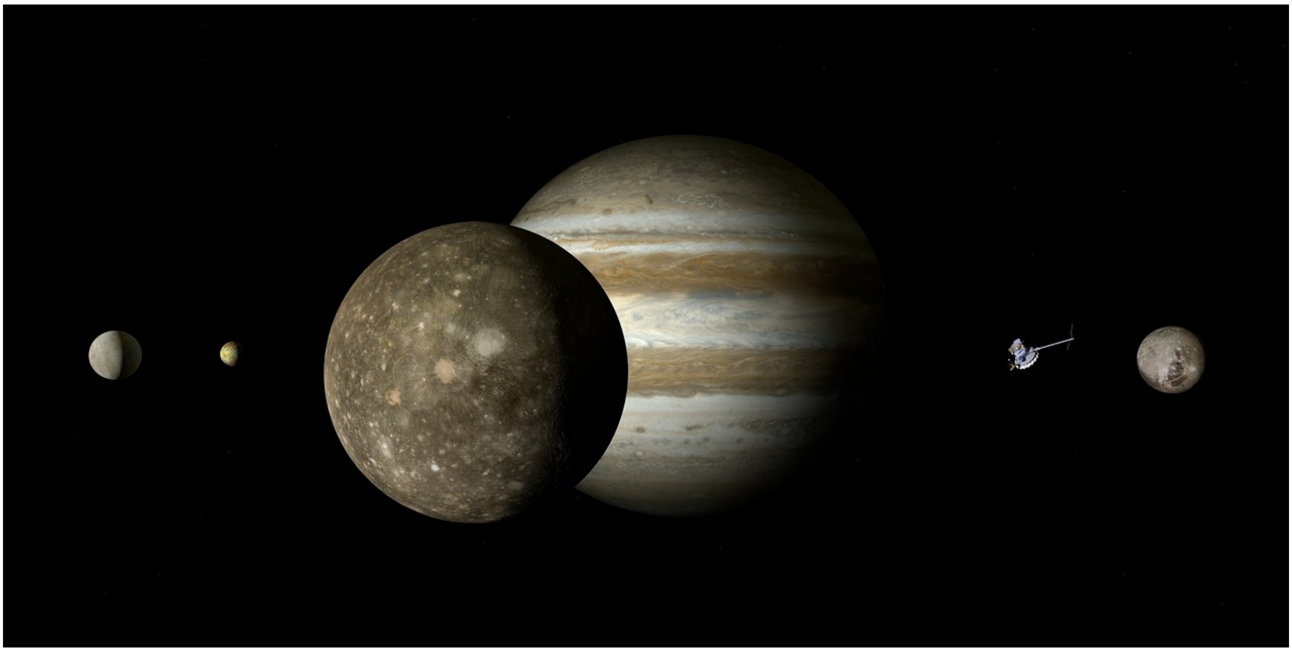
Tema 01:
Campo gravitatorio.



0101. Momento angular y leyes de Kepler.

DEFINICIÓN DE MOMENTO ANGULAR

El **momento angular** es una magnitud importante para caracterizar el estado de rotación de una partícula. Se define como el momento respecto a un punto del vector p (momento lineal o cantidad de movimiento), se representa por la letra L.

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

Su módulo es **L = r p sen α = m v r sen α.** Su dirección es perpendicular al plano formado por r y v, y su sentido se determina por la regla del sacacorchos o de las agujas del reloj.

MOMENTO ANGULAR EN MOVIMIENTOS CIRCULARES

El momento angular en los movimientos circulares, en los cuáles el vector de posición y la velocidad son perpendiculares, también es igual a:

$$\mathbf{L = r\cdot m\cdot v = r\cdot m\cdot \omega\cdot r = \omega\cdot(r^2\cdot m) = I\cdot \omega}$$

Ello implica que para un movimiento circular uniforme (MCU) el momento angular es constante.

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Hemos obtenido las expresiones del momento angular de una partícula y del momento de una fuerza. Derivando la primera ecuación respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{dp}{dt}+\frac{dr}{dt}\times\vec{p}$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(m\bullet\vec{v})=m\bullet\frac{dv}{dt}=m\bullet\vec{a}=\vec{F}$$

$$\frac{dr}{dt}\times\vec{p}=\vec{v}\times m\bullet\vec{v}=0\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

Por lo tanto: “El momento de la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la variación que experimenta el momento angular de esa partícula.”

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

Teorema de conservación del momento angular: Si no actúa ningún momento de torsión sobre una partícula el momento angular de esa partícula permanece constante.

$$\vec{M}=0\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}=0\Rightarrow\vec{L}=cte$$

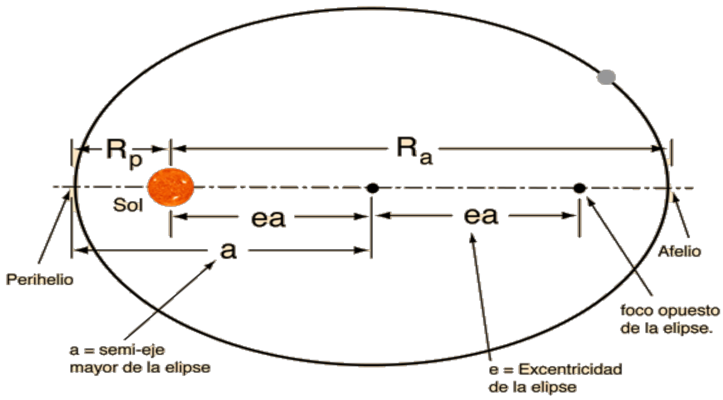
Para que el momento de la fuerza sea nulo debe cumplirse que: o bien la fuerza es nula (F = 0), o bien la distancia al eje de giro es nula (r = 0), o bien la fuerza y el vector de posición del punto donde se aplica la fuerza son paralelos. Este último caso es de especial importancia y las fuerzas que cumplen esa condición se llaman fuerzas centrales. Las fuerzas centrales están dirigidas en todo momento hacia un punto y su módulo depende de la distancia a ese punto. Puede demostrarse que toda fuerza central es conservativa.

La fuerza gravitatoria es una fuerza central y por tanto su momento respecto al centro de fuerzas es siempre nulo (r es paralelo a F). Por lo tanto el momento angular ha de ser constante. Ello conlleva dos consecuencias importantes:

- Por ser constante el momento angular en dirección y sentido, el movimiento de la partícula tiene lugar en un plano y siempre en el mismo sentido.
- Por ser constante el momento angular en módulo, se cumple que: el área barrida por el vector de posición de un planeta en un determinado tiempo es constante.

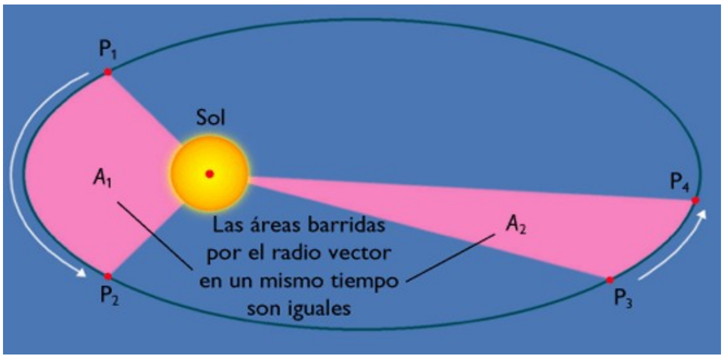
La propuesta de Copérnico ayudó a **Johaness Kepler** (1571-1630) a descubrir las leyes del movimiento planetario basándose en una serie de cuidadosas mediciones de **Tycho Brahe** (1546-1642). Estas leyes –las leyes de Kepler- son las siguientes:

1. Los planetas describen órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos.



$$R_a = a(1+e) \qquad R_p = a(1-e)$$

2. El vector posición de cualquier planeta respecto al Sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.



La ley de las áreas es equivalente a la constancia en módulo del momento angular, es decir, cuando el planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano al Sol (perihelio). En el afelio y en el perihelio, el módulo del momento angular L es el producto de la masa del planeta, por su velocidad y por su distancia al centro del Sol.

Supongamos que un planeta tarda un tiempo dt en pasar desde P hasta P'. El vector de posición $\vec{r}$ ha barrido en este tiempo un área dA. Esta área es la mitad del área del paralelogramo formado por $\vec{r}$ y $d\vec{r}$.

$$\mathbf{dA} = \frac{1}{2}\left|\vec{\mathbf{r}} \times \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{dt}\right|$$

$$\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} = \frac{1}{2}\left|\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}\right| = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}$$

Dicha área barrida por el vector de posición en la unidad de tiempo se conoce como velocidad areolar.

3. Los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al Sol.

$$\frac{r^3}{T^2} = \text{cte.}$$

$$a_c = g_s \;;\; \frac{V^2}{r} = \frac{G\,M_S}{r^2} \;;\; V^2 = \frac{G\,M_S}{r}$$

$$\text{velocidad de traslación} \longrightarrow V = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$$

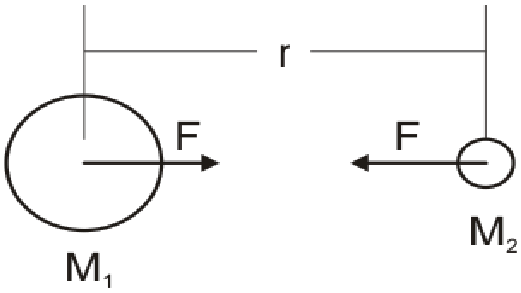
$$\frac{4\cdot\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G\,M_S}{r} \;;\; \frac{r^3}{T^2} = \frac{G\,M_S}{4\cdot\pi^2} = \text{cte.}$$

0102. Teoría de la gravitación universal de Newton.

A partir de las leyes de Kepler, **Newton** dedujo la Ley de la Gravitación Universal, que puede expresarse de la siguiente forma:

$$F = G\frac{m\bullet m'}{r^2} \qquad \vec{F} = -G\frac{m\bullet m'}{r^2}\vec{u}_r$$

"La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional a la masa de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa."

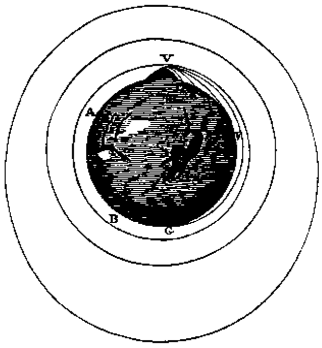


F es la fuerza con que se atraen dos objetos cualquiera, el signo menos indica que la fuerza es de atracción, G es una constante llamada constante de gravitación universal, cuyo valor es: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$, m y m' son las masas de los dos objetos, r es la distancia que separa ambos objetos, y u_r es el vector unitario en la dirección que une ambos objetos.

Newton realizó una gran generalización pues obtuvo una ley aplicable a todos los cuerpos. Pero su camino no fue sencillo, y menos en una época en la que se dudaba que las leyes de la física aplicables en la Tierra fueran aplicables a los cuerpos celestes. En los razonamientos de Newton podemos distinguir cuatro etapas:

1. Mostró la necesidad de que existieran fuerzas basándose en el Principio de Inercia que él mismo había enunciado. Ningún cuerpo puede seguir una trayectoria curva sin que actúe una fuerza sobre él.
2. Demostró que las fuerzas debían ser centrales. Para ello se basó en la segunda ley de Kepler. La constancia en las áreas recorridas por el radio vector en un tiempo determinado indica que el momento angular se conserva, lo cual, a su vez, implica que las fuerzas deben ser centrales.
3. Demostró que las fuerzas debían variar con el inverso del cuadrado de la distancia para que la trayectoria descrita sea una cónica (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Puede comprobarse fácilmente en el caso más sencillo de una trayectoria circular. En este caso la fuerza que hace que la trayectoria sea circular se llama fuerza centrípeta: $F = \frac{m\bullet v^2}{r}$, recordando que la velocidad puede expresarse como $v = \frac{2\bullet\pi\bullet r}{T}$, tenemos $F = \frac{4\bullet\pi^2\bullet m\bullet r}{T^2}$, y utilizando la tercera ley de Kepler (**$T^2=k\cdot r^3$**) se obtiene $F = \frac{4\bullet\pi^2\bullet m}{k\bullet r^2}$ que demuestra que la fuerza debe ser proporcional al inverso del cuadrado de la distancia para obtener una trayectoria circular. La demostración de Newton incluía además las otras cónicas.
4. Por último pensó que las fuerzas debían ser proporcionales a las masas de los cuerpos. Esto fue una gran generalidad pues era aplicable a todos los cuerpos. Con ello se explicaba con una misma ecuación la caída de una manzana y la rotación de la Luna en torno a la Tierra. La analogía entre ambos fenómenos puede verse en el siguiente párrafo del mismo Newton:

" El que los planetas puedan ser retenidos en sus órbitas es algo que podemos comprender fácilmente si consideramos los movimientos de los proyectiles. En efecto, una piedra arrojada, por su propio peso, se ve forzada a abandonar la trayectoria rectilínea... viéndose obligada a describir una línea curva en el aire, y merced a ese camino torcido se ve finalmente llevada al suelo. Y cuando mayor sea la velocidad con que se proyecta, más lejos va antes de caer a tierra. Podemos suponer por tanto que la velocidad se incrementa de tal modo que describa un arco de (muchas) millas antes de llegar a la tierra, hasta que finalmente, excediendo de los límites de la tierra, pasará totalmente sin tocarla.”



0103. Concepto de campo. Campo gravitatorio. Intensidad de campo.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE CAMPO

En los días de Newton la física se interesaba en el movimiento de los objetos que uno puede ver —piedras, proyectiles de artillería, planetas—, y las ecuaciones que él desarrolló reflejaban muy bien este centro de interés. Las leyes de movimiento de Newton son una encarnación matemática de cómo se mueven cuerpos tan tangibles cuando son empujados, atraídos o lanzados al aire. Durante más de un siglo, éste fue un enfoque maravillosamente fructífero. Pero a comienzos del siglo XIX, el científico inglés Michael Faraday inició una trasformación en el pensamiento con el escurridizo pero demostrablemente poderoso concepto de *campo*.

Tome un potente imán de nevera y colóquelo dos centímetros por encima de un clip. Usted sabe lo que sucede. El clip salta y se pega a la superficie del imán. Esta demostración es tan tópica, tan familiar, que es fácil pasar por alto lo extraña que es. Sin tocar el clip, el imán puede hacer que se mueva. ¿Cómo es posible? ¿Cómo puede ejercerse una influencia en ausencia de cualquier contacto con el clip? Estas y muchas consideraciones relacionadas llevaron a Faraday a postular que aunque el imán no toca al clip, produce algo que *sí* lo hace. Ese algo es lo que Faraday llamó un *campo magnético*.

Nosotros no podemos ver los campos producidos por los imanes; no podemos oírlos; ninguno de nuestros sentidos es sensible a ellos. Pero eso simplemente refleja limitaciones fisiológicas. Así como una llama genera calor, también un imán genera un campo magnético. Estando más allá del contorno físico del imán sólido, el campo de un imán es una «niebla» o «esencia» que llena el espacio y da poder al imán.

Los campos magnéticos son sólo un tipo de campo. Las partículas cargadas dan lugar a otro tipo: los campos eléctricos, tales como los responsables de la sacudida que usted recibe a veces cuando agarra el pomo metálico en la puerta de una habitación enmoquetada. De forma inesperada, los experimentos de Faraday mostraron que los campos eléctrico y magnético están íntimamente relacionados: él encontró que un campo eléctrico variable genera un campo magnético, y viceversa. En la segunda mitad del siglo XIX, James Clerk Maxwell dio forma matemática a estas ideas, describiendo los campos eléctrico y magnético en términos de números asignados a cada punto en el espacio; los valores de los números reflejan la capacidad del campo, en esa localización, para ejercer influencia. Lugares en el espacio donde los valores numéricos del campo magnético son altos, por ejemplo en una cavidad de un aparato de imagen por resonancia magnética (MRI), son lugares donde los objetos metálicos sentirían un fuerte tirón o empuje. Lugares en el espacio donde los valores numéricos del campo eléctrico son altos, por ejemplo en el interior de una nube de tormenta, son lugares donde pueden ocurrir potentes descargas eléctricas tales como un relámpago.

Maxwell descubrió ecuaciones, que ahora llevan su nombre, que gobiernan cómo varía la intensidad de los campos eléctrico y magnético de un punto a otro en el espacio y de un instante a otro en el tiempo. Estas mismas ecuaciones gobiernan el mar de campos eléctricos y magnéticos rizados, denominado *ondas electromagnéticas*, dentro del cual estamos todos inmersos. Encienda un teléfono móvil, una radio, o un computador inalámbrico, y las señales recibidas representan una porción minúscula de la maraña de transmisiones electromagnéticas que le atraviesan silenciosamente cada segundo. Y lo más sorprendente de todo: las ecuaciones de Maxwell revelaron que la propia luz visible es una onda electromagnética, una onda que podemos ver porque la evolución ha preparado nuestros ojos para ello.

En la segunda mitad del siglo XX, los físicos unificaron el concepto de campo con su creciente comprensión del micromundo compendiada por la mecánica cuántica. El resultado, la *teoría cuántica de campos* proporciona un marco matemático para nuestras más refinadas teorías de la materia y las fuerzas de la naturaleza. Utilizándola, los físicos han establecido que, además de los campos eléctrico y magnético, existe toda una panoplia de otros campos con nombres tales como *campos nucleares fuerte y débil* y *campos de electrones, quarks* y *neutrinos*. Un campo que hasta la fecha sigue siendo puramente hipotético, el *campo inflatón*, proporciona una base teórica para la cosmología inflacionaria.

Brian Greene. "La realidad oculta"

"Una gravedad tal que cualquier cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia, a través del vacío, sin la mediación de algo más, a través de lo cual pueda conducirse la acción y la fuerza, es para mí un absurdo tan grande que no creo que exista un hombre que con facultad de pensar en materias filosóficas pueda creer en ello. La gravedad debe estar causada por un agente que actúa constantemente según ciertas leyes."

Isaac Newton.

Las fuerzas a distancia plantean dos importantes problemas conceptuales: a) La acción a distancia: ¿Cómo la materia, sin la mediación de algo más que no sea material, puede afectar a otra materia? b) La propagación instantánea: ¿Cómo pueden aparecer fuerzas instantáneas sobre los cuerpos que interaccionan a pesar de que la distancia que los separe sea muy grande?

Para solucionar este problema se utiliza el concepto de campo. En el siglo XIX, Faraday, Thomson y Maxwell entre otros idearon el concepto de campo para la interacción electromagnética y posteriormente se extendió a la interacción gravitatoria.

Supongamos que tenemos una masa m y que colocamos, en diferentes posiciones alrededor de otra masa m'. En cada posición la masa m experimenta una fuerza debida a su interacción gravitatoria con m' y dada por la ecuación:

$$\vec{F} = -G \bullet \frac{m \bullet m'}{r^2}\vec{u}_r$$

Puede decirse que la masa m produce, en el espacio que la rodea, una situación física que llamamos un **campo gravitatorio**, y que se reconoce por la fuerza que m ejerce sobre otra masa colocada en dicha región.

Se define la intensidad del campo gravitatorio g producida por una masa m en un punto P como la fuerza ejercida sobre la unidad de masa colocada en P.

$$\vec{g} = \frac{F}{m'} = -G \bullet \frac{m}{r^2}\vec{u}_r$$

luego el campo gravitatorio tiene sentido opuesto a u_r es decir el campo gravitatorio señala siempre hacia la masa que lo produce.

Las expresiones anteriores descomponen el problema de la interacción entre dos masas m y m' en dos problemas:

a) la expresión $\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r$ establece que la masa m crea alrededor de sí misma un campo g (r).

b) la expresión $F = m' \cdot g$ establece que dicho campo actúa sobre la masa m'.

Si tenemos varias masas, produciendo cada una su propio campo gravitatorio, el campo gravitatorio en un punto se obtiene sumando vectorialmente los campos producidos por cada carga. Esto se llama Principio de Superposición.

El campo gravitatorio se mide en N/kg =m/s^2 que son unidades de aceleración. Lo que hemos llamado hasta ahora aceleración de la gravedad es la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre.

0104. Fuerzas y campos conservativos. Energía potencial.

FUERZAS Y CAMPOS CONSERVATIVOS

Se llama energía mecánica de un sistema físico a la suma de su energía cinética y potencial. Hay ocasiones en las que la energía mecánica de un sistema se conserva:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

Esto ocurre cuando sobre el sistema solamente actúan un tipo especial de fuerzas que se llaman fuerzas conservativas.

Principio de conservación de la energía mecánica. "Si sobre un sistema físico tan sólo realizan trabajo las fuerzas conservativas, la energía mecánica del sistema permanece constante."

Se llama fuerza conservativa a aquella que es capaz de restituir íntegramente el trabajo que se realiza para vencerla. Las fuerzas conservativas realizan un trabajo negativo durante parte del trayecto, cuando usamos otra fuerza para vencerlas, y un trabajo positivo cuando se deja libre al cuerpo, que vuelve a su posición original. Como los dos trabajos son iguales, si analizamos el trayecto en su conjunto, resulta nulo el trabajo que realiza una fuerza conservativa.

"Una fuerza conservativa no realiza trabajo cuando el cuerpo sobre el que actúa describe una trayectoria cerrada, volviendo a su posición inicial."

Una consecuencia de ello es que: "El trabajo que realiza una fuerza conservativa cuando el cuerpo sobre el que actúa se desplaza entre dos posiciones, es independiente de la trayectoria."

Solamente en este caso puede definirse una energía potencial. Se define de tal forma que el trabajo realizado por la fuerza conservativa es igual a la disminución de la energía potencial.

$$W = -\Delta E_p$$

$$W = -(E_{p,2} - E_{p,1}) = E_{p,1} - E_{p,2}$$

Esta expresión permite calcular diferencias de energía potencial pero no valores absolutos. Para resolver este problema se asigna arbitrariamente un valor nulo de energía potencial a un punto cualquiera.

Son fuerzas conservativas:

- La fuerza gravitatoria (ley de Newton)
- La fuerza elástica (ley de Hooke)
- La fuerza electrostática (ley de Coulomb)

Hay fuerzas que no son conservativas; se les llama fuerzas disipativas y son, principalmente, el rozamiento y la fricción. En tal caso la energía mecánica no se conserva, sino que una parte se gasta en realizar un trabajo de rozamiento. Tampoco son conservativas las fuerzas externas que actúan sobre los objetos.

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2} + W_{roz}.$$

ENERGÍA POTENCIAL

Se define la función energía potencial de tal modo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa al desplazar una partícula entre dos puntos es igual a la disminución de la energía potencial entre esos dos puntos:

$$\mathbf{W = -\Delta E_p.}$$

Puede demostrarse que cualquier fuerza central (que dependa sólo de la coordenada radial r) es conservativa. Por tanto la fuerza gravitatoria es conservativa y puede asociarse con ella una energía potencial gravitatoria.

Para ello, consideremos un cuerpo de masa m situado en las inmediaciones de otro cuerpo de masa M. Sobre el cuerpo de masa m actúa una fuerza que viene dada por la ley de Newton de la gravitación:

$$\vec{F} = -G\frac{m \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r$$

Calculemos el trabajo que realiza la fuerza F cuando un cuerpo se desplaza desde el infinito hasta un punto P:

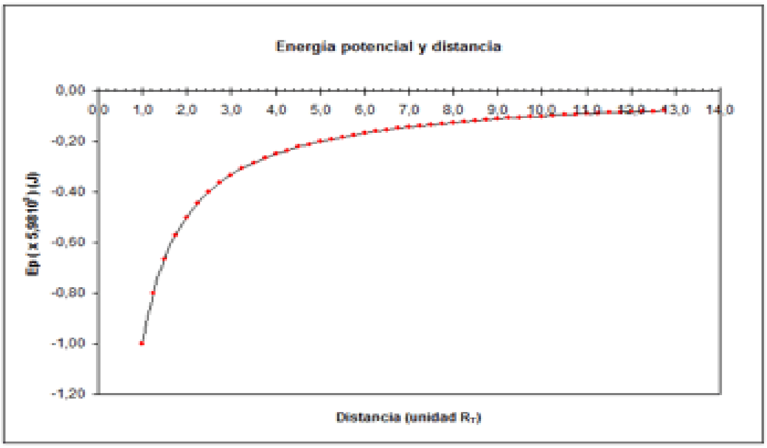
$$W_{\infty,r}=\int_{\infty}^{r}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\infty}^{r}F\cdot dr\cdot\cos\alpha=-\int_{\infty}^{r}F\cdot dr=-G\cdot M\cdot m\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2}=$$
$$=-G\cdot M\cdot m\left[-\frac{1}{r}\right]=G\frac{M\cdot m}{r}$$

El trabajo realizado no depende de la trayectoria luego la fuerza gravitatoria es conservativa. Como

$W=-\Delta E_p$

$$W=G\frac{M\cdot m}{r}=-\Delta E_p=-\left[E_{p_r}-E_{p_\infty}\right]=-E_{p_r}$$

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$



Gráfica Ep-distancia (medida en radios terrestres)

La variación de la energía potencial entre dos puntos viene dada por:

$$\Delta E_p=E_{p,2}-E_{p,1}=-G\frac{M\cdot m}{r_2}+G\frac{M\cdot m}{r_1}$$

La relación entre la energía potencial y la fuerza es:

$$\vec{F}=-\frac{dE_p}{d\vec{r}}$$

COMENTARIOS

* De acuerdo con la expresión anterior la energía potencial sólo puede ser nula en puntos infinitamente alejados (r = ∞). Esto equivale a afirmar que cuerpos infinitamente alejados no interaccionan. Sin embargo, el origen para la energía potencial podría ser elegido arbitrariamente. Ello sólo supone introducir una constante en la definición de la energía potencial. Esto no influye en los cálculos, porque lo que nos interesa son diferencias de energía potencial.

* La expresión utilizada en el caso de puntos próximos a la superficie terrestre $E_P = m\cdot g\cdot h$ sitúa el origen de energía potencial en la superficie de la Tierra (h = 0 ; E_P = 0) y considera constante el peso de los cuerpos. Lo realmente importante es que ambas expresiones llevan a idénticos resultados para puntos cercanos a la superficie de la Tierra. En ambos casos la energía potencial aumenta cuando un cuerpo se aleja de la Tierra.

* La energía potencial no es una característica de los cuerpos, sino que se debe a la interacción que tiene lugar entre los cuerpos. La energía potencial no pertenece a ninguno de los cuerpos, es una propiedad del sistema formado por ellos. No tiene sentido hablar de la energía potencial de un cuerpo aislado.

La energía total de un sistema de dos partículas sometidas a su interacción gravitatoria es:

$$\mathbf{E=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot v_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot v_2^2-G\frac{m_1\cdot m_2}{r}}$$

0105. Potencial gravitatorio. Representación de campos.

POTENCIAL GRAVITATORIO

Otro concepto importante es el de potencial gravitatorio. Si tenemos una masa M, situada en cierta región del espacio, crea a su alrededor un campo de forma que una masa m que se sitúe en cualquier punto del campo adquiere una energía potencial cuyo valor es:

$$E_P = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

Puede considerarse que M crea en cada punto del espacio a su alrededor cierta propiedad, a la que se llama potencial gravitatorio V. Su valor en cada punto se define como la energía potencial por unidad de masa colocada en dicho punto.

$$V = \frac{E_P}{m} \Rightarrow \qquad V = -G\frac{M}{r}$$

Puede definirse el potencial gravitatorio en un punto del espacio como el trabajo que realiza el campo gravitatorio para trasladar la unidad de masa desde ese punto hasta el infinito.

Más importante es la diferencia de potencial entre dos puntos definida como el trabajo realizado por el campo gravitatorio para trasladar la unidad de masa desde el primer punto hasta el segundo:

$$\Delta V = V_A - V_B = E_{p,A}/m - E_{p,B}/m = \Delta E_p/m = W_{A\to B}/m$$

La unidad del SI de potencial y diferencia de potencial gravitatorios es el J/kg. El potencial gravitatorio es un escalar, no tiene dirección ni sentido, su valor es siempre negativo y sólo vale cero cuando las masas están infinitamente separadas.

Al situar una masa m en el campo adquiere una energía potencial $E_p = m \cdot V$.

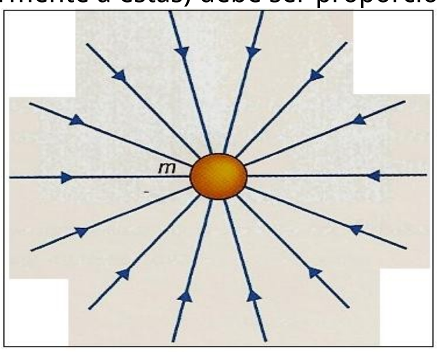
La relación que liga al campo gravitatorio con el potencial es análoga a la que liga la fuerza con la energía potencial:

$$\vec{g} = -\frac{dV}{d\vec{r}} \qquad \vec{F} = -\frac{dE_P}{d\vec{r}}$$

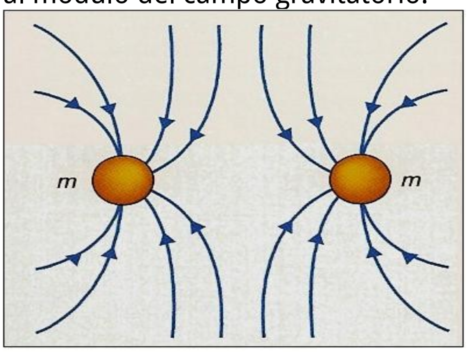
REPRESENTACIÓN DE CAMPOS GRAVITATORIOS

Un campo puede representarse figurativamente por líneas de campo o líneas de fuerza y por sus superficies equipotenciales. Se trazan de forma que en cada punto sean tangentes a la dirección del campo y que su densidad sea proporcional a la intensidad del campo.

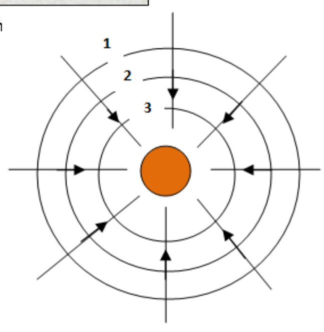
LÍNEAS DE CAMPO: se trazan de modo que en cada punto, el vector intensidad del campo gravitatorio es tangente a las líneas de campo y tiene el mismo sentido que éstas. Por otra parte, la densidad de las líneas de campo (número de líneas que atraviesan la unidad de superficie colocada perpendicularmente a éstas) debe ser proporcional al módulo del campo gravitatorio.



Líneas de campo creado por una masa puntual



Líneas de campo creada por dos n



SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES: se obtienen uniendo los puntos que tienen el mismo valor del potencial. Siempre son perpendiculares a las líneas de campo en cualquier punto. (Para demostrarlo consideremos dos puntos muy cercanos en una misma superficie equipotencial. Cuando una partícula se desplaza entre ambos puntos, el trabajo realizado es cero pues la energía potencial no cambia. Ello implica que la fuerza debe ser perpendicular al desplazamiento.) Para una masa puntual son esferas concéntricas.

0106. Teorema de Gauss. Campo gravitatorio terrestre.

FLUJO DEL CAMPO GRAVITATORIO

Se define el flujo de cualquier vector como el producto escalar del vector superficie por el vector que estemos considerando. Su significado físico es el número de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie.

Aunque la superficie es una magnitud escalar (no tiene dirección ni sentido), a veces, es útil asignarle un carácter vectorial. Para ello se define el vector superficie como un vector cuyo módulo coincide con el valor de la superficie que estemos considerando, su dirección sea perpendicular a la superficie y su sentido sea hacia afuera de la superficie.

El **flujo del campo gravitatorio** o **flujo gravitatorio** es una magnitud que está relacionada con el número de líneas de fuerza que atraviesan determinada superficie. Para campos uniformes y superficies planas se define como:

$$\Phi=\vec{g}\cdot\vec{S}=g\cdot S\cdot\cos\alpha$$
$$\Phi=g_x\cdot S_x+g_y\cdot S_y+g_z\cdot S_z$$

Si el campo no es uniforme y/o la superficie no es plana deben utilizarse integrales para su cálculo.

TEOREMA DE GAUSS

Calculando el flujo que atraviesa una superficie esférica que rodea a una masa se llega a un resultado mucho más general conocido como **Teorema de Gauss.** Si tenemos una superficie esférica que encierra una carga, el flujo a través de ella será:

$$g=G\frac{M}{r^2} \qquad \Phi=G\frac{M}{r^2}\cdot 4\pi r^2\Rightarrow \qquad \Phi=-4\pi GM$$

El resultado obtenido es general para cualquier superficie cerrada y para cualquier número o distribución de masas que se encuentre en su interior. Por tanto podemos enunciar el **Teorema de Gauss**: *"El flujo del campo gravitatorio a través de una superficie cerrada es proporcional a la masa neta que existe en el interior de la superficie."*

El Teorema de Gauss se emplea para calcular el campo gravitatorio creado por cuerpos con cierta simetría. A partir de ello se deduce que el campo creado por una esfera con la masa distribuida uniformemente es el mismo que el de una masas puntual del mismo valor colocada en el centro de la esfera.

CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

La Tierra es prácticamente esférica debido a la fuerza gravitatoria. Respecto a la gravitación se comporta como si toda su masa estuviera concentrada en su centro. Por ello puede calcularse fácilmente el campo gravitatorio en la superficie:

$$g=\frac{G\cdot M}{R^2}=\frac{6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 5,98\cdot 10^{24}kg}{\left(6,37\cdot 10^6 m\right)^2}=9,83\,N/kg$$

El campo gravitatorio varía con diversos factores:

- **La densidad.** La densidad media de la Tierra se estima en 5,52 g/cm^3. La presencia de grandes masas de alguna sustancia hace variar localmente el valor de g. Estas variaciones son muy pequeñas, pero útiles como método de prospección y de investigación del interior de la Tierra.
- **La latitud.** El campo gravitatorio disminuye de los polos al ecuador por dos razones:
  - Aumenta el radio. La Tierra es un elipsoide.
  - El giro de la Tierra sobre sí misma. La fuerza centrípeta necesaria es menor cuanto mayor es la distancia al eje.

  La fórmula aceptada internacionalmente para calcular la gravedad es:

  $$g=9,78039\left(1+0,00529\,\mathrm{sen}^2\lambda\right)N/kg$$
- **La altura.** La gravedad disminuye con la altura al aumentar la distancia al centro de la Tierra.

$$\frac{g_h}{g_0}=\frac{G\cdot M/(R+h)^2}{G\cdot M/R^2}=\frac{R^2}{(R+h)^2} \qquad g_h=g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

De forma aproximada: ůg = g_h - g_0 = -3·10^{-6}h, siendo h la altura en metros.

- **La profundidad.** En el interior de la Tierra la gravedad también disminuye siguiendo la ecuación: $g=g_0\frac{R-y}{R}$ siendo y la profundidad.

MASA Y PESO

Hay que diferenciar claramente entre masa y peso.

La masa es una magnitud escalar que indica la resistencia que ofrece un cuerpo a ser acelerado, así como la intensidad con que participa en las interacciones gravitatorias. Es invariable, a no ser que se arranque o se añada algo de materia al cuerpo. En el SI se mide con balanzas y se expresa en kg.

El peso es la fuerza con la que la Tierra (u otro cuerpo de gran masa) atrae a un objeto. Por tanto es una magnitud vectorial relacionada con la masa y con la intensidad del campo gravitatorio en un punto (Peso = m·g). Se mide con dinamómetros y se expresa en N en el SI y depende del lugar donde se encuentre el cuerpo.

0107. Movimiento de planetas y satélites.

Debido a la conservación del momento angular las trayectorias de los cuerpos en los campos de fuerzas centrales, como el gravitatorio, son curvas planas. Puede demostrarse que estas curvas planas son las cónicas: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

En general, los planetas y satélites describen órbitas elípticas de mayor o menor excentricidad. En muchos casos las órbitas pueden considerarse circulares, lo que facilita el estudio.

Velocidad orbital en una órbita circular: igualando la fuerza centrípeta a la fuerza gravitatoria se obtiene:

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow \qquad v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Periodo de revolución: se obtiene a partir de la velocidad orbital

$$v=\frac{2\pi r}{T}\Rightarrow T=2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}\Rightarrow \qquad T^2=\frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot M}$$

Esta ecuación también puede emplearse para calcular la masa de un planeta a partir de datos de los satélites y constituye la demostración de la tercera ley de Kepler.

Se llaman **satélites geoestacionarios** o geosíncronos aquellos que orbitan en torno a la Tierra manteniéndose siempre encima de un mismo punto. Para ello es necesario que su periodo coincida con el de la Tierra y que orbiten en el plano del ecuador terrestre. Es fácil calcular que un satélite geoestacionario tiene que situarse a una altura aproximada de 35800 km sobre la superficie terrestre.

Energía de los satélites: La energía total del sistema formado por el planeta y el satélite vendrá dada por:

$$E=\frac{1}{2}M\cdot v_1^2+\frac{1}{2}m\cdot v_2^2-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Si uno de los cuerpos es mucho mayor que el otro y puede considerarse en reposo:

$$E=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r};\frac{m\cdot v^2}{r}=G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=G\cdot\frac{M\cdot m}{2\cdot r}$$

$$E=-G\cdot\frac{M\cdot m}{2\cdot r}$$

La energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular es la mitad de su energía potencial y su energía cinética es la mitad de su energía potencial cambiada de signo.

Para poner en órbita un satélite artificial son necesarias dos etapas:

1) elevarlo a una cierta altura sobre la superficie de la Tierra,
2) darlo un impulso tangencial.

Dependiendo de la velocidad que adquiera en esta segunda fase su órbita será cerrada o abierta.

La energía necesaria puede calcularse por el principio de conservación de la energía. Para una órbita circular:

$$E_{c,0}-G\frac{Mm}{R_T}=-G\frac{Mm}{2\mathrm{R}}\Rightarrow E_{c,0}=GMm\left[\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2\mathrm{R}}\right]$$

De la misma forma puede calcularse la energía que debe comunicarse a un satélite para pasar de una órbita a otra:

$$\Delta E=GMm\left[\frac{1}{2\mathrm{R}_1}-\frac{1}{2\mathrm{R}_2}\right]$$

0108. Velocidad de escape. Tipos de trayectorias según la energía.

VELOCIDAD DE ESCAPE

Si la velocidad que se comunica a un satélite, en el momento de su lanzamiento es suficientemente grande, puede llegar a salir del campo gravitatorio terrestre y, por tanto, llegar hasta el infinito. El valor mínimo de esa velocidad se llama velocidad de escape. La velocidad de escape de un cuerpo puede calcularse fácilmente a partir del principio de conservación de la energía, obteniéndose la fórmula:

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}}$$

En ella se observa que la velocidad de escape no depende de la masa del objeto que se lanza, sino de la masa del cuerpo que crea el campo gravitatorio. La velocidad de escape para un objeto que se lance desde la superficie terrestre es de unos 40300 km/h.

TIPOS DE TRAYECTORIAS SEGÚN LA ENERGÍA

La forma de la trayectoria que describe un objeto sometido a la acción de un campo gravitatorio depende de la energía total del objeto en movimiento.

•**Órbita circular**. La energía total debe ser negativa y de valor absoluto igual a la mitad del valor de la energía potencial.

$$E=-G\cdot\frac{M\cdot m}{2\cdot r}$$

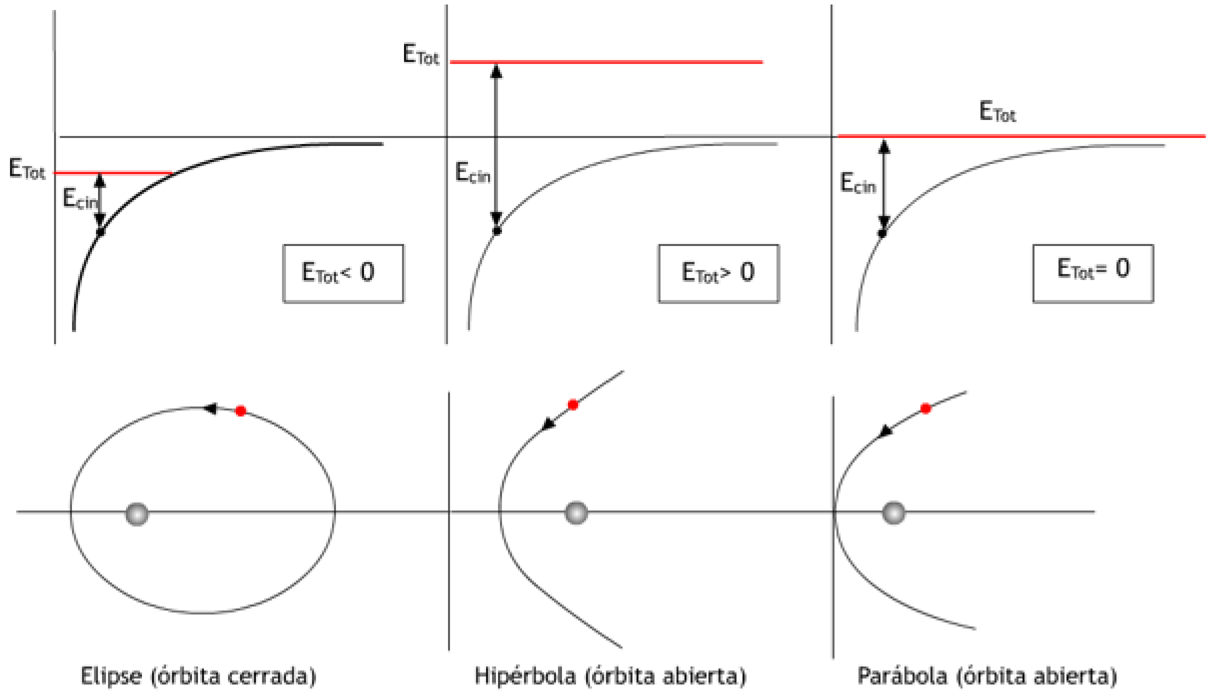
Para valores de la energía mecánica menores que éste, el objeto no entra en órbita y describe una trayectoria parabólica, volviendo a caer a la superficie del cuerpo desde el que fue lanzado.

•**Órbita elíptica**. La energía total es mayor que la necesaria para una órbita circular pero menor que cero.

•**Trayectoria parabólica**. La energía total es cero. Llegaría al infinito con velocidad cero.

•**Trayectoria hiperbólica**. La energía total es positiva.

Se puede pasar de un tipo de trayectoria a otra comunicando al objeto una velocidad adicional.



Por tanto:

- Si $\boldsymbol{v = v_0}$ el cuerpo orbita siguiendo una ***órbita circular*** con la Tierra en cu centro.
- Si v es mayor que v_0 y menor que v_e ($\boldsymbol{v_0 < v < v_e}$) el cuerpo orbitará siguiendo ***órbitas elípticas*** con excentricidad creciente estando la Tierra en uno de los focos.
- Si $v = v_e = \sqrt{2}\, v_0$ el cuerpo ***escapará de la atracción gravitatoria*** de la masa central siguiendo una ***trayectoria parabólica***. ***Velocidad nula en el infinito.***
- Si $v > \sqrt{2}\, v_0$ el cuerpo también ***escapa de la atracción gravitatoria*** de la masa central, pero siguiendo ahora unta ***trayectoria hiperbólica***. ***Su velocidad en el infinito no sería nula.***