Derivadas y aplicaciones

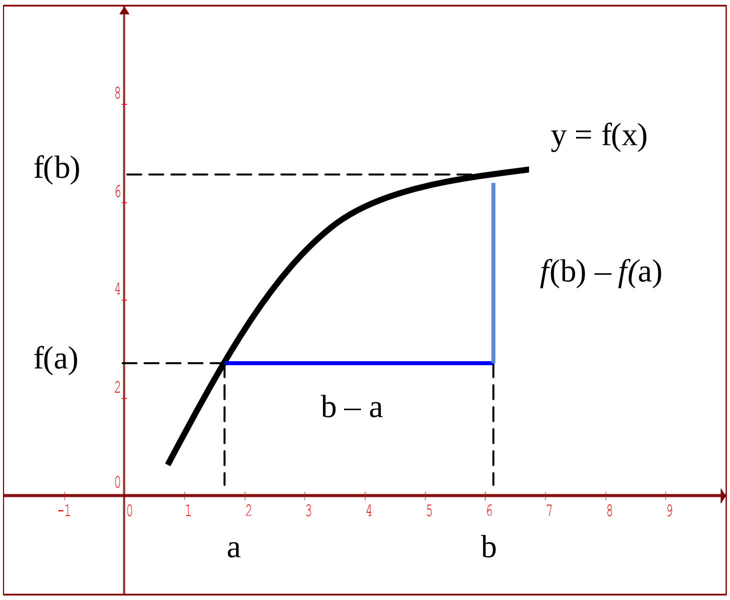
1.- La derivada

La tasa de variación media de la función y = f(*x*) en el intervalo [a, b] es el cociente entre la variación de la función f(*x*) y la variación de la variable *x* en el intervalo. La representamos por **TVM[a, b]** y viene dada por:

$$\boldsymbol{TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Ej. Halla la TVM de la función $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x - 2)$ en el intervalo [2, 5].

$$TVM[2,5] = \frac{f(5) - f(2)}{5-2} =$$
$$= \frac{7-1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$



Derivada de una función en un punto

La **derivada** de la función y = f(*x*) en el punto *x* = a es el límite, si existe y es finito, de la tasa de variación media, TMV[a, a+h] cuando $h \to 0$. Se representa por f´(a).

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La derivada también recibe el nombre de **tasa de variación instantánea** y nos da la medida del crecimiento instantáneo de una función en un punto.

Ej. Aplicando la definición, halla la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en *x* = 3.

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) + 1 - (3^2 - 2\cdot 3 + 1)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 6 - 2h + 1 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

Función derivada

La **función derivada** de una función y = f(*x*), que sea derivable en su dominio, es una función que asocia a cada valor de la variable *x* el valor de la derivada en ese punto. Se representa por **y´** o por **f´(*x*)** y su expresión es:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Ej. Aplicando la definición, calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - (x^2 - 2\cdot x + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + h^2 + 2xh - 2x - 2h + 1 - x^2 + 2x - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 + 2xh - 2h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(h + 2x - 2) \Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = 2x - 2}$$

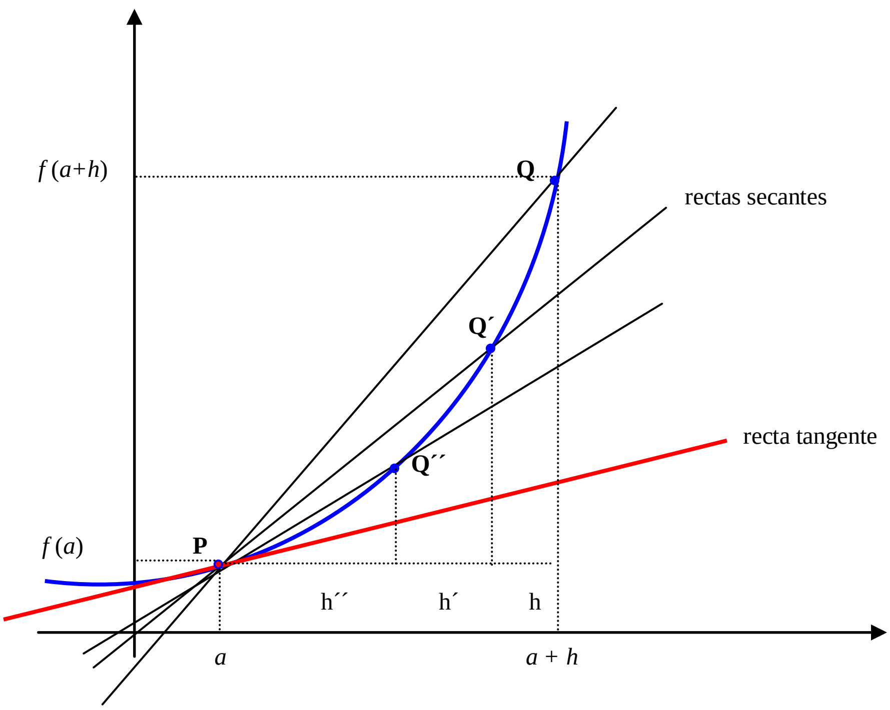
*Si, a partir de esta expresión, queremos calcular, por ejemplo, f´(3) tendremos:

f´(3) = 2·3 – 2 = 4. Este resultado coincide con el calculado en el ejercicio anterior.

Pero, además, con la expresión obtenida para f´(x) se podría calcular la derivada de la función en cualquier otro punto sin necesidad de aplicar límites para cada caso.

Así: f´(0) = –2; f´(1) = 0; f´(–1) = –4; etc.

Interpretación geométrica de la derivada



Como ya vimos si tomamos una función *f* que es derivable en *x* = *a*, y consideramos los puntos P(*a, f* (*a*)) y Q(*a* + *h, f* (*a* + *h*)), la recta que pasa por estos dos puntos es secante a la gráfica de *f*, y la tasa de variación media, $T.V.M. = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, es su pendiente.

Al calcular la derivada de la función *f* en el punto *x* = *a*, es decir $f'(a)$, se toma el límite de la TVM cuando *h* tiende a cero. Pero si *h* se hace cada vez más pequeño el punto *a* + *h* se aproxima al punto *a* y el punto *f* (*a* + *h*) al punto *f* (*a*), es decir, el punto Q tiende al punto P, y la recta secante a la gráfica de la función *f*, que pasa por los puntos P y Q, tiende a la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto P.

La derivada de una función en un punto es la **pendiente** de la recta tangente a la curva en ese punto.

Ej. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en el punto *x* = 3.

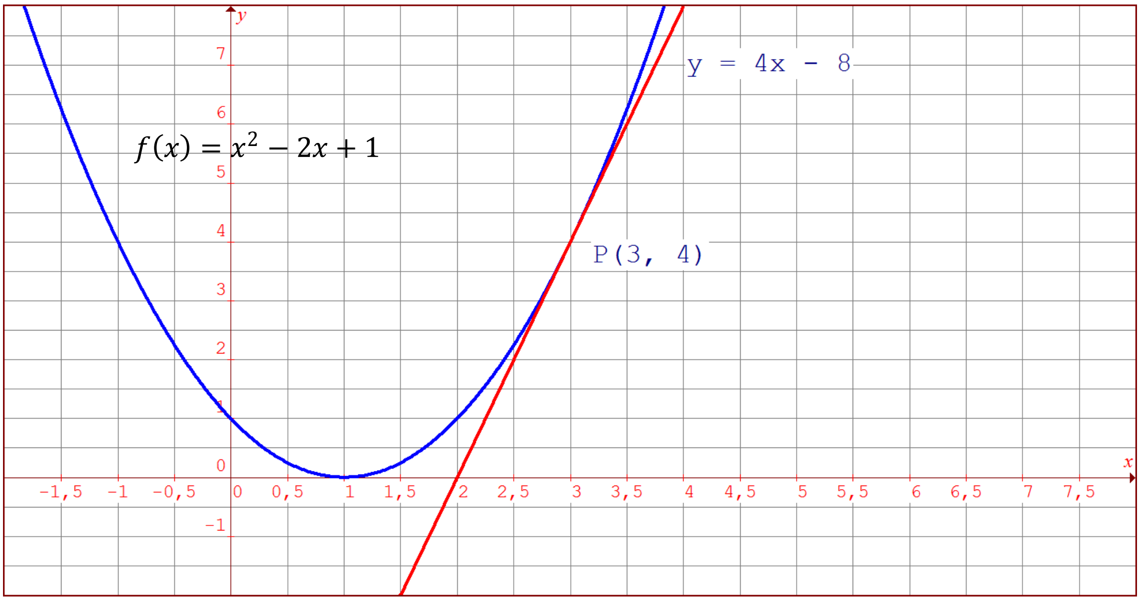
Para *x* = 3, tenemos f(3) = 9 – 6 + 1 = 4. Luego nos piden la ecuación de la recta tangente en P(3, 4).

Antes hemos calculado f´(3) = 4, es decir, la pendiente de la tangente es *m* = 4.

Por tanto, teniendo en cuenta que la ecuación de una recta que pasa por P(x_0, y_0) y de pendiente *m*, es:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, ecuación punto-pendiente, nos queda:

$y - 4 = 4(x - 3) \Longrightarrow y - 4 = 4x - 12 \Longrightarrow$ **y = 4x – 8.**



Derivadas laterales

Por analogía con el concepto de límite por la izquierda y derecha de una función, definimos los conceptos de derivada lateral por la izquierda y por la derecha de una función en un punto.

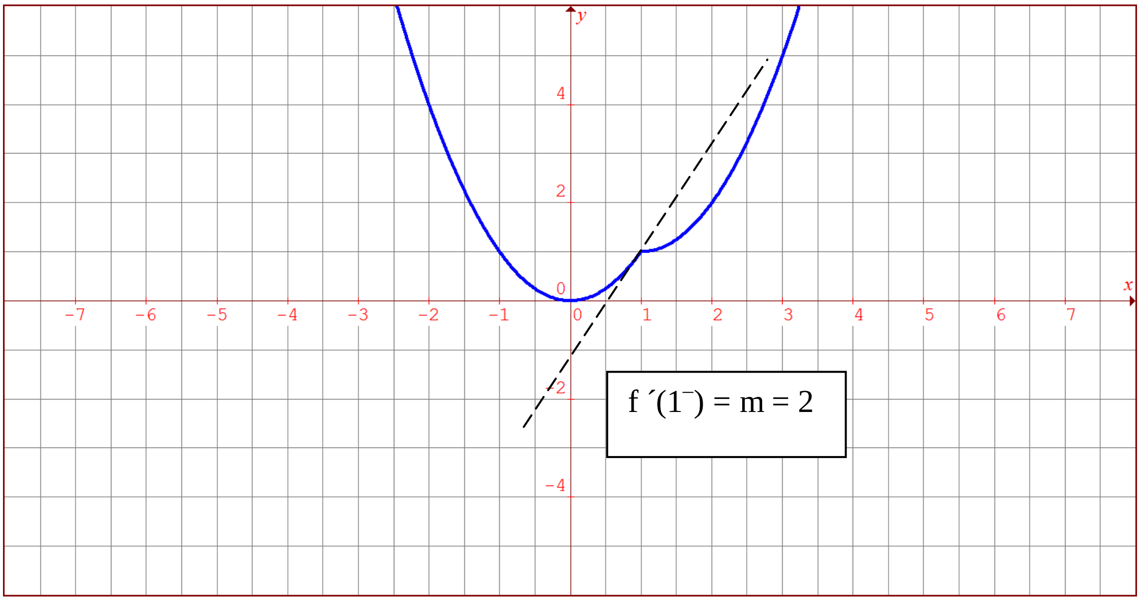
La **derivada lateral por la izquierda** de la función y = f(*x*) en el punto *x* = a es el límite de la tasa de variación media TMV[a, a+h] cuando $h \longrightarrow 0^-$. Cuando este límite existe y es finito, decimos que la función tiene derivada lateral por la izquierda. La representamos por f´(a^-) y es:

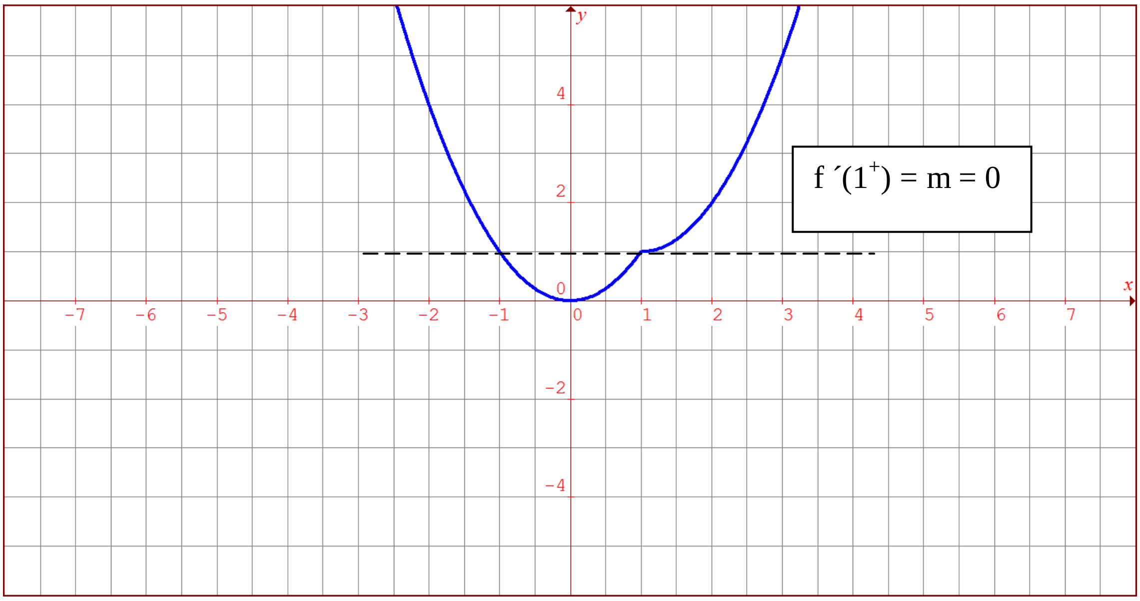
$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La **derivada lateral por la derecha** de la función y = f(*x*) en el punto *x* = a es el límite de la tasa de variación media TMV[a, a+h] cuando $h \longrightarrow 0^+$. Cuando este límite existe y es finito, decimos que la función tiene derivada lateral por la derecha. La representamos por f´(a^+) y es:

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Diremos que una función es derivable en x = a si tiene derivadas laterales y son iguales.





La función representada no es derivable en x = 1.

Continuidad y derivabilidad

Si una función es derivable en x = a, entonces la función es continua en dicho punto.

Pero la afirmación inversa no es necesariamente cierta, es decir, si una función es continua en un punto no tiene por qué ser derivable en dicho punto.

En el ejemplo gráfico anterior la función es continua en x = 1 pero no es derivable.

2.- Cálculo de derivas

Para calcular las derivadas de operaciones con funciones no será necesario aplicar la definición de derivada, sino que podrá hacerse de forma rápida si se siguen las reglas de derivación que se muestran a continuación.

Estas reglas están basadas en la definición de derivada y en las propiedades de los límites relacionadas con las operaciones con funciones.

Función derivada de la suma de funciones.-

La derivada de la suma de dos o más funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.

Ej. Sea la función $h(x)=x^3+x^2$. Sabiendo que la derivada de la función $f(x)=x^3$ es $f'(x)=3x^2$ y la de $g(x)=x^2$ *es* $g'(x)=2x$, entonces *h*(*x*) = *f*(*x*) + *g*(*x*) = = (*f* + g) (x).

Por tanto: *h*´(*x*) = (*f* + g)´(x) = *f* ´(*x*) + *g* ´(*x*) = $3x^2+2x$

Función derivada del producto de funciones.-

La función derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera sin derivar por la derivada de la segunda.

Ej. Sea la función $h(x)=x^4\cdot(x^2-2x+5)$ que es producto de $g(x)=x^4$ y $f(x)=x^2-2x+5$.

$$h'(x)=(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=4x^3\cdot(x^2-2x+5)+x^4\cdot(2x-2)$$

Función derivada del producto de un número real por una función.-

La derivada del producto de un número real por una función es un caso particular del producto de funciones, en el que una de ellas es una función constante. Su derivada es igual al número por la derivada de la función.

Ej. Sea la función $h(x)=3x^2$. Si $f(x)=x^2$ se tiene que *h*(*x*) = 3 *f* (*x*), entonces:

$$h'(x)=(3\cdot f)'(x)=3\cdot f'(x)=3\cdot 2x=6x$$

Función derivada del cociente de funciones.-

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo ello dividido por el cuadrado del denominador.

Ej. Sea $h(x)=\dfrac{3x^2+5}{x^3}$, con $f(x)=3x^2+5$ y $g(x)=x^3$. Entonces:

$$h'(x)=\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}=\frac{6x\cdot x^3-(3x^2+5)\cdot 3x^2}{x^6}$$

Regla de la cadena

Sea $(f \circ g)(x) = f(u(x))$. La derivada de la función compuesta es el producto de la derivada de la primera por la derivada de la segunda, tomando en cada una de ellas el punto correspondiente. Es decir,

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(u(x)\big) \cdot u'(x)$$

Debemos observar que la variable de la función **u** es ***x*** y la variable de ***f*** es **u(*x*).**

Ej. Sea la función f(x) = x^2 con f´(x) = $2x$ y la función g(x) = sen (x) con g´(x) = cos (x). Entonces:

$(f \circ g)(x) = (sen(x))^2$ siendo la derivada: $(f \circ g)'(x) = 2(sen(x)) \cdot \cos(x)$

De igual forma:

$(g \circ f)(x) = sen(x^2)$ y $(g \circ f)'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$

Derivada de las funciones elementales

	Función y	**Función derivada** y'
F. Constante	$y = k$	$y' = 0$
F. Identidad	$y = x$	$y' = 1$
F. Potencial	$y = x^\alpha, \alpha \in \Re$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
F. Polinómica	$y = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$y' = n a_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1$
F. Logarítmicas	$y = \ln x, \quad x > 0$ $y = \log_a x, \quad x > 0$	$y' = 1/x$ $y' = 1/x \cdot \log_a e$
F. Exponenciales	$y = e^x$ $y = a^x$	$y' = e^x$ $y' = a^x \cdot \ln a$
F. Potencial exponencial	$y = x^x$ $y = f^g$	$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$ $y' = (f^g \cdot \ln f) \cdot g' + (g \cdot f^{g-1}) \cdot f'$
F. Trigonométricas	$y = sen\, x$ $y = \cos x$ $y = tag\ x$	$y' = \cos x$ $y' = -senx$ $y' = 1 + tag^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Ejercicio.- Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$ b) $f(x) = 3 sen\, x - 5\cos x$ c) $f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{4}{x}$

d) $f(x) = \cos(x^4 + x - 1)$ e) $f(x) = tag\, 3x$ f) $f(x) = \ln(x^4 - x^2)$

Derivadas sucesivas

Si la función derivada de una función y = f(x) es otra función que representamos por f´, y si f´ es derivable, podemos calcular la derivada de esta función y obtener otra, que llamamos la **segunda derivada** de f y la representamos por f´´.

Razonando de forma análoga podríamos obtener la derivada tercera, f´´´, y así sucesivamente.

Ej. Calcular las derivadas sucesivas de

$$f(x) = x^4$$

$$f´(x) = 4x^3; \quad f´´(x) = 12x^2; \quad f´´´(x) = 24x; \quad f^{IV}(x) = 24; \quad f^{V}(x) = 0; \ldots$$

Derivadas de funciones logarítmicas

Si tenemos que derivar una función logarítmica es conveniente aplicar primero las propiedades de los logaritmos y después derivar.

Ej. Deriva y = $Ln\sqrt[4]{x+5}$

$$y = Ln\sqrt[4]{x+5} = Ln(x+5)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}Ln(x+5) \Rightarrow \quad y´ = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+5} = \frac{1}{4(x+5)}$$

Función potencial–exponencial

Hay funciones del tipo $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ que no pueden considerarse ni potenciales ni exponenciales ya que ni el exponente ni la base son constantes.

Para derivarlas seguimos los siguientes pasos:

a) Tomamos logaritmos en los dos miembros:

$$Lnf(x) = Ln[u(x)]^{v(x)} = v(x)Ln[u(x)]$$

b) Derivamos los dos miembros:

$$\frac{f´(x)}{f(x)} = v´(x)Ln[u(x)] + v(x)\frac{u´(x)}{u(x)}$$

c) Despejamos f´(x) y sustituimos f(x) por su valor:

$$f´(x) = f(x)\cdot\left[v´(x)Ln[u(x)] + v(x)\frac{u´(x)}{u(x)}\right]$$

$$f´(x) = [u(x)]^{v(x)}\cdot\left[v´(x)Ln[u(x)] + v(x)\frac{u´(x)}{u(x)}\right]$$

Ej. Derivar y = $x^{sen\ x}$

$$Ln\ y = Ln\ x^{sen\ x} = sen\,x\cdot Ln\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{y´}{y} = \cos x\cdot Ln\,x + sen\,x\cdot\frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y´ = y\cdot\left[\cos x\cdot Ln\ x + sen\ x\cdot\frac{1}{x}\right] \quad \Rightarrow \quad y´ = x^{sen\ x}\cdot\left[\cos x\cdot Ln\ x + sen\ x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

Estudio de la derivabilidad

Para estudiar la derivabilidad de una función en un punto conflictivo usando las reglas de derivación, aplicamos el siguiente procedimiento:

- Estudiamos la continuidad de la función en el punto.
- Determinamos la expresión de la función derivada y estudiamos en ella las derivadas laterales.

Ej. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x<1 \\ 3-x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

El único punto conflictivo es x = 1.

a) Continuidad:

f(1) = 3 – 1 = 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f = 1^2+1 = 2 \\ \\ \lim_{x\to 1^+} f = 3-1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f = 2$$

Luego la función es continua en *x* = 1.

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x<1 \\ -1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2 \\ \\ f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -1 = -1 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$

Luego no existe la derivada de *f* (*x*) en *x* = 1.

Ej. Calcula el valor de **a** y **b** para que la función

$f(x) = \begin{cases} x^2+bx-1 & si \quad x<3 \\ ax^2-4x+2 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 3

a) Continuidad:

$f(3) = 9a - 12 + 2 = 9a - 10$

$\lim_{x\to 3^-} f = 9 + 3b - 1 = 3b + 8$

$\lim_{x\to 3^+} f = 9a - 12 + 2 = 9a - 10$

Para que la función sea continua en *x* = 3 se tiene que cumplir que: $9a - 10 = 3b + 8$

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \quad + b \quad si \quad x < 3 \\ 2ax \quad -4 \quad si \quad x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(3^-) = 6 + b \\ f'(3^+) = 6a - 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 6a - 4 = 6 + b$$

Resolviendo el sistema formado:

$$\begin{cases} 9a - 10 = 3b + 8 \\ 6a - 4 = 6 + b \end{cases}$$

Obtenemos: $a = \frac{4}{3} \quad y \quad b = -2$

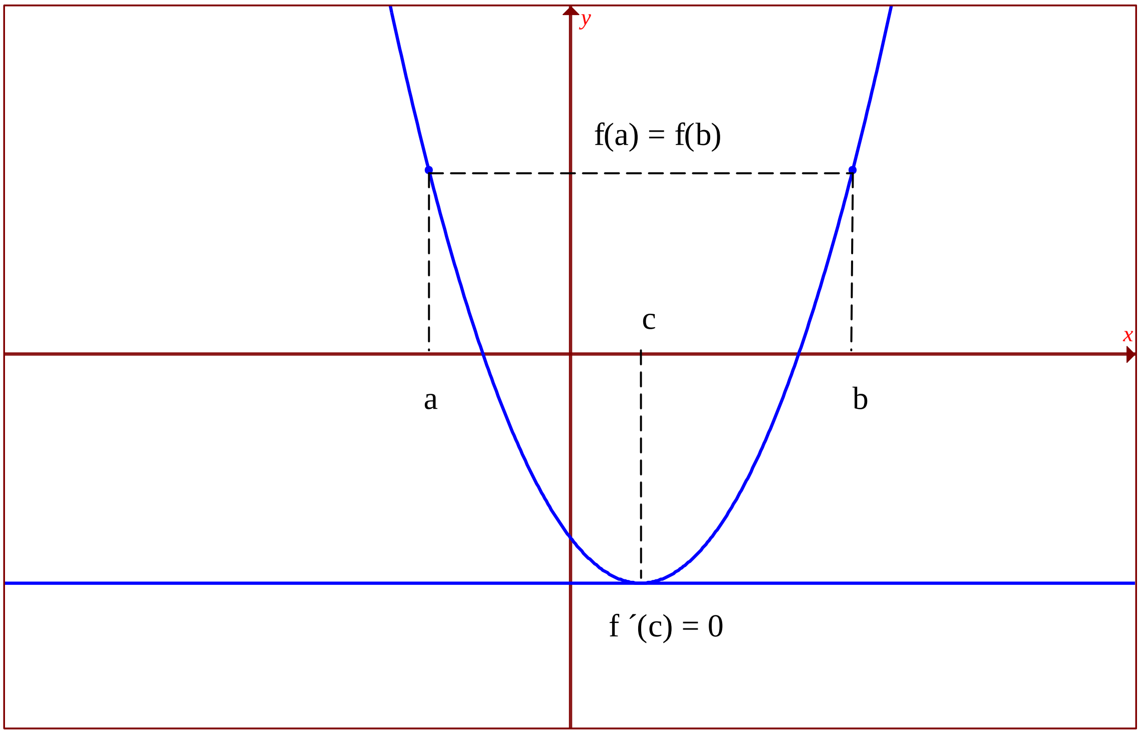
3.- Teoremas fundamentales del cálculo diferencial.

Teorema de Rolle

Sea *y* = *f*(*x*) una función definida sobre el intervalo cerrado [a, b] tal que:

- *y* = *f*(*x*) es continua en [a, b]
- *y* = *f*(*x*) es derivable en (a, b)
- *f*(*a*) = *f*(*b*)

Entonces, existe un punto c ϵ (a, b) en el cual *f´*(*c*) = 0.



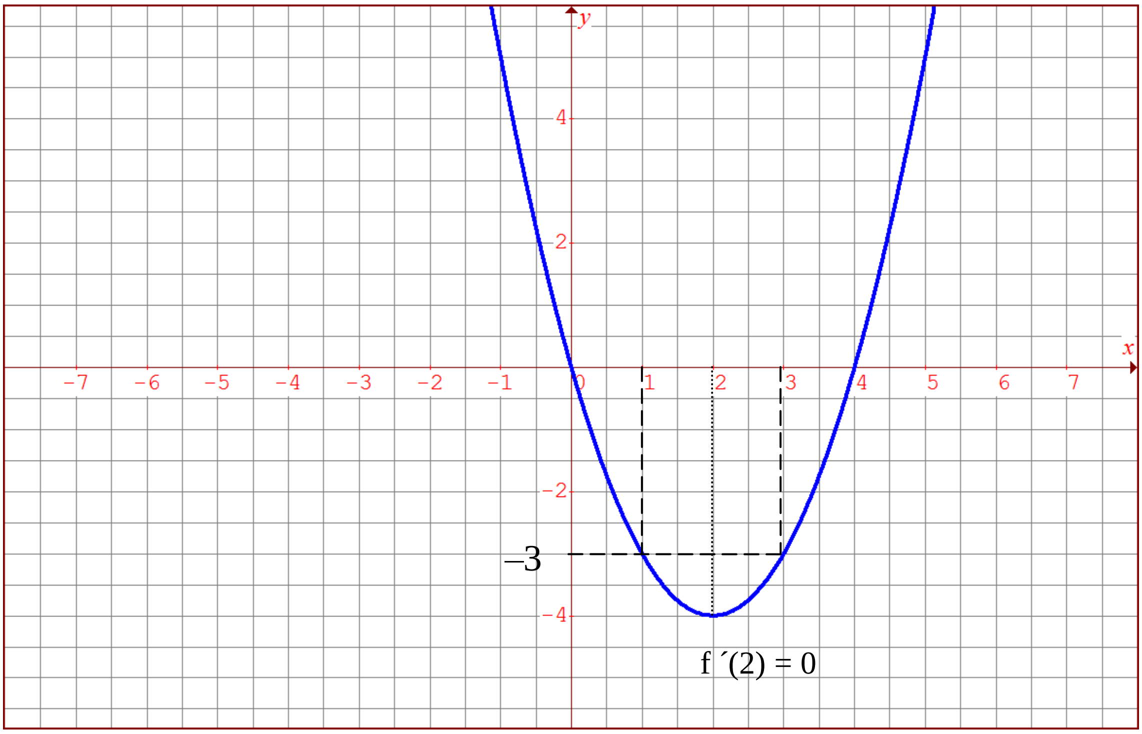
Ej. Comprobemos que f (*x*) = $x^2 - 4x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1, 3].

- Al tratarse de una función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, lo será en [1, 3].

- La función es derivable en (1, 3) ya que las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$. Su derivada es $f'(x) = 2x - 4$.
- $f(1) = f(3) = -3$

Podemos, con estas condiciones, aplicar el teorema de Rolle y, por tanto, existe un punto c ϵ (1, 3) en el que $f'(c) = 0$.

Efectivamente $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. Luego $c = 2 \epsilon (1, 3)$ y $f'(2) = 0$.



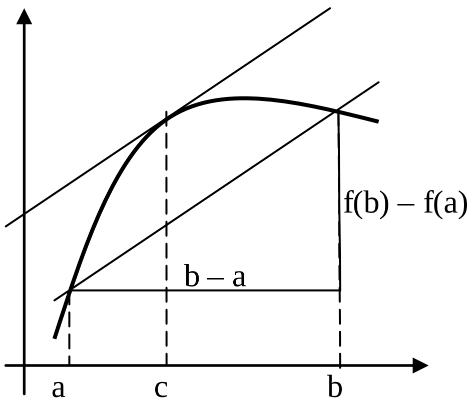
Teorema de Lagrange o del valor medio

Sea $y = f(x)$ una función definida sobre el intervalo cerrado [a, b] tal que:

- $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado [a, b].
- $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces, existe un punto c ϵ (a, b) tal que se cumple:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Observamos que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta secante que pasa por (a, f(a)) y (b, f(b)) y f ´(c) es la pendiente de la tangente a la gráfica en (c, f(c)). El teorema dice que existe un punto c ϵ (a, b) tal que la tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto (c, f(c)) es paralela a la recta secante que pasa por (a, f(a)) y (b, f(b)) .

Tales puntos pueden ser varios, pero al menos siempre existe uno.

4.- Variación y extremos de las funciones.

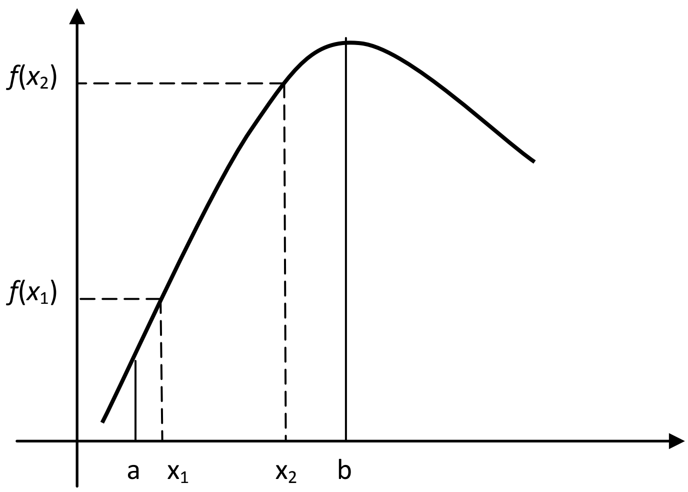
Las derivadas son una herramienta que se introduce en el análisis con el objetivo fundamental de estudiar la variación de las funciones. Este problema podemos desdoblarlo en dos:

- Estudio de la variación de la función en las proximidades de un punto, es decir, en el entorno de un punto.
- Estudio de la variación de la función en un intervalo prefijado.

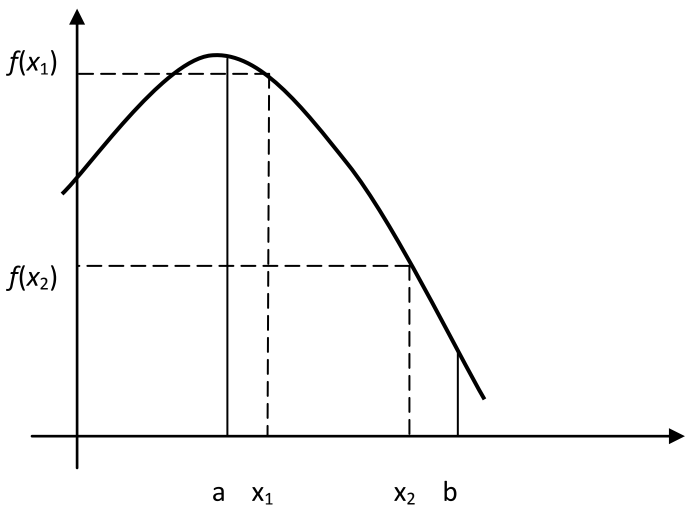
Monotonía (crecimiento y decrecimiento)

Estudiar la monotonía de una función consiste en hallar los intervalos en los que es creciente (↗) y en los que es decreciente (↘).

*Una función $y = f(x)$ es **creciente en un intervalo** $[a, b]$ si, para todo x_1, x_2 del intervalo con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$.*

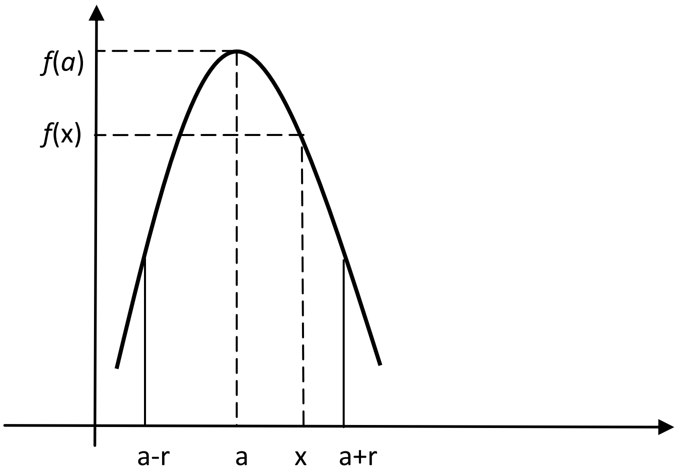


*Una función $y = f(x)$ es **decreciente en un intervalo** $[a, b]$ si, para todo x_1, x_2 del intervalo con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$.*

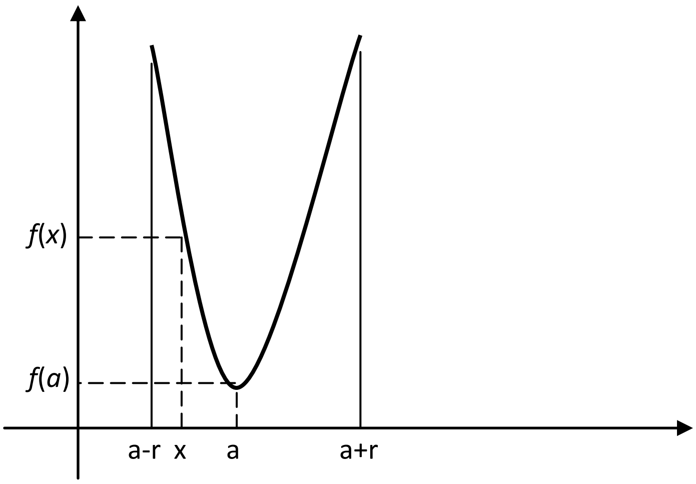


Máximos y mínimos

*Una función f(x) tiene un **máximo relativo en x = a**, si existe un entorno del punto E(a, r) tal que f(a) > f(x) para todos los puntos **x** del entorno reducido $E^*(a, r)$.*



*Una función f(x) tiene un **mínimo relativo en x = a**, si existe un entorno del punto E(a, r) tal que f(a) < f(x) para todos los puntos **x** del entorno reducido $E^*(a, r)$.*



Criterios para estudiar la monotonía

- *Si f´(x) > 0 para todo **x** de un intervalo, entonces la función es creciente en todo el intervalo.*
- *Si f´(x) < 0 para todo **x** de un intervalo, entonces la función es decreciente en todo el intervalo.*

Criterios para determinar los máximos y mínimos relativos

1º Condición **necesaria** para un máximo o mínimo relativo:

- *Si la función f(x) tiene un máximo o mínimo relativo y es derivable en x = a, entonces f´(a) = 0.*

2º Condición **suficiente** para un máximo o mínimo relativo:

- *Sea f(x) una función derivable en x = a, tal que f´(a) = 0 y f´´(a) < 0, entonces f(x) tiene un máximo relativo en x = a.*
- *Sea f(x) una función derivable en x = a, tal que f´(a) = 0 y f´´(a) > 0, entonces f(x) tiene un mínimo relativo en x = a.*

Procedimiento para hallar los máximos y mínimos relativos

– Calculamos la primera derivada, f´(x).

– Resolvemos la ecuación f´(x) = 0.

– Sustituimos los valores obtenidos en la función y = f(x) y obtenemos los posibles máximos y mínimos relativos.

– Hallamos la segunda derivada, f´´(x).

– Sustituimos en f´´(x) los posibles máximos y mínimos relativos.

- Si el resultado es negativo, tenemos un máximo relativo.
- Si el resultado es positivo, tenemos un mínimo relativo.

Ej. Halla los máximos y mínimos relativos de $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

1.- $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

2.- $f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0, x = 2$

3.- Para $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -2 \Longrightarrow A(0,-2)$

Para $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 2 \Longrightarrow B(2,2)$

4.- $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

5.- $f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow A(0,-2)\ \textit{máximo relativo}$

$f''(2) = 2 > 0 \Longrightarrow B(2,2)\ \textit{mínimo relativo}$

Procedimiento para hallar la monotonía

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento están separados por las discontinuidades, los máximos y los mínimos relativos. Cuando la inecuación f´(x) > 0, o bien f´(x) < 0, que tenemos que resolver no es de primer grado, seguiremos este procedimiento:

a) Hacemos una tabla con tres filas. En la primera colocamos ordenados de menor a mayor, –∞, +∞, las discontinuidades y las abscisas de los máximos y mínimos relativos.
b) En la segunda fila ponemos la derivada, f´(x), probamos un punto en cada intervalo y colocamos el signo (+) ó (–).
c) En la tercera fila escribimos la monotonía, debajo de los signos (+) ponemos el símbolo de creciente (↗) y debajo de los signos menos el símbolo de decreciente (↘).

Ej. Halla la monotonía de la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

La función es discontinua en x = 1 y en x = –1.

Además $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$ que se anula en x = 0, es decir, posible máximo o mínimo en (0, –1).

x	$-\infty$ $\quad$ -1	0	1	$+\infty$
f´(x)	+	+	−	−
Monotonía	↗	↗	↘	↘

Los intervalos de monotonía son pues:

Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

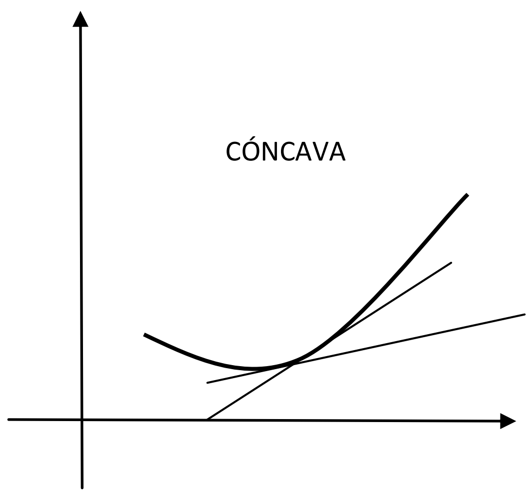
Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

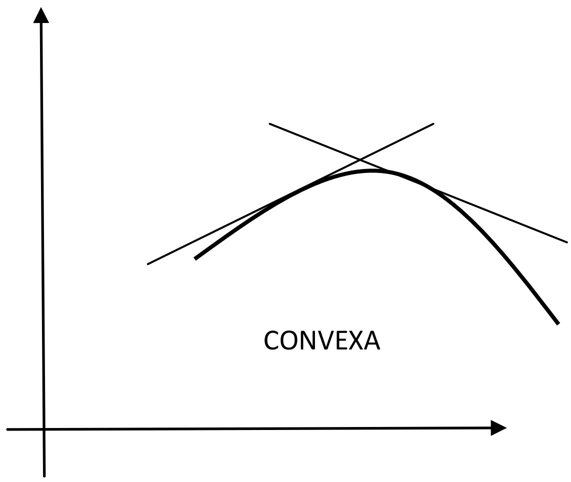
A la izquierda de x = 0 la función es creciente y a la derecha es decreciente, por tanto en el punto (0, –1) tenemos un máximo.

A este último resultado podríamos llegar si hubiésemos calculado la 2ª derivada.

Curvatura y puntos de inflexión

Estudiar la curvatura consiste en determinar los intervalos en los que la función es **cóncava**, ∪, y **convexa**, ∩.

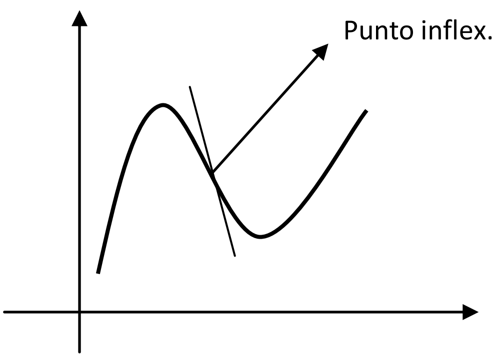


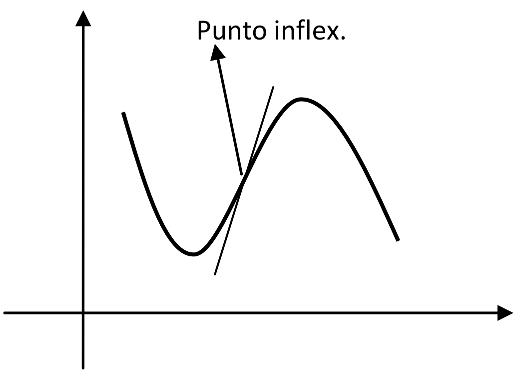


La función está por **encima** de las tangentes

La función está por **debajo** de las tangentes

Un **punto de inflexión** es un punto donde cambia la curvatura de una función. Pasa de ser cóncava a convexa o al revés.





Criterio para determinar la concavidad y convexidad

– Si f´´(x) > 0 para todo **x** de un intervalo, entonces la función es cóncava, ∪, en el intervalo.

– Si f´´(x) < 0 para todo **x** de un intervalo, entonces la función es convexa, ∩, en el intervalo.

Procedimiento para hallar los puntos de inflexión

– Calculamos de segunda derivada, f´´(x).

– Resolvemos la ecuación f´´(x) = 0.

– Sustituimos los valores obtenidos en la función y = f(x) y obtenemos los posibles puntos de inflexión.

– Hallamos la tercera derivada f´´´(x).

– Sustituimos los posibles puntos de inflexión en f´´´(x). Aquellos en los que f´´´(x) ≠ 0, son puntos de inflexión.

Ej. Calcula los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

– $f'(x) = 3x^2 + 6x \qquad f''(x) = 6x + 6$

– $f''(x) = 0 \implies 6x + 6 = 0 \implies x = -1$

– $x = -1 \implies f(-1) = 2 \implies P(-1, 2)$

– $f'''(x) = 6$

– $f'''(-1) = 6 \neq 0 \implies P(-1, 2)$ es un punto de inflexión.

Procedimiento general para hallar y clasificar los puntos de inflexión

– Calculamos la primera derivada, f´(x).

– Resolvemos la ecuación, f´(x) = 0.

– Sustituimos los valores obtenidos en la función y = f(x) y obtenemos los puntos críticos.

– Para cada punto crítico, hallamos las derivadas sucesivas, f´´(x), f´´´(x), … hasta encontrar una que no se anule en dicho punto crítico.

– Si la primera derivada que no se anula es de orden impar, el punto crítico es un punto de inflexión. Si es de orden par tenemos:

- Si el resultado es negativo, es máximo relativo.
- Si el resultado es positivo, es mínimo relativo.

Ej. Halla y clasifica los puntos críticos de la función: $f(x) = x^4$

- $f'(x) = 4x^3$
- $f'(x) = 0 \implies 4x^3 = 0 \implies x = 0$
- $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies P(0, 0)$
- $f''(x) = 12x^2 \implies f''(0) = 0$
  $f'''(x) = 24x \implies f'''(0) = 0$
  $f^{IV}(x) = 24 \implies f^{IV}(0) = 24 > 0$

Como la primera derivada distinta de cero en *x* = 0 es de orden par y positiva en P(0, 0) tenemos un mínimo relativo.

Ej. Halla y clasifica los puntos críticos de la función: $f(x) = x^5$

- $f'(x) = 5x^4$
- $f'(x) = 0 \Longrightarrow 5x^4 = 0 \Longrightarrow x = 0$
- $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow P(0,0)$
- $f''(x) = 20x^3 \Longrightarrow f''(0) = 0$
  $f'''(x) = 60x^2 \Longrightarrow f'''(0) = 0$
  $f^{IV}(x) = 120x \Longrightarrow f^{IV}(0) = 0$
  $f^{V}(x) = 120 \Longrightarrow f^{V}(0) = 120 \neq 0$

Como la primera derivada distinta de cero en x = 0 es de orden impar en P(0, 0) tenemos un punto de inflexión.

Ejercicios.-

1.- Halla los puntos de máximo y mínimo relativo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2(x-3)$ **b)** $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

2.- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = xe^x$ **b)** $f(x) = xLn\,x$

3.- Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ **b)** $f(x) = x^2 Ln\,x$

4.- Halla los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x+1)^2$ **b)** $f(x) = (x+1)^3$

5.- Procedimiento para analizar una función.

Para analizar una función tenemos que aplicar todas las propiedades y características que hemos estudiado anteriormente. Dichas propiedades las obtendremos directamente de la fórmula de la función y de las funciones derivadas.

Así, estudiaremos de forma ordenada:

1.- Dominio y continuidad. 2.- Periodicidad

3.- Simetrías. 4.- Asíntotas.

5.- Corte con los ejes. 6.- Máximos, mínimos relativos y monotonía.

7.- Puntos de inflexión y curvatura. 8.- Gráfica.

1.- Dominio y continuidad

Si la función viene dada por una sola fórmula, el dominio y la continuidad coinciden.

- Las funciones polinómicas están definidas en todo $\mathbb{R}$.
- Las funciones racionales no están definidas para los valores que anulan el denominador.

- Las funciones irracionales de índice par no están definidas para los valores en que el radicando es menor que cero, es decir, cuando es negativo.
- Las funciones logarítmicas no están definidas para los valores menores o iguales que cero.

2.- Periodicidad

Una función es periódica de periodo T si se verifica f(x+T) = f(x) para todo x $\epsilon\mathbb{R}$, T mínimo.

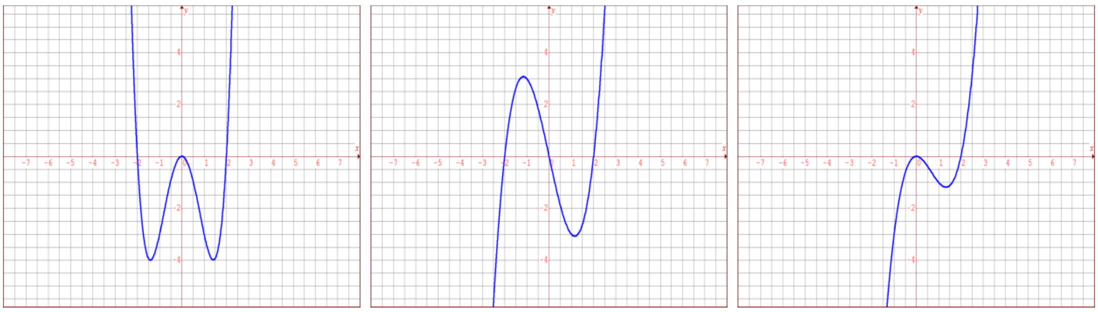
3.- Simetrías

Estudiaremos dos tipos de simetrías: respecto al eje OY y respecto al origen O(0, 0). Para ello calculamos f(–x) y observamos si obtenemos f(x) ó –f(x).

- Una función es **par** o simétrica respecto del eje OY si se verifica: f(–x) = f(x)
- Una función es **impar** o simétrica respecto al origen O(0, 0) si se verifica: f(–x) = –f(x).

Ej.

PAR **IMPAR** **NO SIMÉTRICA**



$f(x) = x^4 - 4x^2$ $f(x) = x^3 - 4x$ $f(x) = x^3 - 2x^2$

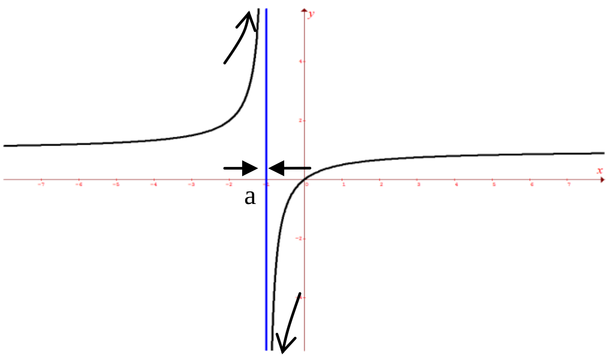
4.- Asíntotas

Existen tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

a) Verticales.

Son las rectas **x = a** tales que el valor **a** hace a **y** infinito. Para calcular estas asíntotas en las funciones racionales hallamos las raíces del denominador que no lo sean del numerador. Habrá tantas asíntotas verticales como raíces reales distintas tenga el denominador y que no las tengan el numerador. Para conocer la posición de la gráfica respecto de la asíntota vertical **x = a**, calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)$$



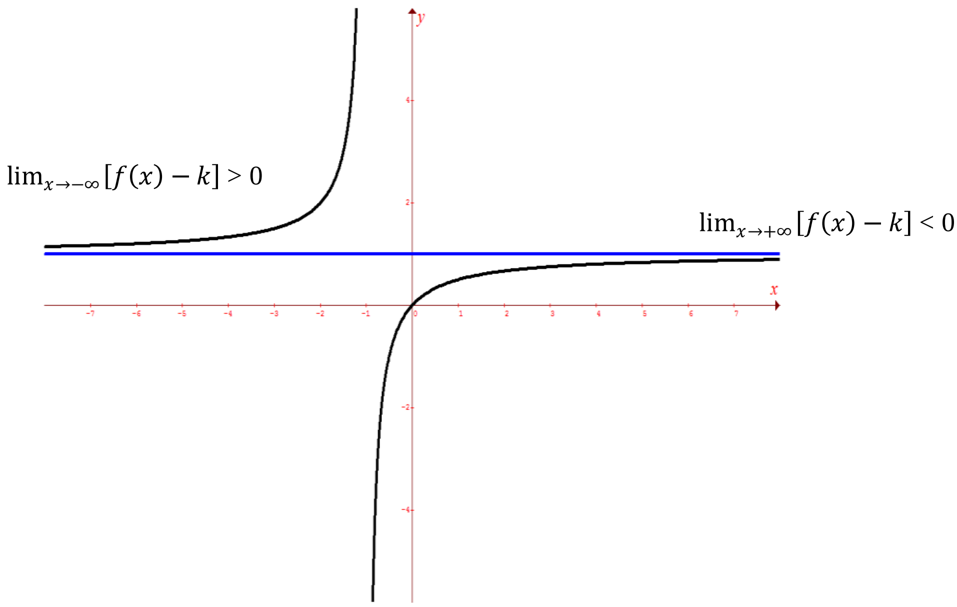
b) Horizontales.

Son de la forma y = k, siendo k = $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

Tendremos asíntotas horizontales si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.

Para conocer la posición de la gráfica respecto de las asíntotas horizontales, calculamos los límites:

- $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - k]$, si es positivo la gráfica por encima de la asíntota; si es negativo la gráfica por debajo de la asíntota.
- $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - k]$, si es positivo la gráfica por encima de la asíntota; si es negativo la gráfica por debajo de la asíntota.



c) Oblicuas.

Son de la forma y = mx +b, siendo:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

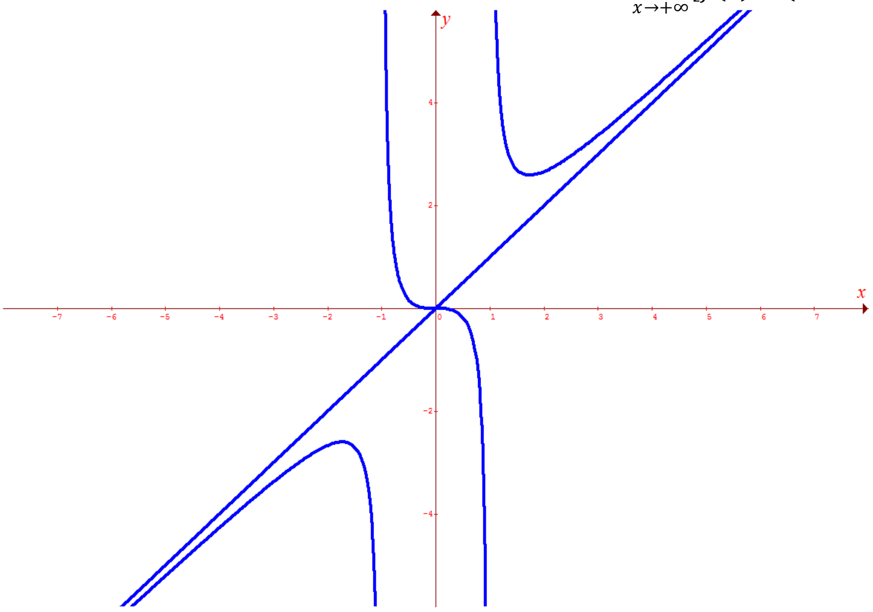
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Si la función es racional, tiene una asíntota oblicua cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Para conocer la posición de la gráfica respecto de las asíntotas oblicuas, calculamos los límites:

- $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)]$ si es positivo la gráfica por encima de la asíntota; si es negativo la gráfica por debajo de la asíntota.
- $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)]$ si es positivo la gráfica por encima de la asíntota; si es negativo la gráfica por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]>0$$



$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+b)]<0$$

5.- Corte con los ejes

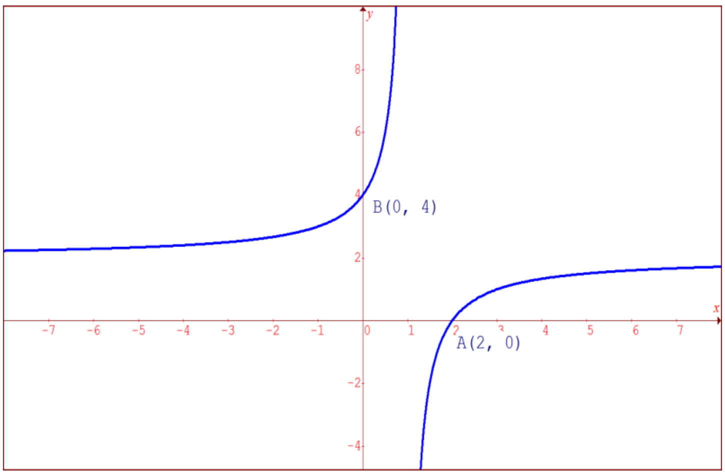
Eje OX: obtenemos los puntos de corte de la función y = f(x) con el eje OX resolviendo la ecuación f(x) = 0. Hay tantos puntos de corte como raíces reales distintas tenga la ecuación.

Eje OY: el punto de corte (si existe es único) de la función y = f(x) con el eje OY lo obtenemos sustituyendo x = 0. Por tanto, de existir, es el punto (0, f(0)).

Ej. Halla los puntos de corte con los ejes de la función $y=\frac{2x-4}{x-1}$

Eje OX: $f(x)=0\Longrightarrow\frac{2x-4}{x-1}=0\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow x=2\Rightarrow A(2,0)$

Eje OY: $x=0\Rightarrow f(0)=4\Rightarrow B(0,4)$



6.- Máximos, mínimos relativos y monotonía

Calculamos máximos, mínimos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento según los procedimientos ya estudiados.

7.- Puntos de inflexión y curvatura

Calculamos los puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad según los procedimientos ya estudiados.

8.- Gráfica

Por último dibujamos la gráfica de la función.

Tabla resumen

1.- Dominio, Dom(f) **Continuidad**	**Conjunto de valores de la variable independiente, x, para los que existe la función** **Valores del Dom(f) donde es continua**
2.- Periodicidad	**f(x+T) = f(x), para todo x ϵ $\mathbb{R}$, T mínimo**
3.- Simetrías **f par ⇒ simetría respecto a OY** **f impar ⇒ simetría respecto al origen O(0,0)**	**Calculamos f(−x):** **f(−x) = f(x)** **f(−x) = −f(x)**
4.- Asíntotas • **Verticales: x = a** • **Horizontales: y = k** • **Oblicuas: y = mx + b** **Posición de la curva respecto de las asíntotas**	$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ k = $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ m = $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx]$
5.- Puntos de corte con los ejes **Eje OX** **Eje OY**	 **Raíces de f(x) = 0, ninguno, uno o varios** **(0, f(0)), uno o ninguno**
6.- **Máximos y mínimos relativos** **Monotonía**	 **f´(x) = 0** **f´´(a) < 0 → máximo relativo** **f´´(a) > 0 → mínimo relativo** **f´(x) > 0 → creciente: ↗** **f´(x) < 0 → decreciente: ↘**
7.- **Puntos de inflexión** **Curvatura**	 **f´´(x) = 0 y f´´´(a) ≠ 0** **f´´(x) > 0 → cóncava, ∪** **f´´(x) < 0 → convexa, ∩**
8.- Gráfica	**Dibujo**

6.- Ejercicios de aplicación.

1.- Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^3 - 8 \quad \text{en} \quad [0, 2]$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+4} \quad \text{en} \quad [0, 1]$

2.- Halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados, aplicando su definición:

a) $f(x) = \frac{4}{x^2} \quad en \quad x = 1$

b) $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad en \quad x = 1$

3.- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 2$ en el punto x = 1.

4.- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^3 - 1$ en los puntos en que su pendiente valga 3.

5.- Halla la ecuación de la recta tangente de la función $f(x) = \frac{4+x}{2+x^2}$ en x = 0.

6.- Representa la gráfica de la función $f(x) = |3x + 2|$ y justifica en qué puntos es derivable.

7.- Halla la derivada, si existe, en los puntos indicados de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \ \ x < 2 \\ x^2 & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$ en x = 2

b) $f(x) = \begin{cases} -5x - 5 & si \ \ x \leq 1 \\ -5x + 4 & si \ \ x > 1 \end{cases}$ en x = 1

c) $f(x) = \begin{cases} e^x & si \ \ x < 0 \\ 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$ en x = 0

8.- Calcula, aplicando las reglas de derivación, las siguientes derivadas:

a) $f(x) = 3x^2 - x + 5$

b) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot sen\, x$

c) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-4x+2}$

d) $f(x) = \sqrt[7]{x}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^3}$

f) $f(x) = cos(3x^2 - \pi)$

g) $f(x) = Ln(x^2 - 3x + 2)$

h) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$

i) $f(x) = (x^2 + 3)e^x$

j) $f(x) = \frac{x^2}{sen\ x}$ **k)** $f(x) = tg(x+4)$ **l)** $f(x) = e^{x^4+1}$

m) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ **n)** $f(x) = e^x \cdot tg\ x$ **ñ)** $f(x) = \frac{senx+cosx}{x-3}$

o) $f(x) = x\ tgx^3$ **p)** $f(x) = x\ tg^3x$ **q)** $f(x) = sen(x^2-1)$

r) $f(x) = Ln(\cos x)$ **s)** $f(x) = senx\ tgx$ **t)** $f(x) = e^{tg^3x}$

u) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{senx}$ **v)** $f(x) = log_2\sqrt{\frac{1}{x}}$ **w)** $f(x) = 3^{sen\,x^2}$

x) $f(x) = x^{x^2}$ **y)** $f(x) = (cosx)^{senx}$ **z)** $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

9.- Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ en x = 0.

10.- Halla el valor de k en $f(x) = x^3 - kx$ si sabemos que en x = 2 la recta tangente forma con el eje X un ángulo de 45º.

11.- Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ y que es paralela a la recta: 2x – 5y + 8 = 0

12.- Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1+x}{e^x}$ en el punto de ordenada y = 0.

13.- Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ \ x \le 0 \\ 1-x^2 & si\ \ 0 < x \le 1 \\ x & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

14.- Halla los puntos de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ en donde la recta tangente sea horizontal.

15.- Determina los valores de **a** y **b** para que las siguientes funciones sean derivables.

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx-1 & si\ \ x \le 1 \\ 2bx-2 & si\ \ x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^3-x & si\ \ x \le 0 \\ ax+b & si\ \ x > 0 \end{cases}$

16.- Sea f(x) una función continua y derivable en tal que f(0) = 3. Calcula cuánto tiene que valer f(5) para asegurar que en [0, 5] existe *c* tal que f´(*c*) = 0.

17.- Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^5 - 5x$

18.- Determina los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 6x^2$ **b)** $f(x) = x^3 - 25x$

19.- Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{2x^2-3x}{e^x}$ y determina sus máximos y mínimos relativos.

20.- Halla el valor de *k* de las siguientes funciones sabiendo lo siguiente:

a) $f(x) = 3x^2 - kx$ tiene un extremo relativo en x = 2.

b) $f(x) = \frac{x^2+k}{x-k}$ tiene un extremo relativo en x = 1.

c) $f(x) = x^3 - kx^2 + 1$ tiene un punto de inflexión en x = –2.

21.- Determina a y b de $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ sabiendo que tiene un extremo relativo en (1, 4). ¿Se trata de un máximo o un mínimo relativo?

22.- Determina a, b y c de $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ sabiendo que tiene un extremo relativo en (0, 1) y corta al eje X en x = 1. ¿Tiene, además del considerado, algunos extremos relativos más?

23.- La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en (1, 1) derivada nula, que no es un extremo relativo. Calcula a, b y c.

24.- De un polinomio de tercer grado se sabe, P(x), se sabe que P(1) = 0, P´(1) = 2, P´´(1) = 4 y P´´´(1) = 12. Calcula P(2).

25.- Halla las asíntotas de:

a) $f(x) = x^5 - 5x + 2$ **b)** $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-9}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{3x-6}$

26.- Representa las siguientes curvas:

a) $f(x) = x^2 - x - 6$ **b)** $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

27.- Halla dos números positivos *x* e *y* tales que sumen 20 y su producto sea máximo.

28.- La función $M(x) = \frac{8x^2+9x+72}{x}$ representa, en miles de euros, el coste medio de un proceso de producción, siendo *x* el número de artículos producidos por hora.

Calcula el número de artículos que deben producirse en una hora para que su coste medio alcance el valor mínimo posible.

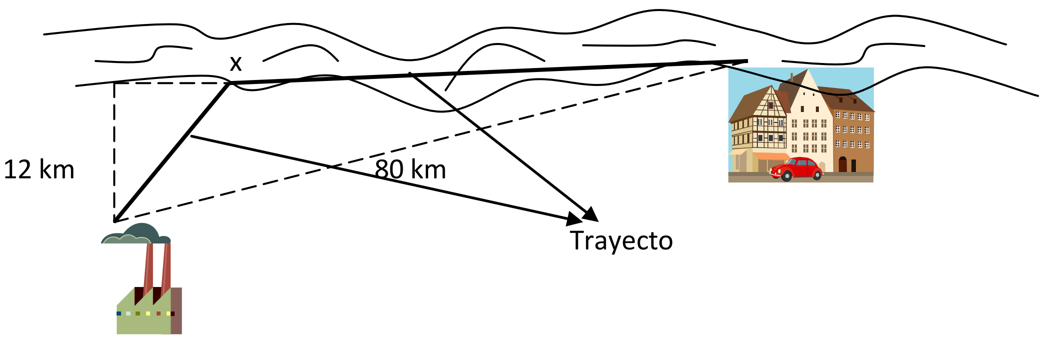
29.- Se dispara un proyectil a las 0 horas. Sabemos que la altura, en km, que alcanza en función del tiempo, en horas, viene dada por:

$$h(t) = 1000t(1-t)$$

Hállese la altura máxima y el instante en que esta es alcanzada.

30.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja de papel para que el gasto sea mínimo.

31.- Una fábrica, situada a 12 km de la orilla de un río rectilíneo, ha de transportar sus productos a una ciudad situada en la orilla del río y a 80 km del punto de éste más próximo a la fábrica. El transporte de mercancías en camión cuesta 0.90 € por tonelada y km. Y el transporte en gabarra por el río cuesta 0.40 € por tonelada y km. ¿En qué punto de la orilla se debería cargar la mercancía en gabarras para que el coste total del transporte sea mínimo?



32.- Se quiere cercar un campo rectangular mediante una valla, aprovechando un muro ya existente. Se sabe que la valla del lado opuesto del muro cuesta 6 €/m y la de los otros dos lados 2 €/m. Si el presupuesto disponible es de 3000 €, halla el área del mayor recinto que puede cercarse.

33.- Queremos fabricar recipientes cilíndricos sin tapa con una capacidad de 2 litros. ¿Cuáles son las dimensiones que optimizan el coste?

34.- La curva de coste de producción de **x** unidades de cierto artículo viene dada por la función:

$$C(x) = 8000 + 6x + 0{,}002x^2$$

a) Escribe la función que nos proporciona le coste medio por artículo.

b) Determina el número de unidades que hace mínimo el coste medio por artículo.