PRODUCTO ESCALAR. PROPIEDADES MÉTRICAS EN EL ESPACIO.

1. PRODUCTO ESCALAR.

Definición: **u·v** = |u|·|v|·cos a (a es el ángulo que forman u y v)

En coordenadas **u·v** = $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

Interpretación geométrica:

u·v = |u|· proy en u de v = |v|· proy en v de u

Propiedades:

1. **u·u** = |u|·|u| ó |u|= $\sqrt{u \cdot u}$
2. **u·v = v·u**
3. **u·(v+w) = u·v + u·w**
4. (ku)·**v** = k(**u·v**)

Vectores perpendiculares:

DEFINICIÓN: **u** y **v** son perpendiculares si y solo si **u·v** = 0

CÁLCULO: Calculamos la base que genera todos los vectores perpendiculares a uno dado.

APLICACIONES

1. VECTOR NORMAL DEL PLANO

n = (A,B,C) es un vector perpendicular al plano

π: Ax+By+Cz+D=0 y se llama vector **NORMAL** del plano.

2. PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

Una recta y un plano son perpendiculares si el vector director de la recta es perpendicular al plano. De este modo el vector director de la recta y el normal del plano son proporcionales.

3. HACES DE PLANOS

HAZ DE PLANOS SECANTES A UNA RECTA: Expresamos la recta como intersección de dos planos (ecuación implícita) y la combinación lineal de estas dos da lugar al haz de planos.

HAZ DE PLANOS PERPENDICULARES A UNA RECTA: El vector director de la recta será el vector normal de todos los planos del haz de planos perpendiculares.

2. ÁNGULOS EN EL ESPACIO.

Ángulo entre dos vectores:

$\cos a = \dfrac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$ (a será el ángulo formado por **u** y **v** siempre menor que 180º)

Ángulo entre dos rectas:

El menor de los ángulos que se forma entre sus dos vectores directores.

$$\cos a = \frac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|}$$

Ángulo entre una recta y un plano:

El complementario (b) del menor de los ángulos (a) que se forma entre el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\cos a = \frac{|u \cdot n|}{|u| \cdot |n|} \qquad b = 90 - a$$

Ángulo entre dos planos:

El menor de los ángulos que se forma entre los dos vectores normales del plano.

$$\cos a = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|u_1| \cdot |n_2|}$$

3. PROYECCIONES ORTOGONALES.

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta.

Es el punto de la recta que forma un vector perpendicular a la recta con el punto a proyectar.

Para calcularlo construimos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto a proyectar. A continuación calculamos el corte del plano con la recta y este punto sera la proyección ortogonal buscada.

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano.

Es el punto del plano que forma un vector perpendicular al plano con el punto a proyectar.

Para calcularlo construimos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto a proyectar. A continuación calculamos el corte del plano con la recta y este punto sera la proyección ortogonal buscada.

Proyección ortogonal de una recta sobre un plano.

Es la recta contenida en el plano de forma que el plano que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano sobre el que proyectamos.

Para calcularlo tomamos el vector director de la recta, el vector normal del plano y un punto de la recta. A continuación calculamos el plano que pasa por ese punto y tiene a esos dos vectores como directores. El corte de este plano con el plano inicial es la recta proyección.

4. PUNTOS SIMÉTRICOS.

Simétrico de un punto respecto de otro: Para su cálculo usamos la definición de punto medio.

Simétrico de un punto respecto de una recta: Para su cálculo, hallamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta y calculamos el simétrico respecto de este punto.

Simétrico de un punto respecto de un plano: Para su cálculo, hallamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano y calculamos el simétrico respecto de este punto.

5. DISTANCIAS EN EL ESPACIO.

Distancia entre dos puntos:

d(A,B) = |**AB**|

Distancia de un punto a una recta:

d(P,r) = d(P,Q) donde Q es la proyección ortogonal de P sobre r.

Distancia de un punto a un plano:

d(P,π) = d(P,Q) donde Q es la proyección ortogonal de P sobre π.

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos planos paralelos:

d(π,π´) = d(P,π´) donde P es un punto del plano π.

Distancia entre una recta y un plano paralelos:

d(r,π´) = d(P,π´) donde P es un punto de la recta r.

Distancia entre dos rectas:

- Si son paralelas: d(r,r´) = d(P,r´) donde P es un punto de la recta r.
- Si se cruzan: d(r,r´) = d(P,π) donde P es un punto de la recta r, y π es el plano paralelo a r que contiene a r´.