Programación lineal

1.- Origen de la programación lineal

En los siglos XVII y XVIII, grandes matemáticos como **Newton**, **Leibnitz**, **Bernouilli** y, sobre todo, **Lagrange**, que tanto habían contribuido al desarrollo del cálculo infinitesimal, se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.

Posteriormente el matemático fránces Jean Baptiste-Joseph **Fourier** (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático **Gaspar Monge** (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En este año, el matemático ruso Leonodas Vitalyevich **Kantarovitch** publica una extensa monografía titulada *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción* en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, programación lineal .

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por **Koopmans y Kantarovitch**, razón por la cual se suele conocer con el nombre de *problema de Koopmans-Kantarovitch.*

Tres años más tarde, **G. Stigler** plantea otro problema particular conocido con el nombre de régimen alimenticio optimal.

En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, **G.B. Dantzig** formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del *United States Departament of Air Force*, formarían el grupo que dio en denominarse *SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).*

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo SCOOP fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar.

Hacia 1950 se constituyen, fundamentalmente en Estados Unidos, distintos grupos de estudio para ir desarrollando las diferentes ramificaciones de la programación lineal. Cabe citar, entre otros, Rand Corporation, con Dantzig, Orchard-Hays, Ford, Fulkerson y Gale, el departamento de Matemáticas de la Universidad de Princenton, con Tucker y Kuhn, así como la Escuela Graduada de Administración Industrial, dependiente del Carnegie Institute of Technology , con Charnes y Cooper.

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro **Janos von Neuman** (1903-1957), quie en 1928 publicó su famoso trabajo *Teoría de Juegos*. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la *Universidad de Princenton de Estados Unidos*, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En 1858 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: *el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú*. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador *Strena* en 10 días del mes de junio, rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Se ha estimado, de una manera general, que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan sólo un año.

La programación lineal hace historia: El puente aéreo de Berlín

En 1946 comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente, Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posibilidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo).

2.- ¿Qué es la programación lineal?

En infinidad de aplicaciones de la industria, la economía, la estrategia militar, etc. se presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar algunas funciones que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, que llamaremos restricciones.

Para hacernos una idea más clara de estos supuestos, veamos dos ejemplos:

Ejemplo 1: Problema de máximos

En una granja se preparan dos clases de piensos, P y Q, mezclando dos productos A y B. Un saco de P contiene 8 kg de A y 2 de B, y un saco de Q contiene 10 kg de A y 5 de B. Cada saco de P se vende a 3 €. y cada saco de Q a 8 €. Si en la granja hay almacenados 80 kg de A y 25 de B, ¿cuántos sacos de cada tipo de pienso deben preparar para obtener los máximos ingresos?

Ejemplo 2: Problema de mínimos

Una campaña para promocionar una marca de productos lácteos se basa en el reparto gratuito de yogures con sabor a limón o a fresa. Se decide repartir al menos 30000 yogures. Cada yogur de limón necesita para su elaboración 0.5 gramos de un producto de fermentación y cada yogur de fresa necesita 0.2 gramos de este mismo producto. Se dispone de 9 kilogramos *de este producto para fermentación.*
El coste de producción de un yogur de limón es de 0.3 € y 0.2 € uno de fresa.

En los dos ejemplos descritos está claro que tanto la cantidad que deseamos maximizar como la cantidad que deseamos minimizar podemos expresarlas en forma de ecuaciones lineales. Por otra parte, las restricciones que imponen las condiciones de ambos problemas se pueden expresar en forma de inecuaciones lineales.

Tratemos de plantear en términos matemáticos los dos ejemplos anteriores:

1) Si designamos por x al número de sacos de pienso de clase P y por y el número de sacos de pienso de clase Q que se han de vender, la función: $Z = 3x + 8y$ representará la cantidad de € obtenidas por la venta de los sacos, y por tanto es la que debemos maximizar. Podemos hacer un pequeño cuadro que nos ayude a obtener las restricciones:

	Nº	kg de A	kg de B
P	x	$8x$	$2x$
Q	y	$10y$	$5y$
		≤ 80	≤ 25

Por otra parte, las variables x e y, lógicamente, han de ser no negativas, por tanto: $x \geq 0$, $y \geq 0$
Conjunto de restricciones:

$$8x + 10y \leq 80$$

$$2x + 5y \leq 25$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

2) Si representamos por *x* el número de yogures de limón e *y* al número de yogures de fresa, se tiene que la función de coste es:

$$Z = 0.30x + 0.20y.$$

Por otra parte, las condiciones del problema imponen las siguientes restricciones:

- De número : $x + y \leq 80$
- De fermentación: $0.5x + 0.2y \leq 9000$
- Las variables *x* e *y* han de ser, lógicamente, no negativas; es decir: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Conjunto de restricciones:

$$x + y \leq 80$$

$$0.5x + 0.2y \leq 9000$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

En definitiva:

Se llama programación lineal al conjunto de técnicas matemáticas que pretenden resolver la situación siguiente:
Optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo, función lineal de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, expresadas por inecuaciones lineales.

Un problema de programación lineal en dos variables, tiene la siguiente formulación estándar:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad z = f(x,y) = ax + by + c \\ \text{sujeto a:} \qquad a_1x + b_1y \leq c_1 \\ \qquad\qquad\qquad a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

pudiendo cambiarse maximizar por minimizar, y el sentido de las desigualdades.

En un problema de programación lineal intervienen:

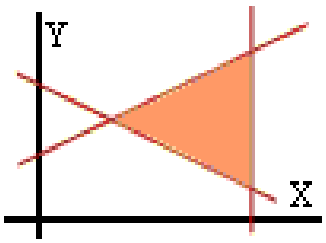
- La función **f(*x, y*) = a*x* + b*y* + c** llamada **función objetivo** y que es necesario optimizar. En esa expresión ***x*** e ***y*** son las **variables de decisión**, mientras que a, b y c son constantes.
- Las **restricciones** que deben ser inecuaciones lineales. Su número depende del problema en cuestión. El carácter de desigualdad viene impuesto por las limitaciones, disponibilidades o necesidades, que son: inferiores a ... (menores: < o $\leq$); como mínimo de ... (mayores: > o $\geq$) . Tanto si se trata de maximizar como de minimizar, las desigualdades pueden darse en cualquiera de los dos sentidos.
- Al conjunto de valores de *x* e *y* que verifican todas y cada una de las restricciones se lo denomina **conjunto (o región) factible**. Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema; todo punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución. En el apartado siguiente veremos como se determina la región factible.

- La **solución óptima** del problema será un par de valores (x_0, y_0) del conjunto factible que haga que f(x, y) tome el valor máximo o mínimo.

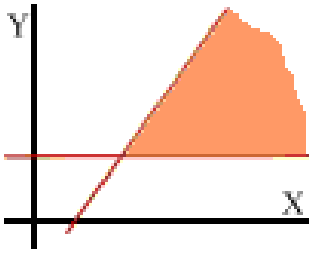
En ocasiones utilizaremos las siglas PPL para indicar problema de programación lineal.

3.- Determinación de la región factible

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de **región factible**, y puede estar o no acotada.



Región factible acotada



Región factible no acotada

La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio ($\leq$ o $\geq$) o en sentido estricto (< o >).

Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con un número de lados menor o igual que el número de restricciones.

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

1) Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

- Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos
- Para averiguar cuál es la región válida, el procedimiento práctico consiste en elegir un punto, por ejemplo, el (0,0) si la recta no pasa por el origen, y comprobar si las coordenadas satisfacen o no la inecuación. Si lo hacen, la región en la que está ese punto es aquella cuyos puntos verifican la inecuación; en caso contrario, la región válida es la otra.

2) La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

Como sucede con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución, en el caso de que exista el conjunto solución puede ser acotado o no.

Veámoslo con un ejemplo:

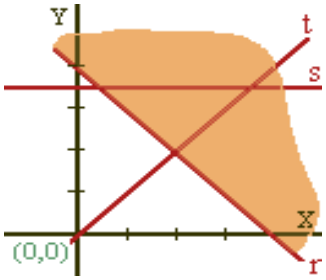
Dibuja la región factible asociada a las restricciones:

$x + y \geq 4$

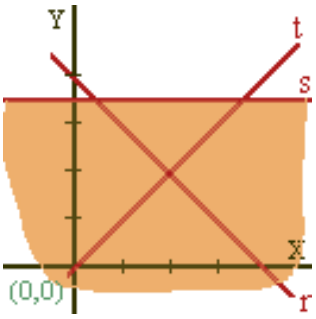
$y \leq 4$

$y \geq x$

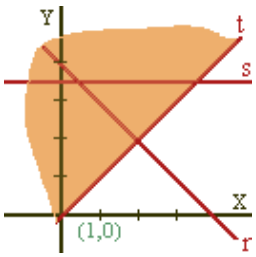
Las rectas asociadas son : r : $x + y = 4$; s : $y = 4$; t: $y = x$



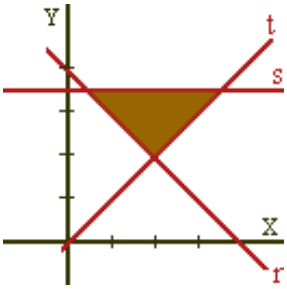
Elegimos el punto O (0,0), que se encuentra en el semiplano situado por debajo de la recta. Introduciendo las coordenadas (0,0) en la inecuación $x + y \geq 4$, vemos que no la satisface: $0 + 0 = 0 < 4$. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado por encima de la recta r: $x + y = 4$.



Procedemos como en el paso anterior. Las coordenadas (0,0) satisfacen la inecuación $y \leq 4$ ($0 \leq 4$). Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano que incluye al punto O.



La recta t asociada a la restricción pasa por el origen, lo cual significa que si probásemos con el punto O (0,0) no llegaríamos a ninguna conclusión. Elegimos el punto (1,0) y vemos que no satisface la inecuación $y \geq x$ ($y = 0 < 1 = x$). Por tanto, el conjunto solución de esta inecuación es el semiplano determinado por la recta t que no incluye al punto (1, 0).



La región factible está formada por los puntos que cumplen las tres restricciones, es decir, se encuentran en los tres semiplanos anteriores.

4.- Método gráfico o de las rectas de nivel.

Las **rectas de nivel** dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Si la función objetivo es $f(x, y) = ax + by + c$, la ecuación de las rectas de nivel es de la forma:

$ax + by + c = 0 \leftrightarrow ax + by = k$

Variando k (o p) se obtienen distintos niveles para esas rectas y, en consecuencia, distintos valores para $f(x, y)$.

En un problema todas las rectas de nivel son paralelas, pues los coeficientes a y b de la recta $ax + by = k$ son los que determinan su pendiente. Por tanto, si k_1 es distinto de k_2, las rectas $ax + by = k_1$ y $ax + by = k_2$ son paralelas. Luego, trazada una cualquiera de esas rectas, las demás de obtienen por desplazamientos paralelos a ella.

Si lo que se pretende es resolver un problema de programación lineal, los únicos puntos que interesan son los de la región factible, y las únicas rectas de nivel que importan son aquellas que están en contacto con dicha región. Como el nivel aumenta (o disminuye) desplazando las rectas, el máximo (o el mínimo) de f(x,y) se alcanzará en el último (o en el primer) punto de contacto de esas rectas con la región factible.

Veamos ahora como se aplica todo esto a la resolución de un problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } Z = f(x, y) = x + y$$

$$\text{sujeto a: } \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$0 \leq y \leq 4$$

$$y \geq x/2$$

1) Representamos la región factible:

- La recta s: $x = 4$ pasa por el punto (4,0) y es paralela al eje Y. Las soluciones de $0 \leq x \leq 4$ son los puntos entre el eje Y y la recta $x = 4$
- La recta r: $y = 4$ pasa por el punto (0,4) y es paralela al eje X. Las soluciones de $0 \leq y \leq 4$ son los puntos entre el eje X y la recta $y = 4$
- La recta t: $y = x/2$ pasa por los puntos (0,0) y (2,1) . Las soluciones de $y \geq x/2$ son los puntos de su izquierda.

Resolviendo los sistemas correspondientes calculamos los vértices de la región factible:

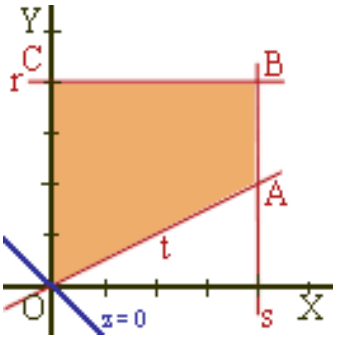
$\{ y = x/2 , x = 0 \}$ nos da el vértice O(0,0)
$\{ x = 4, y = x/2 \}$ nos da el vértice A(4,2)
$\{ x = 4 , y = 4\}$ nos da el vértice B(4,4)
$\{ y = 4 , x = 0 \}$ nos da el vértice C(0,4)

2) Representamos las rectas de nivel:

En nuestro caso son rectas de la forma $x + y = k$. Inicialmente representamos $Z = x + y = 0$. Trasladándola hacia la derecha, obtenemos las rectas: $x + y = 2$, $x + y = 4$, $x + y = 8$, es decir aumenta el nivel.

3) Obtenemos la solución óptima:

Se obtiene en el punto de la región factible que hace máximo k. En nuestro caso esto ocurre en el punto B; es el último punto de contacto de esas rectas con la región factible, para el que k = 8.



Si hay dos vértices, P y Q, que se encuentran en la misma recta de nivel, de ecuación a*x* + b*y* = k .Es evidente que todos los puntos del segmento PQ son de esa recta; por tanto, en todos ellos f(*x,y*) vale k. Así pues, la solución óptima es cualquier punto de esa recta; en particular los vértices P y Q.

5.- Método analítico o Método de los vértices.

El siguiente resultado, denominado **teorema fundamental de la programación lineal**, nos permite conocer otro método de solucionar un programa con dos variables.

En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.

Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.

En el caso de que la región factible no es acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.

La evaluación de la función objetivo en los vértices de la región factible nos va a permitir encontrar el valor óptimo (máximo o mínimo) en alguno de ellos.

Veámoslo con un ejemplo:

$$\text{Maximizar } Z = f(x,y) = 3x + 8y$$

$$\text{sujeto a: } \quad 4x + 5y \leq 40$$

$$2x + 5y \leq 30$$

$$x \geq 0 \,,\, y \geq 0$$

1) Hallar los puntos de corte de las rectas asociadas a las restricciones:

Calculamos las soluciones de cada uno de los seis sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden formar con las cuatro restricciones:

$\{4x + 5y = 40,\ 2x + 5y = 30\}$. Solución A (5,4) $\{4x + 5y = 40\ ,\ x = 0\}$ Solución: B (0,8)

$\{4x + 5y = 40,\ y = 0\}$. Solución: C (10,0) $\{2x + 5y = 30\ ,\ x = 0\}$ Solución: D (0,6)

$\{2x + 5y = 30,\ y = 0\}$. Solución : E (15,0) $\{x = 0,\ y = 0\}$ Solución: O (0,0)

2) Determinar los vértices de la región factible:

Los vértices de la región factible son aquellos puntos que cumplen todas las restricciones.

Si sustituimos los puntos en cada una de las desigualdades tenemos que:

- B no cumple la segunda restricción $2x + 5y \leq 30$, ya que $2\cdot 0 + 5\cdot 8 = 40$. Por tanto, el punto B no es un vértice de la región factible.
- E no cumple la primera restricción $4x + 5y \leq 40$, ya que $4\cdot 15 + 5\cdot 0 = 60$. Por tanto, el punto E no es un vértice de la región factible.

Los puntos A, C, D y O verifican todas las desigualdades, son los vértices de la región factible.

3) Calcular los valores de la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = f(5,4) = 3\cdot 5 + 8\cdot 4 = 47 \qquad f(C) = f(10,0) = 3\cdot 10 + 8\cdot 0 = 30$$

$$f(D) = f(0,6) = 3\cdot 0 + 8\cdot 6 = 48 \qquad f(O) = f(0,0) = 3\cdot 0 + 8\cdot 0 = 0$$

La solución óptima corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice D (0,6).

6.- Esquema práctico

Los problemas de programación lineal pueden presentarse en la forma estándar, dando la función objetivo y las restricciones, o bien plantearlos mediante un enunciado. Si éste es el caso, puede seguirse el camino que indicamos a continuación, ejemplificado con el siguiente problema:

En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de aceite (1 unidad monetaria). ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea máximo?

Obs: Puede parecer algo absurdo maximizar los gastos, pero se ha enunciado de esta forma para que el ejemplo sea lo más completo posible.

Paso 1º: Leer detenidamente el enunciado: determinar el objetivo, definir las variables y escribir la función objetivo.

El objetivo es: halla cuántos bidones de cada tipo hay que almacenar para maximizar los gastos

Suponemos que tal objetivo se consigue almacenado *x* bidones de aceite de girasol e *y* de aceite de oliva

Cómo cada bidón de aceite de girasol cuesta almacenarlo 1 unidad monetaria y lo mismo para uno de aceite, los gastos serán $x + y$

Luego, la función objetivo es:

Maximizar la función $Z = f(x, y) = x + y$

Paso 2º: Reordenar los datos del problema y a partir de las cantidades decididas, x e y, escribir el sistema de inecuaciones que determinan las restricciones.

- *Un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol*: $x \geq 20$
- *Un mínimo de 40 bidones de aceite de oliva*: $y \geq 40$
- *El número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol*: $y \geq x/2$
- *La capacidad total del almacén es de 150 bidones*: $x + y \leq 150$

Además, los números de bidones deben ser cantidades positivas: $x \geq 0$; $y \geq 0$

Obs.: Como veremos en ejemplos posteriores en algunas ocasiones puede interesar utilizar una tabla para recopilar toda la información y hacer los dos primeros apartados

Paso 3º: Expresar el problema en la forma estándar.

Siguiendo con el ejemplo, sería:

$$\text{Maximizar: } Z = f(x, y) = x + y$$

$$\text{sujeto a: } \quad x + y \leq 150$$

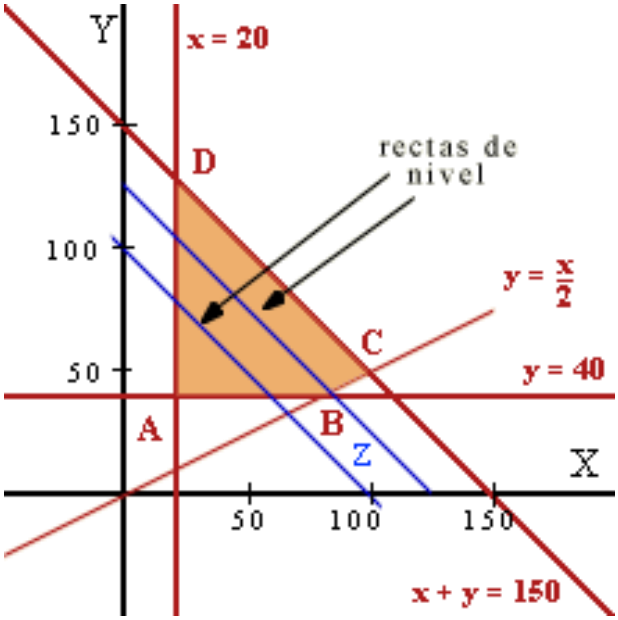
$$y \leq x/2$$

$$x \geq 20 \; ; \; y \geq 40$$

Aquí termina el planteamiento del problema. Para su resolución hay que continuar con:

Paso 4º: Representar gráficamente las restricciones y marcar claramente la región factible.

Para las restricciones anteriores debemos representar las rectas: x + y = 150, y = x/2, x = 20 e y = 40, obteniéndose la región factible que en la figura se encuentra coloreada.



Paso 5º: Hallar las coordenadas de los vértices del polígono obtenido.

Resolviendo los sistemas:{ $x = 20$, $y = 40$ } , { $y = x/2$, $y = 40$ } , { $y = x/2$, $x + y = 150$} , { $x + y = 150$, $x = 20$}; se obtienen los vértices: A(20,40) , B(80,40) , C(100, 50) , D(20,130).

Paso 6º: Sustituir las coordenadas de esos puntos en la función objetivo y hallar el valor máximo o mínimo.

Sustituyendo en f(x, y) = x + y, se tiene:

f(20, 40) = 60 , f(80, 40) = 120 , f(100, 50) = 150 , f(20, 130) = 150

Como el valor máximo se obtiene en los puntos C y D, puede optarse por cualquiera de los dos, o por cualquier punto perteneciente al segmento que los une. Así, por ejemplo, se obtendría el mismo gasto con 40 bidones de aceite girasol y 110 bidones de aceite de oliva; o 90 y 60 respectivamente.

Paso 7º: También es conveniente representar las rectas de nivel para comprobar que la solución gráfica coincide con la encontrada. Esta conveniencia se convierte en necesidad cuando la región factible es no acotada.

En nuestro caso, puede comprobarse que las rectas de nivel tienen la misma pendiente que la recta límite de la restricción $x + y \leq 150$; por tanto, hay múltiples soluciones.

Paso 8º: Por último, como en la resolución de todo problema es necesario criticar la solución: cerciorarse de que la solución hallada es lógica y correcta.

En este ejemplo, no todos los puntos del segmento CD son soluciones válidas, ya que no podemos admitir valores de *x* e *y* no enteros, como ocurriría en el punto (90.5, 59.5).

Obs.: Si un problema en la forma estándar no indica que se debe realizar por el método analítico o gráfico, seguiremos para su resolución los pasos del 4º al 8º.

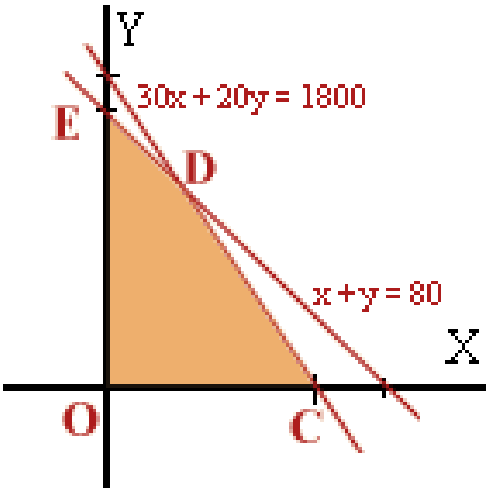
7.- Tipos de soluciones

Los programas lineales con dos variables suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Éstos pueden ser:

Factibles **Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones**. A su vez, pueden ser:

Con solución única

En una urbanización se van a construir casas de dos tipos: A y B. La empresa constructora dispone para ello de un máximo de 1800 millones de pesetas, siendo el coste de cada tipo de casa de 30 y 20 millones, respectivamente. El Ayuntamiento exige que el número total de casas no sea superior a 80. Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa de tipo A es 4 millones y de 3 millones por una de tipo B, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?



- Variables: x = nº de casas tipo A ; y = nº de casas tipo B
- Función objetivo: Maximizar $Z = f(x, y) = 4x + 3y$
- Conjunto de restricciones: El coste total $30x + 20y \leq 1800$. El Ayuntamiento impone $x + y \leq 80$. De no negatividad: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

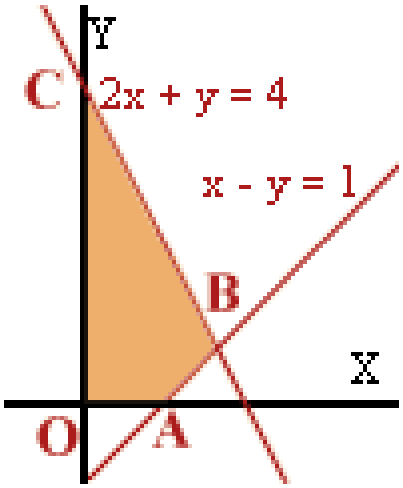
Tiene por región factible la región coloreada.

Si hallamos los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices : f(O) = f(0,0) = 0 ; f(C)=f(60,0) = 240 ;f(D) = f(20,60) = 260 ; f(E) = f(0,80) = 240 La solución es única, y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice D(20,60). Por tanto se deben construir 20 casas de tipo A y 60 de tipo B con un coste de 260 millones de pesetas.

Con solución múltiple **Si existe más de una solución.**.....

Maximizar la función $Z = f(x, y) = 4x + 2y$ sujeta a las restricciones $2x + y \leq 4$, $x - y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

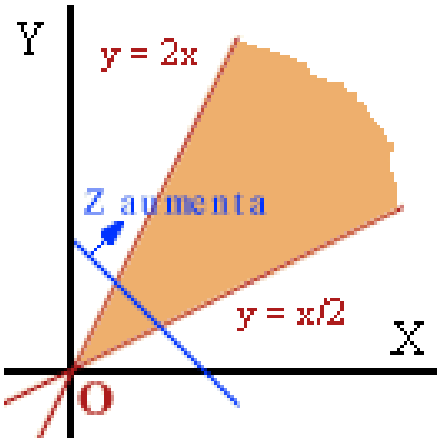
Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:
f(O)=f(0,0) = 0 , f(A) = f(1,0) = 4 ;
f(B)=f(5/3,2/3) = 8 , f(C) = f(0,4) = 8
La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices B y C, por tanto, en todos los puntos del segmento BC.
Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible.
En estos casos, como ya vimos en el capítulo anterior, la función objetivo es paralela a una de las restricciones.



Con solución no acotada **Cuando no existe límite para la función objetivo**

Maximizar la función Z = f(x,y) = x + y sujeta a las restricciones y ≤ 2x , y ≥ x/2 .

Tiene por región factible la zona coloreada que aparece en la figura, que es una región no acotada.
La función crece indefinidamente para valores crecientes de *x* e *y*.
En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución.

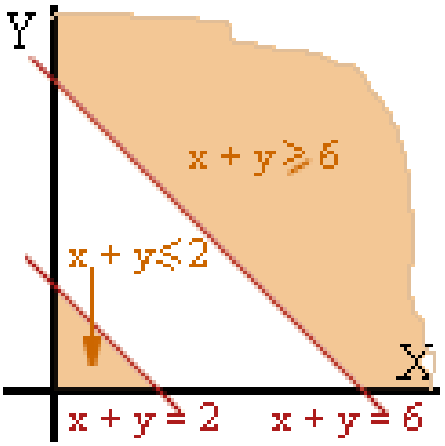


Para que suceda esta situación la región factible debe estar no acotada.

No factibles **Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, las restricciones son inconsistentes.**

Maximizar la función Z = f(x,y) = 3x + 8y sujeta a las restricciones x + y ≥ 6 , x + y ≤ 2 , x ≥ 0 , y ≥ 0.

No existe la región factible, ya que las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones.
Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible.
Este tipo de problemas carece de solución.



8.- Ejercicios resueltos.

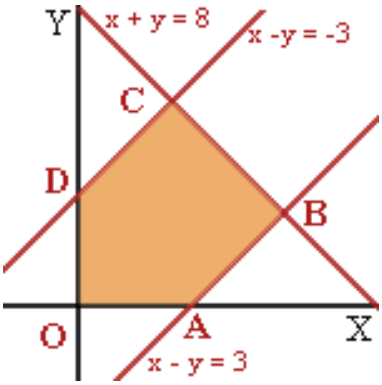
1) Se considera la región del plano determinada por las inecuaciones:
$x + 3 \geq y$; $8 \geq x + y$; $y \geq x - 3$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
a) Dibujar la región del plano que definen, y calcular sus vértices.
b) Hallar el punto de esa región en el que la función F(x, y) = 6x + 4y alcanza el valor máximo y calcular dicho valor.

a) Hay que dibujar la región factible correspondiente. Para ello vamos a representar las rectas:

$$x - y = -3;\ x + y = 8\ ;\ x - y = 3$$

La región factible es la determinada por los vértices O, A, B, C y D.

Las coordenadas de los vértices son: A(3,0) ; B(5.5, 2.5) ; C(2.5, 5.5) ; D(0,3) y O(0,0)



b) Para determinar dónde la función objetivo F(x, y) = 6x + 4y alcanza su máximo, calculamos los valores que toma en los vértices:

F(A) = 18; F(B) = 43; F(C) = 37; F(D) = 12; F(O) = 0.

Luego la función alcanza su máximo en el vértice B y su valor es 43.

2)Las restricciones pesqueras impuestas por la CEE obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2.000 toneladas de merluza y 2.000 toneladas de rape, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3.000 toneladas. Si el precio de la merluza es de 10 €/kg y el precio del rape es de 15 €/kg, ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

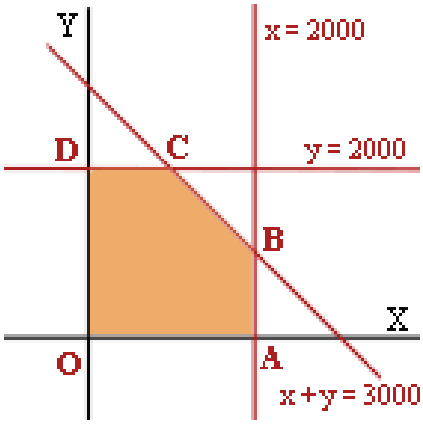
Sean:
x = número de toneladas de merluza
y = número de toneladas de rape

Del enunciado deducimos las restricciones:

- *Como máximo 2000 toneladas de merluza:* $x \leq 2000$
- *Como máximo 2000 toneladas de rape:* $y \leq 2000$
- *Las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3000 toneladas:* $x + y \leq 3000$

La función objetivo que da el beneficio en miles de euros y que hay que maximizar viene dada por:
$f(x, y) = 10x + 15y$

Representando las rectas: $x = 2000$, $y = 2000$, $x + y = 3000$ correspondientes a las fronteras de las restricciones obtenemos la región factible:



Donde los vértices obtenidos son:
A(2000,0) ; B(2000, 1000) ; C(1000, 2000) , D(0,2000) y O(0,0)

Al sustituir sus coordenadas en la función objetivo f resulta:

f(A) = 20000 €. ; f(B) = 35000 €; f(C) = 40000 € ; f(D) = 30000 € y f(O)= 0 €.

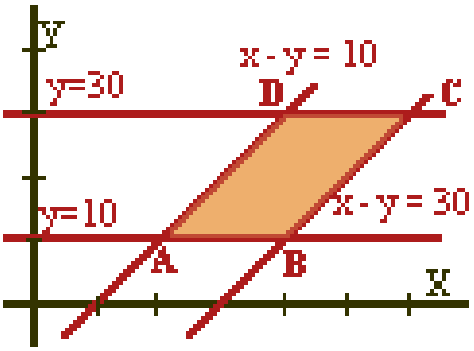
La función objetivo alcanza su máximo en el vértice C, por lo que las cantidades a pescar son 1000 toneladas de merluza y 2000 toneladas de rape.

3) Dos pinturas A y B tienen ambas dos tipos de pigmentos p y q; A está compuesto de un 30% de p y un 40% de q, B está compuesto de un 50% de p y un 20% de q, siendo el resto incoloro. Se mezclan A y B con las siguientes restricciones: La cantidad de A es mayor que la de B. Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos. B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos.

a) ¿Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento p?

b) ¿Qué mezcla hace q mínimo?

Sean x e y, respectivamente, los gramos de las pinturas A y B que aparecen en la mezcla. Traduzcamos a inecuaciones las restricciones a las que se han de someter esas cantidades.



- *La cantidad de A es mayor que la de B*: $x > y$
- *Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos*: $30 \geq x - y \geq 10$
- *B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos*: $30 \geq y \geq 10$

Además sabemos que: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Veamos las cantidades de pigmento de cada tipo:

Cantidad de pigmento de tipo p: $F_p(x, y) = 0.3x + 0.5y$

Cantidad de pigmento de tipo q: $F_q(x, y) = 0.4x + 0.2y$

La región factible es la que aparece en la imagen del margen.

Sus vértices son A(20,10) , B(40,10), C(60,30) y D(40,30)

a) La mayor cantidad de pigmento p, se produce para 60 gramos de la pintura A y 30 de la B:
$F_p(40,30) = 0.3\cdot 40 + 0.5\cdot 30 = 27$; $F_p(20,10) = 11$; $F_p(40, 10) = 17$; $F_p(60, 30) = 33$

b) La menor cantidad de pigmento q, se produce para 20 gramos de la pintura A y 10 de la B:
$F_q(40, 30) = 0.4\cdot 40 + 0.2\cdot 30 = 22$; $F_q(20, 10) = 10$; $F_q(40, 10) = 18$; $F_q(60, 30) = 30$

4) Problema del transporte

Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de ordenador tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan 1000, 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costes de transporte, en € por pieza son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

	Tienda A	Tienda B	Tienda C
Fábrica I	**3**	**7**	**1**
Fábrica II	**2**	**2**	**6**

En este tipo de problemas se exige que toda la producción sea distribuida a los centros de ventas en las cantidades que precisa cada uno; por tanto, no pueden generarse stocks del producto ni en las fábricas ni en los centros de ventas.

En consecuencia, los 800 artículos producidos en la fábrica I deben distribuirse en las cantidades *x, y, z* a A, B y C, de manera que $x + y + z = 800$. Pero, además, si desde I se envían *x* unidades a A, el resto, hasta las 1000 necesarias en A, deben ser enviadas desde la fábrica II; esto es, 1000 - *x* unidades serán enviadas desde II a A.

Un problema particular que se resuelve con los procedimientos de la programación lineal es la situación conocida como problema del transporte o problema de la distribución de mercancías.

Se trata de encontrar los caminos para trasladar mercancía, desde varias plantas (orígenes) a diferentes centros de almacenamiento (destinos), de manera que se minimice el costo del transporte.

Para que un problema pueda ser resuelto por el método del transporte debe cumplir:

1) La función objetivo y las restricciones deben ser lineales.

2) El total de unidades que salen en origen debe ser igual al total de unidades que entran en destino.

En la siguiente tabla de distribución se resume lo dicho:

Envíos	a la tienda A (1000)	a la tienda B (700)	a la tienda C (600)
Desde la fábrica I (800)	x	y	$800 - x - y$
Desde la fábrica II (1500)	$1000 - x$	$700 - y$	$x + y - 200$

La última columna la hemos obtenido de la siguiente forma:
Como $x + y + z = 800$, se tiene que $z = 800 - x - y$, de donde, $600 - z = 600 - (800 - x - y) = x + y - 200$.

Ahora bien, todas las cantidades anteriores deben ser mayores o iguales que cero. Por tanto, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$x \geq 0 \; ; \; 1000 - x \geq 0 \; ; \; y \geq 0; \; 700 - y \geq 0 \; ; \; 800 - x - y \geq 0 \; ; \; x + y - 200 \geq 0$$

Simplificando las desigualdades anteriores, se obtienen las siguientes inecuaciones:

$$1000 \geq x \geq 0 \; ; \; 700 \geq y \geq 0 \; ; \; 800 \geq x + y \geq 0$$

Recordemos que nuestro objetivo es abaratar al máximo los costes de transporte. Estos costes se hallan multiplicando las cantidades enviadas a desde cada fábrica a cada tienda por los respectivos costes de transporte unitario.
Se obtiene:

$$Z = f(x, y) = 3x + 2(1000 - x) + 7y + 2(700 - y) + (800 - x - y) + 6(x + y - 200) = 6x + 10y + 3000$$

En definitiva, el programa lineal a resolver es:

$$\text{Minimizar: } Z = 6x + 10y + 3000$$

$$\text{sujeto a: } \quad 1000 \geq x \geq 0$$

$$700 \geq y \geq 0$$

$$800 \geq x + y \geq 0$$

La región factible se da en la imagen del margen.

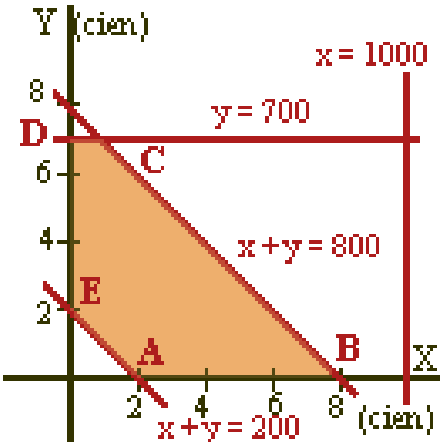
Sus vértices son A(200,0) ; B(800,0) ; C(100,700) ; D(0,700) y E(0,200).

El coste, el valor de Z en cada uno de esos puntos, es:

- en A, 4200
- en B, 7800
- en C, 10600
- en D, 10000
- en E, 5000

El mínimo se da en A, cuando x = 200 e y = 0.

Luego, las cantidades a distribuir son:



Envíos	a la tienda A (1000)	a la tienda B (700)	a la tienda C (600)
Desde la fábrica I (800)	200	0	600
Desde la fábrica II (1500)	800	700	0

5) Problema de la dieta

En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 € y el del tipo Y es de 30 €. Se pregunta:
¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo? *(Islas Baleares. Junio 1990)*

El problema se llama así porque en sus orígenes consistió únicamente en determinar la dieta humana más económica.

En su forma industrial más corriente, el problema consiste en saber cómo mezclar de la forma más económica posible las materias primas que constituyen un producto de fórmula química conocida.

Podemos organizar la información mediante una tabla:

	Unidades	Sustancia A	Sustancia B	Coste
Compuesto X	x	x	$5x$	$10x$
Compuesto Y	y	$5y$	y	$30y$
Total		≥ 15	≥ 15	$10x + 30y$

La función objetivo del coste total, f, si se emplean x kg del compuesto X e y kg del compuesto Y, es :

$$Z = f(x,y) = 10x + 30y$$

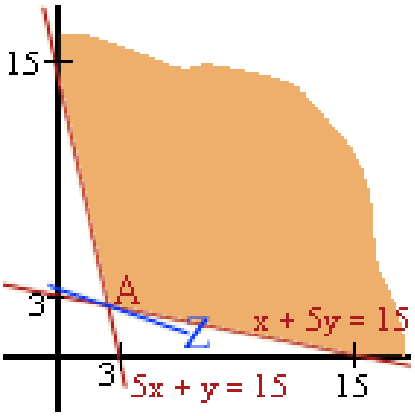
El conjunto de restricciones es: $x \geq 0$, $y \geq 0$; $x + 5y \geq 15$; $5x + y \geq 15$.

Con estos datos representamos la región factible y las rectas de nivel de la función objetivo.

De todas las rectas de nivel que tocan a la región factible, hace que el coste Z sea mínimo la que pasa por el vértice A(2.5,2.5).

La solución óptima se obtiene comprando 2.5 unidades de X y 2.5 unidades de Y.

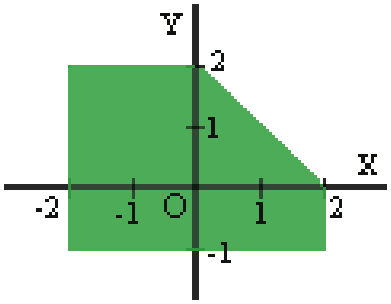
El coste total es: Z = f(2.5,2.5) = 10·2.5 + 30·2.5 = 100 €.



6) Considera el recinto de la figura en el que están incluidos todos los lados y todos los vértices.

a) Escribe las inecuaciones que lo definen

b) Maximiza la función Z = *x + y*



a)

- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por (2,0) y (0,2):

$$(0,2) \rightarrow 2 = m\cdot 0 + n \rightarrow n = 2$$

$$y = mx + n \qquad \rightarrow y = -x + 2 \rightarrow x + y = 2$$

$$(2,0) \rightarrow 0 = m\cdot 2 + 2 \rightarrow m = -1$$

Los puntos del recinto (por ejemplo, el (0,0)) verifican $x + y \leq 2$

- Ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por (0,2): $y = 2$.
  Los puntos del recinto verifican $y \leq 2$
- Ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por (0,-1): $y = -1$
  Los puntos del recinto verifican $y \geq -1$
- Ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por (2,0) : $x = 2$
  Los puntos del recinto verifican $x \leq 2$
- Ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por (-2,0): $x = -2$
  Los puntos del recinto verifican $x \geq -2$

Las inecuaciones que cumplen los puntos del recinto son:

$$x + y \leq 2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$-1 \leq y \leq 2$$

b) Como la dirección de la función Z = $x + y$ a maximizar es la misma que la del borde $x + y = 2$, resulta que esta recta es tal que deja todo el recinto a un lado, precisamente del lado que hace $x + y \leq 2$. Por tanto, el máximo de Z = $x + y$ para (x, y) en el recinto se alcanza para cualquier punto de ese segmento del borde y tiene por valor 2.

9.- Ejercicios propuestos

1) Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las inecuaciones:
$x \leq 2$; $x \geq -2$; $y \leq 1$ (*León. Junio 1990*)

2) Describir mediante un sistema de desigualdades la región interior del polígono convexo con vértices en los puntos: O(0,0) , A(0,4), B(4,0), C(3,3). *(Madrid. Junio 1995)*

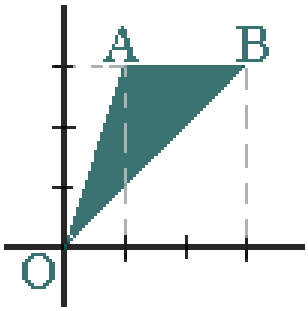
3) Escribe inecuaciones que definan una región plana cerrada de modo que los puntos (1,0) y (0,1) pertenezcan a dicha región, y que los puntos (0,0) y (2,2) no pertenezcan. Haz una representación gráfica de la región que elijas. *(León. Junio 1993)*

4) Escribe un conjunto de inecuaciones que tengan como solución común el interior de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2 respectivamente y se apoyan en los ejes coordenados X e Y. (Puedes elegir cualquiera de las posibles colocaciones) (*Cantabria. Junio 1991*)

5) Dada la región del plano definida por las inecuaciones:
$x + y - 1 \geq 0$; $0 \leq x \leq 3$; $0 \leq y \leq 2$.
¿Para qué valores de la región es máxima la función $Z = 5x + 2y$? (*Universidades de Galicia. Junio 1996*)

6) Maximizar la función $F(x,y) = 3x + 2y$ en el dominio $y + 2x \geq 0$; $3y - x \leq 1$; $2 \geq x \geq 0$; $y \geq 0$ *(Córdoba. Junio 1995*)

7) Se considera el recinto plano de la figura en el que están incluidos los tres lados y los tres vértices de las rectas asociadas a las desigualdades



a) Hallar las inecuaciones que definen el recinto.

b) Maximizar la función $Z = 3x - 6y$ sujeta a las restricciones del recinto. *(León. Junio 1990*)

8) Se considera la región del primer cuadrante determinada por las inecuaciones:
$x + y \leq 8$; $x + y \geq 4$; $x + 2y \geq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
a) Dibujar la región del plano que definen, y calcular sus vértices.
b) Hallar el punto de esa región en el que la función $F(x,y) = 3x + 2y$ alcanza el valor mínimo y calcular dicho valor. *(Universidades Andaluzas. Junio 1996*)

9)
a) Representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes inecuaciones lineales:
$x + 2y \leq 10$; $x + y \geq 2$; $x \leq 8$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
b) Hallar el máximo y el mínimo de $F(x,y) = x - 3y$, sujeto a las restricciones representadas por las inecuaciones del apartado anterior. *(Zaragoza. 1991*)

10) Hallar los valores máximo y mínimo de la función f(x,y) = x + 2y - 2, sometida a las restricciones:
$x + y - 2 \geq 0$; $x - y + 2 \geq 0$; $x \leq 3$; $y \geq 1$; $y \leq 3$ *(Madrid. 1990)*

11) Resolver gráficamente el siguiente problema de programación lineal:
Maximizar Z = 0.75x + y
Sujeto a : $x + 3y \leq 15$
$5x + y \leq 20$
$3x + 4y \leq 24$
$x \geq 0$; $y \geq 0$
¿Es única la solución ? *(Alicante. Junio 1990)*

12) Sea el recinto poligonal convexo definido por el sistema de inecuaciones:
$x - 4y \geq -4$; $x + 2y - 4 \leq 0$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
Se pide:
a) Dibujarlo y hallar sus vértices.
b) Razonar si es posible maximizar en él la función f(x,y)= x + 2y .
c) En caso afirmativo, calcular el valor óptimo correspondiente y puntos donde se alcanza.
(Jaén. Junio 1995)

13) Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 cent €. por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 7 cent. €. por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo.
Lo que se pregunta el estudiante es: ¿cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo? *(Cataluña. Junio 1996)*

14) En una fábrica de bombillas se producen dos tipos de ellas, las de tipo normal valen 4.5 € y las halógenas 6 €. La producción está limitada por el hecho de que no pueden fabricarse al día más de 400 normales y 300 halógenas ni más de 500 en total. Si se vende en toda la producción, ¿cuántas de cada clase convendrá producir para obtener la máxima facturación? (*Universidad de Murcia.Junio 1996*)

15) Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos pero no menos de 200. En cada vuelo A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana 3000 €. y 2000 por cada viaje del B. ¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo? *(Murcia. Junio 1991)*

16) Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene dos naves. En la nave A, para hacer la carrocería de un camión, se invierten 7 días-operario, para fabricar la de un coche se precisan 2 días-operario. En la nave B se invierten tres días operario tanto en carrocerías de camión como de coche. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días operario, y la nave B de 270 días-operario. Si los beneficios que se obtienen por cada

camión son de 36 mil € y por cada automóvil 12 mil €, ¿cuántas unidades de cada uno se deben producir para maximizar las ganancias? *(Universidades de Castilla- La Mancha. Junio 1996)*

17) Un pastelero tiene 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27'5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P y Q. Para hacer una docena de pasteles de tipo P necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 de mantequilla y para hacer una docena de tipo Q necesita 6 kg de harina, 0'5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.
El beneficio que obtiene por una docena de tipo P es 20 y por una docena de tipo Q es 30.
Halla, utilizando las técnicas de programación lineal, el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo.
(*Universidades de Castilla y León. Septiembre 1997*)

18) Una empresa fabrica dos tipos de rotuladores, de la clase A a 2 €. la unidad y de la clase B a 1.5 €. En la producción diaria se sabe que el número de rotuladores de la clase B no supera en 1000 unidades a los de la A; además, entre las dos clases no superan las 3000 unidades y la de la clase B no bajan de 1000 unidades por día. Hallar el costo máximo y mínimo de la producción diaria. *(La Laguna. 1992)*

19) Una compañía fabrica dos modelos de sombrero: Bae y Viz. La fabricación de los sombreros se realiza en las secciones de moldeado, pintura y montaje. La fabricación de cada modelo Bae requiere 2 horas de moldeado, 3 de pintura y una de montaje. La fabricación del modelo Viz requiere tres horas de moldeado, 2 de pintura y una de montaje. Las secciones de moldeado y pintura disponen, cada una, de un máximo de 1.500 horas cada mes, y la de montaje de 600.Si el modelo Bae se vende a 100 € el modelo Viz a 120 € ¿qué cantidad de sombreros de cada tipo ha de fabricar para maximizar el beneficio mensual? (*Universidades de Galicia. Junio 1997)*

20) Una persona tiene 5.000 euros para invertir en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene bastante riesgo con un interés anual del 10% y el tipo B es bastante seguro con un interés anual del 7%. Decide invertir como máximo 3000 € en A y como mínimo 1000 € en B, e invertir en A por lo menos tanto como en B. ¿Cómo deberá invertir sus 5000 € para maximizar sus intereses anuales? (*Universidad de Castilla y León. Junio 1996*)

21) Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Por otra parte, el triple de la producción de vinagre sumado con cuatro veces la producción de vino se mantiene siempre menor o igual a 18 unidades.
Halla el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 8 €. y cada unidad de vinagre de 2 €. *(Universidades Andaluzas. Junio 1996)*

22) Un hipermercado necesita como mínimo 16 cajas de langostino, 5 cajas de nécoras y 20 de percebes. Dos mayoristas, A y B, se ofrecen al hipermercado para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden dicho marisco en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de langostinos, 1 de nécoras y 2 de percebes. Por su parte, B envía en cada contenedor 2, 1 y 7 cajas respectivamente. Cada contenedor que suministra A cuesta 2100 €.,

mientras que los del mayorista B cuestan 3000 € cada uno. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades mínimas con el menor coste posible? *(Universidades Públicas de la Comunidad de Madrid. Septiembre 1997)*

23) Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son 8, 12, 9 unidades respectivamente. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando los productos A y B cuyos contenidos por kilogramo son los que se indican en la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste(kg)
Producto A	2	6	1	600
Producto B	1	1	3	400

¿Cuántos kilogramos de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo? *(Universidad de La Laguna. Junio 1997)*

24) Podemos comprar paquetes de abono A o B. Cada paquete contiene las unidades de potasio (K), fósforo (P) y nitrógeno (N) indicadas en la tabla, donde se da el precio del paquete.

Marca	K	P	N	Precio
A	4	6	1	15
B	1	10	6	24

¿En qué proporción hay que mezclar ambos tipos de abono para obtener al mínimo precio un abono que contenga 4 unidades de K, 23 de P y 6 de N? *(Valencia. 1993)*

25) Dos mataderos, P y Q, se encargan de suministrar la carne consumida semanalmente en tres ciudades, R, S y T: 20, 22 y 14 toneladas, respectivamente. El matadero P produce cada semana 26 toneladas de carne, y el Q, 30. Sabiendo que los costes de transporte, por tonelada de carne, desde cada matadero de a cada ciudad, son los reflejados en la siguiente tabla:

	R	S	T
P	1	3	1
Q	2	1	1

Determinar cuál es la distribución de transporte que supone un coste mínimo.
(Extremadura. 1993)

26) Desde dos almacenes A y B, se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diarias y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta,

mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias.
El coste del transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado por el siguiente cuadro:

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	10	15	20
B	15	10	10

Planificar el transporte para que el coste sea mínimo. *(Salamanca. Junio 1992)*

27) Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos; por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 20 electricistas y 30 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es 250 €. por electricista y 200 €. por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio? *(Universidad de Murcia. Junio 1998)*

28) Una empresa fabrica dos tipos de colonia: A y B. La primera contiene un 15% de extracto de jazmín, un 20% de alcohol y el resto es agua y la segunda lleva un 30% de extracto de jazmín, un 15% de alcohol y el resto es agua. Diariamente se dispone de 60 litros de extracto de jazmín y de 50 litros de alcohol. Cada día se pueden producir como máximo 150 litros de la colonia B. El precio de venta por litro de la colonia A es de 5 € y el de la colonia B es 20 €. Hallar los litros de cada tipo que deben producirse diariamente para que el beneficio sea máximo. *(Universidades Públicas de la Comunidad de Madrid. Septiembre 1996)*

29) Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses con 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 80 €. y el de cada uno de los pequeños, 60 €. ¿Cuántos autobuses de cada clase convendrá alquilar para que el viaje resulte lo más económico posible? *(País Vasco. Junio 1990)*

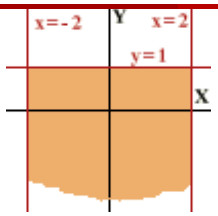
30) La casa X fabrica helados A y B, hasta un máximo diario de 1000 kg. La fabricación de un kg de A cuesta 1.80 €. , y uno de B, 1.5. Calcule cuántos kg de A y B deben fabricarse, sabiendo que la casa dispone de 2700 €/día y que un kg de A deja un margen igual al 90% del que deja uno de B. *(Las Palmas de Gran Canaria. Junio 1991)*

31) A una persona que quiere adelgazar se le ofrecen dos productos A y B para que tome una mezcla de ambos con las siguientes recomendaciones:
No de be tomar más de 150 g de la mezcla ni menos de 50 g.
La cantidad de A debe ser igual o superior a la de B.
No debe incluir más de 100 g de A
Si 100g de A contiene 30 mg de vitaminas y 450 calorías y 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas y 150 calorías:

a) ¿Cuántos gramos de cada producto debe mezclar para obtener el preparado más rico en vitaminas?
b) ¿Y el más pobre en calorías?
(País Vasco. 1992)

32) Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Si se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos respectivamente y la cantidad de A es como mucho el doble que la de B, calcule los kilos de A y y los de B que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de A vale 2 €. y uno de B 10 €. ¿Puede eliminarse alguna restricción? *(Zaragoza. Junio 1990)*

33) Los precios de venta de dos productos A y B están en la misma relación que 7 y 6. La producción de estos está definida por las siguientes condiciones:
La producción de A es mayor o igual que la mitad de B y menor o igual que el doble de B.
La producción total es tal que si sólo se produce A, se producen 10 kg, y si sólo se produce B, se producen 15 kg. Y si se producen conjuntamente, la producción máxima se encuentra en la recta que une los puntos anteriores.
Dar la función objetivo de la venta de ambos productos.
Expresar mediante inecuaciones el recinto definido.
Determinar los kilos que se han de producir de cada producto para obtener el máximo beneficio. *(Universidad de Cantabria. Junio 1997)*

1) 

2) $x > 0$, $y > 0$, $x + 3y < 12$, $3x + y < 12$ **.**

3) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$, $x + y \geq 1$. Entre otras posibles soluciones.

4) $x > 0$, $y > 0$, $2x + y < 2$.

5) La función Z es máxima para el vértice (3,2), que es 19 **.**

6) La función alcanza su máximo en el vértice (2,1) y su valor es 8

7) Las inecuaciones son: $y \leq 3$; $y - x \geq 0$; $y - 3x \leq 0$. La función es máxima para (0,0) y el valor alcanzado es 0

8) Los vértices son A(6,0), B(8,0) , C(0,8) , D(0,4) y E(2,2). La función toma el mínimo valor en el vértice D y vale 8

9) El máximo se alcanza en (8,0) y es 8. El mínimo se alcanza en (0,5) y es - 15 **.**

10) El máximo se alcanza en (3,3) y es 7. El mínimo se alcanza en (1,1) y es 1.

11) El máximo es 6 y se alcanza en todos los puntos de un segmento. Por tanto, la solución no es única. Una posible solución es (56/17,60/17) **.**

12) Como Z = x + 2y es paralela a x + 2y - 4 = 0, cualquier punto del segmento que une (4/3,4/3) con (4,0) maximiza Z, dando el mismo valor , 4.

13) 50 de A y 100 de B **.**

14) 200 normales y 300 halógenas.

15) La máxima ganancia se obtiene con 120 viajes del avión A y 80 del avión B y es de 52 millones de pesetas.
El mínimo consumo se obtiene con 30 viajes de cada avión y es 48000 litros.

16) 66 automóviles y 24 camiones.

17) 5 docenas de pasteles del tipo P y 22. 5 docenas de pasteles del tipo Q.

18) La solución óptima mínima es producir 1000 rotuladores de clase B y ninguno de la clase A, siendo el costo mínimo diario de 150000 pesetas.
La solución óptima máxima es producir 2000 rotuladores de la clase A y 1000 de la clase B, siendo el costo máximo de 550000 pesetas.

19) 300 sombreros del tipo Bae y 300 sombreros del tipo Viz.

20) 300000 pesetas en acciones del tipo A y 200000 pesetas en acciones del tipo B

21) 3 unidades de vino y 2 de vinagre.

22) 3 contenedores al mayorista A y 2 al mayorista B.

23) 3 kg del producto A y 2 kg del producto B.

24) Se minimiza el precio con 1/2 de A y 2 de B.

25)

	R	S	T
P	20	0	6
Q	0	22	8

26)

	M1	M2	M3
A	8	2	0
B	0	6	9

27) 20 electricistas y 30 mecánicos.

28) 100 litros de colonia del tipo A y 150 litros de colonia del tipo B.

29) Hay que alquilar 5 autobuses de 40 plazas y 4 de 50 plazas. El precio es de 620 euros.

---

30) 1000 kg del helado tipo B y nada de tipo A.

---

31) (a) 100 g de A y 50 g de B
(b) 25 g de A y 25 g de B.

---

32) 1.6 kg de A y 0.8 kg de B.

---

33) $f(x,y) = (7/6)x + y$
$2y \geq x \geq y/2$; $x/10 + y/15 \leq 1$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
30/7 kilogramos del producto A y 60/7 kilogramos del producto B.