



Determinantes

1.- Determinantes de orden dos.

Su estudio únicamente tiene sentido relacionado con las matrices cuadradas.

Definimos el **determinante de una matriz cuadrada de orden dos**, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, como el número real que resulta de la operación: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, y lo expresamos como: $|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Ej. Calcula el determinante de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 3 = -5 - 6 = -11$

b) $|B| = (-1) \cdot (-9) - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$

Sabemos que se define matriz regular como la matriz cuadrada que tiene inversa. Esta definición es equivalente a:

Una matriz cuadrada A es **regular** $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Para las matrices del ejemplo anterior A es regular, su determinante es distinto de cero, luego tiene inversa. Al contrario, B es singular, su determinante es cero, no tiene inversa.

Ej. Estudia para qué valores de a es regular la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & a \end{pmatrix}$

A es regular si $\det A \neq 0 \Rightarrow 5a - 20 \neq 0 \Rightarrow 5a \neq 20 \Rightarrow a \neq 4$

Es decir, si $a = 4$ la matriz A no tiene inversa. Para cualquier valor $a \neq 4$, existirá A^{-1} .

Ejercicios:

1.- Calcula el determinante de las siguientes matrices y señala cuáles son regulares:

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

2.- Indica para qué valores de a son regulares:

a) $A = \begin{pmatrix} a & 12 \\ -3 & -a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} a-1 & -3 \\ -a-1 & a+1 \end{pmatrix}$

3.- Resuelve:

a) $\begin{vmatrix} 5+x & x \\ -3 & 2x \end{vmatrix} = 15$

b) $\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ x+1 & 3x \end{vmatrix} = 69$

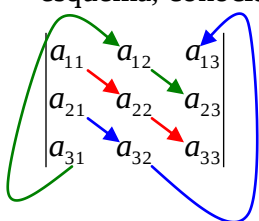
2.- Determinantes de orden tres.

Definimos el determinante de una matriz cuadrada de orden tres,

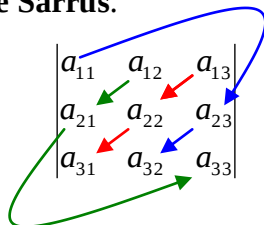
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, como el número real que resulta de la operación:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Para recordar el desarrollo del determinante de tercer orden se utiliza el siguiente esquema, conocido como **regla de Sarrus**.



Sumandos con signo +

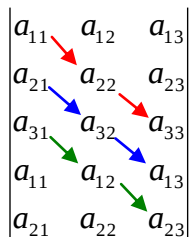


Sumandos con signo -

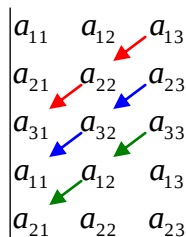
Ej. Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 8 + 2 - 12 + 8 - 1 = -1$$

También podemos calcular el determinante de orden 3 mediante la siguiente regla: escribimos debajo de la matriz sus dos primeras filas. Los términos positivos serán ahora los de la diagonal principal y sus dos paralelas, y los términos negativos serán los de la diagonal secundaria y sus dos paralelas.



Sumandos con signo +



Sumandos con signo -

Ejercicios:

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.- Indica cuáles de las matrices del ejercicio anterior son singulares y cuáles no.

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & x & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & x \end{vmatrix} = 6x + 8$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2x & x & 1 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} = -47$$

3.- Propiedades de los determinantes.

1ª) El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta.

$$|A| = |A^t|$$

$$\text{Ej. } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (-2) \cdot 3 = 11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 \cdot (-2) = 11$$

2ª) Si permutamos dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ entonces } |B| = -|A|$$

*Hemos permutado las dos primeras filas.

$$\text{Ej. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 8 + 2 - 12 + 8 - 1 = -1$$

Si permutamos las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 1 + 12 - 2 + 6 - 8 = 1$$

3ª) Si multiplicamos una fila o columna de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado por ese número.

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad y$$

$$B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = ka_{11} \cdot a_{22} - ka_{12} \cdot a_{21} = k \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = k \cdot |A|$$

$$\text{Ej. } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 11; \quad \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 44 \quad (4 \cdot 11)$$

4ª) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, entonces su determinante es igual a cero.

$$\text{Ej. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 - 12 + 12 - 6 - 2 = 0$$

5ª) Si todos los elementos de una fila o columna son nulos, entonces su determinante es nulo.

$$\text{Ej. } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

6ª) Si dos filas o dos columnas de una matriz son proporcionales, entonces su determinante es cero.

$$\text{Ej. } \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$$

$\rightarrow F_2 = -3F_1$

7ª) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\text{Ej. } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -10$$

8ª) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz se descomponen en suma de dos sumandos, su determinante también se descompone, de la siguiente forma, en suma de dos determinantes:

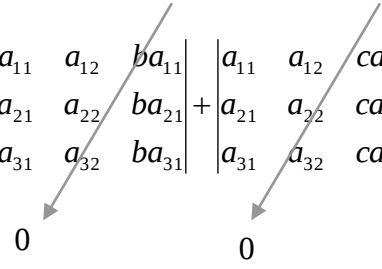
$$\begin{vmatrix} a_{11} + b & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + c & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + d & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a_{12} & a_{13} \\ c & a_{22} & a_{23} \\ d & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9ª) Si a una fila o a una columna de una matriz se le suma una combinación lineal de las otras dos filas o columnas, el determinante de la matriz resultante coincide con el de la inicial.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ba_{11} + ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ba_{21} + ca_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ba_{31} + ca_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ba_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ba_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ba_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ca_{22} \\ a_{31} & a_{32} & ca_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|$$



Ejercicios:

1.- Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$, calcula:

a) $|2A|$ b) $|-5A|$ c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ \frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}a_{33} \end{vmatrix}$

4.- Determinantes de orden n .

Para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden n cualquiera, pueden utilizarse dos métodos:

- Desarrollar el determinante por los elementos de una fila o columna.
- Utilizar el método de Gauss y las propiedades de los determinantes.

Antes de desarrollar el primer método definimos los siguientes conceptos:

Dada una matriz cuadrada A de orden n , se llama submatriz **complementaria del elemento a_{ij}** a la matriz de orden $n - 1$ que resulta al suprimir en A la fila i y la columna j . Esta matriz se expresa como α_{ij} .

Ej. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, entonces: $\alpha_{21} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_{22} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\alpha_{31} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Si A es una matriz cuadrada de orden n , se llama **menor complementario del elemento a_{ij}** al determinante de la submatriz complementaria del elemento a_{ij} , es decir, $|\alpha_{ij}|$.

Ej. En el ejemplo anterior, $|\alpha_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 29$, $|\alpha_{33}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$

Dada una matriz cuadrada A de orden n , se llama **adjunto del elemento a_{ij}** al número A_{ij} definido por la siguiente expresión:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |\alpha_{ij}|$$

Si sustituimos cada elemento de A por su adjunto, se obtiene otra matriz que recibe el nombre de **matriz adjunta de A** , y se expresa como **Adj (A)**.

Ej. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -25; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -29; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

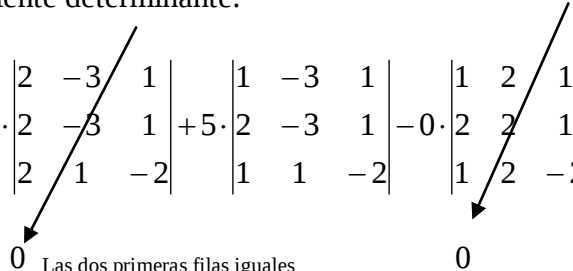
$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$\text{Luego } \text{Adj} (A) = \begin{pmatrix} -25 & -1 & 10 \\ -29 & -7 & 8 \\ 15 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, el cálculo de un determinante de orden n por los elementos de una línea (fila o columna) será igual a la suma de los productos de cada una de los elementos de dicha línea por sus respectivos adjuntos.

Ej. Determina el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$



0 Las dos primeras filas iguales 0

$$= 5 \cdot (6 + 2 - 3 + 3 - 1 - 12) + 3 \cdot (2 - 12 - 6 + 6 - 4 + 6) = -25 - 24 = -49.$$

Para determinantes de órdenes mayores que cuatro este método resulta muy laborioso. En estos casos resulta más fácil la aplicación del **método de Gauss**, que consiste en transformar el determinante a calcular en otro de forma triangular que tendrá el mismo valor. Finalmente, recordando que el determinante de una matriz triangular coincide con el producto de los elementos de su diagonal principal, su cálculo será inmediato.

Ej. Calcula:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3+F_1 \\ F_2-F_1}]{F_2-F_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4-F_2 \\ F_3-2F_2}]{F_3-2F_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4-F_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

Ejercicios:

1.- Calcula los siguientes determinantes utilizando el método de Gauss:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

2.- Halla los siguientes determinantes por el desarrollo de los elementos de una línea:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

5.- Cálculo de la matriz inversa.

En primer lugar hemos de tener en cuenta las dos propiedades siguientes:

- Si una matriz cuadrada tiene inversa, su determinante es distinto de cero.
- Si una matriz cuadrada es regular, existe su matriz inversa.

Si A es una matriz cuadrada regular, su **matriz inversa** es la definida por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A^t)]$$

Ej.

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ no tiene inversa, pues $|A| = 0$

b) Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Tenemos que $|B| = 2 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Adj}(B)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1.- Halla las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a tendrá inversa la matriz?

b) Hállala para $a = 2$ y para $a = 3$

6.- Rango de una matriz.

Todas las submatrices cuadradas de una matriz de orden $m \times n$ tienen órdenes $p \times p$ con $p \leq m$ y $p \leq n$.

Llamaremos **menores de orden p** de una matriz A a los determinantes de las submatrices cuadradas de A , de orden p .

Ej. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, sus menores de orden dos serán:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

Se llama **rango de una matriz A , rango (A)**, al orden del mayor menor no nulo de dicha matriz.

Ej. Sea la matriz de orden tres $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

El orden del mayor menor es tres. Pero este menor, que coincide con el determinante de la matriz A, es nulo. Por ello el rango no puede ser tres.

Si encontramos algún menor de orden dos no nulo, podemos asegurar que el rango es dos. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2.$$

Para hallar el rango de una matriz también puede utilizarse el método de Gauss, de forma que dicho rango coincide con el número de filas no nulas de la matriz triangular obtenida.

Ej. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 + 2F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas es dos, por tanto, $\text{rango}(A) = 2$.

Ejercicio:

Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ d)

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.- EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ -1 & 20 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -9 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} a & 2a & 3a \\ 2b & 4b & 6b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.- Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x^2 & 3x \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 32 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2x & -1 & 1 \\ x & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} -1 & a & 2a \\ 0 & 3a & 2a \\ 1 & 2a & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 2x & x & -x \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & x & 5 \end{vmatrix} = 18$$

3.- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\det(A) = -2$, calcula:

$$\text{a) } |-A| \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} \frac{1}{3}a & \frac{1}{3}b \\ \frac{3}{2}c & \frac{3}{2}d \end{vmatrix} \quad \text{d) } |3A|$$

4.- Encuentra las matrices adjuntas de las siguientes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & -13 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

5.- Calcula los siguientes determinantes utilizando el desarrollo por los elementos de una línea.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -7 \\ 0 & 14 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & a & -a \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} -11 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

6.- Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden tres, cuyos elementos vienen dados por la expresión $a_{ij} = 2i + j - 4$. Calcula su determinante.

7.- Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden cuatro, cuyos elementos vienen dados por la expresión $a_{ij} = 2i - j$. Calcula su determinante.

8.- Comprueba, sin desarrollarlo, que el siguiente determinante es múltiplo de 30.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 25 \\ 18 & 9 & 20 \\ 14 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

9.- Halla la inversa de las siguientes matrices, utilizando sus determinantes.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

10.- Utilizando el método de Gauss, halla el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 3 & -5 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

11.- Calcula por determinantes el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -5 & 6 & -7 \\ 10 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

12.- Utilizando las propiedades de los determinantes demuestra que:

$$\begin{vmatrix} b+c & 1 & a \\ c+a & 1 & b \\ a+b & 1 & c \end{vmatrix} = 0$$

13.- Calcula, sin desarrollar, el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b+a & b \\ a & c+a & c \\ b & c+b & c \end{vmatrix}$$

14.- Determina para qué valores de a es regular la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & a \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

15.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

16.- Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de AB .

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz?

17.- Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3ax & -x \\ 2a^3 & a^2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -8 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2ac & 4ab \\ -c^2 & 3cb \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 14 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

18.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2x & x \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -3 & 1 \\ -7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

19.- Halla el determinante de A utilizando el desarrollo por los elementos de la línea más conveniente.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

20.- Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21.- Busca el valor de a para que la siguiente matriz tenga rango dos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$$