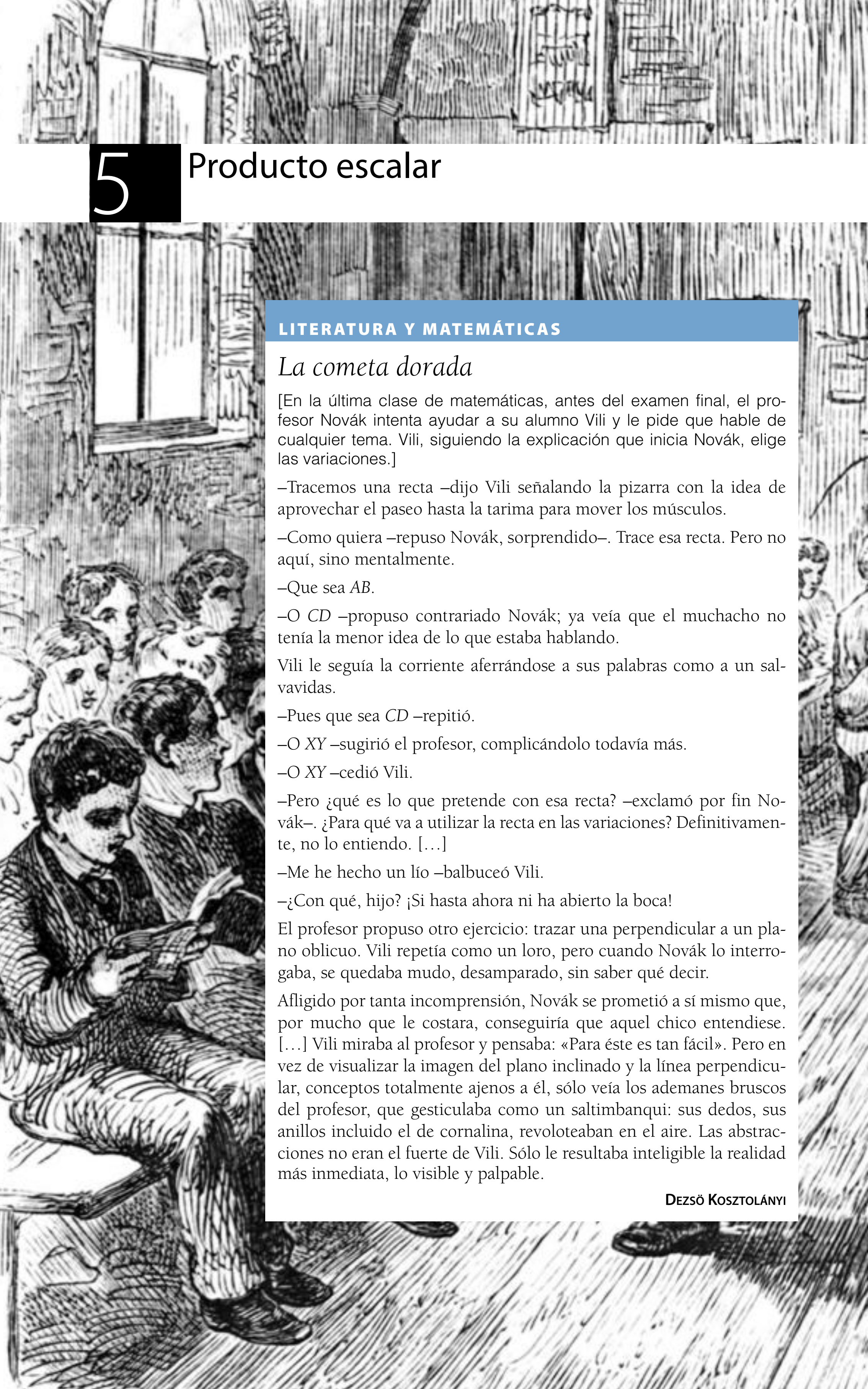


5 Producto escalar

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La cometa dorada

[En la última clase de matemáticas, antes del examen final, el profesor Novák intenta ayudar a su alumno Vili y le pide que hable de cualquier tema. Vili, siguiendo la explicación que inicia Novák, elige las variaciones.]

–Tracemos una recta –dijo Vili señalando la pizarra con la idea de aprovechar el paseo hasta la tarima para mover los músculos.

–Como quiera –repuso Novák, sorprendido–. Trace esa recta. Pero no aquí, sino mentalmente.

–Que sea *AB*.

–O *CD* –propuso contrariado Novák; ya veía que el muchacho no tenía la menor idea de lo que estaba hablando.

Vili le seguía la corriente aferrándose a sus palabras como a un salvavidas.

–Pues que sea *CD* –repitió.

–O *XY* –sugirió el profesor, complicándolo todavía más.

–O *XY* –cedió Vili.

–Pero ¿qué es lo que pretende con esa recta? –exclamó por fin Novák–. ¿Para qué va a utilizar la recta en las variaciones? Definitivamente, no lo entiendo. […]

–Me he hecho un lío –balbuceó Vili.

–¿Con qué, hijo? ¡Si hasta ahora ni ha abierto la boca!

El profesor propuso otro ejercicio: trazar una perpendicular a un plano oblicuo. Vili repetía como un loro, pero cuando Novák lo interrogaba, se quedaba mudo, desamparado, sin saber qué decir.

Afligido por tanta incomprensión, Novák se prometió a sí mismo que, por mucho que le costara, conseguiría que aquel chico entendiese. […] Vili miraba al profesor y pensaba: «Para éste es tan fácil». Pero en vez de visualizar la imagen del plano inclinado y la línea perpendicular, conceptos totalmente ajenos a él, sólo veía los ademanes bruscos del profesor, que gesticulaba como un saltimbanqui: sus dedos, sus anillos incluido el de cornalina, revoloteaban en el aire. Las abstracciones no eran el fuerte de Vili. Sólo le resultaba inteligible la realidad más inmediata, lo visible y palpable.

DEZSÖ KOSZTOLÁNYI

La cometa dorada
Dezsö Kosztolányi

Uno de los protagonistas de esta novela, que se desarrolla en una ciudad de Hungría, es un joven llamado Vili al que no le gustan ni las matemáticas ni la física. Una tarde abre en su habitación el libro de física y observa durante un rato esta fórmula:

$$g = S\sqrt{1 + \frac{4\pi rR}{T^2 g}cos^2\varphi - 2\frac{4\pi R}{r^2 g}cos^2\varphi}$$

Se le fueron las ganas de vivir. «¿Qué sentido tiene esto? –se preguntó confuso–. ¿Quién inventa estas cosas para amargarle la vida a los alumnos?» Sintió rabia. Se le hizo un nudo en la garganta. Los estúpidos números se arrastraban frente a él como gusanos, mientras que las letras lo hacían como larvas.

Mientras esperaba al profesor particular, trató de resolver algunos problemas de matemáticas:

Podía pasar horas leyéndolos, pero en vano: «Un señor compró cinco metros de paño...», «Ocho años atrás un padre era cien veces más viejo que su hijo; ocho años más tarde sólo le faltaban cuatro años para ser tres veces mayor que el mismo hijo...», «Un hombre rico que contrata a dos jornaleros...» Fijándose sólo en lo anecdótico y sin preocuparse de lo que había que resolver, fantaseaba divertidas situaciones con los personajes de los problemas. Se dejaba envolver como en un lento sueño, imaginándose los pormenores: el color del paño, quiénes eran el padre y su hijo, si ese señor tendría barba, si sabría el chaval montar en bicicleta y dónde viviría el rico... Pero, cuando llegaba el momento inevitable de vérselas con los números, desbaratado su juego, se justificaba argumentando: «Pero, vamos a ver, ¿quién necesita ese paño? Yo, seguro que no. Está más que claro que el padre, el hijo y el rico, todos, son unos burros y no sirven para nada».

En la escena que se narra en el texto, el profesor de matemáticas y física, Antal Novák, preocupado porque Vili no ha aprendido nada de lo que ha explicado durante el curso, trata, sin éxito, de enseñarle *algo* antes del examen final.

Determina la ecuación de la recta perpendicular al plano *horizontal* $z = 1$ que pasa por el punto $(-1, 3, 2)$. Como ves, este problema es sencillo. Pero ¿cómo se haría si fuese el plano *inclinado* $2x - y + z = 1$?

Una recta perpendicular al plano horizontal $z = 1$ tiene por vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(-1, 3, 2)\\ \text{Vector director:} & \vec{n} = (0, 0, 1)\end{array}\right\} \rightarrow r\!: \left.\begin{array}{l} x = -1\\ y = 3\\ z = 2 + \lambda\end{array}\right\}$$

Si el plano es $2x - y + z = 1$, un vector perpendicular a él es $\vec{n} = (2, -1, 1)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(-1, 3, 2)\\ \text{Vector director:} & \vec{n} = (2, -1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow s\!: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda\\ y = 3 - \lambda\\ z = 2 + \lambda\end{array}\right\}$$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Si $\vec{u}=(1, -1, 2)$, $\vec{v}=(0, 2, -4)$ y $\vec{w}=(-7, 0, 7)$, halla los vectores.

a) $\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$

b) $-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$

c) $\frac{2}{3}(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}$

a) $\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}=(1, -1, 2)-3(0, 2, -4)+(-7, 0, 7)=(-6, -7, 21)$

b) $-\vec{v}+\frac{1}{3}\cdot\vec{w}=(0, -2, 4)+\left(\frac{-7}{3}, 0, \frac{7}{3}\right)=\left(\frac{-7}{3}, -2, \frac{19}{3}\right)$

c) $\frac{2}{3}\cdot(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\cdot\vec{w}=\frac{2}{3}\cdot(1, -3, 6)+\left(\frac{-7}{3}, 0, \frac{7}{3}\right)=\left(-\frac{5}{3}, -2, \frac{19}{3}\right)$

002 Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, siendo los puntos:

a) $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$

b) $A(-1, 1, -1)$ y $B(1, -1, 1)$

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

003 Halla un punto C en el segmento AB, con $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$, de modo que $\overline{AC}$ sea la mitad que $\overline{CB}$.

Llamamos $C(c_1, c_2, c_3)$ al punto que nos piden.

$\overrightarrow{AC}=(c_1-1, c_2-1, c_3-1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB}=(-1-c_1, -1-c_2, -1-c_3)$

Como $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CB}\rightarrow(c_1-1, c_2-1, c_3-1)=\left(\frac{-1-c_1}{2}, \frac{-1-c_2}{2}, \frac{-1-c_3}{2}\right)$

Igualando coordenadas:

$$c_1-1=\frac{-1-c_1}{2}\rightarrow c_1=\frac{1}{3}$$

$$c_2-1=\frac{-1-c_2}{2}\rightarrow c_2=\frac{1}{3}$$

$$c_3-1=\frac{-1-c_3}{2}\rightarrow c_3=\frac{1}{3}$$

El punto es $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

ACTIVIDADES

001 Calcula el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u}=(-1,1,0)$, $|\vec{v}|=2$ y el ángulo que forman es $\alpha=30°$.

$$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}\rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\cos 30°=\sqrt{6}$$

002 Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $\vec{u}=(-1,1,0)$, $|\vec{v}|=2$ y $\alpha=30°$, halla:

a) $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$

b) $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}$

Como $|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{6}$:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}\rightarrow\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}\rightarrow Proy_{\vec{u}}\vec{v}=\sqrt{3}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot Proy_{\vec{v}}\vec{u}\rightarrow\sqrt{6}=2\cdot Proy_{\vec{v}}\vec{u}\rightarrow Proy_{\vec{v}}\vec{u}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

003 Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-1$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=2$, calcula estas operaciones.

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})$

a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+(-1)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{w})=2+(-1)\cdot(-1)=3$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})=(-2)\cdot(\vec{w}\cdot\vec{u})+(-1)\cdot(\vec{w}\cdot\vec{v})=-2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=0$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})=(-6)\cdot(\vec{w}\cdot\vec{u})+3\cdot(\vec{w}\cdot\vec{v})=(-6)(-1)+3\cdot 2=12$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})=(-2)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{w})+(-1)\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})=-2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2=0$

004 Dados los vectores $\vec{u}=(0,-1,0)$, $\vec{v}=(-1,-2,0)$ y $\vec{w}=(-4,1,1)$, efectúa las operaciones.

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})$

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})=(0,-1,0)\cdot(-3,3,1)=-3$

b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})=(4,-1,-1)\cdot(-1,-4,0)=0$

c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})=(-12,3,3)\cdot(-1,0,0)=12$

d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})=(-1,-4,0)\cdot(4,-1,-1)=0$

005 Halla el ángulo que forman estos vectores.

a) $\vec{u}=(-2,3,0)$ $\quad\vec{v}=(0,1,-1)$

b) $\vec{u}=(3,1,2)$ $\quad\vec{v}=(0,-1,-1)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{(-2)\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{26}}$

$\alpha=arc\ cos\dfrac{3}{\sqrt{26}}=53,96°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{3\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{28}}$

$\alpha = arc\cos\dfrac{-3}{\sqrt{28}} = 124{,}54°$

006 **Discute, ayudándote de un ejemplo, cuándo el ángulo que forman dos vectores es igual al ángulo que forman otros dos vectores paralelos a ellos.**
¿Pueden ser diferentes los ángulos?

Consideramos los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v} = (2, -1, 0)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

Dos vectores paralelos a los anteriores son, por ejemplo, $\vec{u_1} = (2, 4, -2)$ y $\vec{v_1} = (4, -2, 0)$.

$\vec{u_1}\cdot\vec{v_1} = 0 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

El ángulo que forman dos vectores es siempre igual al ángulo que forman otros dos vectores paralelos a ellos.

007 **Calcula los vectores perpendiculares a estos.**

a) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ **b)** $\vec{v} = (1, 1, 0)$ **c)** $\vec{w} = (1, 1, 1)$

a) Tomamos $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$\vec{u} = (1, 0, 0) \perp \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = 0$
$\rightarrow v_1 = 0, v_2 = \lambda, v_3 = \mu$

$(v_1, v_2, v_3) = (0, \lambda, \mu) = (0, \lambda, 0) + (0, 0, \mu) = \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$

Los vectores (0, 1, 0) y (0, 0, 1) forman una base de los vectores perpendiculares a $\vec{u}$.

Todo vector perpendicular a $\vec{u}$ es combinación lineal de ellos.

b) Tomemos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$\vec{v} = (1, 1, 0) \perp \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \rightarrow 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3 = 0$
$\rightarrow u_1 = -u_2 \rightarrow u_1 = \lambda, u_2 = -\lambda, u_3 = \mu$

$(u_1, u_2, u_3) = (\lambda, -\lambda, \mu) = \lambda(1, -1, 0) + \mu(0, 0, 1)$

Los vectores (1, −1, 0) y (0, 0, 1) forman una base de los vectores perpendiculares a $\vec{v}$.

Todo vector perpendicular a $\vec{v}$ es combinación lineal de ellos.

c) Tomamos $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$.

$\vec{w} = (1, 1, 1) \perp \vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \rightarrow 1\cdot z_1 + 1\cdot z_2 + 1\cdot z_3 = 0$
$\rightarrow z_1 = -z_2 - z_3 \rightarrow z_1 = -\lambda - \mu, z_2 = \lambda, z_3 = \mu$

$(z_1, z_2, z_3) = (-\lambda - \mu, \lambda, \mu) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1)$

Los vectores (−1, 1, 0) y (−1, 0, 1) forman una base de los vectores perpendiculares a $\vec{w}$.

Todo vector perpendicular a $\vec{w}$ es combinación lineal de ellos.

008 **Encuentra el vector normal al plano:**

$$\pi: 3x - 2y = z + 1$$

Llamamos $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ a un vector genérico normal al plano π.

Tomamos $P(0, 0, -1)$, $Q(1, 1, 0)$ y $R(2, 0, 5)$ puntos pertenecientes al plano.

Buscamos el vector $\vec{n}$ que cumpla:

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = (n_1, n_2, n_3) \cdot (1, 1, 1) = n_1 + n_2 + n_3 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = (n_1, n_2, n_3) \cdot (2, 0, 6) = 2n_1 + 6n_3 = 0$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} n_1 + n_2 + n_3 = 0 \\ 2n_1 + 6n_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} n_1 = -3\lambda \\ n_2 = 2\lambda \\ n_3 = \lambda \end{cases} \rightarrow \vec{n} = (-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$

Un vector normal al plano π será, por ejemplo, cuando $\lambda = -1 \rightarrow \vec{n} = (3, -2, -1)$.

009 **Encuentra los planos que pasan por el punto $P(2, 1, 2)$ y son perpendiculares a las rectas.**

a) $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

b) $s: \left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array}\right\}$

a) Un vector director de la recta es $\vec{u} = (2, 2, 3)$.

La ecuación del plano es de la forma: $2x + 2y + 3z + D = 0$

Por pasar por $P(2, 1, 2) \rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = -12$

El plano es $\pi: 2x + 2y + 3z - 12 = 0$.

b) Escribimos la recta en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \dfrac{-1+\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \text{Un vector director es } \vec{u} = \left(-2, \dfrac{1}{2}, 1\right).$$

Tomamos como vector director de la recta un vector proporcional a $\vec{u} \rightarrow \vec{v} = (-4, 1, 2)$.

La ecuación del plano es de la forma: $-4x + y + 2z + D = 0$

Por pasar por $P(2, 1, 2) \rightarrow -4 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = 3$

El plano es $\pi: -4x - 1y + 2z + 3 = 0$.

010 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano:**

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 3\lambda + 2\mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

¿Cuál es su punto de corte?

Escribimos la ecuación del plano en forma implícita:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -z + 2 = 0 \rightarrow \pi: z - 2 = 0$$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

La recta que buscamos es el eje Z.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{ y el punto de corte de la recta y el plano es } P(0, 0, 2).$$

011 **Halla el haz de planos secantes y el haz de planos perpendiculares a la recta:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$$

Hallamos la ecuación de la recta en forma implícita:

$$r: \left.\begin{array}{r} x - 1 = -y - 1 \\ y + 1 = z \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

El haz de planos secantes es:

$$(x + y) + \lambda \cdot (y - z + 1) = 0$$

El haz de planos perpendiculares es:

$$x - y - z + D = 0$$

012 **Calcula la ecuación de la recta cuyo haz de planos perpendiculares es $x - y + z + D = 0$, sabiendo que pasa por el punto $P(0, 0, 0)$. ¿Cuál es su haz de planos secantes?**

El vector director de la recta es $\vec{v} = (1, -1, 1)$, y por pasar por el punto $P(0, 0, 0) \rightarrow r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$

Calculamos el haz de planos secantes:

$$\left.\begin{array}{l} x = -y \\ y = -z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (x + y) + \lambda(y + z) = 0$$

013 **Halla el ángulo que forman la recta r, que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 0, 0)$, y la recta s: $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + \lambda(1, 2, -3)$.**

El vector $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$ es un vector director de la recta r, y el vector director de la recta s es $\vec{u} = (1, 2, -3)$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-1)(-3)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} \rightarrow \alpha = arc\ cos\ 0 = 90°$$

014 **Calcula el ángulo que forman la recta r: $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$ y el plano de ecuación π: $x + y - 3z + 2 = 0$.**

La recta tiene por vector director $\vec{u} = (1, 0, -1)$, y el vector normal del plano es $\vec{n} = (1, 1, -3)$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)(-3)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}} = \frac{4}{\sqrt{22}}$$

$$\alpha = 90° - arc\ cos\ \frac{4}{\sqrt{22}} = 90° - 31{,}48° = 58{,}52°$$

015 **Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de planos.**

a) π: $3x - 2y + z - 3 = 0$ $\quad\pi'$: $x - y - 25 = 0$

b) π: $x + y + z = 0$ $\quad\pi'$: $x + 2y + 3z - 2 = 0$

c) π: $2y + 2z - 3 = 0$ $\quad\pi'$: $-y - z + 2 = 0$

a) El vector normal del plano π es $\vec{n}_1 = (3, -2, 1)$, y el vector normal del plano π' es $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|3\cdot 1 + (-2)(-1) + 1\cdot 0|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$$

$$\alpha = arc\ cos\ \frac{5}{\sqrt{28}} = 19{,}07°$$

b) El vector normal del plano π es $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, y el vector normal del plano π' es $\vec{n}_2 = (1, 2, 3)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{42}}$$

$$\alpha = arc\ cos\ \frac{6}{\sqrt{42}} = 22{,}21°$$

c) El vector normal del plano π es $\vec{n}_1 = (0, 2, 2)$, y el vector normal al plano π' es $\vec{n}_2 = (0, -1, -1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|0\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 2\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\alpha = arc\ cos\ 1 = 0°$$

Los planos son paralelos.

016 **Halla el ángulo que forman los siguientes planos:**

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array}\right\}$$

$$\pi': (x, y, z) = (-1, -1, 2) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1)$$

Calculamos la ecuación implícita del plano π.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 2z = 0 \rightarrow \text{Vector normal } \vec{n_1} = (0, 2, 2)$$

Calculamos la ecuación implícita del plano π'.

$$\pi': \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 3 = 0 \rightarrow \text{Vector normal } \vec{n_2} = (-1, 2, -1)$$

Calculamos el ángulo que forman los dos planos.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{|0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{48}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{48}} = 73{,}22°$$

017 **Encuentra la proyección de los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 0)$ sobre la recta r.**

a) $r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

b) $r: \left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$

a) • Proyección del punto A.

$$\frac{0-3}{3} = \frac{0-2}{2} = \frac{0-1}{1} \rightarrow A \text{ pertenece a } r.$$

La proyección ortogonal de A sobre r es A.

• Proyección del punto B.

Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto B.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal: } & \vec{n} = (3, 2, 1) \\ \text{Punto: } & B(-1, 1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow 3(x+1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\rightarrow \pi: 3x + 2y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1} \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

La proyección ortogonal de B sobre r es $Q(0, 0, 0)$.

- Proyección del punto *C*.

  Calculamos el plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *C*.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (3, 2, 1) \\ \text{Punto:} & C(0, 2, 0)\end{array}\right\} \to 3(x-0) + 2(y-2) + 1(z-0) = 0$$
$$\to \pi\text{: } 3x + 2y + z - 4 = 0$$

  Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1} \\ 3x + 2y + z - 4 = 0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{7} \\ y = \dfrac{4}{7} \\ z = \dfrac{2}{7}\end{array}\right.$$

  La proyección del punto *C* sobre *r* es $Q\left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$.

b) - Proyección del punto *A*.

  La ecuación en forma continua de la recta *r* es:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{-1}$$

  Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *A*.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punto:} & A(0, 0, 0)\end{array}\right\} \to 2(x-0) + (-1)(y-0) + (-1)(z-0) = 0$$
$$\to \pi\text{: } 2x - y - z = 0$$

  Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{7} \\ y = \dfrac{12}{7} \\ z = \dfrac{6}{7}\end{array}\right.$$

  La proyección de *A* sobre la recta *r* es $Q\left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{12}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$.

- Proyección del punto *B*.

  Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *B*.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punto:} & B(-1, 1, 1)\end{array}\right\} \to 2(x+1) + (-1)(y-1) + (-1)(z-1) = 0$$
$$\to \pi\text{: } 2x - y - z + 4 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=3 \\ y-2z=0 \\ 2x-y-z+4=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{7} \\ y=\dfrac{20}{7} \\ z=\dfrac{10}{7} \end{array}\right.$$

La proyección de *B* sobre la recta *r* es $Q\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{20}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$.

- Proyección del punto *C*.

  Calculamos la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *C*.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n}=(2,-1,-1) \\ \text{Punto:} & C(0,2,0) \end{array}\right\} \rightarrow 2(x-0)+(-1)(y-2)+(-1)(z-0)=0$$
$$\rightarrow \pi\colon 2x-y-z+2=0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=3 \\ y-2z=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{7} \\ y=\dfrac{16}{7} \\ z=\dfrac{8}{7} \end{array}\right.$$

La proyección de *C* sobre la recta *r* es el punto $Q\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{16}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$.

018 **Calcula la proyección de los puntos *A*(0, 0, 0), *B*(−1, 1, 1) y *C*(0, 2, 0) sobre el plano π, determinado por las rectas:**

$$r\colon \frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x+2z=3 \\ y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Hallamos el plano π determinado por las rectas *r* y *s*:

$$r\colon \frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x+2z=3 \\ y-2z=0 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x=3-2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5y+10z=0 \rightarrow \pi\colon y-2z=0$$

Su vector normal es $\vec{n}=(0, 1, -2)$.

- Proyección del punto *A*.

  El punto *A* pertenece a la recta *r*, por tanto, la proyección de *A* sobre el plano π es *A*.

- Proyección del punto B.

  Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto B.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (0, 1, -2)\\ \text{Punto:} & B(-1, 1, 1)\end{array}\right\} \to r: \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} \to r: \left.\begin{array}{r} x = -1\\ 2y + z = 3\end{array}\right\}$$

  Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = -1\\ 2y + z = 3\\ y - 2z = 0\end{array}\right\} \to \begin{cases} x = -1\\ y = \dfrac{6}{5}\\ z = \dfrac{3}{5}\end{cases}$$

  La proyección del punto B sobre el plano π es $Q\left(-1, \dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

- Proyección del punto C.

  Calculamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto C.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (0, 1, -2)\\ \text{Punto:} & C(0, 2, 0)\end{array}\right\} \to r: \frac{x-0}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-2} \to r: \left.\begin{array}{r} x = 0\\ 2y + z = 4\end{array}\right\}$$

  Calculamos el punto de corte de esta recta y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} x = 0\\ 2y + z = 4\\ y - 2z = 0\end{array}\right\} \to \begin{cases} x = 0\\ y = \dfrac{8}{5}\\ z = \dfrac{4}{5}\end{cases}$$

  La proyección de C sobre sobre el plano π es $Q\left(0, \dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

019 **Calcula la proyección ortogonal de la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

sobre el plano:

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = \lambda - \mu\\ y = 2 - \lambda + 3\mu\\ z = 3 + 2\lambda - 2\mu\end{array}\right\}$$

Hallamos la ecuación del plano π en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -2\end{vmatrix} = -4x + 2z - 6 = 0 \to \pi: 2x - z + 3 = 0$$

Vector director de la recta r: $\vec{u} = (1, 1, -1)$

Vector normal del plano π: $\vec{n} = (2, 0, -1)$

Punto de r: $P(2, 2, 2)$

Calculamos el plano π' que pasa por P y tiene por vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{n}$.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x-y-2z+8=0 \rightarrow \pi': x+y+2z-8=0$$

Calculamos la recta s de intersección entre los planos π y π'.

$$s: \left.\begin{array}{r} 2x-z+3=0 \\ x+y+2z-8=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=\frac{19}{2}-\frac{5}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

La proyección de la recta r sobre el plano π es $s: \left.\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=\frac{19}{2}-\frac{5}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$

020 **Halla el punto donde se cortan las proyecciones de las rectas:**

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x=-8+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right\}$$

sobre el plano: π: $x-y+z+2=0$

Calculamos la recta r' proyección de la recta r sobre el plano π.

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r=(0,0,1) \qquad P_r(0,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector director de } r: & \vec{v}_r=(0,0,1) \\ \text{Vector normal a } \pi: & \vec{n}_\pi=(1,-1,1) \\ \text{Punto de } r: & P_r(0,1,0) \end{array}\right\} \rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x+y-1=0$$

Por tanto, la proyección de r sobre π es:

$$r': \left.\begin{array}{r} x-y+z+2=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right\}$$

Hallamos la recta s' proyección de la recta s sobre el plano π.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector director de } s: & \vec{v}_s=(1,1,1) \\ \text{Vector normal a } \pi: & \vec{n}_\pi=(1,-1,1) \\ \text{Punto de } s: & P_s(-8,1,1) \end{array}\right\}$$

$$\pi'': \begin{vmatrix} x+8 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x-2z+18=0 \rightarrow \pi'': x-z+9=0$$

Por tanto, la proyección de s sobre π es:

$$s'\colon \left.\begin{array}{r} x - y + z + 2 = 0 \\ x \quad - z + 9 = 0 \end{array}\right\}$$

El punto de corte de r' y s' es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \\ x - z + 9 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{13}{3} \\ z = \dfrac{17}{3} \end{array}\right.$$

Las proyecciones de r y s sobre el plano π se cortan en $Q\left(-\dfrac{10}{3}, \dfrac{13}{3}, \dfrac{17}{3}\right)$.

021 **Obtén el simétrico de $P(0, 0, 1)$ respecto de $Q(1, -2, 1)$.**

El punto Q es el punto medio del segmento PP', siendo $P'(a, b, c)$.

$$(1, -2, -1) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto simétrico es } P'(2, -4, -3).$$

022 **Halla el simétrico del punto $P(-1, 2, 3)$ respecto de la recta $r\colon \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$.**

Calculamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (3, -2, 2) \\ \text{Punto:} & P(-1, 2, 3) \end{array}\right\}$$

$\pi: 3(x+1) - 2(y-2) + 2(z-3) = 0 \rightarrow \pi\colon 3x - 2y + 2z + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2} \\ 3x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 3 \\ 2x - 3z = 6 \\ 3x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{15}{17} \\ y = \dfrac{7}{17} \\ z = \dfrac{-24}{17} \end{array}\right.$$

La proyección ortogonal de P sobre r es $Q\left(\dfrac{15}{17}, \dfrac{7}{17}, -\dfrac{24}{17}\right)$.

Hallamos el punto simétrico P' respecto de la proyección Q.

$$\left(\frac{15}{17}, \frac{7}{17}, -\frac{24}{17}\right) = \left(\frac{-1+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{3+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{47}{17} \\ b = -\dfrac{20}{17} \\ c = -\dfrac{99}{17} \end{array}\right.$$

El punto simétrico de P respecto de r es $P'\left(\dfrac{47}{17}, -\dfrac{20}{17}, -\dfrac{99}{17}\right)$.

023 **Calcula los vértices del triángulo simétrico al formado por los puntos $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 2, 0)$ y $C(2, 0, -1)$.**

a) Respecto del origen de coordenadas.

b) Respecto de la recta $r: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1)$.

a) Calculamos el simétrico del punto A respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0, 0, 0) = \left(\frac{a'_1 + 0}{2}, \frac{a'_2 - 1}{2}, \frac{a'_3 + 2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} a'_1 = 0 \\ a'_2 = 1 \\ a'_3 = -2 \end{cases} \rightarrow A'(0, 1, -2)$$

Hallamos el simétrico del punto B respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0, 0, 0) = \left(\frac{b'_1 - 1}{2}, \frac{b'_2 + 2}{2}, \frac{b'_3 + 0}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} b'_1 = 1 \\ b'_2 = -2 \\ b'_3 = 0 \end{cases} \rightarrow B'(1, -2, 0)$$

Calculamos el simétrico del punto C respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0, 0, 0) = \left(\frac{c'_1 + 2}{2}, \frac{c'_2 + 0}{2}, \frac{c'_3 - 1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} c'_1 = -2 \\ c'_2 = 0 \\ c'_3 = 1 \end{cases} \rightarrow C'(-2, 0, 1)$$

El triángulo simétrico respecto al origen tendrá por vértices A', B' y C'.

b) Escribimos la recta en forma continua.

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

- Punto simétrico de A respecto a r.

  Calculamos la proyección ortogonal Q_A del punto A sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \text{Punto:} & A(0, -1, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: x + y + z - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = y \\ x = z \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow Q_A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

  Hallamos el punto simétrico $A'(a'_1, a'_2, a'_3)$ respecto de la proyección Q_A.

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{0 + a'_1}{2}, \frac{-1 + a'_2}{2}, \frac{2 + a'_3}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} a'_1 = \dfrac{2}{3} \\ a'_2 = \dfrac{5}{3} \\ a'_3 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

  El punto simétrico de A respecto de r es $A'\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

- Punto simétrico de B respecto de r.

  Calculamos la proyección ortogonal Q_B del punto B sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n}=(1,1,1)\\ \text{Punto:} & B(-1,2,0)\end{array}\right\}\rightarrow \pi\colon x+y+z+1=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ x+y+z+1=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=y\\ x=z\\ x+y+z+1=0\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\\ z=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\rightarrow Q_B\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$$

  Hallamos el punto simétrico $B'(b'_1,\ b'_2,\ b'_3)$ respecto de la proyección Q_B.

$$\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{-1+b'_1}{2},\frac{2+b'_2}{2},\frac{0+b'_3}{2}\right)\rightarrow\left\{\begin{array}{l}b'_1=\dfrac{2}{3}\\ b'_2=\dfrac{8}{3}\\ b'_3=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

  El punto simétrico de B respecto de r es $B'\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{8}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

- Punto simétrico de C respecto a r:

  Calculamos la proyección ortogonal Q_C del punto C sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n}=(1,1,1)\\ \text{Punto:} & C(2,0,-1)\end{array}\right\}\rightarrow \pi\colon x+y+z-1=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=y\\ x=z\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\rightarrow Q_C\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$$

  Hallamos el punto simétrico $C'(c'_1,\ c'_2,\ c'_3)$ respecto de la proyección Q_C.

$$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2+c'_1}{2},\frac{0+c'_2}{2},\frac{-1+c'_3}{2}\right)\rightarrow\left\{\begin{array}{l}c'_1=-\dfrac{4}{3}\\ c'_2=\dfrac{2}{3}\\ c'_3=\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$$

  El punto simétrico de C respecto de r es $C'\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$.

  El triángulo simétrico respecto a la recta r tendrá por vértices A', B' y C'.

Producto escalar

024 **Halla el simétrico del punto $P(0, 1, -3)$ respecto del plano cuya ecuación es:**

$$\pi: x + y + z - 2 = 0$$

Hallamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre el plano π.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal: } & \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \text{Punto: } & P(0, 1, -3)\end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{1} \\ x + y + z - 2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = y - 1 \\ x = z + 3 \\ x + y + z - 2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{7}{3} \\ z = -\dfrac{5}{3}\end{array}\right. \rightarrow Q\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

Calculamos las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la proyección Q.

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{0 + p'_1}{2}, \frac{1 + p'_2}{2}, \frac{-3 + p'_3}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} p'_1 = \dfrac{8}{3} \\ p'_2 = \dfrac{11}{3} \\ p'_3 = -\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

025 **Si los puntos $P(2, 0, 2)$ y $P'(3, 1, -3)$ son simétricos, halla el punto, una recta y el plano respecto de los cuales dichos puntos son simétricos. ¿Son únicos?**

Los puntos P y P' son simétricos respecto del punto medio del segmento PP'.

$$Q\left(\frac{2+3}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{2-3}{2}\right) \rightarrow Q\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

La recta respecto de la cual P y P' son simétricos pasa por el punto Q, y su vector director es perpendicular a $\overrightarrow{PP'} = (1, 1, -5)$.

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{PP'}$ es $\vec{u} = (5, 5, 2)$, por tanto:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} + 5\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} + 5\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} + 2\lambda\end{array}\right\}$$

El plano respecto del cual P y P' son simétricos pasa por el punto Q y tiene por vector normal al vector $\overrightarrow{PP'} = (1, 1, -5)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \overrightarrow{PP'} = (1, 1, -5) \\ \text{Punto:} & Q\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right\}$$

$$\pi: 1\cdot\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1\cdot\left(y - \frac{1}{2}\right) - 5\cdot\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow \pi: x + y - 5z - \frac{11}{2} = 0$$

El plano y el punto respecto del cual P y P' son simétricos, son únicos.
Sin embargo, como existen infinitos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{PP'}$, hay infinitas rectas respecto de las cuales los dos puntos son simétricos.

026 **Halla la distancia del punto $P(1, 1, -1)$ a la recta $r: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-2}$.**

Calculamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (3, 1, -2) \\ \text{Punto:} & P(1, 1, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: 3(x-1) + (y-1) - 2(z+1) = 0$$

$$\rightarrow \pi: 3x + y - 2z - 6 = 0$$

Hallamos el punto de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-2} \\ 3x + y - 2z - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y = -5 \\ 2x + 3z = -4 \\ 3x + y - 2z - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{14} \\ y = \dfrac{25}{14} \\ z = -\dfrac{11}{7} \end{array}\right.$$

La proyección ortogonal de P sobre r es $Q\left(\dfrac{5}{14}, \dfrac{25}{14}, \dfrac{-11}{7}\right)$.

La distancia del punto P a la recta r es la distancia de P al punto Q.

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{5}{14} - 1\right)^2 + \left(\frac{25}{14} - 1\right)^2 + \left(-\frac{11}{7} + 1\right)^2} = \frac{\sqrt{266}}{14}$$

027 **Calcula el perímetro del triángulo de vértices:**

$A(0, 0, -3)$ $\quad B(2, 2, 2)$ $\quad C(2, 0, 5)$

Calculamos la medida de los lados del triángulo.

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$

$$d(A, C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$$

$$d(B, C) = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

El perímetro del triángulo es:

$$P = \sqrt{33} + \sqrt{68} + \sqrt{13}$$

028 **Calcula el área del triángulo que forman los puntos:**

$$A(2, 0, 0) \qquad B(-1, 3, 2) \qquad C(1, -4, -1)$$

Toma, por ejemplo, como base el lado AB y la altura será la distancia del vértice C a la recta que determinan los puntos A y B.

La base es: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{22}$

La recta que determinan los puntos A y B es r: $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$

Calculamos el plano π que pasa por C y es perpendicular a r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n} = (-3, 3, 2) \\ \text{Punto:} & C(1, -4, -1)\end{array}\right\} \rightarrow \pi: -3(x-1) + 3(y+4) + 2(z+1) = 0$$
$$\rightarrow \pi: -3x + 3y + 2z + 17 = 0$$

Hallamos el punto de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2} \\ -3x + 3y + 2z + 17 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}3x + 3y = 6 \\ 2x + 3z = 4 \\ -3x + 3y + 2z + 17 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = -1\end{array}\right.$$

La proyección ortogonal del punto C sobre la recta r es $Q\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{3}{2}, -1\right)$.

La altura del triángulo es la distancia del punto C a la recta r.

$$d(C, r) = d(C, Q) = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 4\right)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, el área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{22} \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{2}$$

029 **Halla la distancia del punto $P(2, 1, 0)$ al plano π.**

$$\left.\begin{array}{r} x = 2 - \lambda + \mu \\ \pi: y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 2\mu\end{array}\right\}$$

Hallamos la ecuación implícita del plano π.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4x - y - z + 9 = 0 \rightarrow \pi: 4x + y + z - 9 = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}} = 0$$

El punto $P(2, 1, 0)$ pertenece al plano π.

030 **Calcula la altura trazada desde el vértice D del tetraedro determinado por los puntos:**

$$A(2, 0, 0) \qquad B(-1, 3, 2) \qquad C(1, -4, -1) \qquad D(0, 0, 0)$$

Halla el plano determinado por los puntos A, B y C, y obtén la distancia del punto D a este plano.

Calculamos el plano que determinan los puntos A, B y C.

$\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, -4, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 5x - 5y + 15z - 10 = 0 \rightarrow \pi: x - y + 3z - 2 = 0$$

$$\text{Altura} = d(D, \pi) = \frac{|1\cdot 0 - 1\cdot 0 + 3\cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

031 **Halla la distancia que hay entre los planos:** $\begin{array}{l} \pi: 2x - 2y + 3z = 0 \\ \pi': 4x - 4y + 6z = 12 \end{array}$

Los vectores normales a los planos, $\vec{n} = (2, -2, 3)$ y $\vec{n}' = (4, -4, 6)$, son proporcionales. El punto $P(3, 0, -2) \in \pi$ y $P(3, 0, -2) \notin \pi'$, por tanto, los planos son paralelos.

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|4\cdot 3 - 4\cdot 0 + 6\cdot(-2) - 12|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{12}{\sqrt{68}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

032 **Calcula la distancia entre la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z - 1 = 0$.**

El vector director de r es $\vec{u} = (1, 1, 1)$, y el vector normal del plano es $\vec{n} = (1, 2, -3)$.

Como $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ y $P(0, 2, 0) \in r$ y $P(0, 2, 0) \notin \pi$, la recta y el plano son paralelos.

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 2 - 3\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

033 **Calcula la distancia entre los siguientes pares de rectas.**

a) $r: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ $\qquad$ $s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-1}$

b) $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ $\qquad$ $s: \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array}\right\}$

a) Estudiamos la posición relativa de r y s.

$\vec{v}_r = (2, 3, -1)$ $\qquad$ $\vec{v}_s = (1, -3, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{r} P_r(0, 0, 0) \\ Q_s(0, -1, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0, -1, 0)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

Por tanto, $d(r, s) = d(s, \pi_r)$, siendo π_r el plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6x + y - 9z = 0 \rightarrow \pi_r: 6x - y + 9z = 0$$

$$d(s, \pi_r) = d(Q_s, \pi_r) = \frac{|6\cdot 0 - 1\cdot(-1) + 9\cdot 0|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2 + 9^2}} = \frac{1}{\sqrt{118}} = \frac{\sqrt{118}}{118}$$

b) La forma continua de la recta s es: $\dfrac{x-0}{9} = \dfrac{y-0}{6} = \dfrac{z-0}{4}$

Estudiamos la posición relativa de r y s.

$\vec{v}_r = (-1, -1, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{r} P_r(-1, -1, -1) \\ Q_s(0, 0, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (1, 1, 1)$

$\vec{v}_s = (9, 6, 4)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Como $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales, las rectas son secantes $\rightarrow d(r, s) = 0$.

034 **Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{r} 2x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ $\qquad$ $s: \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$

b) ***r* es la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto *P*(−1, 2, 1), y *s* es la recta que pasa por el punto *Q*(1, 1, 1) y es perpendicular al plano π: *x* = 0.**

a) Estudiamos la posición relativa de r y s analizando el sistema formado por los cuatro planos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3$$

El sistema es compatible determinado. Son rectas secantes $\rightarrow d(r, s) = 0$.

b) Calculamos las ecuaciones de las rectas.

$$\overrightarrow{PO} = (1, -2, -1) \rightarrow r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-0}{-1}$$

$$\text{Vector normal a } \pi: \vec{v}_s = (1, 0, 0) \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Estudiamos su posición relativa.

$\vec{v}_r = (1, -2, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{r} P(-1, 2, 1) \\ Q(1, 1, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 0)$

$\vec{v}_s = (1, 0, 0)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

Por tanto, $d(r, s) = d(s, \pi_r)$, siendo π_r el plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -y + 2z = 0 \rightarrow \pi_r: y - 2z = 0$$

$$d(s, \pi_r) = d(Q, \pi_r) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

035 **Dados $\vec{u} = (3, 4, -2)$ y $\vec{v} = (5, -1, 6)$, calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ c) $|\vec{v}|$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 6 = -1$

b) $|\vec{u}| = \vec{u} \cdot \vec{u} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$

c) $|\vec{v}| = \vec{v} \cdot \vec{v} = \sqrt{25 + 1 + 36} = \sqrt{62}$

036 **Halla el módulo del vector $\vec{u} = (3, -5, 2)$. Calcula también dos vectores unitarios paralelos a él.**

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

Vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{38}} \cdot (3, -5, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{38}}, -\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{2}{\sqrt{38}}\right)$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot (3, -5, 2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}\right)$$

037 **En general, no es cierto que $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Compruébalo con $\vec{a} = (-3, 2, 2)$ y $\vec{b} = (1, -4, 3)$.**

$|\vec{a}| = \sqrt{17}$ $|\vec{b}| = \sqrt{26}$ $|\vec{a} + \vec{b}| = |(-2, -2, 5)| = \sqrt{33}$

$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{26} \neq \sqrt{33}$

038 **¿Cómo tienen que ser dos vectores para que se verifique que $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$?**

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ deben ser paralelos y tener el mismo sentido, en caso contrario, el módulo de la suma es menor.

039 **Comprueba con $\vec{u} = (-5, 1, 2)$, $\vec{v} = (3, 4, -1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -4)$ que se verifica la propiedad distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.**

$\vec{v} + \vec{w} = (5, 5, -5) \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (-5) \cdot 5 + 1 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 = -30$

$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = -13 + (-17) = -30$

Producto escalar

040 **Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3, -1)$ y $\vec{w} = (7, -2, 1)$, realiza las operaciones posibles y explica por qué no se puede hacer el resto.**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

a) No se puede realizar. El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es un número y no se puede sumar a un vector.

b) $\vec{v} + \vec{w} = (5, 1, 0) \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 16$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = -5\vec{w} = (-35, 10, -5)$

041 **Demuestra que las diagonales de un paralelogramo solo son iguales cuando sus lados son perpendiculares. Utiliza el resultado que afirma que si los lados de un paralelogramo son $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces las diagonales son $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.**

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Las diagonales son iguales si se cumple:

$2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\vec{u} \cdot \vec{v} \rightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Es decir, si los vectores son perpendiculares.

042 **Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ forman un triángulo. Demuestra que se cumple el teorema del coseno, aplicando la definición de módulo que proporciona el producto escalar $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.**

Si llamamos a, b y c a los lados del triángulo:

$a = |\vec{u} - \vec{v}| \qquad b = |\vec{u}| \qquad c = |\vec{v}|$

Como $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

$$a^2 = b^2 - 2bc \cdot \cos A + c^2$$

Que es la expresión que conocemos como el teorema del coseno.

043 **Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y que ambos vectores son perpendiculares, calcula el producto escalar: $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$.**

$$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 6\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 6 \cdot 3^2 + 0 - 2 \cdot 5^2 = 4$$

044 **Halla, en cada caso, el valor de p para que los vectores tengan módulo 7. ¿Hay siempre una única solución? Razona la respuesta.**

a) $\vec{u} = (2, -3, p)$

b) $\vec{v} = (-5, p, 6)$

c) $\vec{w} = (p, -1, 6)$

a) $\sqrt{2^2 + (-3)^2 + p^2} = 7 \rightarrow p^2 = 49 - 4 - 9 \rightarrow p = \pm 6$

b) $\sqrt{(-5)^2 + p^2 + 6^2} = 7 \rightarrow p^2 = 49 - 25 - 36 = -12 \rightarrow$ No hay solución.

c) $\sqrt{p^2 + (-1)^2 + 6^2} = 7 \rightarrow p^2 = 49 - 1 - 36 = 12 \rightarrow p = \pm\sqrt{12}$

Podemos obtener dos soluciones, una o ninguna.

045 **¿Qué valor debe tomar *t* para que los vectores $\vec{u} = (3, t, 5)$ y $\vec{v} = (2, -7, t)$ sean perpendiculares? ¿Y para que sean paralelos?**

Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser 0.

$(3,\ t,\ 5)\cdot(2,\ -7,\ t) = 6 - 2t = 0 \rightarrow t = 3$

Para que sean paralelos deben ser proporcionales:

$\frac{3}{2} = \frac{t}{-7} = \frac{5}{t} \rightarrow$ No tiene solución.

No existe ningún valor de t para el que los vectores sean paralelos.

046 **Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas (1, 2, 1).**

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

Llamamos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ al vector que buscamos.

$$\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3) \perp (1,2,1) \rightarrow (u_1,\ u_2,\ u_3)\cdot(1,\ 2,\ 1) = u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$$

Un vector que cumple esta condición es $\vec{u} = (-2, 1, 0)$, pero no es unitario.

Como $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, un vector unitario que cumple esta condición es:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-2,\ 1,\ 0) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)$$

047 **¿Cuánto debe valer *m* para que los puntos $A(5, m, 7)$, $B(3, -1, 4)$ y $C(6, 5, 4)$ formen un triángulo rectángulo con el ángulo recto en *B*?**

Los vectores $\overrightarrow{BA} = (2,\ m+1,\ 3)$ y $\overrightarrow{BC} = (3,\ 6,\ 0)$ deben ser perpendiculares.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 6 + 6m + 6 = 0 \rightarrow m = -2$

048 **Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π: $2x - 5y - z = 8$ que pasa por el punto $P(3, 3, -5)$.**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal a } \pi: & \vec{n}_\pi = (2,\ -5,\ -1) \\ \text{Punto:} & P(3,\ 3,\ -5) \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+5}{-1}$$

049 **Halla la ecuación de un plano perpendicular a la recta $r: \frac{x-2}{3} = y+1 = \frac{x+7}{-2}$ y que la corte en el punto $P(5, 0, -9)$.**

El vector director de la recta es el vector normal del plano:

$\vec{n}_\pi = (3,\ 1,\ -2) \rightarrow \pi : 3x + y - 2z + D = 0$

$P(5,\ 0,\ -9) \in \pi \rightarrow 3\cdot 5 + 0 - 2(-9) + D = 0 \rightarrow D = -33$

El plano es π: $3x + y - 2z - 33 = 0$.

050 **Demuestra que en cualquier triángulo, sus lados verifican que $a + b > c$.**

Consideramos como lados del triángulo los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$.

Supongamos que no es cierta la hipótesis $a + b > c$, es decir, que se cumple $|\vec{u} + \vec{v}| > |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Por ser ambos miembros positivos: $|\vec{u}+\vec{v}|^2 > (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha + |\vec{v}|^2$

$(|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2$

Si $|\vec{u}+\vec{v}| > |\vec{u}|+|\vec{v}|$, entonces:

$$\cancel{|\vec{u}|^2} + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha + \cancel{|\vec{v}|^2} > \cancel{|\vec{u}|^2} + 2|\vec{u}||\vec{v}| + \cancel{|\vec{v}|^2} \rightarrow 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha > 2|\vec{u}||\vec{v}|$$

Como $\cos\alpha < 1$, la desigualdad no es cierta.

051 **Determina el plano paralelo a $5x - 3y + 2z - 7 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 2, 1)$.**

Si los planos son paralelos tienen el mismo vector normal.

$\vec{n} = (5, -3, 2) \rightarrow \pi\colon 5x - 3y + 2z + D = 0$

$P(1, 2, 1) \in \pi \rightarrow 5\cdot 1 - 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = -1 \rightarrow \pi\colon 5x - 3y + 2z - 1 = 0$

052 **Realiza de dos modos diferentes el siguiente problema: ¿Qué posición relativa tienen la recta $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi\colon x - y + 3z = 12$? ¿Y la recta r y el plano $\gamma\colon 3x - 3y + z = 6$?**

- Posición relativa de r y π.
  - Primera forma. Estudiamos las soluciones del sistema de ecuaciones conjunto.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.
La recta y el plano se cortan en un punto.

  - Segunda forma. Comparamos los vectores director y normal.
    Calculamos el vector director de la recta.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{19}{3} - \dfrac{8}{3}\lambda \\ y = \dfrac{14}{3} - \dfrac{7}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (-8, -7, 3)$$

Como $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r \neq 0$, la recta y el plano no son paralelos ni la recta está contenida en el plano, entonces, se cortan.

- Posición relativa de r y γ.
  - Primera forma.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.
La recta y el plano son paralelos.

– Segunda forma.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r=(-8,-7,3)\\ \vec{n}_\gamma=(3,-3,1)\end{array}\right\}\rightarrow(-8,-7,3)\cdot(3,-3,1)=0$$

Los vectores son perpendiculares, por tanto, la recta es paralela al plano o está contenida en él.

$P(1,0,2)\in r$ y $P(1,0,2)\notin\gamma$, la recta y el plano son paralelos.

053 **Expresa en forma implícita la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n}=(3,-1,10)$ y que pasa por el punto $P(-3,-3,2)$. ¿Pertenece el punto $Q(-4,2,5)$ a dicho plano?**

El plano será de la forma $\pi\colon 3x-y+10z+D=0$

$$P(-3,-3,2)\in\pi\rightarrow 3\cdot(-3)-1\cdot(-3)+10\cdot 2+D=0\rightarrow D=-14$$
$$\rightarrow\pi\colon 3x-y+10z-14=0$$

El punto Q cumple que: $3\cdot(-4)-2+10\cdot 5-14\neq 0\rightarrow Q\notin\pi$

054 **Con las rectas $r\colon(x,y,z)=(-1,2,0)+\lambda(4,-1,m)$ y $s\colon\dfrac{x+2}{-8}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-6}$, halla m para que:**

a) Las rectas sean paralelas. En este caso, halla el plano que las contiene.

b) Las rectas sean perpendiculares. ¿Se cortan? Si es así, determina el punto de corte.

Escribimos un punto y un vector director de cada recta.

$$\left.\begin{array}{ll}\vec{v}_r=(4,-1,m) & P_r(-1,2,0)\\ \vec{v}_s=(-8,2,-6) & P_s(-2,0,1)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,-2,1)$$

a) $\dfrac{4}{-8}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{m}{-6}\rightarrow$ Las rectas son paralelas si $m=3$.

Calculamos el plano que las contiene.

Dos vectores del plano son $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ y un punto $P_r(-1,2,0)$, por tanto:

$$\pi\colon\left.\begin{array}{l}x=-1-8\lambda-\mu\\ y=2+2\lambda-2\mu\\ z=-6\lambda+\mu\end{array}\right\}$$

b) $\vec{v}_r\perp\vec{v}_s\rightarrow\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=(4,-1,m)\cdot(-8,2,-6)=-32-2-6m=0$

$$\rightarrow m=-\frac{17}{3}$$

Estudiamos su posición relativa.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 4 & -1 & -\dfrac{17}{3}\\ -8 & 2 & -6\end{pmatrix}=3\rightarrow\text{Las rectas no se cortan, se cruzan.}$$

055 Dados los planos π: $mx + y + 2z - 7 = 0$ y π': $3x + 4y + z + 1 = 0$, halla m para que los planos:

a) Sean paralelos.

b) Sean perpendiculares.

a) $\frac{m}{3} = \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \rightarrow$ No existe ningún valor para m que cumpla estas igualdades.

Por tanto, π y π' no pueden ser paralelos.

b) $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi'} \rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = (m, 1, 2) \cdot (3, 4, 1) = 3m + 4 + 2 = 0 \rightarrow m = -2$

056 Sea r: $(x, y, z) = (0, 3, 3) + t(0, 1, 1)$. Demuestra que:

a) r está contenida en el plano π: $3x + 2y - 2z = 0$.

b) r es paralela al plano π': $3x + y - z - 5 = 0$.

a) $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$ $\quad P_r(0, 3, 3)$ $\quad \vec{n}_\pi = (3, 2, -2)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

r y π paralelos o r contenida en π.

$P_r(0, 3, 3) \in \pi \rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0 \rightarrow r$ está contenida en π.

b) $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$ $\quad P_r(0, 3, 3)$ $\quad \vec{n}_{\pi'} = (3, 1, -1)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi'}$

r y π' paralelos o r contenida en π'.

$P_r(0, 3, 3) \notin \pi' \rightarrow 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 5 \neq 0 \rightarrow r$ es paralela a π.

057 Dada la recta $r: \left.\begin{array}{r} -x + y + 4z + 7 = 0 \\ 6x - 2y + 2z + 8 = 0 \end{array}\right\}$, halla la ecuación de un plano que la contenga y que sea perpendicular a π: $4x + 2y - z - 7 = 0$.

Escribimos las rectas r en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\lambda \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{13}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow P\left(-\frac{11}{2}, -\frac{25}{2}, 0\right) \qquad \vec{v} = (5, 13, -2)$$

El plano π' está determinado por P_r, $\vec{v}_r$ y el vector normal de π, $\vec{n}_\pi = (4, 2, -1)$.

$$\pi': \begin{vmatrix} x + \frac{11}{2} & y + \frac{25}{2} & z - 0 \\ 5 & 13 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9x - 3y - 42z - 87 = 0$$

π': $3x + y + 14z + 29 = 0$

058 Sean las rectas:

$$r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+y-z-3=0 \\ 3x-2y-4z-3=0 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} 2x+5z+12=0 \\ x-2y-3z+5=0 \end{array}\right\}$$

Encuentra la ecuación de un plano que:

a) Contenga a r y sea paralelo a s.

b) Contenga a r y sea perpendicular a s.

Escribimos las rectas r y s en forma paramétrica.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{9}{7}+\dfrac{6}{7}\lambda \\ y=\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{7}\lambda \\ z=y \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r=(6,-5,7) \qquad P_r\left(\frac{9}{7},\frac{3}{7},0\right)$$

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x=-6-\dfrac{5}{2}\mu \\ y=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{11}{4}\mu \\ z=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s=(-10,-11,4) \qquad P_s\left(-6,-\frac{1}{2},0\right)$$

a) Los vectores directores del plano son los de r y s, y cualquier punto de r pertenece al plano.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-\dfrac{9}{7} & y-\dfrac{3}{7} & z \\ 6 & -5 & 7 \\ -10 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 57x-94y-116z-33=0$$

b) Si un plano es perpendicular a s, todas las rectas contenidas en el plano son perpendiculares a s, y por tanto, r y s deben ser perpendiculares.

Como $\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=(6,-5,7)\cdot(-10,-11,4)=23\neq 0$, las rectas no son perpendiculares y no existe el plano que buscamos.

059 Calcula la ecuación de una recta que corte perpendicularmente a $r\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ y pase por el punto $P(14,3,3)$.

Buscamos un punto $Q\in r$, tal que $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular al vector director de la recta r.

Un punto genérico de r tiene la forma $Q(2\lambda, 3-2\lambda, 1+3\lambda)$.

$\overrightarrow{PQ}=(2\lambda-14,-2\lambda,3\lambda-2)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=(2\lambda-14,-2\lambda,3\lambda-2)\cdot(2,-2,3)=17\lambda-34=0\rightarrow\lambda=2$

Así, $Q(4,-1,7)$ y $\overrightarrow{PQ}=(-10,-4,4)$.

Por tanto la recta es $s\colon \dfrac{x-14}{-10}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-3}{4}$.

060 **Halla la ecuación de la recta que corta a *r* y *s* perpendicularmente.**

$$r:\left.\begin{array}{r}x=1\\ y=11+2\lambda\\ z=-1+\lambda\end{array}\right\}\qquad s:\left.\begin{array}{r}x=6-4\mu\\ y=-2+\mu\\ z=2+\mu\end{array}\right\}$$

Hallamos un punto $P\in r$ y un punto $Q\in s$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r}P(1,\,11+2\lambda,\,-1+\lambda)\in r\\ Q(6-4\mu,\,-2+\mu,\,2+\mu)\in s\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{PQ}=(5-4\mu,\,-13+\mu-2\lambda,\,3+\mu-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{PQ}\cdot(0,2,1)=-5\lambda+\ \ 3\mu-23=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot(-4,1,1)=-3\lambda+18\mu-30=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=-4\\ \mu=1\end{array}\right.$$

Por tanto: $\left.\begin{array}{r}P(1,3,-5)\in r\\ Q(2,-1,3)\in s\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{PQ}=(1,-4,8)$

Luego, la recta buscada es: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+5}{8}$

061 **Investiga si existe un plano que contenga a la recta *r* y sea perpendicular a la recta *s*.**

$$r:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}\qquad s:\left.\begin{array}{r}x=1+5\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right\}$$

En caso afirmativo, calcula la ecuación del plano.

Si un plano es perpendicular a *s*, todas las rectas contenidas en el plano son perpendiculares a dicha recta, y por tanto, *r* y *s* deben ser perpendiculares.

Como $(2,4,-1)\cdot(5,-2,2)=0\rightarrow$ Los vectores son perpendiculares.

El plano que buscamos tiene como vector normal el vector director de *s* y pasar por el punto $P(3,-1,0)\in r$.

π: $5x-2y+2z+D=0$

$5\cdot3-2\cdot(-1)+2\cdot0+D=0\rightarrow D=-17$

La ecuación del plano que buscamos es π: $5x-2y+2z-17=0$.

062 **Se consideran los puntos $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.**

a) Halla la ecuación general del plano π que los contiene.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Halla también el punto de intersección de la recta con el plano.

(Baleares. Junio 2005. Opción A. Cuestión 2)

a) El plano pasa por $A(3,0,0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB}=(-3,2,0)$ y $\overrightarrow{BC}=(0,-2,1)$.

$$\pi:\begin{vmatrix}x-3 & y & z\\ -3 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=2x+3y+6z-6=0$$

b) La recta perpendicular a π que pasa por el origen es:

$$r:\left.\begin{array}{l} x=2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=6\lambda \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

$$2\cdot 2\lambda+3\cdot 3\lambda+6\cdot 6\lambda-6=0\rightarrow\lambda=\frac{6}{49}$$

El punto intersección es $P\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$.

063 **Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:**

$$r_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0} \qquad\qquad r_2: (x, y, z)=(0, 0, 1)+t(1, 1, 1)$$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)

Hallamos un punto $P\in r$ y un punto $Q\in s$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} P(1+2\lambda,\lambda,2) \\ Q(\mu,\mu,1+\mu) \end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{PQ}=(\mu-1-2\lambda,\mu-\lambda,\mu-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\cdot(2,1,0)=3\mu-5\lambda-2=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot(1,1,1)=3\mu-3\lambda-2=0 \end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \mu=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l} P(1,0,2) \\ Q\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right) \\ \overrightarrow{PQ}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right) \end{array}\right.$$

La recta buscada es $t: \dfrac{x-1}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{y-0}{\frac{2}{3}}=\dfrac{z-2}{-\frac{1}{3}}\rightarrow t: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

064 **Se consideran las rectas:**

$$r:\left.\begin{array}{r} x-ay=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \qquad\qquad s:\left.\begin{array}{r} x-2y-z=0 \\ x+y+z=8 \end{array}\right\}$$

Prueba que, para ningún valor de a, r y s pueden ser paralelas y averigua el único valor de a para el que se cortan. Para este valor de a, se pide:

a) Calcula el punto P intersección de r y s y la ecuación del plano π que las contiene.

b) Determina la ecuación de la recta t que está contenida en π y es perpendicular a r en el punto P. Escribe la ecuación de otras dos rectas que sean perpendiculares a r por el punto P.

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 3. Opción B)

Escribimos las rectas en forma paramétrica.

$$r:\left.\begin{array}{l} x=1+a\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l} P_r(1,0,-1) \\ \vec{v}_r=(a,1,1) \end{array} \qquad s:\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{16}{3}-\dfrac{1}{3}\mu \\ y=\dfrac{8}{3}-\dfrac{2}{3}\mu \\ z=\mu \end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l} Q_s\left(\dfrac{16}{3},\dfrac{8}{3},0\right) \\ \vec{v}_s=(1,2,-3) \end{array}$$

Estudiamos si $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales.

$\frac{a}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-3} \rightarrow$ Las rectas no son paralelas para ningún valor de a.

Las rectas r y s son secantes si el rango de la matriz formada por $\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ es 2.

$$\begin{vmatrix} \frac{16}{3}-1 & \frac{8}{3} & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 10a - 20$$

r y s secantes $\rightarrow$ Rango $(A) = 2 \rightarrow 10a - 20 = 0 \rightarrow a = 2$

a) Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 1+2\lambda = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\mu \\ \lambda = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\mu \\ -1+\lambda = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto de intersección es } P(5, 2, 1).$$

El plano que contiene a las dos rectas es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5x + 7y + 3z + 8 = 0$$

b) La recta t es la intersección del plano π y otro plano perpendicular a la recta r que pasa por P.

El plano, π', perpendicular a r que pasa por P, tiene por vector normal $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y pasa por el punto $P(5, 2, 1) \in \pi'$.

$\pi': 2x + y + z + D = 0$

$P(5, 2, 1) \in \pi' \rightarrow 2 \cdot 5 + 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -13$

El plano que buscamos es $\pi': 2x + y + z - 13 = 0$.

La recta t es la intersección entre los dos planos.

$$t: \left.\begin{array}{r} 2x + y + z - 13 = 0 \\ -5x + 7y + 3z + 8 = 0 \end{array}\right\}$$

Calculamos otras dos rectas perpendiculares a r que pasan por P.

Si $r' \perp r \rightarrow \vec{v}_{r'} \perp \vec{v}_r \rightarrow (u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 1, 1) = 0$

Por ejemplo: $\left\{\begin{array}{l} \vec{v}_{r'} = (0, 1, -1) \\ \vec{v}_{r''} = (1, -1, -1) \end{array}\right.$ cumplen esta condición.

Así, las rectas:

$$r': \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2+\gamma \\ z = 1-\gamma \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad r'': \left.\begin{array}{l} x = 5+\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = 1-\alpha \end{array}\right\}$$

Son perpendiculares a r que pasan por P.

065 **Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$.**

(Andalucía. Junio 2001. Opción A. Ejercicio 4)

El plano que buscamos tiene por vectores directores el vector normal al plano y el vector director de la recta, y pasa por el punto A.

La recta en forma paramétrica es $r\colon \left.\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, 0)$

$\pi\colon x - y + 2z + 1 = 0 \rightarrow$ Vector normal: $\vec{n} = (1, -1, 2)$

La ecuación del plano que buscamos es:

$$\pi'\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 4y - 3z - 5 = 0$$

066 **Considera $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(5, 2, 1)$ y $D(4, 3, 3)$.**

a) Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b) Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.

c) Determina la ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 3. Opción B)

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1, -1, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son paralelos y de la misma medida.
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (3, 2, 2) \rightarrow \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelos y de la misma medida.
Por tanto, son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = (1, -1, -2) \cdot (3, 2, 2) \neq 0 \rightarrow$ No son vectores perpendiculares.
No es un rectángulo, es un romboide.

c) Determinamos el plano con vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y pasa por A.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 8y + 5z - 1 = 0$$

067 **Encuentra los puntos R pertenecientes a la recta: $r\colon \left.\begin{aligned} 2x - y - z + 3 &= 0 \\ -2x + 3y - z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$**

tales que los segmentos PQ y PR forman un ángulo recto, siendo $P(1, 0, 0)$ y $Q(0, -1, 5)$.

(Navarra. Junio 2002. Opción A. Pregunta 2)

Escribimos la recta en forma paramétrica.

$$r\colon \left.\begin{aligned} x &= -2 + \lambda \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= t \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1)$$

Si $R \in r \rightarrow R(-2+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, 5) \perp \overrightarrow{PR} = (-3+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$$(-1, -1, 5)\cdot(-3+\lambda, -1+\lambda, \lambda) = 3\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

Por tanto, el único punto que cumple la condición es $R\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

068 **Considera los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(0, 1, 5)$.**

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x, 4, 3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 1, 5) y (3, 4, 3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones: $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

a) $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-x, -1, -4)\cdot(-x, -3, 2) = x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

b) Escribimos la recta en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{3}\lambda \\ y &= 1 + \frac{2}{3}\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (1, -2, -3)$$

$$\left.\begin{aligned} P(0, 1, 5) \\ Q(3, 4, 3) \end{aligned}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3, 3, -2)$$

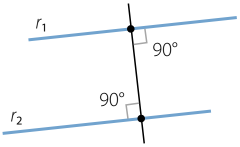
Calculamos la ecuación del plano que pasa por el punto $P(0, 1, 5)$ y tiene por vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13x - 7y + 9z - 38 = 0$$

069 **Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:**

$$r_1: \left.\begin{aligned} x + z - 1 &= 0 \\ 2x + y + z + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$r_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$



(Navarra. Junio 2006. Grupo 1. Opción B)

Hallamos un punto $Q \in r_1$ y un punto $Q \in r_2$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$r_1: \left.\begin{aligned} x &= 1 - \lambda \\ y &= -3 + \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{u} = (-1, 1, 1) \qquad r_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \vec{v} = (-1, 1, 2)$$

Un punto genérico de la recta es r_1 es $P(1-\lambda, -3+\lambda, \lambda)$

Un punto genérico de r_2 es $Q(-\mu, \mu, -1+2\mu)$

$$\overrightarrow{PQ} = (\lambda-\mu-1, -\lambda+\mu+3, -\lambda+2\mu-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u} = -3\lambda+4\mu+3=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = -4\lambda+6\mu+2=0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}-3\lambda+4\mu+3=0\\ -4\lambda+6\mu+2=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}\lambda=5\\ \mu=3\end{array}\right.$$

Por tanto los puntos son $P(-4, 2, 5)$ y $Q(-3, 3, 5)$.

La recta que buscamos tiene por vector director $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0)$ y pasa por $P(-4, 2, 5)$.

$$s\colon \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{0}$$

070 **Sean las rectas:**

$$r\colon \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) Hallar la ecuación de la recta *t* que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) Hallar la perpendicular común a las rectas *r* y *s*.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 4)

a) La recta t es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a la recta r, y π' el plano que contiene a s y pasa por el origen.

$$\pi\colon \left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\\ \vec{u_r} = (-2, 2, -4)\\ \overrightarrow{P_rO} = (-1, 2, 0)\end{array}\right\} \qquad \pi\colon \begin{vmatrix} x & y & z\\ -2 & 2 & -4\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix} = 8x+4y-2z=0$$

$$\pi\colon 4x+2y-z=0$$

$$\pi'\colon \left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\\ \vec{v_s} = (3, 1, 1)\\ \overrightarrow{Q_sO} = (2, -1, -2)\end{array}\right\} \to \pi'\colon \begin{vmatrix} x & y & z\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix} = -x+8y-5z=0$$

Por tanto, la recta t es:

$$t\colon \left.\begin{array}{r}4x+2y-z=0\\ -x+8y-5z=0\end{array}\right\}$$

b) Buscamos un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular a los vectores $\vec{u_r}$ y $\vec{v_s}$.

$$\left.\begin{array}{r}(a,b,c)\cdot(-2,2,-4) = -2a+2b-4c=0\\ (a,b,c)\cdot(3,1,1) = 3a+b+c=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}a = -\dfrac{3}{4}\lambda\\ b = \dfrac{5}{4}\lambda\\ c=\lambda\end{array}\right.$$

Por ejemplo, un vector que cumple esta condición es $\vec{n} = (-3, 5, 4)$.

La recta perpendicular común a r y a s es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a r y tiene por vector director $\vec{n}$, y π' el plano que contiene a s y tiene por vector director $\vec{n}$.

$$\left.\begin{array}{r} P_r(-1, 2, 0) \\ \pi\text{: } \vec{u}_r = (-2, 2, -4) \\ \vec{n} = (-3, 5, 4) \end{array}\right\} \to \pi\text{: } \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -2 & 2 & -4 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 28x + 20y - 4z - 12 = 0$$

$$\to \pi\text{: } 7x + 5y - z - 3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} Q_s(2, -1, -2) \\ \pi'\text{: } \vec{v}_s = (3, 1, 1) \\ \vec{n} = (-3, 5, 4) \end{array}\right\} \to \pi'\text{: } \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -x - 15y + 18z + 23 = 0$$

Por tanto, la recta perpendicular común a la recta r y s es:

$$\left.\begin{array}{r} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ -x - 15y + 18z + 23 = 0 \end{array}\right\}$$

071 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente la recta:**

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

(Baleares. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 2)

Calculamos el plano que es perpendicular a la recta y pasa por $P(2, -1, 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{v}_r = (3, 1, 2) \to \pi\text{: } 3x + y + 2z + D = 0 \\ P(2, -1, 1) \in \pi \to 3 \cdot 2 + (-1) + 2 \cdot 1 + D = 0 \to D = -7 \end{array}\right\}$$

El plano buscado es π: $3x + y + 2z - 7 = 0$.

Hallamos el punto de corte de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2} \\ 3x + y + 2z - 7 = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{39}{14} \\ y = -\dfrac{15}{14} \\ z = -\dfrac{1}{7} \end{array}\right.$$

La recta pasa por $P(2, -1, 1)$ y $Q\left(\frac{39}{14}, -\frac{15}{14}, -\frac{1}{7}\right) \to \overrightarrow{PQ} = (11, -1, -16)$.

La recta que buscamos tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por el punto $P(2, -1, 1)$.

$$s\text{: } \frac{x-2}{11} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-16}$$

072 **Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 3, 1)$, $C(1, 0, 0)$ y $D(0, 2, 0)$; se pide hallar el punto P perteneciente a la recta determinada por A y B tal que el triángulo CDP sea rectángulo con hipotenusa CP.**

(Aragón. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 2)

La recta que pasa por A y B es: r_{AB}: $\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 \end{array}\right\}$

Un punto genérico de r_{AB} es $P(1-2\lambda, 1+2\lambda, 1)$.

$\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{DP} \rightarrow (1, -2, 0)\cdot(1-2\lambda, -1+2\lambda, 1) = 0 \rightarrow 3-6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

Por tanto, el punto que buscamos es $P(0, 2, 1)$.

073 **Considere la recta r, definida por $\dfrac{x-1}{\alpha} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$. Determine α y β en cada uno de los siguientes casos.**

a) La recta r es perpendicular al plano π.

b) La recta r está contenida en el plano π.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 4)

$r: \dfrac{x-1}{\alpha} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2} \rightarrow \vec{v}_r = (\alpha, 4, 2)$

$\pi: 2x - y + \beta z = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (2, -1, \beta)$

a) $\vec{v}_r$ tiene que ser proporcional a $\vec{n}_\pi \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{4}{-1} = \dfrac{2}{\beta} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) El punto $P_r(1, 0, 1) \in \pi \rightarrow 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + \beta\cdot 1 = 0 \rightarrow \beta = -2$

$\vec{v}_r = (\alpha, 4, 2)$ es perpendicular a $\vec{n}_\pi = (2, -1, -2)$:

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow (\alpha, 4, 2)\cdot(2, -1, -2) = 0 \rightarrow \alpha = 4$

074 **Decide si el plano $6x - 4y + z - 1 = 0$ pertenece al haz de planos definido por la recta $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z - 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{array}\right\}$.**

En caso afirmativo, exprésalo como combinación lineal de los dos planos que definen la recta.

Estudiamos si el plano contiene a la recta.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 6 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

El plano pertenece al haz de planos definido por la recta. La expresión del plano como combinación lineal de los dos planos que definen el haz de planos es:

$$6x - 4y + z - 1 = \alpha(2x - y + z - 3) + \beta(y + 2z - 8)$$

$$\left.\begin{array}{r} 6 = 2\alpha \\ -4 = -\alpha + \beta \\ 1 = \alpha + 2\beta \\ -1 = -3\alpha - 8\beta \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Así: $6x - 4y + z - 1 = 3(2x - y + z - 3) - (y + 2z - 8)$

075 **Determina un plano que contiene a la recta:**

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-5z=0 \\ 2x-y+3z-8=0 \end{array}\right\}$$

y que sea paralelo al plano $6x+22z-1=0$.

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r:\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{16}{3}-\dfrac{11}{3}\lambda \\ y=\dfrac{8}{3}-\dfrac{13}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}\to \vec{v}_r=(11,-8,-3) \qquad P_r\left(\frac{16}{3},\frac{8}{3},0\right)$$

π: $6x+22z-1=0 \to$ Vector normal: $\vec{n}_\pi=(6,0,22)$

Como π' paralelo a $\pi \to \pi'$: $6x+22z+D=0$

Como $P_r\left(\dfrac{16}{3},\dfrac{8}{3},0\right)\in r \to 6\cdot\dfrac{16}{3}+22\cdot 0+D=0 \to D=-32$

Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es π': $6x+22z-32=0$.

076 **Halla un plano del haz de planos de la recta:**

$$r:\frac{x-1}{2}=y+2=z-1$$

que sea perpendicular a la recta:

$$s:\left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=2t \\ z=-3+t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma implícita:

$$r:\left.\begin{array}{r} x-1=2y+4 \\ y+2=z-1 \end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r} x-2y-5=0 \\ y-z+3=0 \end{array}\right\}$$

El haz de planos es:

$$\lambda(x-2y-5)+y-z+3=0 \to \lambda x+(1-2\lambda)y-z-5\lambda+3=0$$

Buscamos un plano del haz cuyo vector normal sea paralelo al vector $\vec{u}_r=(1,2,1)$.

$$\frac{\lambda}{1}=\frac{1-2\lambda}{2}=\frac{-1}{1}\to \text{No tiene solución.}$$

Por tanto, no existe el plano pedido.

077 **Calcula, empleando el haz de planos, la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=8 \\ 5x-2y+z=5 \end{array}\right\}$ y que pasa por el punto $P(1,0,3)$.**

El haz de planos que contiene a la recta es:

$$3x-2y+4z-8+\lambda(5x-2y+z-5)=0$$

Como debe pasar por el punto $P(1,0,3)$:

$$3\cdot 1-2\cdot 0+4\cdot 3-8+\lambda(5\cdot 1-2\cdot 0+3-5)=0\to\lambda=-\frac{7}{3}$$

El plano que buscamos es:

$$3x-2y+4z-8-\frac{7}{3}(5x-2y+z-5)=0$$

$$-\frac{26}{3}x+\frac{8}{3}y+\frac{5}{3}z+\frac{11}{3}=0 \to 26x-8y-5z-11=0$$

078 **Clasifica en agudo, obtuso o recto el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ según el signo de $\vec{u}\cdot\vec{v}$.**

Si $\vec{u}\cdot\vec{v}>0 \to \cos\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}>0 \to \widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$ es agudo.

Si $\vec{u}\cdot\vec{v}<0 \to \cos\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}<0 \to \widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$ es obtuso.

Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \to \cos\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}=0 \to \widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$ es recto.

079 **¿Para qué valores de k los vectores $\vec{a}=(k,3,5)$ y $\vec{b}=(2,-4,-2)$ forman un ángulo obtuso?**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2k-12-10$

Formarán un ángulo obtuso cuando: $2k-22<0 \to k<11$

080 **Determina el ángulo que forma el vector $\vec{u}=(3,-2,4)$ con $\vec{v}=(4,0,-1)$, y encuentra otro vector que forme el mismo ángulo con $\vec{v}$.**

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=8 \quad |\vec{u}|=\sqrt{29} \quad |\vec{v}|=\sqrt{17} \to \cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{17}}=0,3603 \to \alpha=68,88°$$

Para que $\vec{w}=(a,b,c)$ cumpla que $\widehat{\vec{w}\,\vec{v}}=\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}$:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{|\vec{w}||\vec{v}|}=\frac{4a-c}{|\vec{w}||\vec{v}|}$$

Es decir, $|\vec{w}|=|\vec{u}|$ y $4a-c=8$. Por ejemplo, $\vec{w}=(3,2,4)$ cumple estas condiciones.

081 **Halla el ángulo que forman estas parejas de vectores.**

a) $\vec{u}=(4,-1,3)$ y $\vec{v}=(3,0,2)$

b) $\vec{u}=(5,4,-1)$ y $\vec{v}=(2,-3,-2)$

c) $\vec{u}=(-4,2,5)$ y $\vec{v}=(1,3,-2)$

d) $\vec{u}=(6,8,-4)$ y $\vec{v}=(-9,-12,6)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{18}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=0,9791 \to \alpha=11°\,44'\,34''$

b) $\cos\alpha=\dfrac{0}{\sqrt{42}\sqrt{17}}=0 \to \alpha=0°$

c) $\cos\alpha=\dfrac{-8}{\sqrt{45}\sqrt{14}}=-0,3187 \to \alpha=108°\,31'\,10''$

d) $\cos\alpha=\dfrac{-174}{\sqrt{116}\sqrt{261}}=-1 \to \alpha=180°$

082 **Determina la proyección ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.**

a) $\vec{u} = (3, -5, 2)$ y $\vec{v} = (1, 2, 0)$

b) $\vec{u} = (4, -1, -2)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$

a) $Proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-7}{\sqrt{5}} = -\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ b) $Proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{12}{\sqrt{14}} = \dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

083 **¿Qué valor debe tomar a para que el ángulo que forman $\vec{u} = (1, 2, 2)$ y $\vec{v} = (-3, 1, a)$ mida 60°?**

$$\cos 60° = \frac{2a-1}{3\sqrt{10+a^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow 7a^2 - 16a - 86 = 0$$

La única solución válida es $a = \dfrac{8+3\sqrt{74}}{7}$.

084 **Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales y de módulo 1, halla los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60°.**

(Castilla y León. Junio 2001. Prueba A. Cuestión 2)

$$(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - a^2\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - a^2|\vec{v}|^2 = 1-a^2$$

$$(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}+a\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2a\vec{u}\cdot\vec{v} + a^2|\vec{v}|^2 = 1+a^2 \rightarrow |\vec{u}+a\vec{v}| = \sqrt{1+a^2}$$

$$(\vec{u}-a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2a\vec{u}\cdot\vec{v} + a^2|\vec{v}|^2 = 1+a^2 \rightarrow |\vec{u}-a\vec{v}| = \sqrt{1+a^2}$$

$$\cos 60° = \frac{(\vec{u}+a\vec{v})\cdot(\vec{u}-a\vec{v})}{|\vec{u}-a\vec{v}||\vec{u}-a\vec{v}|} = \frac{1-a^2}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

085 **Decide si el triángulo de vértices $A(-2, 4, 0)$, $B(3, -3, 1)$ y $C(6, -2, 4)$ es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.**

$|\overrightarrow{AB}| = |(5, -7, 1)| = 5\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AC}| = |(8, -6, 4)| = 2\sqrt{29}$

$|\overrightarrow{BC}| = |(3, 1, 3)| = \sqrt{19}$

El lado mayor es $|\overrightarrow{AC}|$ y además:

$|\overrightarrow{AC}|^2 = 116 > |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 19 + 75$

Por tanto, el triángulo es obtusángulo.

086 **Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ y que $|\vec{a}+\vec{b}| = 6$.**

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \rightarrow 36 = 9 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 64$$

$$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(36-9-64) = -\frac{37}{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{37}{2} = |\vec{a}||\vec{b}|\,\alpha = 3\cdot 8\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -\frac{37}{48} \rightarrow \alpha = 140°\,25'\,43''$$

087 **Obtén el valor de $|\vec{a}-\vec{b}|$, si $|\vec{a}|=4$ y $|\vec{b}|=7$ y el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de 67°.**

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=16-2\cdot 4\cdot 7\cos 67°+49=43{,}11\rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=6{,}56$$

088 **Si $|\vec{u}|=3$ y $|\vec{v}|=4$ y ambos vectores forman un ángulo de 135°, determina el ángulo que forman los vectores $2\vec{u}+\vec{v}$ y $3\vec{u}-2\vec{v}$.**

$$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})=6|\vec{u}|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-2|\vec{v}|^2=6\cdot 3^2-3\cdot 4\cdot\cos 135°-2\cdot 4^2=$$
$$=6\sqrt{2}+22$$

$$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{u}+\vec{v})=4|\vec{u}|^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$$
$$|2\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{4\cdot 3^2+4\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 135°+4^2}=4{,}2496$$

$$(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})=9|\vec{u}|^2-12\vec{u}\cdot\vec{v}+4|\vec{v}|^2$$
$$|3\vec{u}-2\vec{v}|=\sqrt{9\cdot 3^2-12\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 135°+4\cdot 4^2}=15{,}7106$$

$$\cos\alpha=\frac{(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})}{|2\vec{u}+\vec{v}|\cdot|3\vec{u}-2\vec{v}|}=\frac{6\sqrt{2}+22}{4{,}2496\cdot 15{,}7106}=0{,}4566\rightarrow\alpha=62°\,49'\,55''$$

089 **Demuestra que las diagonales de un rombo son perpendiculares.**

Los dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que generan un rombo tienen el mismo módulo. Sus diagonales son $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ y su producto escalar $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$.
Por tanto, las diagonales son perpendiculares.

090 **Determina los ángulos que describen las siguientes parejas de rectas.**

a) $r:\left.\begin{aligned}x&=1-\lambda\\y&=4-\lambda\\z&=2+2\lambda\end{aligned}\right\}$ $\qquad s:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{2}$

b) $r:\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{2}$ $\qquad s:\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

c) $r:\left.\begin{aligned}x&=-\lambda\\y&=2-4\lambda\\z&=7+14\lambda\end{aligned}\right\}$ $\qquad s:\left.\begin{aligned}x-2y+z&=6\\-x+4z&=0\end{aligned}\right\}$

d) $r:\left.\begin{aligned}2x-y+3z&=0\\3x-2y+4z&=5\end{aligned}\right\}$ $\qquad s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

a) $\vec{u}_r=(-1,-1,2)$ y $\vec{v}_s=(3,-4,2)$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{29}}=0{,}379\rightarrow\alpha=67°\,43'\,31'$$

b) $\vec{u}_r=(6,-4,2)$ y $\vec{v}_s=(-3,2,-1)$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{28}{\sqrt{56}\sqrt{14}}=1\rightarrow\alpha=0°$$

c) $\vec{u}_r = (-1, -4, 14)$

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = -3 + \dfrac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (8, 5, 2)$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

d) $\vec{v}_s = (2, 2, -1)$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -5 - 2\lambda \\ y = -10 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (-2, -2, 1)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot 3} = 0{,}9526 \rightarrow \alpha = 17°\,42'\,56''$$

091 Calcula el ángulo que forman estas parejas de rectas y planos.

a) $\pi: x - 2y + 3z = 8$ $\quad r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$

b) $\pi: x - 3y - z = 6$ $\quad r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-4}$

c) $\pi: 2x + 2y + 2z = -3$ $\quad r: \left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 8 \\ -2x + y + z = 4 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1, -2, 3) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = 90° - arc\ cos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) =$$

$$= 90° - arc\ cos\left(\frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right) = 90° - 49{,}1° = 40{,}9°$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1, -3, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 2, -4) \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = 90° - arc\ cos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) =$$

$$= 90° - arc\ cos\left(\frac{0}{\sqrt{11}\sqrt{24}}\right) = 90° - 90° = 40°$$

c) $\vec{n}_\pi = (2, 2, 2)$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 1)$$

$$\alpha = 90° - arc\ cos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) = 90° - arc\ cos\left(\frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{12}}\right) = 90° - 0° = 90°$$

092 Halla el ángulo que definen estas parejas de planos.

a) $\alpha: 2x - y + 3z = -9$ $\qquad\beta: 2x - 2y - 2z = 19$

b) $\alpha: -x + 5y + 3z = -1$ $\qquad\beta: 3x + 5y + 7z = 9$

c) $\alpha: -4x + 12y - 28z = -13$ $\qquad\beta: \left.\begin{array}{l} x = -2 + t + 3s \\ y = 2 - 2t + s \\ z = 1 - t \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (2, -1, 3) \\ \vec{n}_\beta = (2, -2, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (-1, 5, 3) \\ \vec{n}_\beta = (3, 5, 7) \end{array}\right\}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{43}{\sqrt{35}\sqrt{83}} = 0,7978 \rightarrow \alpha = 37°\,4'\,45''$$

c) Escribimos el plano β en forma implícita.

$$\beta: \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - 3y + 7z + 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (-4, 12, -28) \\ \vec{n}_\beta = (1, -3, 7) \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{236}{\sqrt{944}\sqrt{59}} = 1 \rightarrow \alpha = 0°$$

093 Determina el vector o vectores unitarios, $\vec{v} = (a, b, c)$ (con $a > 0, b > 0, c > 0$), que forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes con el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con el vector $\vec{w} = (2, 0, 2)$.

(Galicia. Junio 2002. Bloque 2. Pregunta 2)

Planteamos un sistema con las condiciones del enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{a+b+c}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2a+2c}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$$

Quitando denominadores y suprimiendo las raíces obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = \frac{3}{2} \\ a + c = 1 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene dos soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$$

Por tanto, existen dos vectores que cumplen las condiciones del problema:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \vec{v}_2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

094 **Dadas las rectas:**

$$r\!: \left.\begin{array}{r} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{array}\right\} \qquad s\!: \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y-z-5=0 \end{array}\right\}$$

a) Determina su posición relativa.

b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 4. Opción A)

a) Pasamos ambas rectas a forma paramétrica.

$$r\!: \left.\begin{array}{r} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 0) \qquad P_r(-2, 0, -1)$$

$$s\!: \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y-z-5=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=5+\mu \\ z=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (0, 1, 1) \qquad Q_s(2, 5, 0)$$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{PQ} = (4, 5, 1)$, $\vec{u}_r$ y $\vec{v}_s$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}\,(A) = 2$$

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, r y s son secantes.

b) Ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

Calculamos el punto de corte.

$$\left.\begin{array}{r} -2+\lambda=2 \\ \lambda=5+\mu \\ -1=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=4 \\ \mu=-1 \end{array}\right.$$

El punto de corte entre las dos rectas es $C(2, 4, -1)$.

095 Calcula el ángulo que forma el plano $x+y+z=0$ con la recta de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\}$.

(Extremadura. Septiembre 2006. Repertorio A. Ejercicio 2)

$$r: \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=t \\ z=1-t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(-1,1,-1)$$

$$\pi: x+y+z=0 \rightarrow \vec{n}_\pi=(1,1,1)$$

$$\alpha=90^\circ-\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{n}_\pi|}\right)=90^\circ-\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right)=19{,}47^\circ$$

096 Sean π y π' los planos del espacio $\mathbb{R}^3$, determinados del modo siguiente:
El plano π pasa por los puntos (0, 2, 1), (3, −1, 1) y (1, −1, 5) y el plano π' pasa por los puntos (3, 0, 2), (2, 1, 1) y (5, 4, −2). Se pide calcular:

a) Una ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos π y π'.
b) El ángulo α que forman los planos π y π'.
c) La ecuación del plano que contiene a la recta r y forma un ángulo de 90° con el plano π.

(C. Valenciana. Septiembre 2003. Ejercicio B. Problema 4)

- Plano π.
  $P(0,2,1)$ $Q(3,-1,1)$ $R(1,-1,5)$ $\overrightarrow{PQ}=(3,-3,0)$ $\overrightarrow{PR}=(1,-3,4)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}=-12x-12y-6z+30=0 \rightarrow \pi: 2x+2y+z-5=0$$

- Plano π'.
  $P'(3,0,2)$ $Q'(2,1,1)$ $R'(5,4,-2)$ $\overrightarrow{P'Q'}=(3,-3,0)$ $\overrightarrow{P'R'}=(2,4,-4)$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}=-6y-6z+12=0 \rightarrow \pi': y+z-2=0$$

a) $$r: \left.\begin{array}{r} 2x+2y+z-5=0 \\ y+z-2=0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array}\right\}$$

b) $$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi|\cdot|\vec{n}_{\pi'}|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\alpha=45^\circ$$

c) $$\left.\begin{array}{l} P(0,3,-1)\in r \\ \vec{u}_r=(1,-2,2) \\ \vec{n}_\pi=(2,2,1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi'': \begin{vmatrix} x & y-3 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-6x+3y+6z-3=0$$

$$\rightarrow \pi'': 2x-y-2z+1=0$$

097 Averigua para qué valor de m la recta r: $\left.\begin{array}{r} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=-2 \end{array}\right\}$ se corta con la recta s: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{5}$.

Calcula el coseno del ángulo que forman ambas rectas.

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta A. Ejercicio 5)

Estudiamos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=-2 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=m \\ 2x-y-z=-2 \\ 3x-2y=5 \\ 5y-3z=-17 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & m \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A)=3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & m \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & -17 \end{vmatrix} = 12m-327$$

- Si $12m-327=0 \rightarrow m=\dfrac{327}{12} \rightarrow \text{Rango}\,(A^*)=3$
- Si $12m-327\neq 0 \rightarrow m=\dfrac{327}{12} \rightarrow \text{Rango}\,(A^*)=4$

Si $m=\dfrac{327}{12} \rightarrow \text{Rango}\,(A)=\text{Rango}\,(A^*)=3$. El sistema es compatible determinado. Las rectas r y s se cortan en un punto.

Determinamos los vectores directores de las rectas.

$$r\!: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{m-4}{5}-\dfrac{3}{5}\lambda \\ y=\dfrac{2m+2}{5}-\dfrac{11}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u_r}=(-3,-11,5)$$

$$s\!: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{5} \rightarrow \vec{v_s}=(2,3,5)$$

El ángulo que forman r y s es el que forman sus vectores directores.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{14}{\sqrt{155}\,\sqrt{38}}=0{,}1824 \rightarrow \alpha=\operatorname{arc\,cos} 0{,}1824=79{,}49^\circ$$

098 Consideremos los planos:

$$\pi_1: x + y - 6 = 0 \qquad \pi_2: 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:

a) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los dos planos π_1 y π_2 cuando $\lambda = 4$.

b) Calcula razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45°.

(C. Valenciana. Septiembre 2002. Ejercicio A. Problema 3)

a) Si $\lambda = 4 \rightarrow \pi_2: 2x + 4y + 4z + 2 = 0 \rightarrow \pi_2: x + 2y + 2z + 1 = 0$

$$r: \left.\begin{matrix} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = 13 + 2\lambda \\ y = -7 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right\}$$

b) $$\left.\begin{matrix} \vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, 0) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (2, 4, \lambda) \end{matrix}\right\} \rightarrow \cos 45° = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{20 + \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow 6 = \sqrt{20 + \lambda^2} \rightarrow \lambda = \pm 4$$

099 Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones:

$$\pi_1: x + 2y + z + 3 = 0 \qquad \pi_2: 2x + y - z - 6 = 0$$

se pide:

a) Calcula el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2.

b) Calcula la ecuación paramétrica de la recta r, intersección de los planos π_1 y π_2.

c) Comprueba que el plano π de ecuación $\pi: x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2, es decir, π forma un ángulo $\frac{\alpha}{2}$ con cada uno de los planos π_1 y π_2, donde α es el ángulo obtenido en el apartado a).

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 2. Problema 2)

a) $$\left.\begin{matrix} \vec{n}_1 = (1, 2, 1) \\ \vec{n}_2 = (2, 1, -1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

b) $$r: \left.\begin{matrix} x + 2y + z + 3 = 0 \\ 2x + y - z + 6 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = 5 + \lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right\}$$

c) $\pi: x + y - 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 1, 0)$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \beta = 30°$$

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_2| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \gamma = 30°$$

Por tanto, el plano π es bisector de los planos π_1 y π_2.

100 Dados la recta $r: \left.\begin{array}{r} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi: x + y - 2 = 0$:

a) Determina su posición relativa.

b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 4)

a) $r: \left.\begin{array}{r} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (0, 1, 1)$

$\pi: x + y - 2 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 1, 0)$

Como $\vec{u}_r = \vec{n}_\pi \neq 0 \rightarrow$ Los vectores no son perpendiculares, y por tanto, el plano y la recta son secantes.

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{n}_\pi = (1, 1, 0) \end{array}\right\}$

$$\alpha = 90° - arc\ cos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) = 90° - arc\ cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = 30°$$

El punto de corte lo hallamos resolviendo el sistema formado por todas las ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Por tanto, el punto de corte es $P(-1, 3, 2)$.

101 Dadas las rectas:

$$r: \left.\begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ z = 2x + 1 \end{array}\right\} \qquad s: \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{1}$$

encuentra una recta bisectriz de r y s (una recta bisectriz de otras dos pasa por el punto de intersección de estas, está en el mismo plano que ellas y forma el mismo ángulo con ambas).

(Navarra. Junio 2000. Opción A. Pregunta 2)

Hallamos el punto de intersección de las rectas.

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x + 1 \\ z = 2x + 1 \\ \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+3}{2} \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{1} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

El punto de intersección de r y s es $P(-1, -1, -1)$.

Determinamos los vectores directores de r y s.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} y = 2x+1 \\ z = 2x+1 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} x = \lambda \\ y = 2\lambda+1 \\ z = 2\lambda+1 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 2, 2)$$

$$s\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{1} \rightarrow \vec{v}_s = (2, 2, 1)$$

Buscamos un vector $\vec{w} = (a, b, c)$ que cumpla la condición:

$$cos\,(\vec{u}_r, \vec{w}) = cos\,(\vec{v}_s, \vec{w})$$

$$\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{w}}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{w}|} = \frac{\vec{v}_s \cdot \vec{w}}{|\vec{v}_s| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\frac{a+2b+2c}{3 \cdot |\vec{w}|} = \frac{2a+2b+c}{3 \cdot |\vec{w}|}$$

$$a - c = 0 \rightarrow a = c$$

Los vectores $\vec{w}$ que buscamos son del tipo $\vec{w} = (a, b, a)$.

Además, el vector $\vec{w}$ tiene que pertenecer al plano determinado por las rectas r y s, es decir, tiene que ser linealmente dependiente de los vectores directores de las rectas.

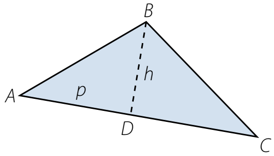
$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3b - 4a = 0 \rightarrow a = \frac{3}{4}b$$

Si hacemos $b = 4$, un vector puede ser $\vec{w} = (3, 4, 3)$.

La ecuación de la bisectriz de r y s es:

$$t\colon \left.\begin{array}{l} x = -1+3t \\ y = -1+4t \\ z = -1+3t \end{array}\right\}$$

102 **Calcula la altura que parte de B en el triángulo de vértices $A(3, -1, -2)$, $B(4, 2, 1)$ y $C(5, 3, 4)$, haciendo uso de proyecciones de vectores.**



$\overrightarrow{AB} = (1, 3, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (2, 4, 6)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{19}$ $\qquad$ $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{14}$

$$p = |\overrightarrow{AD}| = Proy_{\overrightarrow{AC}}\ \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{32}{2\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

$$h = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2} = 0{,}8452$$

Producto escalar

103 Dada la recta: $r: \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+7}{-11}$ y el plano $\pi: 2x + y - 3z + 8 = 0$:

a) Decide su posición relativa y, en caso de cortarse, el ángulo que forman.

b) Calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

a) $\vec{u_r} = (2, 5, -11)$ $\quad\quad$ $\vec{n_\pi} = (2, 1, -3)$

Como $\vec{u_r} = \vec{n_\pi} \neq 0 \rightarrow$ Los vectores no son perpendiculares. La recta corta al plano.

$$\alpha = 90° - arc\ cos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = 90° - arc\ cos \frac{42}{\sqrt{150}\sqrt{14}} = 66{,}42°$$

b) Calculamos el plano π' que contiene a r y corta perpendicularmente π.

$$\left.\begin{array}{r} P(5, 3, -7) \in r \\ \vec{u_r} = (2, 5, -11) \\ \vec{n_\pi} = (2, 1, -3) \end{array}\right\} \rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z+7 \\ 2 & 5 & -11 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4x - 16y - 8z + 12 = 0$$

$$\rightarrow \pi': x + 4y + 2z - 3 = 0$$

La recta s, proyección ortogonal de la recta r sobre π, es el corte de los planos π y π'.

$$s: \left.\begin{array}{r} 2x + y - 3z + 8 = 0 \\ x + 4y + 2z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = -5 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

104 Calcula el punto simétrico de $P(6, 10, 22)$ respecto del plano $2x + 3y + 7z - 10 = 0$.

Hallamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(6, 10, 22) \\ \vec{n_\pi} = (2, 3, 7) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 6 + 2\lambda \\ y = 10 + 3\lambda \\ z = 22 + 7\lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = 6 + 2\lambda \\ y = 10 + 3\lambda \\ z = 22 + 7\lambda \\ 2x + 3y + 7z - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = -3 \end{array}\right. \rightarrow Q(0, 1, 1)$$

Q es el punto medio entre P y su punto simétrico $P'(a, b, c)$.

$$(0, 1, 1) = \left(\frac{6+a}{2}, \frac{10+b}{2}, \frac{22+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -6 \\ b = -8 \\ c = -20 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'(-6, -8, -20)$.

105 **Halla la proyección ortogonal P' del punto $P(7, 3, -3)$ sobre el plano π: $3x + y - z = 5$. Comprueba que la distancia de P al plano es la misma que la distancia a P'. Utiliza P' para calcular el punto simétrico de P respecto del plano.**

Hallamos la proyección ortogonal P' del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(7, 3, -3) \\ \vec{n}_\pi = (3, 1, -1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 7 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = 7 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -3 - \lambda \\ 3x + y - z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ \lambda = -2 \end{array}\right. \rightarrow P'(1, 1, -1)$$

Veamos que las distancias son iguales:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 7 + 3 - (-3) - 5|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{22}{\sqrt{11}} = 2\sqrt{11}$$

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(-6, -2, -2)| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Calculamos el punto $Q(q_1, q_2, q_3)$ simétrico del punto P respecto al plano π.

$$(1, 1, -1) = \left(\frac{7 + q_1}{2}, \frac{3 + q_2}{2}, \frac{-3 + q_3}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} q_1 = -5 \\ q_2 = -1 \\ q_3 = 1 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $Q(-5, -1, 1)$.

106 **Obtén las coordenadas del punto simétrico a $P(2, 1, 17)$ respecto de la recta r, cuya ecuación vectorial es: $r: (x, y, z) = (-1, 4, 2) + \lambda(2, 1, 4)$.**

Calculamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre r.

- Plano perpendicular a r que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(2, 1, 17) \\ \vec{u}_r = (2, 1, 4) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: 2x + y + 4z - 73 = 0$$

- Intersección entre el plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r} x = -1 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + 4\lambda \\ 2x + y + 4z - 73 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \\ z = 14 \\ \lambda = 3 \end{array}\right. \rightarrow Q(5, 7, 14)$$

Hallamos el punto simétrico $P'(a, b, c)$ respecto de la proyección Q.

$$(5, 7, 14) = \left(\frac{2 + a}{2}, \frac{1 + b}{2}, \frac{17 + c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 13 \\ c = 11 \end{array}\right.$$

El punto simétrico de P respecto de la resta r es $P'(8, 13, 11)$.

107 Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta:

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

(Andalucía. Junio 2005. Opción A. Ejercicio 4)

a) Escribimos la recta r en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{l} x = 6 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array}\right\} \to \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \qquad Q_r(6, 0, 2)$$

El plano que buscamos tiene como vectores directores $\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{PQ_r}$, y pasa por el punto P.

$$\left.\begin{array}{r} P(2, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \\ \overrightarrow{PQ_r} = (4, 0, 1) \end{array}\right\} \to \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y - 4z + 2 = 0$$

b) Calculamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre r.

- Plano perpendicular a r que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(2, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \end{array}\right\} \to \pi: -2x + y + 4 = 0$$

- Intersección entre el plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ z = 2 \\ -2x + y + 4 = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{14}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \\ z = 2 \end{array}\right. \to Q\left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2\right)$$

Calculamos el punto $P'(a, b, c)$ simétrico del punto P respecto al plano π.

$$\left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2\right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) \to \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{18}{5} \\ b = \dfrac{16}{5} \\ c = 3 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3\right)$.

108 Para cada valor de a los puntos $P(1, 2, 3)$ y $A(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano.

Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular encuentra el plano para $a = 2$.

(País Vasco. Junio 2005. Bloque B. Cuestión B)

Hallamos el plano que pasa por el punto medio M del segmento PA y cuyo vector normal es el vector $\overrightarrow{PA}$.

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3+a}{2}\right) \\ \overrightarrow{PA} = (-1, -1, a-3) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: -x - y + (a-3)z - \dfrac{a^2-13}{2} = 0$$

Para $a = 2 \rightarrow \pi_1: -x - y - z + \dfrac{9}{2} = 0 \rightarrow \pi_1: 2x + 2y + 2z - 9 = 0$

109 **Escribir las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector (1, −1, 0) y que pasa por P', siendo P' el simétrico de $P(0, -2, 0)$ respecto al plano π: $x + 3y + z = 5$.**

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 4)

Hallamos la proyección ortogonal Q del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l} P(0, -2, 0) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (1, 3, 1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \\ x + 3y + z - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda = 1 \end{array}\right. \rightarrow Q(1, 1, 1)$$

Calculamos las coordenadas de $P'(a, b, c)$, punto simétrico de P respecto de π.

$$(1, 1, 1) = \left(\dfrac{0+a}{2}, \dfrac{-2+b}{2}, \dfrac{0+c}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'(2, 4, 2)$.

La ecuación de la recta, en forma implícita, que pasa por el punto P' y tiene por vector director (1, −1, 0) es:

$$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{0} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-1} \\ \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-2}{0} \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x + y - 6 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

110 **Halla la distancia del punto $A(3, -1, -2)$ al punto $B(5, 2, 4)$.**

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-3)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = 7$$

111 **¿Es isósceles el triángulo de vértices $A(2, 5, -1)$, $B(3, -2, 4)$ y $C(-2, -3, 11)$?**

$|\overrightarrow{AB}| = |(-1, -7, 5)| = 5\sqrt{3}$ $\qquad$ $|\overrightarrow{BC}| = |(-5, -1, 7)| = 5\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AC}| = |(-4, -8, 12)| = 4\sqrt{14}$

Tiene dos lados iguales y uno desigual, el triángulo es isósceles.

112 ¿Qué lado es menor en el triángulo de vértices $A(3, -1, 4)$, $B(0, -2, 3)$ y $C(5, 5, -1)$?

$|\overrightarrow{AB}| = |(-3, -1, -1)| = \sqrt{11}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = |(5, 7, -4)| = \sqrt{90}$

$|\overrightarrow{AC}| = |(2, 6, -5)| = \sqrt{65}$

El menor lado es AB.

113 Determina las distancias que hay entre estos puntos: $P(1, 0, 3)$, $Q(4, 5, 1)$ y $R(10, 15, -3)$. ¿Qué puedes decir de los tres puntos?

$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(3, 5, -2)| = \sqrt{38}$

$d(Q, R) = |\overrightarrow{QR}| = |(6, 10, -4)| = 2\sqrt{38}$

$d(P, R) = |\overrightarrow{PR}| = |(9, 15, -6)| = 3\sqrt{38}$

Como $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R) \rightarrow$ Los tres puntos están alineados.

114 Comprueba que la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z + 3$ no corta al plano $3x - 2y = 8$.

$r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z + 3 \rightarrow \vec{u}_r = (2, 3, 1)$ $\quad P_r(3, -1, -3)$

$\pi: 3x - 2y = 8 \rightarrow \vec{n}_\pi = (3, -2, 0)$.

$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow \vec{u}_r$ y $\vec{n}_\pi$ son perpendiculares.

La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Como $P_r(3, -1, 3) \in r$ y $P_r(3, -1, 3) \notin \pi \rightarrow$ la recta y el plano son paralelos.

115 Halla la distancia al plano $\pi: 8x - 4y + z - 5 = 0$ de los puntos $P(2, 4, 12)$, $Q(0, -1, 1)$ y $R(1, 3, 2)$. ¿Qué puedes decir del punto Q? ¿Y qué tienen en común P y R?

$$d(P, \pi) = \left|\frac{8\cdot 2 - 4\cdot 4 + 12 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}\right| = \frac{7}{9} \qquad d(R, \pi) = \left|\frac{8\cdot 1 - 4\cdot 3 + 2 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}\right| = \frac{7}{9}$$

$$d(Q, \pi) = \left|\frac{8\cdot 0 - 4\cdot(-1) + 1 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}\right| = 0$$

El punto Q pertenece al plano y los puntos P y R equidistan de él.

116 Calcula la distancia entre las siguientes parejas de planos.

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = -4 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda - 5\mu \end{array}\right\}$ $\quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 4 + 4\mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = -4 + 2\lambda - 4\mu \end{array}\right\}$

b) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 3 + \mu \end{array}\right\}$ $\quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 5 + 4\mu \\ y = -1 + \lambda - 2\mu \\ z = 8 + 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$

c) $\pi: 2x - 4y + z - 7 = 0$ $\quad \pi': -x + 3y - 5z + 9 = 0$

a) Escribimos los planos en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -6x + 8y - 4z - 24 = 0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -6x + 8y - 4z - 16 = 0$$

Los planos son paralelos. Tomando $P(4, 3, -4) \in \pi'$.

$$d(\pi, \pi') = d(\pi, P) = \frac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) - 24|}{\sqrt{36+64+16}} = \frac{8}{\sqrt{116}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

b) Escribimos los planos en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2x - 3y + z - 1 = 0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z-8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x + 12y - 4z + 4 = 0$$

Los planos son coincidentes $\rightarrow d(\pi, \pi') = 0$.

c) Los planos son secantes $\rightarrow d(\pi, \pi') = 0$.

117 **Halla la distancia del punto $P(-5, 2, -2)$ al plano de ecuación $\pi: 2x - y + z - 4 = 0$. Obtén la proyección ortogonal de P sobre el plano π, que es un punto P'. Comprueba que la distancia de P a P' es la misma que de P al plano π.**

$$d(P, \pi) = \left| \frac{2 \cdot (-5) - 2 + (-2) - 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| = 3\sqrt{6}$$

Hallamos la proyección ortogonal P' del punto P sobre el plano π.

- Recta perpendicular a π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{r} P(-5, 2, -2) \\ \vec{n}_\pi = (2, -1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = -5 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array}\right\}$$

- Intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = -5 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right. \rightarrow P'(1, -1, 1)$$

Hallamos la distancia de P a P'.

$$d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(6, -3, 3)| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \rightarrow d(P, P') = d(P, \pi)$$

118 Halla dos puntos de r: $\left.\begin{array}{l} x=-3+p \\ y=-2 \\ z=-5+p \end{array}\right\}$ y de s: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-11}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$
que se encuentren a la mínima distancia.

Hallamos un punto $P \in r$ y un punto $Q \in s$ con la condición de que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} P(-3+p,-2,-5+p) \\ Q(6+2q, 11+3q, -2-2q) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-p+2q+9, 3q+13, -p-2q+3)$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r=(-p+2q+9, 3q+13, -p-2q+3) \cdot (1,0,1)=12-2p=0 \rightarrow p=6$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_s=(-p+2q+9, 3q+13, -p-2q+3) \cdot (2,3,-2)=17q+51=0$$
$$q=-3$$

Por tanto, los puntos buscados son $P(3,-2,1)$ y $Q(0,2,4)$.

119 a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r_1 que pasa por los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 2, 3)$.
b) Calcula la ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y $C(2, 2, 4)$.
c) ¿Cuántos planos distintos pueden formarse con los puntos A, B, C y $D(1, 2, 4)$? Justifica tu respuesta.
d) Prueba que los puntos A, B, C y D anteriores forman un cuadrado y calcula su área.
(Cantabria. Junio 2005. Bloque 3. Opción A)

a) $\left.\begin{array}{r} A(1,2,3) \\ \overrightarrow{AB}=(1,0,0) \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} y=2 \\ z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} A(1,2,3) \\ \overrightarrow{AB}=(1,0,0) \\ \overrightarrow{AC}=(1,0,1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=y-2=0$

c) $\pi: y-2=0 \xrightarrow{D(1,2,4)} 2-2=0 \rightarrow D \in \pi$
Con los puntos A, B, C y D sólo puede formarse un plano.

d) $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ $\qquad \overrightarrow{BC}=(0,0,1)$
$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$ $\qquad \overrightarrow{DA}=(0,0,-1)$
Estos vectores son de módulo uno y además paralelos dos a dos, por tanto, generan un cuadrado de área 1.

120 De una recta r se sabe que está contenida en el plano π de ecuación $x-y=0$, que $A(0, 0, 0)$ pertenece a r, y que el vector que une A y $B(1, 0, -1)$ es perpendicular a r. Determina la recta r y calcula la distancia entre r y el plano paralelo a π que pasa por B.
(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba B. Problema 1)

- El vector director de la recta r, $\vec{u}_r=(a,b,c)$, es perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n}_\pi=(1,-1,0)$
$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi=(a,b,c)\cdot(1,-1,0)=a-b=0 \rightarrow a=b$
El vector director de la recta es de la forma $\vec{u}_r=(a,a,c)$.

- El vector director de la recta r, $\vec{u}_r = (a, a, c)$, es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$.

  $\vec{u}_r \cdot \overrightarrow{AB} = (a, a, c) \cdot (1, 0, -1) = a - c = 0 \rightarrow a = c$

  El vector director de la recta es de la forma $\vec{u}_r = (a, a, a)$. Por ejemplo, para $a = 1$, el vector $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$ es un vector director de r.

  Por tanto, la ecuación de la recta r es:

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & A(0, 0, 0)\\ \text{Vector director:} & \vec{u}_r = (1, 1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

  El plano π' es paralelo al plano $\pi \rightarrow \pi'$: $x - y + D = 0$

  $$B(1, 0, -1) \in \pi' \rightarrow 1 - 0 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

  π': $x - y - 1 = 0$

  Como r es paralela a π', la distancia de la recta al plano es la misma que la distancia del punto $A(0, 0, 0) \in r$ al plano π'.

  $$d(r, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

121 a) **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi: x + y + z = 3$.**

b) **Obtén el punto de corte de la recta con el plano π.**

c) **Halla el punto de la recta $\left.\begin{array}{l} x = \lambda\\ y = 3 - \lambda\\ z = 1 + 2\lambda\end{array}\right\}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.**

(Aragón. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)

a) $$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & A(0, 0, 0)\\ \text{Vector director:} & \vec{n}_\pi = (1, 1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda\\ y = \lambda\\ z = \lambda\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x = \lambda\\ y = -\lambda\\ z = \lambda\\ x + y + z = 3\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1\\ y = 1\\ z = 1\\ \lambda = 1\end{array}\right. \rightarrow P(1, 1, 1)$$

c) Un punto genérico de la recta r es $Q(\lambda, 3 - \lambda, 1 + 2\lambda)$.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{5} \rightarrow (\lambda - 1)^2 + (3 - \lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 5 \rightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, el punto buscado es $Q(1, 2, 3)$.

122 **La trayectoria de un proyectil viene dada por la recta: r: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda\\ y = 3 + \lambda\\ z = 1 + 2\lambda\end{array}\right\}$.**

a) **Estudia si el proyectil impacta con la superficie determinada por el plano.**

b) **Calcula el punto de impacto y la distancia recorrida por el proyectil desde el punto inicial $P(2, 3, 1)$ hasta el punto de impacto.**

(Murcia. Junio 2006. Bloque 2. Cuestión B)

a) $$\left.\begin{array}{r} x = 2-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1+2\lambda \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=5 \\ z=5 \\ \lambda=2 \end{array}\right.$$

Este sistema tiene solución, por tanto, el proyectil impacta con la superficie determinada por el plano.

b) El punto del impacto es $Q(0, 5, 5)$.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, 4)| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

123 **Halla los puntos de la recta $r: x-1=y+2=z$ que equidistan de los planos $\pi_1: 4x-3z-1=0$ y $\pi_2: 3x+4y-1=0$.**

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

Un punto genérico de la recta r es $P(1+\lambda, -2+\lambda, \lambda)$.

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \rightarrow \frac{|4+4\lambda-3\lambda-1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3+3\lambda-8+4\lambda-1|}{\sqrt{9+16}}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3+\lambda = 7\lambda-6 \rightarrow \lambda = \dfrac{3}{2} \\ 3+\lambda = -7\lambda+6 \rightarrow \lambda = \dfrac{3}{8} \end{array}\right.$$

Los puntos son $Q_1\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $Q_2\left(\frac{11}{8}, -\frac{13}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

124 **Calcula la distancia entre los planos $x+y-z=5$ y $x+y-z-1=0$.**

(Baleares. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

Los planos son paralelos. La distancia entre los dos planos es la misma que la distancia entre un punto del primer plano al segundo plano.

$A(3, 2, 0) \in \pi: x+y-z=5$

$$d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|3+2-0-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

125 **Sean P y Q los puntos del espacio de coordenadas $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 1, 2)$. Encuentra la condición que debe cumplir un punto de coordenadas $A(x, y, z)$ para que la distancia de A hasta P sea igual que la distancia desde A hasta Q.**

¿El conjunto de todos los puntos que satisfacen esta condición forma un plano? Razona la contestación.

(País Vasco. Junio 2006. Bloque B. Cuestión B)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (x, y, z) \\ \overrightarrow{QA} = (x, y-1, z-2) \end{array}\right\} \rightarrow |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{QA}|$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2} \rightarrow 2y+4z=5$$

La condición que deben cumplir las coordenadas del punto $A(x, y, z)$ es que $2y+4z=5$.

El conjunto de todos los puntos que cumplen esta condición es el plano $\pi: 2y+4z=5$.

126 Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$.

a) Calcula la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleve al punto más cercano del plano π.

b) Calcula dicho punto.

c) Calcula la distancia que debe recorrer.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 2. Cuestión A)

a) La trayectoria es la recta perpendicular al plano que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(1, 2, 1)\\ \text{Vector director:} & \vec{n}_\pi = (1, 1, 3)\end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l}x = 1 + \lambda\\ y = 2 + \lambda\\ z = 1 + 3\lambda\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r}x = 1 + \lambda\\ y = 2 + \lambda\\ z = 1 + 3\lambda\\ x + y + 3z = 0\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{11}\\ y = \dfrac{16}{11}\\ z = -\dfrac{7}{11}\\ \lambda = -\dfrac{6}{11}\end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, -\frac{7}{11}\right)$$

c) $$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(-\frac{6}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{18}{11}\right)\right| = \frac{6\sqrt{11}}{11}$$

127 Halla razonadamente las ecuaciones de los dos planos paralelos al plano π de ecuación $\pi: 12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades de π.

(C. Valenciana. Junio 2001. Ejercicio A. Problema 1)

π_1 paralelo al plano $\pi \rightarrow \pi_1: 12x + 3y - 4z + D_1 = 0$

π_2 paralelo al plano $\pi \rightarrow \pi_2: 12x + 3y - 4z + D_2 = 0$

Como $A(0, 1, -1) \in \pi$:

$$d(\pi, \pi_1) = d(A, \pi_1) = \frac{|12 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + D|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}} = 6$$

$$|D + 7| = 78 \rightarrow \begin{cases} D = 71\\ D = -85\end{cases}$$

Los planos son: $\pi_1: 12x + 3y - 4z + 71 = 0$ y $\pi_2: 12x + 3y - 4z - 85 = 0$

128 Halla la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3).

Halla los puntos de la recta $x = y = z$ que están a distancia $\frac{1}{7}$ de este plano.

(Baleares. Junio 2002. Opción B. Cuestión 4)

Si $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$:

$$\left.\begin{array}{r} A(1,0,0) \\ \overrightarrow{AB}=(-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,3) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6x+3y+2z-6=0$$

Un punto genérico de la recta r: $x = y = z$ es de la forma $P(\lambda, \lambda, \lambda)$.

$$d(P,\pi)=\frac{|6\cdot\lambda+3\cdot\lambda+2\lambda-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{1}{7}\rightarrow |11\lambda-6|=1\rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1+6}{11}=\dfrac{7}{11} \\ \lambda=\dfrac{-1+6}{11}=\dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Los puntos buscados son: $Q_1\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{7}{11}\right)$ y $Q_2\left(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}\right)$.

129 **a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta** $\left.\begin{array}{l} x+y+z-3=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{array}\right\}$ **que pasa por el punto (5, 0, 10).**

b) Hallar la distancia de dicho plano al punto (2, 1, 0).

(La Rioja. Septiembre 2002. Propuesta B. Ejercicio 5)

a) El vector director de la recta es el vector normal del plano que buscamos.

$$r: \left.\begin{array}{r} x+y+z-3=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=7-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=-4+2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{u_r}=(-3,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto:} & P(5,0,10) \\ \text{Vector normal:} & \overrightarrow{u_r}=(-3,1,2) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: -3x+y+2z-5=0$$

b) $$d(\pi\,(2,1,0))=\frac{|-3\cdot 2+1+2\cdot 0-5|}{\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{7}$$

130 **Halla la distancia del plano π: $4x - 10y + 2z = -1$ al plano σ:** $\left.\begin{array}{l} x=2\lambda+3\mu \\ y=\lambda+\mu \\ z=\lambda-\mu \end{array}\right\}$.

(Galicia. Junio 2002. Bloque 2. Pregunta 1)

Determinamos sus posiciones relativas.

$$\left.\begin{array}{r} A(0,0,0) \\ \overrightarrow{u_\sigma}=(2,1,1) \\ \overrightarrow{v_\sigma}=(3,1,-1) \end{array}\right\} \rightarrow \sigma: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x+5y-z=0 \rightarrow n_\sigma=(-2,5,-1)$$

π: $4x - 10y + 2z = -1 \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} = (4, -10, 2)$

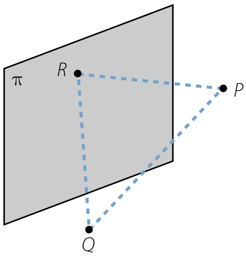
$\overrightarrow{n_\sigma}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$ son proporcionales $\rightarrow \sigma$ y π son paralelos.

La distancia entre los dos planos es igual a la distancia entre un punto $A(0, 0, 0) \in \sigma$ y el plano π.

$$d(\sigma,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|4\cdot 0-10\cdot 0+2\cdot 0+1|}{\sqrt{16+100+4}}=\frac{1}{\sqrt{120}}=\frac{\sqrt{30}}{60}$$

131 Construye un triángulo equilátero de forma que dos de sus vértices sean $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 4, 3)$ y el tercer vértice R esté en el plano $\pi: x+y+z=2$. ¿Qué área tiene?

(Navarra. Junio 2003. Opción C. Pregunta 1)



- $R(a, b, c) \in \pi \rightarrow a+b+c=2$
- $d(P, Q) = d(P, R) = d(Q, R)$

$$\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2} = \sqrt{(a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \\ 8=(a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=2 \\ (a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=8 \\ (a+1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2=8 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a_1=-1,\ b_1=2,\ c_1=1 \\ a_2=-\dfrac{5}{3},\ b_2=\dfrac{4}{3},\ c_2=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Obtenemos dos soluciones: $R_1(-1, 2, 1)$ y $R_2\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Calculamos el área:

Base $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Como los ángulos de un triángulo equilátero valen 60°:

$$\text{Altura} = \sqrt{8}\cdot \text{sen } 60° = \sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Área} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3}$$

132 Sean las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{array}\right\}$$

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) Calcula la distancia entre el plano π y la recta s.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) $$s: \left.\begin{array}{l} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x=8+3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u_s}=(3, 1, 1) \qquad Q_s(8, 1, 0)$$

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \rightarrow \vec{v_r} = (1, -1, 2) \qquad P_r(0, 1, 2)$$

El plano π tiene como vectores directores $\vec{u}_s$ y $\vec{v}_r$ y pasa por el punto $P_r(0, 1, 2)$.

$$\left.\begin{array}{r} P_r(0, 1, 2) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (3, 1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 5y + 4z - 13 = 0$$

b) La distancia de la recta s al plano π es la distancia de un punto de la recta s al plano.

Tomamos $Q_s(8, 1, 0) \in s$.

$$d(s, \pi) = d(Q_s, \pi) = \frac{|-3 \cdot 8 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 13|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{32}{\sqrt{50}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

133 **Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$.**

a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C estén alineados?

b) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor de $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

(Madrid. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

a) Para que A, B y C estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2-\lambda, -2-\lambda, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2-\lambda}{0} = \frac{-2-\lambda}{-2} = \frac{-\lambda}{2}$$

$\rightarrow$ No existe solución.

Los tres puntos no están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (2-\lambda, -2-\lambda, -\lambda)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$

$\overrightarrow{AC} = (0, -2, 2)$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$\overrightarrow{BC} = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2)$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(\lambda-2)^2 + \lambda^2 + (\lambda+2)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$

Luego $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B}|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. El triángulo es siempre isósceles.

c) El plano pasa por $A(0, 2, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 2)$:

$$\left.\begin{array}{r} A(0, 2, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4x - 4y - 4z + 8 = 0$$

$$\rightarrow \pi: x + y + z - 2 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

134 La recta $x = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2}$ corta a los tres planos coordenados en tres puntos. Determina las coordenadas de esos puntos, las distancias existentes entre cada par de ellos e indica cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos.

(Aragón. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 2)

- Corte con eje X.

$$x = 0 \to 0 = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2} \to \left.\begin{array}{r} 1-y=0 \\ 2-z=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} y=1 \\ z=2 \end{array}\right. \to P(0, 1, 2)$$

- Corte con eje Y.

$$y = 0 \to x = \frac{1}{3} = \frac{2-z}{2} \to \left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{3} \\ 6-3z=2 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{array}\right. \to Q\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

- Corte con eje Z.

$$z = 0 \to x = \frac{1-y}{3} = \frac{2}{2} \to \left.\begin{array}{r} x=1 \\ 1-y=3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \to R(1, -2, 0)$$

La distancia entre cada par de puntos son los módulos de los vectores que determinan.

$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3}, -1, -\frac{2}{3}\right)$ $\qquad |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$\overrightarrow{PR} = (1, -3, -2)$ $\qquad |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{QR} = \left(\frac{2}{3}, -2, -\frac{4}{3}\right)$ $\qquad |\overrightarrow{QR}| = \frac{2\sqrt{14}}{3}$

La distancia más larga es la que hay desde el punto P al punto R, por tanto, el punto Q es el que está en el medio de los otros dos.

135 Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

a) Escribe la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B.

b) Determina la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 4)

a) $d(A, X) = d(B, X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} \to 2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

La ecuación que verifican los puntos X es un plano.

b) $d(A, X) = d(A, B)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{3} \to x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$$

Se trata de la ecuación de la esfera de centro el punto $A(0, 1, 0)$ y radio $\sqrt{3}$.

c) $C \in \pi: x + y + z = 3 \rightarrow C(\lambda, \mu, 3 - \lambda - \mu)$

El triángulo ABC es rectángulo con ángulo recto en A:

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (\lambda, \mu - 1, 3 - \lambda - \mu)$ son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow \lambda - \mu + 1 + 3 - \lambda - \mu = 0 \rightarrow \mu = 2$

Por tanto, los puntos que buscamos son de la forma $C(\lambda, 2, 1 - \lambda)$. Es decir, pertenecen a la recta:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - \lambda \end{array}\right\}$$

136 **Demostrar que las rectas:**

$$L_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{array}\right\} \qquad L_2: \left.\begin{array}{l} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

son paralelas.

Encontrar la ecuación del plano paralelo al determinado por dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}$.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 2. Cuestión 2)

$$L_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_1 = (1, 3, 1) \qquad P_1(1, 3, 3)$$

$$L_2: \left.\begin{array}{l} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow L_2: \left.\begin{array}{l} x = -4 + \lambda \\ y = -8 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_2 = (1, 3, 1) \qquad Q_2(-4, -8, 0)$$

Las dos rectas tienen el mismo vector director, por tanto, son paralelas.

El plano determinado por L_1 y L_2 tiene como vectores directores $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{P_1Q_2}$, y pasa por el punto $P_1(1, 3, 3)$.

$$\left.\begin{array}{r} P_1(1, 3, 3) \\ \vec{u}_1 = (1, 3, 1) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-5, -11, -3) \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z - 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -11 & -3 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 4z - 8 = 0 \rightarrow \pi: x - y + 2z - 4 = 0$$

Un plano paralelo a π será de la forma π': $x - y + 2z + D = 0$. Así:

$$d(\pi, \pi') = d(P_1, \pi') = \frac{|1 - 3 + 6 + D|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{|4 + D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$|4 + D| = 6 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D = 6 - 4 = 2 \\ D = -6 - 4 = -10 \end{array}\right.$$

Los planos buscados son σ_1: $x - y + 2z + 2 = 0$ y σ_2: $x - y + 2z - 10 = 0$.

137 El plano π es el que pasa por los puntos $P_1(-3, 0, 0)$, $P_2(1, -1, -1)$ y $P_3(-1, 0, -1)$. Encuentra los dos puntos de la recta:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}$$

que están a distancia 1 del plano π.

(Navarra. Septiembre 2007. Grupo 1. Opción B)

El plano está determinado por el punto $P_1(-3, 0, 0)$ y los vectores directores $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, 0, -1)$.

$$\left.\begin{array}{r} P_1(-3, 0, 0) \\ \overrightarrow{P_1P_2} = (4, -1, -1) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (2, 0, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+3 & y & z \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x + 2y + 2z + 3 = 0$$

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -2-\lambda \end{array}\right\}$$

Un punto genérico de r es $A(\lambda, 1, -2-\lambda)$.

$$d(A, \pi) = \frac{|\lambda + 2\cdot 1 + 2(-2-\lambda) + 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|1-\lambda|}{3} = 1$$

$$|1-\lambda| = 3 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 3+1 = 4 \\ \lambda = -3+1 = -2 \end{cases}$$

Los puntos buscados son $A_1(4, 1, -6)$ y $A_2(-2, 1, 0)$.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 a) Definición de módulo de un vector. Propiedades.

b) Determine los valores de a y b ($a > 0$) para que los vectores $\vec{u} = (a, b, b)$, $\vec{v} = (b, a, b)$ y $\vec{w} = (b, b, a)$ sean unitarios y ortogonales dos a dos.

(Galicia. Junio 2003. Bloque 2. Pregunta 1)

a) El módulo de un vector es la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector por si mismo.

Propiedades:
1. $|\vec{u}| \geq 0$
2. $|k\vec{u}| = |k||\vec{u}|, \forall k \in \mathbb{R}$
3. $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1 \rightarrow \sqrt{a^2+2b^2} = 1 \rightarrow a^2 + 2b^2 = 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = ab + ba + bb = 2ab + b^2 = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = bb + ab + ba = 2ab + b^2 = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = ab + bb + ba = 2ab + b^2 = 0$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a^2+2b^2 &= 1\\ 2ab+b^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} a^2+2b^2 &= 1\\ b(2a+b) &= 0 \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} b=0,\ a=\pm 1\\ b=-2a \to \begin{cases} a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3}\\ a=-\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Como a > 0, tenemos dos soluciones: $\begin{cases} a=1,\ b=0\\ a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

2 Determina una constante *a* para que el plano de ecuación π: $ax+y+z=2$ forme un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes con el plano $z=0$.

(Extremadura. Julio 2003. Repertorio A. Ejercicio 4)

π: $ax+y+z=2 \to \vec{n}_\pi=(a,1,1)$

π': $z=0 \to \vec{n}_{\pi'}=(0,0,1)$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|(a,1,1)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{a^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+2}} \to a^2+2=4 \to a=\pm\sqrt{2}$$

3 Encuentra los puntos de la recta $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ que están a distancia 1 del plano π: $2x-2y+z-5=0$.

(Navarra. Junio 2005. Grupo 1. Opción A)

π: $2x-2y+z-5=0 \to \vec{n}_\pi=(2,-2,1)$

$$r\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2} \to r\colon \left.\begin{aligned} x&=2+\lambda\\ y&=1+\lambda\\ z&=-2\lambda \end{aligned}\right\} \to \vec{u}_r=(1,1,-2)$$

Un punto genérico de *r* es $A(2+\lambda, 1+\lambda, -2\lambda)$.

$$d(A,\pi)=\frac{|2(2+\lambda)-2(1+\lambda)+(-2\lambda)-5|}{\sqrt{4+4+1}}=1$$

$$\frac{|-2\lambda-3|}{3}=1 \to |-2\lambda-3|=3 \to \begin{cases} \lambda=\dfrac{-3-3}{2}=-3\\ \lambda=\dfrac{-3+3}{2}=0 \end{cases}$$

Los puntos buscados son $A_1(-1,-2,6)$ y $A_2(2,1,0)$.

4 **Encuentra las ecuaciones de los planos paralelos a $\pi: 2x - y + 2z = 3$ situados a 6 unidades de distancia del mismo.**

(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 1)

π' paralelo a $\pi \rightarrow \pi': 2x - y + 2z + D = 0$

Si tomamos $P(1, -1, 0) \in \pi$, tenemos:

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6$$

$$\frac{|3 + D|}{3} = 6 \rightarrow |3 + D| = 18 \rightarrow \begin{cases} D = 18 - 3 = 15 \\ D = -18 - 3 = -21 \end{cases}$$

Por tanto, los planos son $\pi_1: 2x - y + 2z + 15 = 0$ y $\pi_2: 2x - y + 2z - 21 = 0$.

5 **a) Halla un punto de la recta $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 \end{array}\right\}$ equidistante de los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(0, 3, 1)$.**

b) Calcula la ecuación implícita de un plano π de modo que el simétrico del punto P respecto del plano π sea el punto Q.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 4. Pregunta B)

Un punto genérico de la recta r es $R(1 + 2t, -t, -1)$.

$\overrightarrow{PR} = (2t + 2, -t - 2, -2)$

$\overrightarrow{QR} = (1 + 2t, -t - 3, -2)$

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \rightarrow \sqrt{(2t + 2)^2 + (-t - 2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(2t + 1)^2 + (-t - 3)^2 + (-2)^2}$$

$$\rightarrow (2t + 2)^2 + (-t - 2)^2 \rightarrow (2t + 1)^2 + (-t - 3)^2 \rightarrow t = 1$$

Por tanto, un punto de la recta r equidistante de los puntos P y Q es $R(3, -1, -1)$.

6 **Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$ se pide:**

a) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican dist $(P, S) = 2$ dist (Q, S), donde «dist» significa distancia.

(Madrid. Septiembre 2008. Opción A. Ejercicio 3)

a) Buscamos los puntos $R(a, b, c)$, tales que $d(P, R) = d(Q, R)$.

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \rightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 3)^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2 + c^2}$$

$$\rightarrow (a - 1)^2 + (c - 3)^2 = a^2 + c^2 \rightarrow a + 3c = 5 \rightarrow \begin{cases} a = 5 - 3\mu \\ b = \lambda \\ c = \mu \end{cases}$$

Los puntos que cumplen esta condición son de la forma $R(5 - 3\mu, \lambda, \mu)$

y forman el plano de ecuación $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 5 - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\}$.

b) Hallamos la recta que pasa por P y Q.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(1, 1, 3) \\ \text{Vector director:} & \overrightarrow{PQ} = (-1, 0, -3)\end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 - 3\lambda \end{array}\right\}$$

Un punto genérico de la recta es $S(1 - \lambda, 1, 3 - 3\lambda)$.

$\overrightarrow{PS} = (-\lambda, 0, -3\lambda) \rightarrow |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{10\lambda^2}$

$\overrightarrow{QS} = (1 - \lambda, 0, -3\lambda) \rightarrow |\overrightarrow{QS}| = \sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 10}$

$$d(P, S) = 2 \cdot d(Q, S) \rightarrow \sqrt{10\lambda^2} = 2\sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 10}$$

$$\rightarrow 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos buscados son $S_1(-1, 1, -3)$ y $S_2\left(\dfrac{1}{3}, 1, 1\right)$.

7 **Hállense las ecuaciones de la recta r que pasa por $P(2, 1, -1)$, está contenida en el plano $\pi: x + 2y + 3z = 1$, y es perpendicular a la recta $s: \left.\begin{array}{l} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{array}\right\}$.**

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba A. Cuestión 2)

Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_s = (2, 1, 1)$$

Hallamos el plano π' perpendicular al plano que pase por el punto P.

$$\pi': \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x - 5y + 3z + 6 = 0$$

La recta r será $r: \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \end{array}\right\}$

8 **Calcule la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta r.**

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 2. Cuestión A)

Calculamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(1, -1, 3) \\ \text{Vector normal:} & \vec{u}_r = (1, -1, 2)\end{array}\right\} \rightarrow \pi: x - y + 2z - 8 = 0$$

Hallamos el punto de corte Q de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+2\lambda \\ x - y + 2z - 8 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ \lambda = 1 \end{array}\right. \rightarrow Q(2, 0, 3)$$

La distancia del punto P a la recta r es la distancia de P a Q.

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (0+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{2}$$

9 **Determina los puntos de la recta r de ecuaciones r: $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{array}\right\}$ que equidistan del plano π de ecuación π: $x + z = 1$ y del plano π' de ecuación π': $y - z = 3$.**

(Andalucía. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 4)

$$s: \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 1+2\lambda \end{array}\right\}$$

Un punto genérico de la recta s es $P(0, \lambda, 1+2\lambda)$.

$$d(P, \pi) = d(P, \pi')$$

$$\frac{|1+2\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|\lambda-(1+2\lambda)-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$\frac{2\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{|-\lambda-4|}{\sqrt{2}} \rightarrow 2\lambda = |-\lambda-4| \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{4}{3} \\ \lambda = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Los puntos buscados son $P_1\left(0, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$ y $P_2\left(0, \dfrac{4}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$.