060 **Halla la ecuación de la recta que corta a *r* y *s* perpendicularmente.**

$$r: \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 11 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x = 6 - 4\mu \\ y = -2 + \mu \\ z = 2 + \mu \end{array}\right\}$$

Hallamos un punto $P \in r$ y un punto $Q \in s$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} P(1, 11 + 2\lambda, -1 + \lambda) \in r \\ Q(6 - 4\mu, -2 + \mu, 2 + \mu) \in s \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (5 - 4\mu, -13 + \mu - 2\lambda, 3 + \mu - \lambda)$$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{PQ} \cdot (0, 2, 1) = -5\lambda + 3\mu - 23 = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot (-4, 1, 1) = -3\lambda + 18\mu - 30 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -4 \\ \mu = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto: $\left.\begin{array}{r} P(1, 3, -5) \in r \\ Q(2, -1, 3) \in s \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1, -4, 8)$

Luego, la recta buscada es: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+5}{8}$

061 **Investiga si existe un plano que contenga a la recta *r* y sea perpendicular a la recta *s*.**

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x = 1 + 5\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\}$$

En caso afirmativo, calcula la ecuación del plano.

Si un plano es perpendicular a *s*, todas las rectas contenidas en el plano son perpendiculares a dicha recta, y por tanto, *r* y *s* deben ser perpendiculares.

Como $(2, 4, -1) \cdot (5, -2, 2) = 0 \rightarrow$ Los vectores son perpendiculares.

El plano que buscamos tiene como vector normal el vector director de *s* y pasar por el punto $P(3, -1, 0) \in r$.

$\pi: 5x - 2y + 2z + D = 0$

$5 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = -17$

La ecuación del plano que buscamos es $\pi: 5x - 2y + 2z - 17 = 0$.

062 **Se consideran los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.**

a) Halla la ecuación general del plano π que los contiene.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Halla también el punto de intersección de la recta con el plano.

(Baleares. Junio 2005. Opción A. Cuestión 2)

a) El plano pasa por $A(3, 0, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, -2, 1)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

b) La recta perpendicular a π que pasa por el origen es:

$$r:\left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

$$2\cdot 2\lambda + 3\cdot 3\lambda + 6\cdot 6\lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{6}{49}$$

El punto intersección es $P\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$.

063 **Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:**

$$r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0} \qquad r_2: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 1, 1)$$

(Navarra. Septiembre 2004. Grupo 1. Opción B)

Hallamos un punto $P \in r$ y un punto $Q \in s$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} P(1+2\lambda, \lambda, 2) \\ Q(\mu, \mu, 1+\mu) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (\mu - 1 - 2\lambda, \mu - \lambda, \mu - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\cdot(2, 1, 0) = 3\mu - 5\lambda - 2 = 0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot(1, 1, 1) = 3\mu - 3\lambda - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = \frac{2}{3} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(1, 0, 2) \\ Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \\ \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{array}\right.$$

La recta buscada es $t: \frac{x-1}{-\frac{1}{3}} = \frac{y-0}{\frac{2}{3}} = \frac{z-2}{-\frac{1}{3}} \rightarrow t: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

064 **Se consideran las rectas:**

$$r:\left.\begin{array}{r} x - ay = 1 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \qquad s:\left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ x + y + z = 8 \end{array}\right\}$$

Prueba que, para ningún valor de *a*, *r* y *s* pueden ser paralelas y averigua el único valor de *a* para el que se cortan. Para este valor de *a*, se pide:

a) Calcula el punto *P* intersección de *r* y *s* y la ecuación del plano π que las contiene.

b) Determina la ecuación de la recta *t* que está contenida en π y es perpendicular a *r* en el punto *P*. Escribe la ecuación de otras dos rectas que sean perpendiculares a *r* por el punto *P*.

(Cantabria. Septiembre 2000. Bloque 3. Opción B)

Escribimos las rectas en forma paramétrica.

$$r:\left.\begin{array}{l} x = 1 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} P_r(1, 0, -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (a, 1, 1) \end{array} \qquad s:\left.\begin{array}{l} x = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\mu \\ y = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\mu \\ z = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} Q_s\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}, 0\right) \\ \overrightarrow{v_s} = (1, 2, -3) \end{array}$$

Estudiamos si $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales.

$\frac{a}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-3} \rightarrow$ Las rectas no son paralelas para ningún valor de a.

Las rectas r y s son secantes si el rango de la matriz formada por $\overrightarrow{P_rQ_s}$, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ es 2.

$$\begin{vmatrix} \frac{16}{3} - 1 & \frac{8}{3} & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 10a - 20$$

r y s secantes $\rightarrow$ Rango $(A) = 2 \rightarrow 10a - 20 = 0 \rightarrow a = 2$

a) Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2\lambda &= \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\mu \\ \lambda &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\mu \\ -1 + \lambda &= \mu \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases} \rightarrow \text{El punto de intersección es } P(5, 2, 1).$$

El plano que contiene a las dos rectas es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - 5 & y - 2 & z - 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5x + 7y + 3z + 8 = 0$$

b) La recta t es la intersección del plano π y otro plano perpendicular a la recta r que pasa por P.

El plano, π', perpendicular a r que pasa por P, tiene por vector normal $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y pasa por el punto $P(5, 2, 1) \in \pi'$.

π': $2x + y + z + D = 0$

$P(5, 2, 1) \in \pi' \rightarrow 2 \cdot 5 + 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -13$

El plano que buscamos es π': $2x + y + z - 13 = 0$.

La recta t es la intersección entre los dos planos.

$$t: \left.\begin{aligned} 2x + y + z - 13 &= 0 \\ -5x + 7y + 3z + 8 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Calculamos otras dos rectas perpendiculares a r que pasan por P.

Si $r' \perp r \rightarrow \vec{v}_{r'} \perp \vec{v}_r \rightarrow (u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 1, 1) = 0$

Por ejemplo: $\begin{cases} \vec{v}_{r'} = (0, 1, -1) \\ \vec{v}_{r''} = (1, -1, -1) \end{cases}$ cumplen esta condición.

Así, las rectas:

$$r': \left.\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 2 + \gamma \\ z &= 1 - \gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad r'': \left.\begin{aligned} x &= 5 + \alpha \\ y &= 2 - \alpha \\ z &= 1 - \alpha \end{aligned}\right\}$$

Son perpendiculares a r que pasan por P.

065 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$.

(Andalucía. Junio 2001. Opción A. Ejercicio 4)

El plano que buscamos tiene por vectores directores el vector normal al plano y el vector director de la recta, y pasa por el punto A.

La recta en forma paramétrica es $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \to \vec{v}_r = (2, 1, 0)$

$\pi\colon x - y + 2z + 1 = 0 \to$ Vector normal: $\vec{n} = (1, -1, 2)$

La ecuación del plano que buscamos es:

$$\pi'\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 4y - 3z - 5 = 0$$

066 Considera $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(5, 2, 1)$ y $D(4, 3, 3)$.

a) Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b) Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.

c) Determina la ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 3. Opción B)

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1, -1, -2) \to \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son paralelos y de la misma medida.
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (3, 2, 2) \to \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelos y de la misma medida.
Por tanto, son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = (1, -1, -2) \cdot (3, 2, 2) \neq 0 \to$ No son vectores perpendiculares.
No es un rectángulo, es un romboide.

c) Determinamos el plano con vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y pasa por A.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 8y + 5z - 1 = 0$$

067 Encuentra los puntos R pertenecientes a la recta: $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$

tales que los segmentos PQ y PR forman un ángulo recto, siendo $P(1, 0, 0)$ y $Q(0, -1, 5)$.

(Navarra. Junio 2002. Opción A. Pregunta 2)

Escribimos la recta en forma paramétrica.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = t \end{array}\right\} \to \vec{v}_r = (1, 1, 1)$$

Si $R \in r \rightarrow R(-2+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, 5) \perp \overrightarrow{PR} = (-3+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$$(-1, -1, 5) \cdot (-3+\lambda, -1+\lambda, \lambda) = 3\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

Por tanto, el único punto que cumple la condición es $R\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

068 **Considera los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(0, 1, 5)$.**

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x, 4, 3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 1, 5) y (3, 4, 3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 4)

a) $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-x, -1, -4) \cdot (-x, -3, 2) = x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

b) Escribimos la recta en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, -2, -3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(0, 1, 5) \\ Q(3, 4, 3) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3, 3, -2)$$

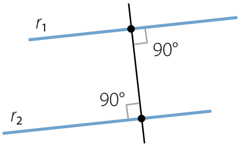
Calculamos la ecuación del plano que pasa por el punto $P(0, 1, 5)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{PQ}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13x - 7y + 9z - 38 = 0$$

069 **Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:**

$$r_1: \left.\begin{array}{r} x + z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$r_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$



(Navarra. Junio 2006. Grupo 1. Opción B)

Hallamos un punto $Q \in r_1$ y un punto $Q \in r_2$ de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} = (-1, 1, 1) \qquad r_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \vec{v} = (-1, 1, 2)$$

Un punto genérico de la recta es r_1 es $P(1-\lambda, -3+\lambda, \lambda)$
Un punto genérico de r_2 es $Q(-\mu, \mu, -1+2\mu)$

$$\overrightarrow{PQ} = (\lambda-\mu-1, -\lambda+\mu+3, -\lambda+2\mu-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u} = -3\lambda+4\mu+3=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = -4\lambda+6\mu+2=0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}-3\lambda+4\mu+3=0\\ -4\lambda+6\mu+2=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}\lambda=5\\ \mu=3\end{array}\right.$$

Por tanto los puntos son $P(-4, 2, 5)$ y $Q(-3, 3, 5)$.

La recta que buscamos tiene por vector director $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0)$ y pasa por $P(-4, 2, 5)$.

$$s: \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{0}$$

070 Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) Hallar la ecuación de la recta *t* que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) Hallar la perpendicular común a las rectas *r* y *s*.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 4)

a) La recta t es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a la recta r, y π' el plano que contiene a s y pasa por el origen.

$$\pi: \left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\\ \vec{u_r} = (-2, 2, -4)\\ \overrightarrow{P_rO} = (-1, 2, 0)\end{array}\right\} \qquad \pi: \begin{vmatrix} x & y & z\\ -2 & 2 & -4\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix} = 8x+4y-2z=0$$

$$\pi: 4x+2y-z=0$$

$$\pi': \left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\\ \vec{v_s} = (3, 1, 1)\\ \overrightarrow{Q_sO} = (2, -1, -2)\end{array}\right\} \to \pi': \begin{vmatrix} x & y & z\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix} = -x+8y-5z=0$$

Por tanto, la recta t es:

$$t: \left.\begin{array}{r}4x+2y-z=0\\ -x+8y-5z=0\end{array}\right\}$$

b) Buscamos un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ perpendicular a los vectores $\vec{u_r}$ y $\vec{v_s}$.

$$\left.\begin{array}{r}(a,b,c)\cdot(-2,2,-4) = -2a+2b-4c=0\\ (a,b,c)\cdot(3,1,1) = 3a+b+c=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}a = -\frac{3}{4}\lambda\\ b = \frac{5}{4}\lambda\\ c = \lambda\end{array}\right.$$

Por ejemplo, un vector que cumple esta condición es $\vec{n} = (-3, 5, 4)$.

La recta perpendicular común a r y a s es la intersección de los planos π y π', siendo π el plano que contiene a r y tiene por vector director $\vec{n}$, y π' el plano que contiene a s y tiene por vector director $\vec{n}$.

c) $\vec{u}_r = (-1, -4, 14)$

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = -3 + \dfrac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \to \vec{v}_s = (8, 5, 2)$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to \alpha = 90°$

d) $\vec{v}_s = (2, 2, -1)$

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = -5 - 2\lambda \\ y = -10 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \to \vec{u}_r = (-2, -2, 1)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot 3} = 0{,}9526 \to \alpha = 17° \, 42' \, 56''$$

091 Calcula el ángulo que forman estas parejas de rectas y planos.

a) $\pi\colon x - 2y + 3z = 8$ $\qquad r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$

b) $\pi\colon x - 3y - z = 6$ $\qquad r\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-4}$

c) $\pi\colon 2x + 2y + 2z = -3$ $\qquad r\colon \left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 8 \\ -2x + y + z = 4 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1, -2, 3) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -1) \end{array}\right\} \to \alpha = 90° - \arccos\left(\dfrac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) =$

$$= 90° - \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right) = 90° - 49{,}1° = 40{,}9°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1, -3, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 2, -4) \end{array}\right\} \to \alpha = 90° - \arccos\left(\dfrac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) =$

$$= 90° - \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{11}\sqrt{24}}\right) = 90° - 90° = 40°$$

c) $\vec{n}_\pi = (2, 2, 2)$

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \to \vec{u}_r = (1, 1, 1)$$

$$\alpha = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) = 90° - \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{12}}\right) = 90° - 0° = 90°$$

092 Halla el ángulo que definen estas parejas de planos.

a) $\alpha: 2x - y + 3z = -9$ $\qquad \beta: 2x - 2y - 2z = 19$

b) $\alpha: -x + 5y + 3z = -1$ $\qquad \beta: 3x + 5y + 7z = 9$

c) $\alpha: -4x + 12y - 28z = -13$ $\qquad \beta: \left.\begin{array}{l} x = -2 + t + 3s \\ y = 2 - 2t + s \\ z = 1 - t \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (2, -1, 3) \\ \vec{n}_\beta = (2, -2, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (-1, 5, 3) \\ \vec{n}_\beta = (3, 5, 7) \end{array}\right\}$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{43}{\sqrt{35}\sqrt{83}} = 0{,}7978 \rightarrow \alpha = 37°\,4'\,45''$$

c) Escribimos el plano β en forma implícita.

$$\beta: \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - 3y + 7z + 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (-4, 12, -28) \\ \vec{n}_\beta = (1, -3, 7) \end{array}\right\} \rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{236}{\sqrt{944}\sqrt{59}} = 1 \rightarrow \alpha = 0°$$

093 Determina el vector o vectores unitarios, $\vec{v} = (a, b, c)$ (con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$), que forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes con el vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con el vector $\vec{w} = (2, 0, 2)$.

(Galicia. Junio 2002. Bloque 2. Pregunta 2)

Planteamos un sistema con las condiciones del enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{a + b + c}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2a + 2c}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$$

Quitando denominadores y suprimiendo las raíces obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = \frac{3}{2} \\ a + c = 1 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene dos soluciones:

$$\begin{cases} a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Por tanto, existen dos vectores que cumplen las condiciones del problema:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \vec{v}_2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

094 **Dadas las rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y-z-5=0 \end{array}\right\}$$

a) Determina su posición relativa.

b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 4. Opción A)

a) Pasamos ambas rectas a forma paramétrica.

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{array}\right\} \to \vec{u}_r = (1, 1, 0) \qquad P_r(-2, 0, -1)$$

$$s\colon \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y-z-5=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=5+\mu \\ z=\mu \end{array}\right\} \to \vec{v}_s = (0, 1, 1) \qquad Q_s(2, 5, 0)$$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{PQ} = (4, 5, 1)$, $\vec{u}_r$ y $\vec{v}_s$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \text{Rango}(A) = 2$$

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, r y s son secantes.

b) Ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \to \alpha = 60°$$

Calculamos el punto de corte.

$$\left.\begin{array}{r} -2+\lambda=2 \\ \lambda=5+\mu \\ -1=\mu \end{array}\right\} \to \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

El punto de corte entre las dos rectas es $C(2, 4, -1)$.