

Los sistemas **no homogéneos** pueden ser **incompatibles** (sin solución) o **compatibles**. En éste último caso pueden ser **determinados** (solución única) o **indeterminados** (infinitas soluciones).

Los sistemas **homogéneos** siempre tienen solución, la trivial $(0,0, \dots, 0)$. Si ésta es única el sistema es compatible **determinado**. En caso contrario tendrá infinitas soluciones, es decir, será compatible **indeterminado**.

Un sistema de ecuaciones lineales queda determinado por sus coeficientes y sus términos independientes. Si situamos estos números en las mismas posiciones en las que aparecen, obtenemos un conjunto ordenado o **matriz** que caracteriza el sistema.

La matriz formada por los coeficientes se denomina **matriz de los coeficientes**; si a ésta le añadimos los términos independientes, se obtiene la **matriz ampliada**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de los coeficientes

Matriz ampliada

Ej. Sea el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 4x - 5y + 2z &= -3 \\ x - 3y + 6z &= 7 \\ x - y + 5z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

La matriz de los coeficientes será: $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ y la ampliada: $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & | & -3 \\ 1 & -3 & 6 & | & 7 \\ 1 & -1 & 5 & | & 1 \end{pmatrix}$

2.- Sistemas equivalentes.

En la obtención de sistemas equivalentes es muy importante el siguiente concepto: una **combinación lineal** de varias ecuaciones es otra ecuación que resulta al multiplicar las anteriores por números distintos de cero y sumarlás.

Dos **sistemas** de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Para obtener sistemas equivalentes a uno dado, se pueden efectuar las siguientes transformaciones:

- Multiplicar una ecuación del sistema por un número no nulo, lo que equivale a multiplicar todos los elementos de la fila correspondiente de la matriz ampliada del sistema por dicho número.
- Cambiar el orden de las ecuaciones; esto corresponde a cambiar el orden de las filas correspondientes de la matriz ampliada.

- Añadir o suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las demás ecuaciones; es decir, suprimir una fila en la matriz ampliada que sea combinación lineal de las demás.
- Sumar a una ecuación del sistema otra multiplicada por un número distinto de cero; sumamos a una fila de la matriz ampliada otra fila multiplicada por un número no nulo.
- Despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en las demás.

Ej. Sea el sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ 4x + y - 3z = 5 \\ 6y - 22z = 10 \end{cases}$$
. Su matriz ampliada será:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -22 & 10 \end{array} \right)$$

Si a la 2ª fila le sumamos la 3ª multiplicada por -2 , se obtiene:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 6 & -22 & 10 \end{array} \right)$$
.

Multiplicamos la 3ª fila por $\frac{1}{2}$, obteniendo:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 3 & -11 & 5 \end{array} \right)$$

Al ser las dos últimas filas iguales suprimimos una de ellas:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 5 \end{array} \right)$$

Es decir, el sistema de ecuaciones inicial es equivalente a:
$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ 3y - 11z = 5 \end{cases}$$

3.- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Estos sistemas tienen la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Como conocemos de cursos anteriores existen tres métodos para resolver estos sistemas:

Método de sustitución

En una de las ecuaciones del sistema se despeja una incógnita y se sustituye en la otra ecuación, quedando transformada en una sola ecuación con una incógnita. Resuelta ésta, sustituimos el valor de la incógnita ya calculada en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial o en la expresión que obtuvimos cuando despejamos la 1ª incógnita; así obtenemos el valor de ésta.

Ej. Resolver:
$$\begin{cases} 7x - 3y = 23 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$$

Despejamos y de la segunda ecuación: $y = 5 - 4x$ (1). Sustituimos en la 2ª ecuación:

$$7x - 3 \cdot (5 - 4x) = 23 \Rightarrow 7x - 15 + 12x = 23 \Rightarrow 19x = 38 \Rightarrow x = 2$$

Sustituyendo en (1): $y = 5 - 4 \cdot 2 \Rightarrow y = -3$

Método de igualación

Consiste en elegir una de las incógnitas, despejarla en las dos ecuaciones del sistema e igualar los segundos miembros; de esta forma se obtiene una ecuación con una sola incógnita. Una vez resulta ésta se procede como en el caso anterior.

Ej. Resolver:
$$\begin{cases} x + 4y = -1 \\ -x - 3y = 0 \end{cases}$$

Despejamos x en ambas ecuaciones:
$$\begin{cases} x = -1 - 4y_{(1)} \\ x = -3y_{(2)} \end{cases}$$

Igualamos: $-1 - 4y = -3y \Rightarrow -1 = 4y - 3y \Rightarrow y = -1$

Sustituyendo en (1) o (2): $x = -3 \cdot (-1) \Rightarrow x = 3$

Método de reducción

Se elige una de las incógnitas para pasar a un sistema equivalente, de forma que los coeficientes de esa incógnita, en las dos ecuaciones, sean iguales u opuestos. Si son iguales, restaremos ambas ecuaciones y, si son opuestos, las sumaremos; así, quedará eliminada la incógnita elegida y despejaremos el valor de la otra. Para determinar la resolución procedemos como en los casos anteriores.

Ej. Resolver:
$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos:
$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 18 \\ -4x + 3y = 7 \\ \hline 5y = 25 \end{array}$$

$\Rightarrow y = 5$. Sustituyendo en la 1ª ecuación: $2x + 5 = 9 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

Ejercicio:

Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más adecuado:

a)
$$\begin{cases} 3x + 3y = 18 \\ 2x - 12 + 2y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x = 6 - 2y \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6y + 2x = 8 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 7x - y = 8 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

4.- Método de Gauss.

El método de Gauss, conocido también como de triangulación, se basa en el método de reducción que, aplicado sucesivas veces, permite obtener un sistema escalonado equivalente al dado inicialmente.

Un sistema de ecuaciones lineales es **escalonado** si tiene la forma:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Para resolver sistema escalonado, si es compatible, se trabaja a partir de la última ecuación del sistema. Se resuelve esta y se sustituye el resultado obtenido en la penúltima ecuación, lo que permite encontrar el valor de la incógnita anterior. Se repite el proceso de forma progresiva hasta llegar a la primera ecuación, de la que se deduce el valor de la primera incógnita.

La resolución de los sistemas escalonados es fundamental en el **método de Gauss**. Supongamos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

El método de Gauss consiste en transformar este sistema en otro equivalente y escalonado, que se resolverá siguiendo el proceso analizado anteriormente para este tipo de sistemas.

Ej. Resolver por el método de Gauss el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) & \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) & \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 + 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{F_2 - 5F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El sistema asociado a la última matriz es escalonado:
$$\left. \begin{array}{l} -x + y - z = -2 \\ 5y - 4z = -2 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

De la última ecuación obtenemos: $\boxed{z = 3}$.

Sustituyendo en la 2ª: $5y - 4 \cdot 3 = -2 \rightarrow \boxed{y = 2}$.

Por último, llevando estos valores a la 1ª ecuación: $-x + 2 - 3 = -2 \rightarrow \boxed{x = 1}$.

Ej. Resolver:
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ 4x - y + z = 5 \\ 7y + z = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 7 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es **compatible indeterminado**: $0 \cdot z = 0 \rightarrow z$ cualquier valor.

Haciendo

$$z = \lambda \Rightarrow -7y - \lambda = -7 \Rightarrow y = \frac{7 - \lambda}{7} \Rightarrow 2x + 3 \frac{7 - \lambda}{7} + \lambda = 6 \Rightarrow x = \frac{-4\lambda + 21}{14}$$

Es decir: $\left(x = \frac{-4\lambda + 21}{14}; y = \frac{7 - \lambda}{7}; z = \lambda \right)$

A veces es útil cambiar el orden de dos columnas teniendo en cuenta que, a la hora de resolver el sistema escalonado obtenido, se ha permutado el orden de dos incógnitas.

Ej. Resolver:
$$\begin{cases} -6x + y = 2 \\ 2x - 2y + 2z = -1 \\ -5y + 6z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 6 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 5F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 2 & 3 \\ 0 & -30 & 6 & 14 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{0 \cdot z = 5 \rightarrow 0 = 5}$$

Como la última fila tiene todos los elementos nulos, excepto el término independiente, el sistema es **incompatible**.

Ejercicios: Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2z = 2 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ -3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y - z = 10 \\ 3x + 2y - 4z = 8 \\ 4x + y - z = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + y + 2z = 12 \\ -x - y + 5z = -18 \\ 3x + 2y - 3z = 18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 2y + 2z = -2 \\ 2x + 6y + 4z = 2 \\ 2x - y - 2z = -4 \end{cases}$

5.- Método de Gauss-Jordan.

Este método es una variante del método de Gauss, en el que el sistema obtenido, tras efectuar las operaciones de equivalencia, adquiere la forma:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 & & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & = b_2 \\ & & a_{33}x_3 \\ & & \dots \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\}$$

Es decir, transformamos en cero todos los coeficientes que no estén situados en la diagonal de la matriz del sistema.

Ej. Resolver el sistema:
$$\left. \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 3 \\ 3x + 2y - z & = & 4 \\ -x + y - z & = & -2 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 + 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 5F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 + F_3 \\ F_2 + 4F_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{5F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Luego: $-5x = -5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$; $5y = 10 \Rightarrow \boxed{y = 2}$; $\boxed{z = 3}$

Ej. Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left. \begin{array}{rcl} 2x + 3z & = & 4 \\ x - 2y + 3z & = & 2 \\ 4x - y + 7z & = & 9 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{rcl} 2x - 3y + 2z & = & 1 \\ x + 2y - z & = & 2 \\ 4x + 8y - 4z & = & 6 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{rcl} 2x - 5y + 7z & = & 4 \\ x + 4y - 6z & = & -1 \\ -x/2 - 2y + 3z & = & 2 \end{array} \right\} \end{array}$$

6.- Discusión de sistemas por el método de Gauss.

Discutir un sistema consiste en estudiar si este es compatible o incompatible y, en el primer caso, si éste es determinado o indeterminado.

Sea un sistema de ecuaciones lineales y sea A la matriz ampliada del sistema.

- Si al reducir A a la forma triangular aparece alguna fila en la que son nulos todos los elementos, excepto el correspondiente al término independiente, el sistema es **incompatible**.
- En caso contrario el sistema es **compatible** y distinguimos dos casos:
 - Si el número de filas no nulas de la matriz triangular coincide con el número de incógnitas, el sistema es **determinado**.
 - Si el número de filas no nulas es menor que el número de incógnitas, el sistema es **indeterminado**.

Ej. Discutir por Gauss:
$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -2x + 3y = 5 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observamos que el número de filas no nulas es dos, que coincide con el número de incógnitas; por tanto, es un sistema **compatible determinado**.

Ej. Discutir por Gauss:
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Ahora todos los elementos de la última fila son nulos, excepto el término independiente que es 4; se trata de un sistema **incompatible**.

Ej. Discutir, según los distintos valores del parámetro a el sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + y = 6 \\ 3x + 4y + az = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & a & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & a & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 + F_2 \\ F_3 + 4F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 11 & a + 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{11F_2 - 5F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -5a - 9 & 41 \end{array} \right)$$

De la última fila deducimos que si $-5a - 9 = 0$ el sistema sería **incompatible**. En caso contrario será **compatible determinado**. Es decir:

- Si $a = \frac{-9}{5}$, el sistema es **incompatible**.
- Si $a \neq \frac{-9}{5}$, el sistema es **compatible determinado**.

Si consideramos que $a \neq \frac{-9}{5}$, la solución será: $(x, y, z) = \left(\frac{6a+19}{9+5a}, \frac{12a-3}{9+5a}, \frac{-41}{9+5a} \right)$

Ej. Discutir por Gauss:
$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -2 \\ 2 & a & 2a \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_1 + 3F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 + 3a & 4 + 6a \end{array} \right)$$

- Si $a \neq \frac{-2}{3}$ sistema **compatible determinado**, con solución $(x, y) = (0, 2)$
- Si $a = \frac{-2}{3}$ sistema **compatible indeterminado** de solución general $(x, y) = (\alpha, 3\alpha+2)$

Ejercicios:

1.- Aplicando el método de Gauss, clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 3z = 3 \\ 6y + 3z = 3 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 3 \\ -3x - 6y + 9z = -9 \\ 2x + 4y - 6z = 11 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 2 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ x + 3y + 2z - t = 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

2.- Discute los siguientes sistemas según el valor de los parámetros:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} ax + 8y = 14 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 5 \\ 8x - 2y = a \\ 2x + 7y = -3 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 2 \\ -x + ay + z = 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

7.- Discusión de sistemas mediante rangos.

Otro método para discutir un sistema de ecuaciones lineales es teniendo en cuenta los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada (coeficientes más términos independientes).

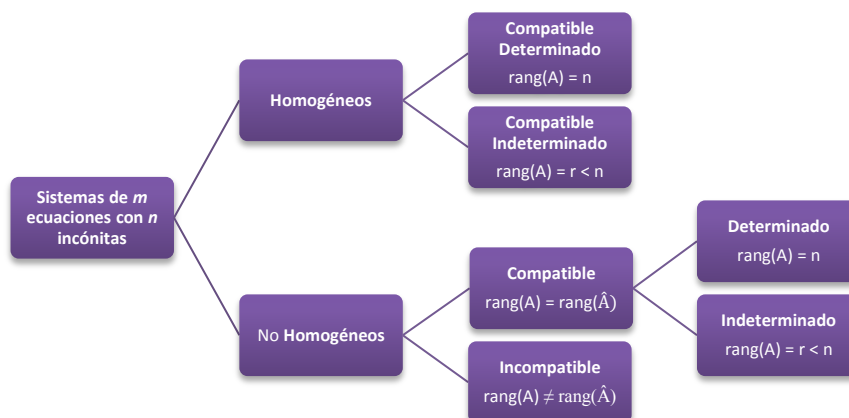
Teorema de Rouché:

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A , es igual al rango de la matriz ampliada, $(\bar{A})$; es decir:

$$\text{S es compatible} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\hat{A})$$

Se puede afirmar que todo sistema homogéneo (términos independientes nulos) es compatible, ya que al ser nula la columna de los términos independientes coinciden los rangos de A y $\hat{A}$

Atendiendo al rango de la matriz de los coeficientes A y su ampliada $\hat{A}$, podemos establecer la siguiente clasificación para un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas.



Si en un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se verifica que $\text{rang}(A) = \text{rang}(\hat{A}) = r < n$, entonces este sistema es compatible **indeterminado** con $n - r$ grados de indeterminación, es decir, las soluciones del sistema dependerán de $n - r$ parámetros.

Ej. Discutir el siguiente sistema:
$$\left. \begin{aligned} x + y - z + t &= 1 \\ 2x - y + z - t &= 3 \\ 3x + y + 2t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Al tratarse de un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas tenemos que $A_{3 \times 4}$ y $\hat{A}_{3 \times 5}$.

Luego tanto el rango de A como el rango de $\hat{A}$ pueden ser, como mucho, iguales a tres.

Tomamos el menor:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\hat{A}) = 3 < 4$$

El sistema será compatible indeterminado y depende de un $(4 - 3)$ parámetro.

Ej. Discutir el sistema:
$$\left. \begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= 2 \\ 2x + 2y - z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, tenemos que $\text{rang}(A) = 2$

Sea la matriz ampliada: $\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right)$.

Tomamos el menor: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, luego $\text{rang}(\hat{A}) = 3$.

Como $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(\hat{A}) = 3$, el sistema es incompatible.

Ej. Discutir, según los distintos valores de a , el sistema:
$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 2z &= 2 \\ x - 2y + z &= 3 \\ x + 3y + az &= 6 \end{aligned} \right\}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = -5a - 15$; $|A| = 0 \Leftrightarrow -5a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = -3$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, tenemos que:

Si $a = -3$, $|A| = 0$ y $\text{rang}(A) = 2$.

Si $a \neq -3$, $|A| \neq 0$ y $\text{rang}(A) = 3$

Considerando la matriz ampliada, el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, luego $\text{rang}(\hat{A}) = 3$, independiente del valor de a .

En resumen:

- Si $a \neq -3$, tenemos que $\text{rang}(A) = \text{rang}(\hat{A}) = 3$, siendo el sistema compatible determinado.
- Si $a = -3$, se tiene que $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(\hat{A}) = 3$ y el sistema será incompatible.

Ejercicio:

1.- Discute los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} x - 3z - 2t = -1 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x + y + z + t = 1 \end{array} \right\} & \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} x - y + z = -2 \\ x - 2y + z = -4 \\ 2x - 3y + 2z = -2 \end{array} \right\} \end{array}$$

2.- Discute los siguientes sistemas según los distintos valores del parámetro a .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} x - ay = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{array} \right\} & \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 4 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = a \end{array} \right\} \end{array}$$

*Cuando el sistema de ecuaciones lineales depende de parámetros, pueden utilizarse conjuntamente, y de la siguiente forma, los dos métodos de discusión estudiados anteriormente: después de realizar el determinante de la matriz de los coeficientes para hallar los valores de los parámetros que lo anulan, podemos sustituir estos en la matriz de los coeficientes y efectuar su discusión aplicando el método de Gauss.

Ej.- Discutir el sistema: $\left. \begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ 2x + y + z = a \end{array} \right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2 = (a - 1) \cdot (a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ó } a = 2$$

Si $a = 1$ ó $a = 2$ tenemos que $|A| = 0$, luego para estos valores el sistema será compatible indeterminado o incompatible.

Aplicamos Gauss:

$$a = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(\hat{A}) = 2 < 3$ (nº incógnitas) $\Rightarrow$ sistema **compatible determinado**.

$$a = 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(\hat{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema **incompatible**.

8.- Regla de Cramer.

La regla de Cramer es un método para resolver de forma rápida un sistema de ecuaciones lineales *compatible y determinado*.

Regla de Cramer

Un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas tiene solución y es única cuando la matriz A de los coeficientes es regular, es decir, $|A| \neq 0$.

Cada componente x_i de la solución del sistema $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ viene dada por el cociente de dos determinantes: en el denominador, el determinante de la matriz de los coeficientes, y en el numerador, el resultante de sustituir en el determinante de la matriz de los coeficientes la columna i -ésima por la columna de los términos independientes:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Son **sistemas de Cramer** aquellos que tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y cuya matriz de los coeficientes es regular.

Ej. Resolver el sistema:
$$\begin{cases} x - z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Primero veamos si es un sistema de Cramer: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y además el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 4; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 2$$

La solución es pues: $(x, y, z) = (4, -1, 2)$

Ejercicio:

Resuelve, cuando sea posible, por la regla de Cramer.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x - 5y + 4z = -2 \\ 2x - 3y + 3z = -2 \\ 3x - 4y + 5z = -2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y - z = -3 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 1 \end{cases}, \text{ con } a \neq b. \end{array}$$

9.- Ejercicios propuestos.

1.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso en que sea un sistema compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 0 \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{array} \right\}$$

Justifica tu respuesta.

2.- Un país importa 21000 vehículos mensuales de 3 marcas A, B, C, al precio de 7500, 9100 y 12000 euros respectivamente. Si el total de la importación asciende a 201,8 millones de euros y de la marca A importa el 40% de las otras dos marcas juntas, ¿cuántos vehículos de cada marca entran en el país?.

Justifica tu respuesta.

3.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro t , y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\left. \begin{array}{l} tx + 2z = 0 \\ 2x - y + tz = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Justifica tu respuesta.

4.- Juan decide invertir una cantidad de 1200 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 41,5 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas. Justifica tu respuesta.

5.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso en que sea un sistema compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + 3z = a \end{array} \right\}$$

Justifica tu respuesta.

6.- Si la altura de Carlos aumenta el triple de las diferencias de las alturas de Antonio y Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las alturas de los tres suman 515 centímetros. Ocho veces la altura de Antonio equivale a nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas.

7.- De un número de tres cifras se sabe que la suma de éstas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198, y si se intercambian las de las unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encuentra el número.

8.- Discute en función del parámetro a el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

9.- Los sueldos del padre, la madre y un hijo sumados dan 3250 €. La madre gana el doble que el hijo. El padre gana $\frac{2}{3}$ de lo que gana la madre. ¿Cuál es el sueldo de cada uno?

10.- Una persona adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 1, 1.2 y 1.5 €/Kg., respectivamente. El importe total de la compra fue de 11.60 €. El peso total de la misma 9 Kg. y, además, compró 1 Kg. más de naranjas que de manzanas. ¿Cuántos kilogramos compró de cada uno de los productos?

11.- Discute y resuelve, según los valores de a , los sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2 y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + z = 8 \\ 2x + y + z = 10 \\ 3x + 2y + az = 5 \end{cases} \end{array}$$

12.- Para que valores de k el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + 3z = k \\ x + z = 1 \end{cases}$ tiene solución única?

13.- Discute y resuelve, cuando sea posible, el sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$

14.- En una granja avícola hacen pienso mezclando trigo, cebada y avena. La primera vez utilizan 10 fanegas de trigo, 20 de cebada y 30 de avena y resulta a un precio total de 867 €. La segunda vez utilizan 15 fanegas de trigo, 12 de cebada y 10 de avena y resulta a un precio total de 60 €. Finalmente se utilizan 8 fanegas de trigo, 6 de cebada y 5 de avena y el precio total es de 31 €. ¿Cuál es el precio de la fanega de cada componente?

15.- Una fábrica de chocolates emplea, para una determinada marca, leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios por kilo son: leche, 0,8 €; cacao 4 €; y almendra, 13 €. En un día se fabrican 9000 Kg. de chocolate de dicha marca por un coste total de 25800 €. ¿Cuántos Kg. se utilizan de cada componente?

16.- Para un determinado partido de fútbol se ponen a la venta tres tipos de localidades: Fondo, General y Tribuna. Se sabe que la relación entre los precios de las localidades de Tribuna y General es de $\frac{19}{18}$ y entre General y Fondo es $\frac{6}{5}$. Si al comprar tres localidades, una de cada clase, se pagan en total 1300 €, ¿cuál es el precio de cada tipo de localidad?

17.- Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación de sus billetes asciende a 3525 €. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 15 €; cuántos han pagado el 20 % del billete, y cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20 % es el doble del número de viajeros que paga el billete entero.

18.- Dado el sistema
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

- a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.
- b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado.
- c) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

19.- Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. Averigua cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

20.- Un país importa 21000 vehículos mensuales de 3 marcas A, B, C, al precio de 7500, 9100 y 12000 euros respectivamente. Si el total de la importación asciende a 201,8 millones de euros y de la marca A importa el 40% de las otras dos marcas juntas, ¿cuántos vehículos de cada marca entran en el país?.

Justifica tu respuesta.

21.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro t , y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\left. \begin{array}{l} tx + 2z = 0 \\ 2x - y + tz = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Justifica tu respuesta.

22.- Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.

- a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.
- b) Resolverlo.

23.- Obtén los valores de a tales que el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + az = 0 \\ x - z = a + 1 \\ -ax + y = -a \end{array} \right\}$$

tenga:

- a) Una única solución.
- b) Infinitas soluciones.
- c) Ninguna solución.