TEMA 6 LÍMITE Y CONTINUIDAD

6.1. IDEA INTUITIVA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

Dada la función f(x) = x^2 , ¿a qué valor se aproxima f(x) cuando x se aproxima a 2?

Dada la función f(x) = $\frac{(x+1)}{x}$, ¿a qué valor se aproxima f(x) cuando x tiende a $+\infty$?

Por lo tanto decimos que el límite de una función f(x) cuando x se aproxima a un número, **a**, es **L**, si cuando tomamos valores próximos a "**a**", f(x) toma valores próximos a **L**.
(Recuerda que a y L pueden ser números reales o $\pm\infty$)

ACTIVIDAD 1: Calcula el valor al que se aproxima la función f(x) = Ent (x) cuando x se aproxima a 2.
(La función f(x) = Ent(x) es la función PARTE ENTERA DE X, la cual nos devuelve la parte entera de cualquier número decimal, es decir, Ent(3,23) = 3, Ent(2,21) = 2, etc..).

Pero veamos el concepto de límite de manera más formal.

6.2 CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

– **Límites laterales:**

a) LÍMITE POR LA IZQUIEDA: El limite de una función f(x), cuando x tiende a un punto c por la izquierda, es un número real L, cuando para valores de x muy próximos a c y menores que c, los valores de la función se aproximan al número L.

$$\lim_{x \to c izq} f(x) = L$$

b)<u>LÍMITE POR LA DERECHA:</u>El limite de una función f(x), cuando x tiende a un punto c por la derecha, es un número real L, cuando para valores de x muy próximos a c y mayores que c, los valores de la función se aproximan al número L.

$$\lim_{x \to cder} f(x) = L$$

- **Límite de una función en un punto:** Decimos que el límite de una función f(x), cuando x tiende a un punto c, es un número L, cuando:

$$\lim_{x \to cizq} f(x) = \lim_{x \to cder} f(x) = L$$

Se escribe $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

ACTIVIDAD 2: Calcula $\lim_{x \to 1} Ent(x)$ *para ello calcula primero los límites laterales.*

ACTIVIDAD 3: Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ *para ello calcula primero los límites laterales.*

ACTIVIDAD 4: Calcula $\lim_{x \to 2} x^3 - 1$ *para ello calcula primero los límites laterales.*

- **Límite de una función en el infinito:**

  - El limite de una función f(x), cuando x tiende a $+\infty$, es un número real L, cuando para valores muy grandes de x, los valores de la función se aproximan a número L.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

  - El limite de una función f(x), cuando x tiende a $-\infty$, es un número real L, cuando para valores muy pequeños de x, los valores de la función se aproximan a número L.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

ACTIVIDAD 5: Calcula $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ *ayudándote de una tabla de valores.*

ACTIVIDAD 6: Calcula $\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x}$ *ayudándote de una tabla de valores.*

6.3. CÁLCULO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

Para calcular el límite de una función f(x) en un punto c, basta con sustituir en dicha función la variable x por el punto c, es decir:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Ejemplo: Calcula $\lim_{x \to 3} 3x^2 - 2x + 1$.

$$\lim_{x \to 3} 3x^2 - 2x + 1 = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 22$$

ACTIVIDAD 7: Calcula :

A) $\lim_{x \to +3} \frac{1}{x}$ *B)* $\lim_{x \to 2} x^2 + x + 1$ *C)* $\lim_{x \to 3} X^3 - x^2 + x - 1$

Para calcular el límite de una función f(x) en $\pm\infty$, basta con sustituir en dicha función la variable x por $\pm\infty$, es decir:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = f(\pm\infty)$$

Las reglas para operar con $\pm\infty$ son las siguientes:

SUMAS Y RESTAS:

1) a + ∞ = +∞ // a - ∞ = -∞
2) ∞ + ∞ = +∞ // -∞ - ∞ = -∞

PRODUCTOS:

1) Si k > 0 entonces k·(+ ∞) = +∞ y k·(- ∞) = -∞
2) Si k <0 entonces k·(+ ∞) = -∞ y k·(- ∞) =+∞
3) +∞ ·(+ ∞) = +∞ // -∞ ·(- ∞) = +∞ // +∞ ·(- ∞) = -∞ .

COCIENTES:

1) Si k> 0 entonces: $\frac{+\infty}{k} = +\infty$ // $\frac{-\infty}{k} = -\infty$ // $\frac{k}{0} = +\infty$

2) Si k< 0 entonces: $\frac{+\infty}{k}=-\infty$ // $\frac{-\infty}{k}=+\infty$ // $\frac{k}{0}=-\infty$

3) $\frac{+\infty}{0}=+\infty$ // $\frac{-\infty}{0}=-\infty$

POTENCIAS:

1) Si a>1 entonces: $a^{+\infty}=+\infty$ // $a^{-\infty}=\frac{1}{a^{+\infty}}=0$

2) Si 0<a<1 entonces: $a^{+\infty}=0$ // $a^{-\infty}=\frac{1}{a^{+\infty}}=\frac{1}{0}=+\infty$

LAS SIGUIENTES OPERACIONES SON INDETERMINACIONES QUE NO PODREMOS REALIZAR Y QUE PARA SABER SU VALOR SE PROCEDERÁ DE OTRA FORMA.

1)∞-∞ 2) 0·($\pm\infty$) 3) $\frac{\infty}{\infty}$ 4) $\frac{0}{0}$ 5) ∞^0 6) 0^0 7) $1^{+\infty}$

Veamos como resolver estos casos dependiendo del tipo de función a la que estemos calculando el límite.

6.4 CÁLCULO DEL LÍMITE DE FUNCIONES POLINÓMICAS

- Para calcular el límite de un función polinómica P(x) en un punto c, basta con sustituir en dicha función polinómica la variable x por el punto c, es decir: $\lim_{x\to c} P(x)=P(c)$.
- Para calcular el límite de un función polinómica P(x) en $\pm\infty$, basta con sustituir en dicha función polinómica la variable x por $\pm\infty$, es decir: $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)=P(\pm\infty)$. El límite siempre será $\pm\infty$ el signo dependerá del signo del coeficiente principal.

ACTIVIDAD 8 Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x\to+\infty} x^2-5x+7$ *b)* $\lim_{x\to+\infty} -x^2+7x+5$ *c)* $\lim_{x\to+\infty} x^3+9x^2+6$

d) $\lim_{x\to-\infty} x^2-2x+1$ *e)* $\lim_{x\to-\infty} -x^2+5x+7$ *f)* $\lim_{x\to-\infty} x^3+7x^2+1$

6.5 CÁLCULO DEL LÍMITE DE FUNCIONES RACIONALES.

Para calcular este tipo de límites procedemos así:

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to c}P(x)}{\lim\limits_{x\to c}Q(x)}$$

Al realizar esto pueden presentarse dos indeterminaciones:

a) **Indeterminación** $\frac{0}{0}$ **:**

La indeterminación $\frac{0}{0}$ de funciones racionales desaparece descomponiendo en factores el numerador y el denominador y simplificando.

ACTIVIDAD 9 Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x-4}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-1}{x^2-3}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$

b) **Indeterminación** $\frac{\infty}{\infty}$ **:**

La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ de funciones racionales desaparece dividiendo numerador y denominador por la potencia máxima del denominador.

ACTIVIDAD 10 Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-6x+8}{x^2-2}$ *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4-1}{x^2-1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^5-1}{x^7-1}$

Cuando al sustituir en una función racional obtengamos $\frac{k}{0}$, calculamos los límites laterales.

ACTIVIDAD 11 Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{x-3}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{x+1}$

6.6 CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES IRRACIONALES.

Pueden aparecer las siguientes indeterminaciones:

a) La indeterminación $\frac{0}{0}$ y $\infty-\infty$ de funciones con radicales desaparece multiplicando y dividiendo la función por la expresión radical conjugada.

ACTIVIDAD 12 Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ *b)* $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ *e)* $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{(x+2)(x-3)}-x$

b) La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ de funciones con radicales desaparece dividiendo numerador y denominador por la potencia máxima del denominador.

ACTIVIDAD 13 Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$ *b)* $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2-1}}{3x}$

6.7 CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES DEL TIPO $f(x)^{g(x)}$.

Para calcular este tipo de límites procedemos así:

$$\lim_{x\to c} P(x)^{Q(x)} = \lim_{x\to c} P(x)^{\lim_{x\to c} Q(x)}$$

Puede aparecer la indeterminación 1^{∞} :

Para resolver esta indeterminación utilizamos la definición de número e:

$$e = \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Así trataremos de escribir nuestra función de forma que nos quede una expresión de la forma:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$$

Para ello hacemos lo siguiente:

1. $\lim\limits_{x\to c} P(x)^{Q(x)} = 1^{+\infty}$
2. $\lim\limits_{x\to c} P(x)^{Q(x)} = \lim\left(1+P(x)-1\right)^{Q(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to c}\left(1+P(x)-1\right)^{Q(x)} = \lim\limits_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{P(x)-1}}\right)^{Q(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{P(x)-1}}\right)^{Q(x)} = \lim\limits_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{P(x)-1}}\right)^{\frac{1}{P(x)-1}\cdot(P(x)-1)\cdot Q(x)}$

   llamamos F(x) = $\frac{1}{P(x)-1}$ entonces:
5. $\lim\limits_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{P(x)-1}}\right)^{\frac{1}{P(x)-1}\cdot(P(x)-1)\cdot Q(x)} = \lim\limits_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{F(x)}}\right)^{F(x)\cdot(P(x)-1)\cdot Q(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{F(x)}}\right)^{F(x)\cdot(P(x)-1)\cdot Q(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c}(P(x)-1)\cdot Q(x)}$

6.8 <u>CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.</u>

Se dice que una función f(x) es continua en a si:

1. Existe f(a).
2. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si una función no cumple alguna de estas condiciones, es discontinua en a.

Decimos que la <u>discontinuidad es evitable</u> si:

1. Existe f(a) y $\lim_{x \to a} f(x)$, pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.
2. No existe f(a) y si existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Decimos que la <u>discontinuidad es de salto finito</u>, cuando no existe el $\lim_{x \to a} f(x)$ porque los dos límites laterales son finitos, pero desiguales.

Decimos que la <u>discontinuidad es de salto infinito</u>, cuando uno de los dos límites laterales es infinito.