PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Responde a estas cuestiones.

a) ¿Están alineados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 2)$ y $C(3, 0, 1)$? Justificar la respuesta.

b) En caso afirmativo, determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo, determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

(Canarias. Junio 2004. Opción A. Cuestión 4)

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son proporcionales, por tanto, los puntos A, B y C no están alineados.

b) $$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x + 10y - 2z - 4 = 0 \rightarrow \pi: x + 5y - z - 2 = 0$$

2 Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta dada por $r: \left.\begin{matrix} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{matrix}\right\}$.

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta tanto en caso afirmativo como negativo.

(País Vasco. Septiembre 2004. Bloque B. Cuestión B)

$$r: \left.\begin{matrix} 3x + y + z = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = -3t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} -3 = -3t \\ s = 5t \\ s = 4t \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \rightarrow t = -1 \\ \rightarrow s = -5 \\ \rightarrow -5 \neq -4 \rightarrow \text{No existe valor de s tal que } (-3, s, s) \in r. \end{matrix}$$

3 Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi: x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s: \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta $r: \left.\begin{matrix} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$.

(Andalucía. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 4)

$$s: \left.\begin{matrix} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{matrix}\right\}$$

Calculamos la intersección entre s y π.

$\pi: x + y - z + 6 = 0 \rightarrow 3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \rightarrow t = -3$

$P(-9, -1, -4)$ es el punto de intersección del plano π y de la recta s.

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{array}\right\}$$

La recta que buscamos es: $r': \left.\begin{array}{l} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{array}\right\}$

4 Considera un plano $\pi: x + y + mz = 3$ y la recta $r:\ x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$.

a) Halla m para que r y π sean paralelos.

b) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 4)

$$r: \left.\begin{array}{r} x = y - 1 \\ 2x = z - 2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - z = -2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2 + 2m \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

a) Si $2 + 2m = 0 \rightarrow m = -1$:
El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3.
La recta r y el plano π son paralelos.

b) El rango de la matriz ampliada es 3 para cualquier valor de m, por lo que no hay ningún valor para el que la recta r esté contenida en el plano π.

5 Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi: x + y + 2z = 2 \quad \beta: 2x + my + 2mz = 2 + m \quad \alpha: mx + 2y + (2 + m)z = 0$$

según los valores de m.

(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2+m \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

- Si $m \neq 2$: el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es 3, los planos se cortan en un único punto.
- Si $m = 2$: el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada es 1, los planos son coincidentes.

6 Dadas las rectas $r\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-k}{1}$ y $s\colon \left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{array}\right\}$:

a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

(Madrid. Septiembre 2003. Opción A. Ejercicio 2)

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x-1=-y-1 \\ x-1=-z+k \end{array}\right\} \to r\colon \left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+z=k+1 \end{array}\right\}$

Las rectas son coplanarias si no se cruzan, es decir, si la matriz ampliada no tiene rango 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k+1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to k-4=0 \to k=4$$

Si $k=4$, las rectas están contenidas en el mismo plano.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Si $k=4$, las rectas se cortan en un punto.

Calculamos el punto de intersección entre r y s.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+z=5 \\ x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-2 \\ z=7 \end{array}\right.$$

El punto de intersección entre r y s es $P(-2, 2, 7)$.

Determinamos un vector director de s.

$$s\colon \left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{array}\right\} \to s\colon \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-2-2t \\ z=1-3t \end{array}\right\} \qquad \vec{v}=(1,-2,-3)$$

El plano que buscamos pasa por $P(-2, 2, 7) \in r \cap s$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -x-2y+z-5=0 \to \pi\colon x+2y-z+5=0$$

7 Sea r la recta definida por $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-k}{4}=\dfrac{z}{5}$ y s la recta definida por $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 4)

a) $r: \begin{cases} P(2, k, 0) \\ \vec{u}=(3,4,5) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} Q(-2,1,3) \\ \vec{u}=(-1,2,3) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(-4, 1-k, 3)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=10\neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=2$$

Las rectas se cortan si $\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1-k & 3 \end{pmatrix}=2.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1-k & 3 \end{vmatrix}=8+14k=0 \rightarrow k=-\frac{4}{7}$$

b) El plano que buscamos pasa por $Q(-2,1,3)\in s$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2x-14y+10z-12=0 \rightarrow \pi: x-7y+5z-6=0$$

8 Calcula el valor de a para que la recta $r: \left.\begin{matrix} 5x-y+z=0 \\ x-y-z=-4 \end{matrix}\right\}$ sea paralela al plano $\pi: ax-6y+4z=5$.

(La Rioja. Junio 2002. Propuesta B. Ejercicio 2)

Para que la recta y el plano sean paralelos, el rango de la matriz de coeficientes debe ser 2, y el de la matriz ampliada, 3.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -6 & 4 \end{vmatrix}=2a-52 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ -6 & 4 & 5 \end{vmatrix}=18\neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3 para cualquier valor de a. El rango de la matriz de coeficientes es 2 si se cumple:

$$2a-52=0 \rightarrow a=26$$