Matrices

1.- Definición de matriz. Tipos de matrices.

2.- Suma de matrices.

3.- Producto de un número real por una matriz.

4.- Producto y potencias de matrices.

5.- Matriz inversa.

6.- Ecuaciones y sistemas matriciales.

7.- Ejercicios propuestos.

1.- Definición de matriz. Tipos de matrices.

Una matriz real de orden o dimensión *m* x *n* es un conjunto de $m \cdot n$ números reales ordenados en m filas y n columnas encerradas entre paréntesis, que representaremos como **A** o **(a_{ij}):**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dadas dos matrices, A y B, diremos que son **iguales** si tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.

Dada una matriz A, definimos:

Matriz opuesta de A es aquella que obtenemos cambiando el signo de todos los elementos de A, y la representamos por **–A.**

Matriz traspuesta de A es la que obtenemos cambiando en A las filas por las columnas, y la representamos por **A^t.**

Ej. Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, entonces: $-A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

Si nos fijamos en el orden o la dimensión de una matriz, definimos:

- **Matriz fila** es aquella cuyo orden o dimensión es 1 x *n*, es decir, la que tiene una única fila.
- **Matriz columna** es la que tiene orden o dimensión *m* x 1, es decir, la que tiene una única columna.
- **Matriz cuadrada** es la que tiene orden o dimensión *n* x *n*, es decir, tiene el mismo número de filas que de columnas. En este caso se dice que la matriz es de orden *n*.

Ej. Matriz fila: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; matriz columna: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; matriz cuadrada: $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Dentro del conjunto de las matrices, las **matrices cuadradas** constituyen un subconjunto importante, por lo que poseen definiciones propias.

Dada una matriz cuadrada de orden *n* se llama **diagonal principal** a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ y **diagonal secundaria** a la formada por los elementos $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonal secundaria diagonal principal

Asimismo, una matriz cuadrada de orden *n* diremos que es:

- **Triangular superior** si todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.
- **Triangular inferior** si todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son iguales a cero.
- **Diagonal** si todos los elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero.
- **Simétrica** si todos los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Triangular superior   Triangular inferior   Diagonal   Simétrica

Si nos fijamos en los elementos de la matriz, definimos:

- **Matriz identidad, I,** es aquella matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno.
- **Matriz nula** es la que tiene todos sus elementos iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identidad de orden 3, I_3 Nula de orden 3x2

Ejercicios:

1.- ¿De qué tipo es cada una de las siguientes matrices?

$$A=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- Escribe la opuesta y la traspuesta de:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3.- ¿A qué es igual $\left(A^t\right)^t$?

2.- Suma de matrices.

Dadas dos matrices, $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, ambas de dimensión *m* x *n*, definimos la suma de **A y B** como una nueva matriz de orden *m* x *n* que se obtiene al sumar los elementos de A y de B que se encuentren en el mismo lugar, y lo expresamos por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Sean dos matrices A y B tales que:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es evidente que para poder sumar dos matrices ambas han de tener la misma dimensión.

Ejercicios:

1.- Efectúa la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.- Comprueba con algunos ejemplos que la traspuesta de la matriz suma de dos matrices es igual a la suma de las dos matrices traspuestas.

3.- En un instituto A, hay 43 chicas y 40 chicos en 3º de la ESO, y 41 chicas y 50 chicos en 4º de la ESO, mientras que en otro instituto B, en 3º de la ESO hay 103 chicas y 90 chicos, y en 4º de la ESO hay 70 chicas y 80 chicos. Ordena estos datos en forma de matrices y calcula el número de chicas y chicos por curso en los dos institutos juntos.

3.- Producto de un número real por una matriz.

Dada la matriz $A=(a_{ij})$ de dimensión *m* x *n*, definimos el **producto de un número real λ por la matriz A** como una nueva matriz de orden *m* x *n*, que se obtiene multiplicando cada elemento de A por λ. Lo expresamos así:

$$\boldsymbol{\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})}$$

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \cdots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si consideramos el conjunto de las matrices de orden *m* x *n* con la operación producto de un número real por una matriz, se cumplen las siguientes **propiedades:**

- $\lambda\cdot(\mu\cdot A)=(\lambda\cdot\mu)\cdot A$
- $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$
- $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$
- $1\cdot A = A$
- $(\lambda\cdot A)^t=\lambda\cdot A^t$

Donde $\lambda,\ \mu\in\Re$ y A y B son matrices de orden *m* x *n*.

Ej. Una fábrica de material deportivo tiene excedentes en camisetas, pantalones y deportivas y quiere venderlos aplicando un 30% de descuento en todas las prendas. Lo expresamos así:

	Camisetas	Pantalones	Deportivas
Precios iniciales	20€	30€	60€

Para calcular los nuevos precios, habrá que multiplicar cada elemento de esta matriz por 0,7; es decir, realizar el producto de un número real por una matriz:

$$0{,}7\cdot\begin{pmatrix}20 & 30 & 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 21 & 42\end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $5\cdot\begin{pmatrix}0 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -9\\ -6 & 3\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ **b)** $\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 6\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

2.- En un instituto hay 140 estudiantes en 3º de la ESO y 150 en 4º de la ESO. Ordena estos datos en una matriz y calcula el número de estudiantes aprobados por curso si este año se sabe que fueron el 60% en cada curso.

3.- Comprueba mediante algunos ejemplos que $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$

4.- Producto y potencias de matrices.

Dadas dos matrices A = (a_{ij}) de dimensión *m* x *n* y B = (b_{jk}) de dimensión *n* x *p*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Definimos el **producto de A y B** como una matriz C = (c_{ik}) de dimensión *m* x *p* donde cada elemento c_{ik} se obtiene multiplicando escalarmente la fila i de A por la columna k de B.

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}$$

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n1} & \ldots\ldots\ldots & a_{11}\cdot b_{1p}+a_{12}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{np} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{n1} & \ldots\ldots\ldots & a_{m1}\cdot b_{1p}+a_{m2}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{np} \end{pmatrix}$$

Para multiplicar dos matrices no es necesario que sean del mismo orden, pero sí que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.

Ej. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$, calcula A·B.

1º) El número de columnas de A coincide con el número de filas de B (3).

2º) La dimensión de la matriz producto será *m* x *p*, es decir, 2 x 2.

A·B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)\cdot1+2\cdot(-2)+0\cdot(-4) & (-1)\cdot0+2\cdot3+0\cdot1 \\ (-2)\cdot1+(-1)\cdot(-2)+3\cdot(-4) & (-2)\cdot0+(-1)\cdot3+3\cdot1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$

Ej. Dadas las matrices A y B del ejercicio anterior, calcula B·A.

B·A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & -7 & 9 \\ 2 & -9 & 3 \end{pmatrix}$

*No se cumple la propiedad conmutativa, es decir, A·B $\neq$ B·A

El producto de matrices cumple las siguientes propiedades:

- Si A, B y C son matrices tales que A·B y B·C están definidas, también lo están (A·B)·C y A·(B·C), y se tiene que:

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

- Si A, B y C son matrices tales que A·B y B + C están definidas, también lo están A·(B+C) y (A·B)+(A·C), y resulta que:

$$A\cdot(B+C) = (A\cdot B)+(A\cdot C)$$

- Si A, B y C son matrices tales que A+B y A·C están definidas, también lo están (A+B)·C y A·C+B·C, y se tiene que:

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$$

- Si A·B está definida, $B^t \cdot A^t$ también lo está, y resulta que:

$$(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Aunque muchas de las propiedades de las operaciones con números reales se verifican también en las operaciones con matrices, existen otras, que no se verifican:

- El producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa:

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

- Si A·B = A·C, no podemos deducir que B = C

Ej. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Pero: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Si A·B = 0, no tienen por qué ser A o B iguales a la matriz nula:

Ej. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el conjunto de matrices cuadradas podemos definir la **potencia de matrices** como:

$$A^2 = A\cdot A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A\cdot A\cdot A$$

……………………..

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{\text{(n veces)}}$$

Ej. Calcular las potencias sucesivas de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$

Llegamos a la conclusión de que:

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\n & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1.- Calcula todos los productos posibles entre las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\2 & -1 & 5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\0 & 4\\3 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\0 & -1 & 2 & 1\\0 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

2.- Halla I^n, siendo I la matriz identidad de orden cuatro.

3.- Dadas las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 2 & 1\\1 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-2 & 2 & 1\\3 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ halla:}$$

a) (A · B) · B

b) A · (B · A)

4.- Calcula A^2, A^3, A^4, …, A^n, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5.- Matriz inversa.

Si nos restringimos al conjunto de las matrices cuadradas de orden *n* con la operación de multiplicar, podemos considerar, además de las propiedades anteriores:

- La existencia de **elemento neutro**, que será la matriz identidad de orden *n*, y que, por tanto, siempre existirá.
- El **elemento inverso**, que será la matriz inversa. Esta matriz no siempre existe, pero de hacerlo será única y se define así:

Llamamos **matriz inversa** de una matriz cuadrada **A** de orden *n* a otra matriz de orden *n* que representaremos como $\mathbf{A^{-1}}$ tal que:

$$\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

Una matriz es **regular** si tiene inversa. En caso contrario se dice que es **singular.**

Estudiaremos dos métodos para calcular la matriz inversa de **A**.

5.1.- Método directo.

Para hallar A^{-1} resolvemos el sistema obtenido a partir de la ecuación $\mathbf{A^{-1}\cdot A = I}$.

Posteriormente comprobamos que $\mathbf{A\cdot A^{-1} = I}$.

Si el sistema que obtengamos es **incompatible**, entonces la matriz A no tiene inversa.

Ej. Calcular, si existe, la inversa de $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Sea $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, entonces, de $A^{-1}\cdot A = I$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+4y=1 \\ 2x+3y=0 \\ 3z+4t=0 \\ 2z+3t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=-2 \\ z=-4 \\ t=3 \end{array}\right\}$$

Luego: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Comprobamos que $A\cdot A^{-1} = I$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ej. Calcular, si existe, la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ x+2y=0 \\ z+2t=0 \\ z+2t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ sistema incompatible, luego A no tiene inversa.

5.2.- Método Gauss-Jordan.

Para hallar la matriz inversa de A, colocaremos a la derecha de A la matriz identidad del mismo orden $(A|I)$, y al conjunto obtenido le aplicaremos transformaciones elementales por filas hasta obtener $(I|B)$, donde B será la matriz inversa de A. Si al realizar el proceso de transformación alguna de las filas de A se anula, entonces A no tiene inversa.

Ej.- Calcular la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3+4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{7}{5}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+\frac{3}{7}F_3]{F_1+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{array}\right)$$

Luego: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Ejercicios:

1.- Calcula, si existe, la matriz inversa de:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.- Encuentra *x* e *y* tales que A·B = 0, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & x & y \end{pmatrix}$$

6.- Ecuaciones y sistemas matriciales.

Aquellas ecuaciones o sistemas en los que las incógnitas o coeficientes son matrices, se denominan **ecuaciones** o **sistemas matriciales**. Para resolverlas se procede de igual forma que con ecuaciones o sistemas con coeficientes e incógnitas reales, utilizando la suma, la diferencia y el producto de matrices. Hemos de tener presente que el producto de matrices no es conmutativo así como la posible no existencia de la matriz inversa. De este modo, reduciremos la ecuación dada a otra ecuación matricial de una de las formas siguientes:

$$\lambda \cdot X = A, \text{ con } \lambda \in \Re \qquad A \cdot X = B \qquad X \cdot A = B$$

- En primer lugar estudiaremos las ecuaciones que puedan reducirse a la forma $\lambda \cdot X = A$, cuya solución, si multiplicamos por $\frac{1}{\lambda}$, será: $X = \frac{1}{\lambda} \cdot A$

Ej.- Calcular la matriz X que cumple la ecuación: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 3X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

- Si la ecuación a la que podemos reducir la ecuación es de la forma $A \cdot X = B$, entonces:

  –Si existe A^{-1}, la solución será: $X = A^{-1} \cdot B$

  * $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \mathrm{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

  –Si A^{-1} no existe, el sistema no tiene solución.

Ej.- Calcular la matriz X que cumple la ecuación: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{(1)}$

En primer lugar calculamos la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Nota: La ecuación (1) también se puede resolver sustituyendo X por $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

- Si la ecuación a la que podemos reducir la ecuación es de la forma $X \cdot A = B$, entonces:

  –Si existe A^{-1}, la solución será: $X = B \cdot A^{-1}$

  * $X \cdot A = B \Rightarrow (X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot \mathrm{I} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow$
  $X = B \cdot A^{-1}$

  –Si A^{-1} no existe, el sistema no tiene solución.

Para resolver **sistemas de ecuaciones matriciales** procedemos de igual forma que para resolver sistemas de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta las consideraciones particulares de las matrices.

Ej.- Resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Sumando $3X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sustituyendo, por ejemplo, en la primera ecuación y despejando Y: $Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Algunos **sistemas de ecuaciones lineales** también pueden resolverse utilizando matrices.

Sea el sistema: $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$

Podemos expresarlo matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B,$$

donde A es la matriz de los coeficientes, X la matriz de las incógnitas y B la matriz de los términos independientes. Según hemos visto $X = A^{-1} \cdot B$.

Ej. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - 2y + 2z = -6 \end{array}\right\}$$

Matricialmente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$, por tanto:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Así la solución será: $x = 3/2$, $y = 5$, $z = 1/2$

Ejercicios:

1.- Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, resuelve las ecuaciones:

a) $A^2 + 3X = A$

b) $A \cdot X = B$

2.- Calcula X e Y en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & -6 & -7\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

3.- Expresa matricialmente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}2x+y=6\\ -3x-5y=8\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}6x-2y=1\\ 3x+y-2z=0\\ 4y+7z=5\end{array}\right\}$

4.- Utilizando el método estudiado en este tema, resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x-y+z=1\\ x+z=2\\ 2x-3y=-1\end{array}\right\}$$

7.- EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Escribe una matriz de orden 2x3 que cumpla que $a_{ij} = i + j$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2.- Escribe una matriz de orden tres que verifique:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ i = j \\ 0 & si\ \ i \neq j \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Escribe una matriz de orden 1x3 que cumpla que $a_{ij} = i^2 - 3$

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4.- Indica a qué clase pertenece cada una de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **e)** $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

- **a)** Triangular inferior de orden 2.
- **b)** Simétrica de orden 3.
- **c)** Matriz fila.
- **d)** Identidad de orden 2.
- **e)** Diagonal de orden 3, simétrica.
- **f)** Matriz columna, nula.

5.- Calcula la traspuesta y la opuesta de cada una de las matrices de la actividad anterior.

SOLUCIÓN:

a) $-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $-B=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -2\\ -3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\quad B^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

c) $-C=\begin{pmatrix}7 & -4 & -3 & -2\end{pmatrix}$ $\quad C^t=\begin{pmatrix}-7\\ 4\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$

d) $-D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad D^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

e) $-E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad E^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

f) $-F=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad F^t=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

6.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2$

b) $\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\right]^2$

SOLUCIÓN:

a) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}10 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

b) $\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\right]^2=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{9}{2}\\ -\frac{3}{2} & \frac{33}{4}\end{pmatrix}$

7.- Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Demuestra que: $A\cdot B \neq B\cdot A$

SOLUCIÓN:

$$\text{A}\cdot\text{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ 2 & 4 & -3\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\text{B}\cdot\text{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ -3 & 3 & -3\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

$A\cdot B \neq B\cdot A$

8.- Utilizando las matrices de la actividad anterior, calcula:

a) $A \cdot B^t$ **b)** $A^t \cdot B^t$ **c)** $(A \cdot B)^t$ **d)** $A^t \cdot B$

9.- Calcula $A^2 - 2 \cdot A + I$, siendo $A = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden dos.

10.- Halla la potencia *n*-ésima de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

11.- Calcula, si existe la inversa de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ **d)** $D=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

12.- Encuentra el valor de las incógnitas para que se verifique cada una de las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ y & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 1 & -8 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

13.- Halla la matriz X que verifique:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$

14.- Calcula el valor de x e y para que se verifique la igualdad $A^2 - x \cdot A - y \cdot I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, I la matriz identidad de orden dos y $x, y \in \Re$.

15.- Escribe una matriz:

a) Triangular superior de orden 4.

b) De dimensión 3×2.

c) Escalar de orden 3.

16.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A + B - C$ **b)** $A - B + C$ **c)** $2A - 3B$ **d)** $A - 4B + 3C$.

17.- Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Calcula:

a) $A + B$ **b)** $3A - 4B$ **c)** $A \cdot C$ **d)** $A \cdot D$ **e)** $B \cdot C$ **f)** $C \cdot D$

g) $A^t \cdot C$ **h)** $D^t \cdot A^t$ **i)** $B^t \cdot A$ **j)** $D^t \cdot D$ **k)** $D \cdot D^t$

18.- Halla la matriz A que satisface la igualdad:

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ 2 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -2 & 7 & 3\end{pmatrix}+A$$

19.- Calcula a, b ,c y d para que se cumpla:

$$2\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 7\\ -2 & 3d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & a+b\\ c+d & 4\end{pmatrix}$$

20.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$, calcula:

a) $3A-2B$ **b)** $(A+B)^t$ **c)** $A\cdot B$.

21.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, halla A^t y B^t y comprueba que se cumple $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

22.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, calcula:

a) $(A+B)/2$ **b)** $(A-B)^2$ **c)** A^{-1}

23.- Determina los valores de a y b, de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$ verifique $A^2=A$.

24.- ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$?

25.- Calcula la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

26.- Calcula el valor de X:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $3X - 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

27.- Determina la matriz X tal que $A + 2XB = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

28.- Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A la siguiente matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29.- Obtén las matrices X e Y que verifiquen el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y &= \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

SELECTIVIDAD:

30.- Obtener los valores x, y, z, que hacen cierta la siguiente relación matricial:

$$\begin{pmatrix} z & z & 2y \\ 1 & 1 & -z \\ 0 & 3 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ y & y & 0 \\ 1 & 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 94).

31.- Calcular los valores x, y, z, para los que se verifique la igualdad: $A \cdot B = 2C - D$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & z & y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -z & 1 & 2x \\ 1 & -2 & 1 \\ -x & -z & -x \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & -7 \\ -6 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

(Junio 95).

32.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Halla la matriz X que verifique la igualdad: $2X - A \cdot B = A^2$.

(Junio 96).

33.- Determina las matrices A y B sabiendo que: $A-2B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $2A+B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(Septiembre 96).

34.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Halla el valor de X que verifica la igualdad: $A\cdot B-2X=A+3B$.

(Junio 97).

35.- Determina la matriz X que verifica la ecuación: $A^2-X=A\cdot B$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 97).

36.- Determina la matriz X que satisface la ecuación: $3X+I=A\cdot B-A^2$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e I la matriz unidad de orden 3.

(Junio 98).

37.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Hallar la matriz $(A-3I)^2+B^t$, (B^t es la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad).

b) Hallar, si es posible, la matriz inversa de A.

(Septiembre 98).

38.- Determina las matrices A y B, que son soluciones del siguiente sistema matricial:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 2A+B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

(Junio 99).

39.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz B que verifica: $B-I=A^t\cdot A^{-1}$, siendo I la matriz unidad respecto al producto de matrices, A^t, la traspuesta de A y A^{-1} la inversa de A.

(Septiembre 99).

40.- Determina la matriz X que verifica la ecuación $2A\cdot X = B$, donde:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 2000).

41.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ halla las matrices X que verifiquen: $A\cdot X = X\cdot A$

(Septiembre 2001).

42.- Resuelve la ecuación matricial: $A+B\,X = I$, donde:

$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden tres. Justifica la respuesta.

(Junio 2002).

43.- Resuelve la ecuación matricial: $2\,A - 3\,X = B$ donde:

$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 5 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 8 \\ 5 & -9 & 1 \end{pmatrix}$. Justifica la respuesta.

(Septiembre 2002).

44.- Determina la matriz X que verifica la ecuación $B^t - A\cdot X = A$, donde:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y B^t es la traspuesta de B. Justifica la respuesta.

(Junio 2003).