Tema 6: Movimiento Armónico Simple.

6.1. Introducción. Cinemática de MAS.

Movimientos periódicos.

Un cuerpo describe un **movimiento periódico** cuando su posición, velocidad y aceleración se repiten al cabo de un intervalo de tiempo constante llamado **periodo**. Un ejemplo de movimiento periódico es el movimiento circular uniforme (MCU). No todos los movimientos periódicos son circulares.

Una partícula describe un **movimiento oscilatorio o vibratorio** cuando se desplaza sucesivamente a un lado y a otro de su posición de equilibrio. Cada vez que el cuerpo vuelve a la posición de partida moviéndose en el mismo sentido decimos que ha efectuado una **oscilación** y en ello ha invertido un tiempo constante, el periodo. En general podemos decir que una oscilación es una variación periódica de cualquier magnitud física y no sólo de la posición de las partículas materiales. Podemos hablar de oscilaciones de presión de temperatura, electromagnéticas, ...

Un movimiento vibratorio en el que posición, velocidad y aceleración pueden describirse por medio de funciones senoidales se llama movimiento vibratorio armónico. Un movimiento vibratorio armónico que se describe mediante una única función seno o coseno se llama movimiento vibratorio armónico simple (MAS).

Magnitudes del movimiento armónico simple.

- **ELONGACIÓN (x):** posición que ocupa el móvil respecto a la posición de equilibrio, que se toma como origen. Puede ser positiva y negativa. Se mide en unidades de longitud.
- **AMPLITUD (A):** valor máximo de la elongación. Se mide en unidades de longitud.
- **PERIODO (T):** tiempo empleado en realizar una oscilación. Se mide en unidades de tiempo.
- **FRECUENCIA (f):** número de oscilaciones efectuadas en la unidad de tiempo: $f=\frac{1}{T}$

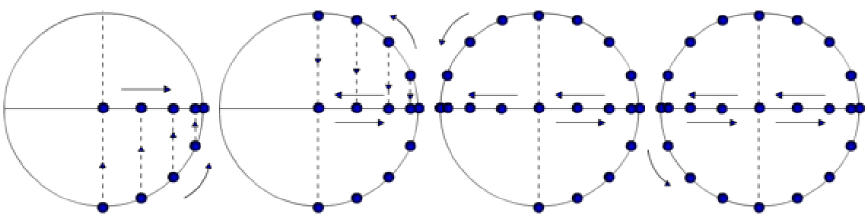
  Se mide en hercios (Hz). 1 Hz = 1 s^{-1}.
- **PULSACIÓN o FRECUENCIA ANGULAR (ω):** números de periodos comprendidos en 2π unidades de tiempo. Se mide en unidades de velocidad angular (rad/s).

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

- **ÁNGULO DE FASE o FASE (Ψ = ωt + δ):** ángulo que describe el estado de movimiento de la partícula. Se mide en radianes.
- **FASE INICIAL o CONSTANTE DE FASE (δ):** fase para t = 0. Se mide en radianes.

Ecuación del MAS.

Un ejemplo de MAS es el de la proyección sobre el diámetro de la circunferencia de la posición de un punto que gira con velocidad angular constante:



La posición del punto sobre el diámetro queda determinada por la ecuación:

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \delta).$$

Un movimiento vibratorio armónico simple es un movimiento rectilíneo cuya ecuación es de la forma indicada.

Consideraciones en torno a la ecuación del MAS

- La elongación en el instante inicial viene determinada por A y δ.

  Para t = 0 $\quad x = A \text{ sen } \delta$

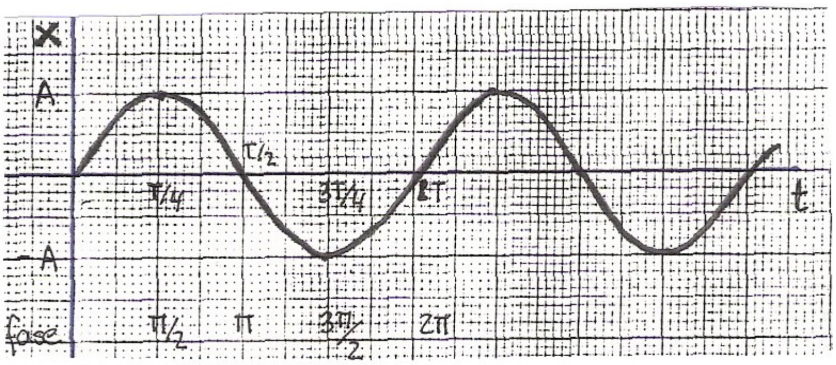
  Si δ = 0, x = 0. La partícula comienza su movimiento en la posición de equilibrio.

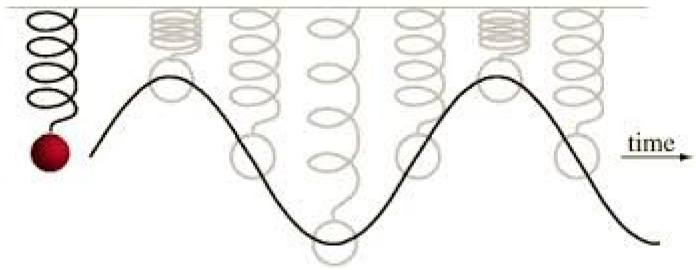
Si δ = π/2, x = A. La partícula comienza su movimiento en el punto más alejado de la posición de equilibrio.

- ❖ Los valores de x se repiten cada vez que la fase aumenta en 2π radianes.
- ❖ También puede utilizarse la función coseno para describir un MAS, entre ellas sólo hay una diferencia de fase de π/2.
- ❖ Representación gráfica (para δ = 0)

$$\text{sen } \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

t(s)	ωt(rad)	sen ωt	x(m)
0	0	0	0
T/4	π/2	1	A
T/2	π	0	0
3T/4	3π/2	-1	-A
T	2π	0	0





Velocidad en el MAS.

La ecuación de la velocidad en el M.A.S. se obtiene derivando la ecuación de la posición respecto al tiempo:

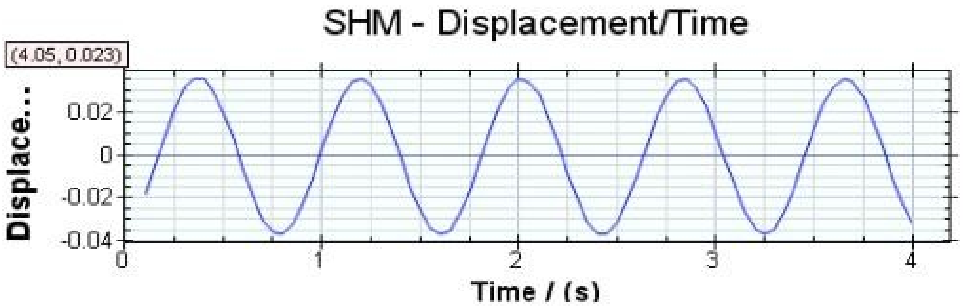
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A sen(\omega t + \delta)]}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

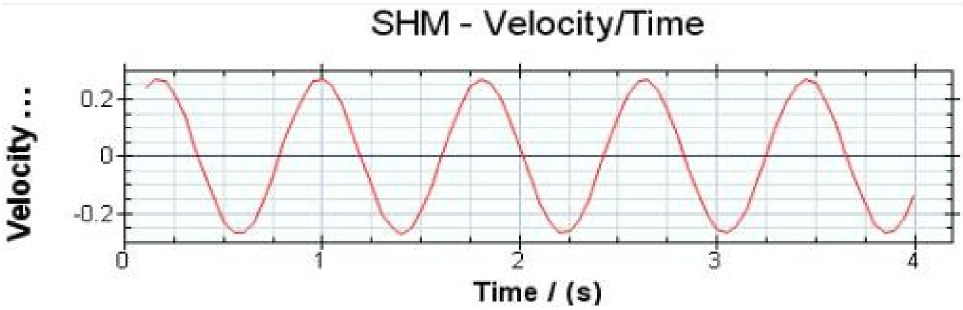
$$v = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

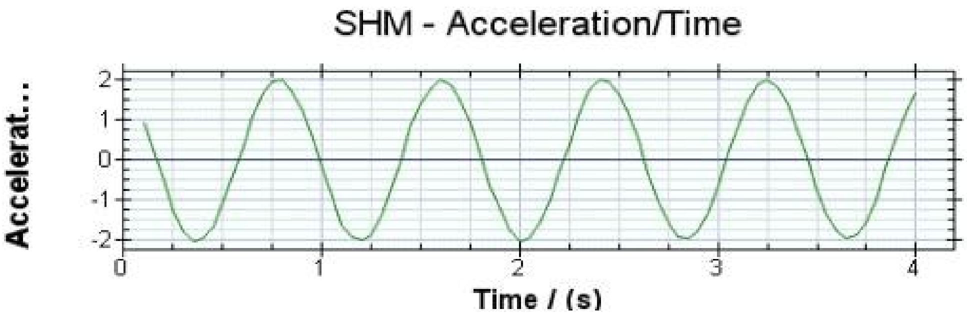
Consideraciones:

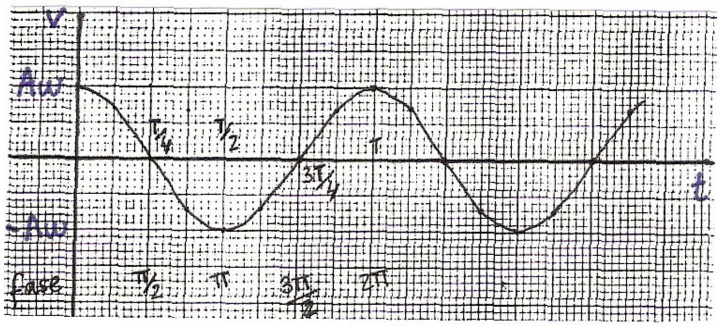
- La velocidad está desfasada 〈/2 radianes respecto a la posición.
- La velocidad es nula cuando x = ±A, lo que ocurre para ωt = π/2, 3π/2, 5π/2, ... si δ = 0.
- La velocidad es máxima en valor absoluto cuando x = 0, lo que ocurre para ωt = 0, π, 2π,... si δ= 0. ($v_{máx}$ = Aω)
- Representación gráfica (para δ = 0):

t(s)	ωt(rad)	cos ωt	v(m/s)
0	0	1	Aω
T/4	π/2	0	0
T/2	π	-1	-Aω
3T/4	3π/2	0	0
T	2π	1	Aω









- La velocidad puede expresarse en función de la posición:

$$v = A\omega\cos(\omega t+\delta) = A\omega\sqrt{1-sen^2(\omega t+\delta)} = \omega\sqrt{A^2 - A^2\,sen^2(\omega t+\delta)} =$$
$$\omega\sqrt{A^2-[Asen(\omega t+\delta)]^2} = \omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$v=\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

Aceleración en el MAS.

La aceleración se obtiene derivando la velocidad respecto al tiempo:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d[A\omega\cos(\omega t+\delta)]}{dt}=-A\omega^2\,sen(\omega t+\delta)$$

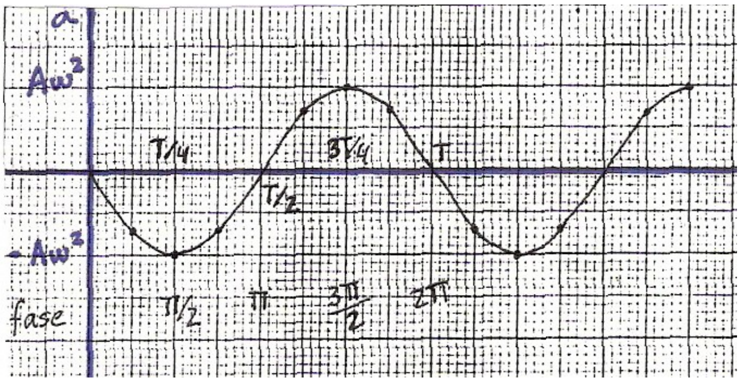
$$a=-A\omega^2\,sen(\omega t+\delta)$$

Consideraciones:

- La aceleración está desfasada π radianes respecto a la elongación.
- La aceleración es máxima cuando $x = \pm A$, lo que ocurre para $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, \ldots$ si $\delta = 0$. ($a_{máx} = A\omega\omega^2$)
- La aceleración es nula si $x = 0$, lo que ocurre para $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ si $\delta = 0$.

- Representación gráfica (para δ = 0):

t(s)	ωt(rad)	sen ωt	a
0	0	0	0
T/4	π/2	1	$-A\omega^2$
T/2	π	0	0
3T/4	3π/2	-1	$A\omega^2$
T	2π	0	0



- La aceleración se expresa en función de la elongación:

$$a = -\omega^2 x$$

La aceleración es proporcional a la elongación y de sentido contrario.

6.2. Dinámica de MAS. El péndulo simple.

Fuerzas elásticas. Ley de Hooke.

A partir de la ecuación de la aceleración podemos calcular la fuerza que actúa sobre un cuerpo o partícula que realiza un MAS.

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow a = -\omega^2 x \Rightarrow F = -m\omega^2 x$$

El conjunto mωω² es constante y recibe el nombre de constante elástica o recuperadora (k):

$$k = m \cdot \omega^2$$
$$F = -k \cdot x$$

Esta última expresión se conoce como ley de Hooke y se ha estudiado en relación con los muelles.

La constante elástica es siempre positiva y cuanto mayor sea mayor es la fuerza que atrae al objeto a la posición de equilibrio; en el S. I. se mide en N/m.

La fuerza que produce un MAS. es una fuerza central, dirigida hacia el punto de equilibrio y proporcional a la distancia a éste. Las fuerzas con estas características se llaman fuerzas elásticas o recuperadoras.

A partir de la definición de constante elástica podemos hallar la relación entre el periodo y la masa del cuerpo:

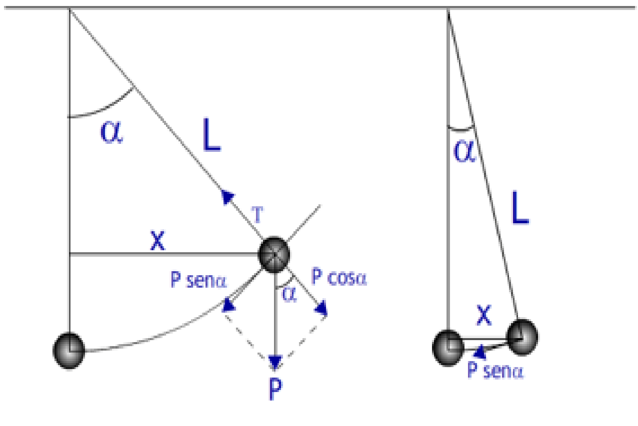
$$k = m \cdot \omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Este resultado demuestra que en el M.A.S. el periodo del movimiento no depende de la amplitud.

El péndulo simple.

Cuando un péndulo oscila la fuerza que lo impulsa es la componente del peso según la tangente (ver fig).
Si las oscilaciones tienen mucha amplitud el péndulo describe un arco. La trayectoria está bastante alejada de la propia de un MAS (sobr la recta x). El movimiento, aunque es oscilato no puede considerarse armónico simple.
Si las oscilaciones tienen poca amplitud (ver f



de la derecha) la trayectoria seguida por el péndulo se aproxima bastante a la propia de una MAS, ya que entonces arco y cuerda se confunden. Además, la fuerza puede considerarse que apunta, con poco error, en la dirección de la recta x. Podremos poner, por tanto:

$$F_x = P \text{ sen } \alpha = -\, mg \frac{x}{L}$$

$$F_x = -\, mg \frac{x}{L}$$ (el signo menos indica que la fuerza se opone al desplazamiento, x)

Comparando con:

$$F = -\, k\, x$$

Concluimos:

$$k \cancel{x} = mg \frac{\cancel{x}}{L}\ ; \quad \boxed{k = \frac{mg}{L}}$$

Para pequeñas oscilaciones (ángulo inferior a 20^{0}) un péndulo simple se comporta como un oscilador armónico de constante k = mg/L.

Operando podemos obtener el periodo de oscilación:

$$k = \frac{mg}{L}\ ; \quad \cancel{m}\,\omega^2 = \frac{\cancel{m}g}{L}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{L}\ ; \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

El periodo de un péndulo simple sólo depende de la longitud del péndulo. Péndulos de longitudes grandes oscilaran lentamente (periodo elevado), mientras que péndulos cortos oscilarán rápidamente (periodos cortos)

6.3. Energía en el MAS.

Energía potencial elástica

La energía mecánica que posee un oscilador armónico es energía cinética y energía potencial elástica.

Energía potencial. La fuerza elástica es conservativa por ser central y por tanto se puede definir una energía potencial elástica. El valor de la energía potencial elástica se obtiene por integración a partir de la definición de energía potencial: $W_{cons} = -\,\Delta E_p$.

$$\Delta Ep = E_p - E_{p,0} = E_p = -W_{cons} = -\int F \cdot dx = -\int -k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

También puede expresarse en función del tiempo:

$$E_p = \frac{1}{2} kA^2 sen^2(\omega t + \delta)$$

Energía cinética y energía mecánica

La energía cinética puede calcularse:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m[A\omega \cos(\omega t + \delta)]^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$E_c = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

También puede expresarse en función de la posición: ($\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$)

$$E_c = \frac{1}{2} k\left(A^2 - x^2\right)$$

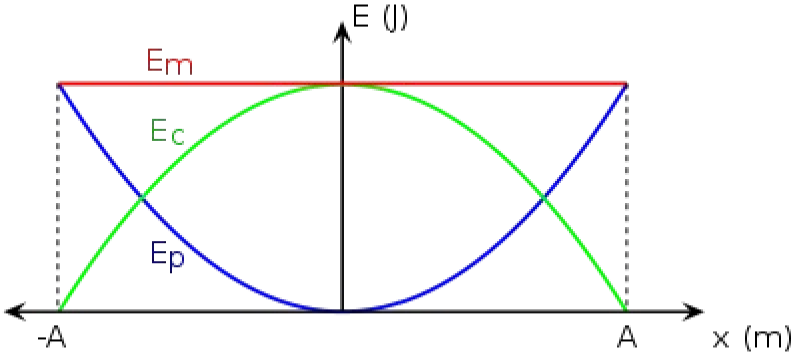
Energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

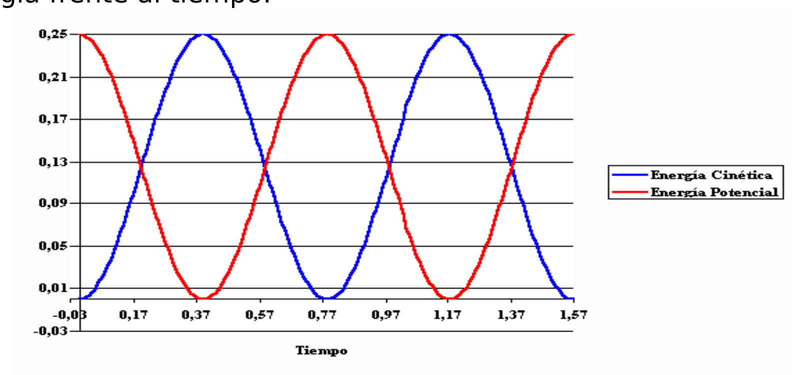
$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

La energía mecánica de un oscilador armónico es una constante característica de éste y proporcional al cuadrado de la amplitud y a la constante elástica.

Gráficas de la energía en el MAS
Gráfica de la energía frente a la posición:



Gráfica de la energía frente al tiempo:



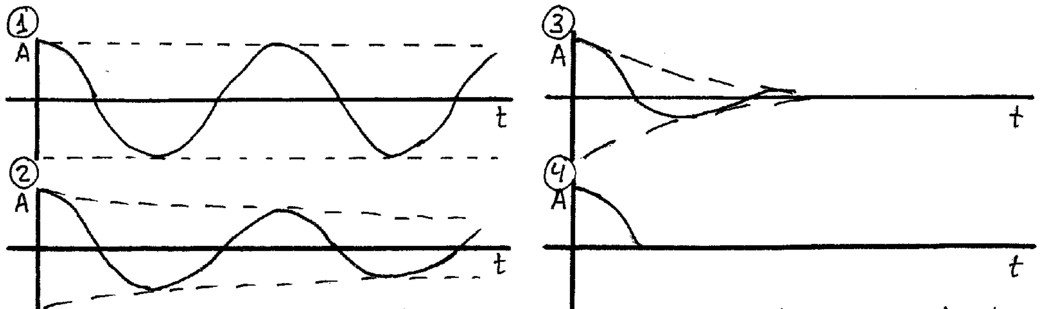
6.4. Oscilaciones forzadas. Resonancia.

En el MAS, las oscilaciones se repiten indefinidamente con la misma amplitud. En los sistemas reales, la amplitud de las oscilaciones decrece debido a una pérdida de energía mecánica producida por el rozamiento. En este caso se dice que el movimiento está amortiguado y que el cuerpo efectúa oscilaciones amortiguadas.

La ecuación de este movimiento es del tipo: $x = A_0 e^{-\gamma t} sen(\omega t + \delta)$

Donde γ es un coeficiente de amortiguamiento.
La fuerza de amortiguamiento puede considerarse proporcional a la velocidad:

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$



(1) Si b=0 la amplitud de las oscilaciones se mantiene constante, es un M.A.S.
(2) b pequeña, la amplitud disminuye lentamente con el tiempo.
(3) b grande, la amplitud disminuye rápidamente.
(4) Si B es muy grande, no hay oscilaciones; al separar el cuerpo de su posición de equilibrio, vuelve a ella lentamente y ya no oscila. Se dice que el sistema está SOBREAMORTIGUADO.

En un sistema real es posible mantener un MAS si le suministramos la energía que pierde por rozamiento. En este caso se dice que el sistema realiza oscilaciones forzadas.

Para mantener o amplificar las oscilaciones de un sistema la energía (normalmente aplicada mediante una fuerza exterior) debe suministrarse con la misma frecuencia que tiene el oscilador, que se llama frecuencia natural de vibración.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si la frecuencia es distinta la absorción de energía es poco eficaz y puede ser prácticamente nula. Si la frecuencia es parecida a la frecuencia natural el sistema absorbe parte de la energía.

Cuando la frecuencia de la fuerza exterior coincide con la frecuencia natural de vibración del oscilador, la energía absorbida es máxima. Se dice que ésta es una frecuencia resonante y que el oscilador entra en resonancia.

Si la energía externa llega al oscilador con más rapidez de lo que tarda en disiparse, aumenta la amplitud de las oscilaciones y puede llegar a producirse la rotura del oscilador o perjudicar seriamente su estructura interna.