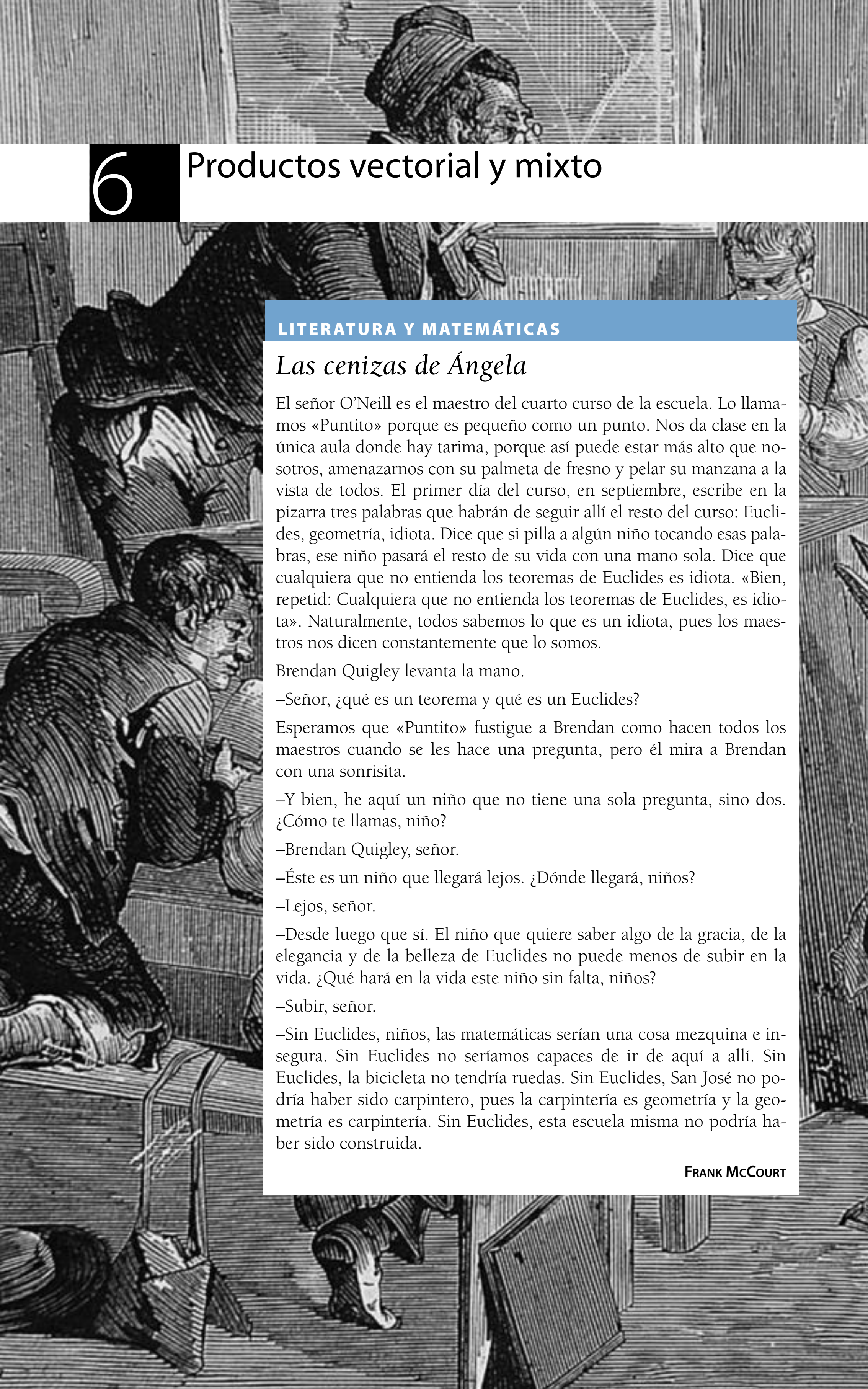


6 Productos vectorial y mixto

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Las cenizas de Ángela

El señor O'Neill es el maestro del cuarto curso de la escuela. Lo llamamos «Puntito» porque es pequeño como un punto. Nos da clase en la única aula donde hay tarima, porque así puede estar más alto que nosotros, amenazarnos con su palmeta de fresno y pelar su manzana a la vista de todos. El primer día del curso, en septiembre, escribe en la pizarra tres palabras que habrán de seguir allí el resto del curso: Euclides, geometría, idiota. Dice que si pilla a algún niño tocando esas palabras, ese niño pasará el resto de su vida con una mano sola. Dice que cualquiera que no entienda los teoremas de Euclides es idiota. «Bien, repetid: Cualquiera que no entienda los teoremas de Euclides, es idiota». Naturalmente, todos sabemos lo que es un idiota, pues los maestros nos dicen constantemente que lo somos.

Brendan Quigley levanta la mano.

–Señor, ¿qué es un teorema y qué es un Euclides?

Esperamos que «Puntito» fustigue a Brendan como hacen todos los maestros cuando se les hace una pregunta, pero él mira a Brendan con una sonrisita.

–Y bien, he aquí un niño que no tiene una sola pregunta, sino dos. ¿Cómo te llamas, niño?

–Brendan Quigley, señor.

–Éste es un niño que llegará lejos. ¿Dónde llegará, niños?

–Lejos, señor.

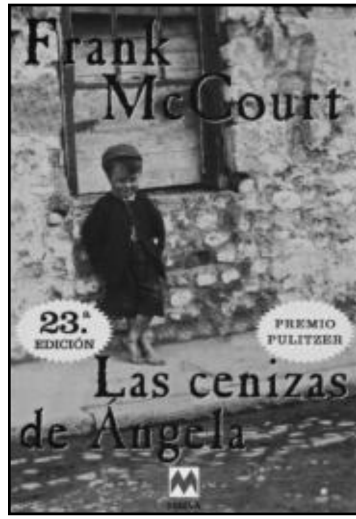
–Desde luego que sí. El niño que quiere saber algo de la gracia, de la elegancia y de la belleza de Euclides no puede menos de subir en la vida. ¿Qué hará en la vida este niño sin falta, niños?

–Subir, señor.

–Sin Euclides, niños, las matemáticas serían una cosa mezquina e insegura. Sin Euclides no seríamos capaces de ir de aquí a allí. Sin Euclides, la bicicleta no tendría ruedas. Sin Euclides, San José no podría haber sido carpintero, pues la carpintería es geometría y la geometría es carpintería. Sin Euclides, esta escuela misma no podría haber sido construida.

FRANK MCCOURT

Las cenizas de Ángela
Frank McCourt



En esta novela se narra la vida en Irlanda antes y durante la segunda guerra mundial. No contiene más referencias a las matemáticas que las que aparecen en la magistral descripción de la primera clase que imparte el profesor «Puntito».

–Jodido Euclides –murmura detrás de mí Paddy Clohessy. «Puntito» le dice con voz cortante:

–Tú, niño: ¿cómo te llamas?

–Clohessy, señor.

–Ah, el niño vuela con un ala. ¿Cuál es tu nombre de pila?

–Paddy.

–Paddy, ¿y qué más?

–Paddy, señor.

–Y ¿qué decías a McCourt, Paddy?

–Le decía que debíamos ponemos de rodillas y dar gracias a Dios de que haya existido Euclides.

–Ya lo creo, Clohessy. Veo la mentira podrida en tus labios. ¿Qué veo, niños?

–La mentira, señor.

–¿Y cómo está la mentira, niños?

–Podrida, señor.

–¿Dónde, niños, dónde?

–En sus labios, señor.

–Euclides era griego, niños. ¿Qué es un griego, Clohessy?

–Una especie de extranjero, señor.

–Clohessy, eres retrasado mental. Y bien, Brendan, sin duda tú debes de saber lo que es un griego, ¿no?

–Sí, señor. Euclides era griego.

«Puntito» le dirige la sonrisita. Dice a Clohessy que debe imitar el modelo de Quigley, que sabe lo que es un griego. Traza dos líneas, una junto a otra, y nos dice que son líneas paralelas, y que lo mágico y lo misterioso es que no se encuentran nunca, aunque se prolonguen hasta el infinito, aunque se prolonguen hasta los hombros de Dios, y eso, niños, está muy lejos, aunque ahora hay un judío alemán que está poniendo todo el mundo patas arriba con sus ideas sobre las líneas paralelas.

Escuchamos a «Puntito» y nos preguntamos qué tiene que ver todo esto con el estado del mundo, con que los alemanes lo invadan todo y bombardeen todo lo que se tiene en pie. No podemos preguntárselo nosotros, pero podemos hacer que Brendan Quigley se lo pregunte. Está claro que Brendan es el ojito derecho del maestro, y eso significa que puede hacerle las preguntas que quiera.

La geometría que se estudia en estos temas se llama *euclídea*, porque se ajusta a las ideas que expuso Euclides en uno de los libros más importantes de toda la historia: *Los Elementos*. Pero existen también geometrías *no euclídeas*. Investiga las diferencias que hay entre unas y otras, y escribe un breve trabajo con los datos obtenidos.

Se denomina **geometría no euclídea** a la rama de la geometría cuyos postulados y propiedades difieren en algún punto de los establecidos por Euclides.

Productos vectorial y mixto

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Calcula los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & -1 & y \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+2 & y & z-3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 & y \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8x - 8y + 2$

c) $\begin{vmatrix} x+2 & y & z-3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12x + 12y + 3z - 33$

002 **Halla un punto y un vector director de la siguiente recta:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Un punto es $P(1, 1, 1)$ y un vector director es $\vec{u} = (1, -1, 2)$.

003 **Calcula un punto y un vector normal de este plano:**

$$\pi: 2x - 3y + z + 5 = 0$$

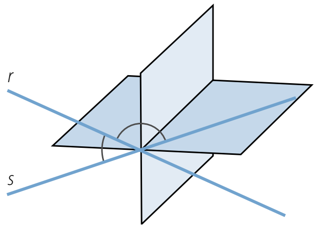
Un punto es $P(-4, -1, 0)$ y un vector normal es $\vec{n} = (2, -3, 1)$.

004 **Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas:**

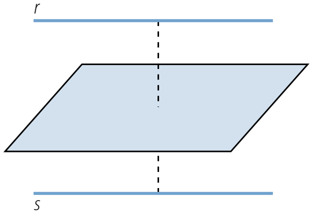
a) Que se cortan.

b) Que son paralelas.

a)



b)



005 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.**

El lugar geométrico es el plano de ecuación: $x + y + z - 10 = 0$.

ACTIVIDADES

001 **Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y el ángulo que forman es $\alpha = 60°$.**

- Módulo: $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ $|\vec{v}| = \sqrt{2}$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} 60° = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

- Dirección: Hallamos el plano que tiene por vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el origen de coordenadas.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + y + z = 0$$

El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ tiene la dirección del vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

- Sentido: el del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

002 **Si $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ y su ángulo es $\alpha = 60°$, halla el área del paralelogramo que forman.**

$$\text{Área del paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} 60° = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

003 **Si $\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{t}$ y $\vec{u} \times \vec{w} = -\vec{t}$, calcula:**

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v})$
b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} + \vec{v})$
c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v})$
d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u})$

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{w} - \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{t} - 2\vec{t} = -3\vec{t}$

b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} + \vec{v}) = \vec{u} \times (-2\vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} = -2(\vec{u} \times \vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{t} - 2\vec{t} = \vec{0}$

c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v}) = -6(\vec{u} \times \vec{w}) + 3(\vec{u} \times \vec{v}) = 6\vec{t} + 6\vec{t} = 12\vec{t}$

d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u}) = -2(\vec{w} \times \vec{u}) - (\vec{v} \times \vec{u}) = 2\vec{t} - 2\vec{t} = \vec{0}$

004 **Si $\vec{u} = (0, -1, 0)$, $\vec{v} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{w} = (-4, 1, 1)$, halla:**

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v})$
b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} + \vec{v})$
c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v})$
d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u})$

a) $$\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v}) = (0, -1, 0) \times (-3, 3, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 3\vec{k} = (-1, 0, -3)$$

b) $$-\vec{u} \times (2\vec{w} \times \vec{v}) = (0, 1, 0) \times (-9, 0, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 9\vec{k} = (2, 0, 9)$$

c) $$3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v}) = (0, -3, 0) \times (7, -4, -2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 7 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 21\vec{k} = (6, 0, 21)$$

d) $$(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u}) = (-9, 0, 2) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 9\vec{k} = (-2, 0, -9)$$

005 **Encuentra el vector normal al plano que pasa por:**

a) $A(1, 1, 1)$ $B(3, 1, 0)$ $C(-1, 0, 1)$

b) $D(0, 0, 0)$ $E(2, 2, 2)$ $F(0, 1, -2)$

a) El vector normal es:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = (-1, 2, -2)$$

b) El vector normal es:

$$\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} = (-6, 4, 2)$$

006 **Halla una base ortogonal que contenga a $\vec{u} = (2, -1, 0)$.**

Tomamos un vector no proporcional a $\vec{u}$, por ejemplo $(0, 0, 1)$, y hallamos el segundo vector de la base, que llamamos $\vec{v}$.

$$\vec{v} = (2, -1, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} = (-1, -2, 0)$$

Hallamos el tercer vector de la base, que llamamos $\vec{w}$.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 0) \times (-1, -2, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -5\vec{k} = (0, 0, -5)$$

Una base $\mathcal{B} = \{(2, -1, 0), (-1, -2, 0), (0, 0, -5)\}$ es ortoganal.

007 **Halla una base de vectores ortogonales en el espacio. ¿Cuántas bases hay? Razona tu respuesta.**

Cualquier conjunto de tres vectores perpendiculares entre sí forman una base del espacio. Como existen infinitos conjuntos de tres vectores perpendiculares entre sí, hay infinitas bases.

Un ejemplo de base ortogonal es la base canónica: $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

008 **Calcula el vector director de la recta determinada por cada pareja de planos.**

a) $\pi_1: -y - z + 1 = 0$ $\pi_2: 3x + z - 6 = 0$

b) $\pi_1: 2x - y - 3z = 0$ $\pi_2: 3x - y + 5z = 0$

a) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n_1} = (0, -1, -1) \\ \vec{n_2} = (3, 0, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = (-1, -3, 3)$.

b) $$\left.\begin{array}{l} \vec{n_1} = (2, -1, -3) \\ \vec{n_2} = (3, -1, 5) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 19\vec{j} + \vec{k}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = (-8, -19, 1)$.

009 **Dada la recta:**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Halla su ecuación implícita, y comprueba que el producto vectorial de los vectores normales de los planos es proporcional a $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

Hallamos la ecuación implícita de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y+1}{-1} \\ x = \dfrac{z-1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Los vectores normales de los planos son:

$\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$

$\vec{n}_2 = (2, 0, -1)$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (-1, 1, -2)$$

El vector $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-1, 1, -2)$ es proporcional a $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

010 **Halla el área encerrada en los triángulos cuyos vértices son:**

a) $A(0, 0, 0)$ $\quad B(-1, 2, 1)$ $\quad C(-1, -1, -1)$

b) $A(3, 0, 0)$ $\quad B(0, 2, 0)$ $\quad C(0, 0, 1)$

a) Dos lados del triángulo son:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = (-1, -2, 3)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

b) Dos lados del triángulo son:

$\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} = (2, 3, 6)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{7}{2}$$

Productos vectorial y mixto

011 **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son:**

$$A(2, 1, 3) \qquad B(3, 0, 1) \qquad C(-1, -2, 0)$$

Comprueba que el resultado es independiente de los vectores que elijas para hallar el área.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, -2) \qquad \overrightarrow{AC} = (-3, -3, -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k} = (-3, 9, -6)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

Comprobamos que el resultado es independiente de los vectores elegidos.

- El área del triángulo de lados $\overrightarrow{BA} = (-1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (-4, -2, -1)$ es:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right|}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

- El área del triángulo de lados $\overrightarrow{CA} = (3, 3, 3)$ y $\overrightarrow{CB} = (4, 2, 1)$ es:

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right|}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

El área del triángulo tampoco varía.

012 **Halla la distancia del punto $P(1, 0, 2)$ a las rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ b) $s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{2}$

a) Calculamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (-3, -3, 1)$$

$A(0, 0, 0) \in r \qquad \overrightarrow{AP} = (1, 0, 2)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k} = (-6, 7, 3)$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19} \qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{36+49+9} = \sqrt{94}$$

La distancia del punto P a la recta r es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{94}}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{1.786}}{19}$$

b) Calculamos un vector director $\vec{v}_s$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_s = (1, 3, 2) \qquad A(0, -2, 5) \in s \qquad \overrightarrow{AP} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} = (-13, 5, -1)$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \qquad |\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{169+25+1} = \sqrt{195}$$

La distancia del punto P a la recta s es:

$$d(P, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{15}} = \sqrt{13}$$

013 **Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\}$ b) $s: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+4}{2}$

a) Hallamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_r = (3, -1, 0) \qquad A(1, 2, 0) \in s \qquad \overrightarrow{AO} = (-1, -2, 0)$$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AO} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -7\vec{k} = (0, 0, -7)$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{49} = 7$$

La distancia del origen de coordenadas O a la recta r es:

$$d(O, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AO}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

b) Calculamos un vector director $\vec{v}_s$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_s = (-1, -1, 2) \qquad A(2, 1, -4) \in s \qquad \overrightarrow{AO} = (-2, -1, 4)$$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{AO} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{k} = (-2, 0, -1)$$

$$|\vec{v}_s| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \qquad |\vec{v}_s \times \overrightarrow{AO}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

La distancia del origen de coordenadas O a la recta s es:

$$d(O, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AO}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Productos vectorial y mixto

014 Calcula el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, siendo los vectores $\vec{u} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 0, -1)$.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1, 1, 0)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (0, 1, 0) \cdot (-1, 1, 0) = 1$$

015 Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u} = (-2, 0, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 0, 4)$.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 14\vec{j} + 4\vec{k} = (8, -14, 4)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-2, 0, 0) \cdot (8, -14, 4) = -16$$

$$\text{Volumen} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = 16$$

016 Calcula el producto mixto de los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (3, 8, 0) \qquad \vec{v} = (0, -1, 3) \qquad \vec{w} = (-5, 4, 0)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -156$$

017 Comprueba que este producto mixto es cero.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$$

Sean: $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ $\qquad$ $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \end{vmatrix} = 0$$

La tercera fila es combinación de la primera y la segunda.

018 Halla el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:

$$\vec{u} = (-1, -1, -1) \qquad \vec{v} = (1, 1, 1) \qquad \vec{w} = (0, 0, 2)$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales, los tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, no generan un paralelepípedo.

019 Obtén el volumen del tetraedro cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas:

$$A(0, 0, 0) \qquad B(0, 0, 1) \qquad C(0, 2, 0) \qquad D(3, 0, 0)$$

$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (3, 0, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$\text{Volumen} = \frac{\left|[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}]\right|}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

020 **Determina la distancia entre las siguientes rectas que se cruzan:**

$$r: \left.\begin{array}{r} y = 1 \\ x + z = -2 \end{array}\right\} \qquad s: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-2}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} = (1, 0, -1) \qquad P_r(-2, 1, 0) \in r$$

$$\vec{v}_s = (-2, 3, -2) \qquad P_s(-1, -1, 4) \in s$$

El vector determinado por los puntos P_r y P_s es: $\overrightarrow{P_rP_s} = (1, -2, 4)$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = (3, 4, 3)$$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s) = (1, -2, 4) \cdot (3, 4, 3) = 7$$

Por tanto, la distancia entre las rectas es:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{7}{\sqrt{9+16+9}} = \frac{\sqrt{238}}{34}$$

021 **Estudia la posición relativa de estas rectas, y calcula la distancia entre ellas.**

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x - y = -2 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - y - z = 2 \end{array}\right\}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} = (1, 3, 4) \qquad P_r(0, 2, 2) \in r$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 2\vec{k} = (0, 2, -2) \qquad P_s\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \in s$$

Determinamos la posición relativa de las dos rectas.

El vector determinado por los puntos P_r y P_s es: $\overrightarrow{P_rP_s} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -14\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-14, 2, 2) \neq 0 \\ [\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right) \cdot (-14, 2, 2) = -42 \neq 0 \end{array}\right\}$$

Es decir, las rectas se cruzan.

Por tanto, la distancia entre las rectas es:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{42}{\sqrt{(-14)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{42}{\sqrt{204}} = \frac{7\sqrt{51}}{17}$$

Productos vectorial y mixto

022 **Calcula el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos puntos fijos $A(2, 0, 1)$ y $B(4, -2, 0)$.**

Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos del espacio que equidistan de los puntos A y B.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2}$$
$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2}$$

Igualando ambas distancias:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2$$
$$-4x - 4y - 2z - 15 = 0$$

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y de B es el plano de ecuación:

$$\pi: 4x + 4y + 2z + 15 = 0$$

023 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de tres puntos fijos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.**

Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos que equidistan de los puntos A, B y C.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-1)^2} = x - 1$$
$$d(B, P) = \sqrt{(y-1)^2} = y - 1$$
$$d(C, P) = \sqrt{(z-1)^2} = z - 1$$

Igualando las distancias:

$$x - 1 = y - 1 = z - 1$$

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A, B y C es la recta de ecuación:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

024 **Determina el lugar geométrico de los puntos del espacio que distan 1 unidad de los planos.**

a) $\pi_1: x = 0$ **b)** $\pi_2: x - y + 2z = 0$

a) Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos del espacio que distan 1 unidad del plano π_1.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|x|}{\sqrt{1}} = 1 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos planos:

$\pi_1: x = 1$ $\pi_2: x = -1$

b) Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos del espacio que distan 1 unidad del plano π_2.

$$d(P, \pi_2) = \frac{|x - y + 2z|}{\sqrt{1+1+4}} = 1 \rightarrow |x - y + 2z| = \sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = \sqrt{6} \\ x - y + 2z = -\sqrt{6} \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos planos:

$\sigma_1: x - y + 2z - \sqrt{6} = 0$ $\sigma_2: x - y + 2z + \sqrt{6} = 0$

025 **Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de estos planos:**

$$\pi_1: x = 0 \qquad \pi_2: x - y + 2z = 0$$

Llamamos $P(x, y, z)$ a los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|x|}{\sqrt{1}} = |x|$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|x - y + 2z|}{\sqrt{6}}$$

Igualando las distancias:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \rightarrow |x| = \frac{|x - y + 2z|}{\sqrt{6}} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x - y + 2z}{\sqrt{6}} \\ x = \dfrac{-x + y - 2z}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por los planos:

$$\sigma_1: (\sqrt{6} - 1)x + y - 2z = 0 \qquad \sigma_2: (\sqrt{6} + 1)x - y + 2z = 0$$

026 **Halla la ecuación general de la esfera cuyo centro es el punto $C(7, -1, 0)$ y que pasa por el punto de coordenadas $P(-3, 4, -2)$.**

Calculamos el radio de la esfera.

$$d(P, C) = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{129}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x - 7)^2 + (y + 1)^2 + (z - 0)^2 = 129$$

Desarrollando obtenemos la ecuación general.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 2y - 79 = 0$$

027 **Estudia si esta ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.**

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2 = 0$$

Si esta ecuación correspondiera a una esfera se debería cumplir que:

$$\left.\begin{array}{r} -2a = 0 \\ -2b = -2 \\ -2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ 1 - r^2 = 2 \rightarrow r^2 = -1 \end{array}\right.$$

Como $r^2 = -1$ no tiene solución, esta ecuación no corresponde a una esfera.

028 **Discute la posición relativa de la recta $s: (x, y, z) = (4, -2, 1) + \lambda(1, 2, -1)$ y la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$.**

Hallamos la distancia de la recta al centro de la esfera:

$\vec{v}_s = (1, 2, -1)$ $\qquad$ $A(4, -2, 1) \in s$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 2)$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{k} = (6, 0, 6)$$

$$\left|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

$$d(C, s) = \frac{\left|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{v}_s\right|} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \sqrt{12} > 3$$

La distancia de la recta al centro es mayor que el radio. Por tanto, la recta es exterior a la esfera.

029 Halla la posición relativa del plano π: $3x - 2y + 3z = 1$ y la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$.

Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano.

$$d(C, \pi) = \frac{|3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 3\cdot 3 - 1|}{|(3, -2, -3)|} = \frac{14}{\sqrt{22}} < 3$$

La distancia del centro al plano es menor que el radio. Por tanto, el plano es secante a la esfera.

030 Halla el plano tangente a la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$ en el punto $P(2, 0, 0)$.

El vector normal del plano es: $\overrightarrow{CP} = (0, 0, -3)$

La ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P es:
$\pi: 0\cdot(x-2) + 0\cdot(y-0) + (-3)\cdot(z-0) = 0 \rightarrow \pi: -3z = 0$

031 Calcula la recta normal a la esfera de centro $C(2, 0, 3)$ y radio $r = 3$ en el punto $P(2, 0, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(2, 0, 0) \\ \overrightarrow{CP} = (0, 0, -3) \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -3\lambda \end{array}\right\}$$

032 Comprueba, con un ejemplo, la relación que hay entre:

Una recta perpendicular al plano tangente a una esfera en un punto, y la recta normal a la esfera en ese mismo punto.

Una recta perpendicular al plano tangente a una esfera en un punto es la recta normal a la esfera en ese punto.

Por ejemplo, el plano tangente a la esfera de centro $C(2, 0, 1)$ y radio $r = 2$ en el punto $P(0, 0, 1)$ es $2x = 0$.

La recta tangente a ese plano en $P(0, 0, 1)$ es:

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

La recta normal a la esfera en $P(0, 0, 1)$ es:

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Ambas expresiones coinciden.

033 **Si $\vec{u} = (-1, 4, 2)$, $\vec{v} = (-3, 1, 6)$ y $\vec{w} = (3, 3, -1)$, calcula:**

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$ c) $2\vec{u} + \vec{v} \times \vec{w}$

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 22\vec{i} + 11\vec{k} = (22, 0, 11)$

b) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 2 \\ -9 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 42\vec{i} - 10\vec{j} + 41\vec{k} = (42, -10, 41)$

c) $2\vec{u} + \vec{v} \times \vec{w} = 2\vec{u} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1, 4, 2) + (-19, 15, -12) = (-21, 23, -8)$

034 **Siendo $\vec{u} = (3, 2, 0)$ y $\vec{v} = (3, 6, -2)$, halla $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$, y explica el resultado.**

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos.

035 **Encuentra dos vectores que tengan módulo 5 y que sean perpendiculares a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{v} = (6, -3, 2)$.**

Calculamos un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 10\vec{j} - 6\vec{k} = (-3, -10, -6)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 100 + 36} = \sqrt{145}$

Los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 5 son:

$\vec{w}_1 = \frac{5}{\sqrt{145}}(-3, -10, -6) = \left(-\frac{3\sqrt{145}}{29}, -\frac{10\sqrt{145}}{29}, -\frac{6\sqrt{145}}{29}\right)$

$\vec{w}_2 = -\frac{5}{\sqrt{145}}(-3, -10, -6) = \left(\frac{3\sqrt{145}}{29}, \frac{10\sqrt{145}}{29}, \frac{6\sqrt{145}}{29}\right)$

036 **Si $\vec{u} = (3, 2, 0)$ y $\vec{v} = (3, 6, -2)$, calcula $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$. Extrae una conclusión general.**

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (3, 2, 0) \cdot (-4, 6, 12) = 0$

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ siempre vale 0 porque $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector perpendicular a $\vec{u}$.

037 **Justifica mediante determinantes que $\vec{u} \times \vec{u} = 0$.**

El determinante de una matriz con dos filas iguales es siempre nulo.

Productos vectorial y mixto

038 **Demuestra, usando las propiedades de los determinantes, que el producto vectorial distribuye a la suma.**

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

Consideramos los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

039 **Determina, usando el producto vectorial, el ángulo que forman los vectores (4, −1, 3) y (3, 0, 2).**

$\vec{u} = (4, -1, 3)$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = (3, 0, 2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 1, 3)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(-2, 1, 3)|}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{14}{26 \cdot 13}} = 0{,}2035 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 11^\circ\ 44'\ 34'' \\ \alpha = 168^\circ\ 15'\ 26'' \end{cases}$$

Tomando el ángulo entre dos vectores como el menor que forman sus direcciones al cortarse, la solución es $\alpha = 11^\circ\ 44'\ 34''$.

040 **Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en los siguientes casos.**

a) $\vec{u} = (0, 4, 2)$ $\quad$ $\vec{v} = (-2, 7, 1)$ $\quad$ $\vec{w} = (5, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (0, 4, 2)$ $\quad$ $\vec{v} = (5, -2, 1)$ $\quad$ $\vec{w} = (-2, 7, 1)$

c) $\vec{u} = (9, 4, 1)$ $\quad$ $\vec{v} = (-1, 5, -11)$ $\quad$ $\vec{w} = (12, 6, 0)$

a) $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -34$

c) $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -11 \\ 12 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 34$

041 **Demuestra, utilizando propiedades de los determinantes, que para k, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se verifica que:**

$$[k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, k\vec{v}, \vec{w}] = k[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Consideramos los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.
Utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} ku_1 & ku_2 & ku_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ kv_1 & kv_2 & kv_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Por tanto: $[k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, k\vec{v}, \vec{w}] = k[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

042 **Dado el vector $\vec{a} = (3, -5, 2)$, elige otro vector $\vec{b}$ y comprueba que $[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}] = 0$. Explica por qué sucede esto.**

Para cualquier vector $\vec{b}$ que elijamos, $2\vec{a} - \vec{b}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Como el producto mixto de vectores linealmente dependientes es cero: $[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}] = 0$

043 **Explica por qué para cualesquiera $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$:**

$$[\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}, -3\vec{a} + 5\vec{b}, -2\vec{a} + 7\vec{b} - \vec{c}\,] = 0$$

El producto mixto de los tres vectores definidos como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Esto ocurre porque los tres vectores son coplanarios y, por tanto, el volumen del paralelepípedo que forman es cero.

044 **Comprueba con $\vec{u} = (3, -4, 5)$ y $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ si se verifica la igualdad: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -19\vec{i} - 13\vec{j} + \vec{k} = (-19, -13, 1)$$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = 3\sqrt{59}$

$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (-6 - 12 + 5)^2 = 169$

$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 5\sqrt{2}\sqrt{14} - 169 = 10\sqrt{7} - 169$

Como $3\sqrt{59} \neq 10\sqrt{7} - 169 \rightarrow$ No se verifica la igualdad.

045 **En general, el producto vectorial no tiene la propiedad asociativa: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$**

Compruébalo para $\vec{u} = \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{k}$ y $\vec{w} = \vec{k}$.

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{j} \times \vec{k}) \times \vec{k} = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{j} \times (\vec{k} \times \vec{k}) = \vec{j} \times \vec{0} = \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No se cumple la propiedad asociativa.}$$

046 **Demuestra que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$, sean cualesquiera los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v}$

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} \end{array}\right\} \rightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

Productos vectorial y mixto

047 **Encuentra un vector $\vec{a}$ que tenga módulo 3, y tal que si $\vec{b} = (3, -3, 0)$ se verifique que $\vec{a} \times \vec{b} = (6, 6, 3)$.**

Consideramos el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3a_3\vec{i} + 3a_3\vec{j} - 3(a_1 + a_2)\vec{k} = (6, 6, 3)$$

Igualando coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} 3a_3 &= 6 \\ -3(a_1 + a_2) &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} a_3 &= 2 \\ a_2 &= -1 - a_1 \end{aligned}\right. \rightarrow \vec{a} = (a_1, -1 - a_1, 2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2a_1^2 + 2a_1 + 5}$$

Como $|\vec{a}| = 3 \rightarrow 2a_1^2 + 2a_1 + 5 = 9 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

Por tanto, hay dos vectores que cumplen la condición inicial: $\vec{a}_1 = (-2, 1, 2)$ y $\vec{a}_2 = (1, -2, 2)$

048 **Calcula el valor de a para que el producto vectorial de los vectores $(a, -a, 2)$ y $(2, a, 1)$ sea proporcional al vector $(1, 1, 0)$.**

(Castilla y León. Septiembre 2002. Prueba A. Cuestión 2)

$\vec{u} = (a, -a, 2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = (2, a, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -a & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -3a\vec{i} + (4 - a)\vec{j} + (a^2 + 2a)\vec{k} = (-3a, 4 - a, a^2 + 2a)$$

Como debe ser proporcional al vector (1, 1, 0), entonces:

$$\frac{-3a}{1} = \frac{4 - a}{1} = \frac{a^2 + 2a}{0} \rightarrow \left.\begin{aligned} -3a &= 4 - a \\ a^2 + 2a &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow a = -2$$

049 **Si tenemos $\vec{u} = (3, -2, 5)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, ¿qué vectores $\vec{w}$ cumplen que $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$? Escribe tres ejemplos.**

Consideramos el vector $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (-5w_2 - 2w_3)\vec{i} + (5w_1 - 3w_3)\vec{j} + (2w_1 + 3w_2)\vec{k} = (-1, 1, 2)$$

Igualando coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} -5w_2 - 2w_3 &= -1 \\ 5w_1 - 3w_3 &= 1 \\ 2w_1 + 3w_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} w_1 &= \frac{1 + 3\lambda}{5} \\ w_2 &= \frac{1 - 2\lambda}{5} \\ w_3 &= \lambda \end{aligned}\right.$$

Obtenemos tres ejemplos dando valores a λ:

Para $\lambda = -2 \rightarrow \vec{w}_1 = (-1, 1, -2)$

Para $\lambda = 3 \longrightarrow \vec{w}_2 = (2, -1, 3)$

Para $\lambda = 8 \longrightarrow \vec{w}_3 = (5, -3, 8)$

050 Encuentra un vector $\vec{u}$, de modo que para los vectores $\vec{a}=(3, 5, 1)$, $\vec{b}=(1, 0, -4)$ y $\vec{c}=(-3, -1, 2)$ se verifique que $2\vec{a}-3\vec{u}=\vec{b}\times\vec{c}$.

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+10\vec{j}-\vec{k}=(-4, 10, -1)$$

$$2\vec{a}-3\vec{u}=\vec{b}\times\vec{c}\rightarrow 3\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}\times\vec{c}\rightarrow \vec{u}=\frac{1}{3}(2\vec{a}-\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\rightarrow \vec{u}=\frac{1}{3}[2(3, 5, 1)-(-4, 10, -1)]=\left(\frac{10}{3}, 0, 1\right)$$

051 ¿Cómo han de ser dos vectores para que cumplan que $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$?

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\ \alpha=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\rightarrow sen\ \alpha=1$$

Los vectores deben ser perpendiculares.

052 Halla el vector director de la recta $r\colon \left.\begin{array}{r}12x+6y-18z-13=0\\ -8x-4y+12z+5=0\end{array}\right\}$

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 12 & 6 & -18\\ -8 & -4 & 12\end{vmatrix}=(0, 0, 0)\rightarrow \text{ Los planos no definen una recta.}$$

Como los vectores normales son proporcionales, los planos son paralelos o coincidentes, es decir, no se cortan en una única recta.

053 Determina la ecuación de una recta perpendicular a *r* y *s* que pase por el punto $P(3, -2, 0)$, siendo:

$$r\colon x=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{3} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l}x=2\\ y=-3+\lambda\\ z=5-2\lambda\end{array}\right\}$$

$$\vec{v}_r=(1, -2, 3) \qquad \vec{v}_s=(0, 1, -2) \qquad \vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}=(1, 2, 1)$$

La recta que buscamos es $t\colon \left.\begin{array}{l}x=3+\lambda\\ y=-2+2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}$

054 Decide si las rectas son paralelas.

$$r\colon \left.\begin{array}{l}x=-1+3\lambda\\ y=2\lambda\\ z=2-\lambda\end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r}2x+y-z-3=0\\ -x+2y+2z-5=0\end{array}\right\}$$

$$\vec{v}_r=(3, 2, -1) \qquad \vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}=(4, -3, 5)$$

$\frac{3}{4}\neq\frac{2}{-3}\neq\frac{-1}{5}\rightarrow$ Los vectores no son proporcionales, por tanto, las rectas no son paralelas.

055 **Determina la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Tomamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$\vec{v}_r = (2, -1, -2)$ $\quad A(1, -1, 0) \in r$ $\quad \overrightarrow{AP} = (0, 3, 3)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = (3, -6, 6)$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{4+1+4} = 3 \qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{9+36+36} = 9$$

La distancia del punto P a la recta r es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{9}{3} = 3$$

056 **Halla la distancia del punto $P(-2, 2, -9)$ a la recta:**

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ x + 6y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Encuentra también el punto de r que se encuentra a esa distancia de P. Comprueba que las dos distancias coinciden.

- Calculamos la distancia del punto P a la recta.

  Tomamos un vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = (6, -2, 3)$$

$A(1, 0, 0) \in r$ $\quad \overrightarrow{AP} = (-3, 2, -9)$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 45\vec{j} + 6\vec{k} = (12, 45, 6)$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{36+4+9} = 7 \qquad |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{144 + 2.025 + 36} = \sqrt{2.205} = 21\sqrt{5}$$

La distancia del punto P a la recta r es:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{21\sqrt{5}}{7} = 3\sqrt{5}$$

- Determinamos el punto que se encuentra a esta distancia de P.

  Hallamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por P.

$6x - 2y + 3z + D = 0 \rightarrow 6 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-9) + D = 0 \rightarrow D = 43$

$\pi: 6x - 2y + 3z + 43 = 0$

Calculamos el punto Q intersección de la recta r con el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 1 \\ x + 6y + 2z = 1 \\ 6x - 2y + 3z + 43 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}\right. \rightarrow Q(-5, 2, -3)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-3, 0, 6)| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = d(P, r)$$

057 Encuentra un punto en la recta $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 5t \\ z = 2t \end{array}\right\}$ que se halla a 3 unidades de distancia del punto $P(8, 11, 3)$.

Comprueba que ese es el punto de la recta más próximo a P.

Un punto de la recta r es de la forma $R(2 + 4t, -1 + 5t, 2t)$.

$$d(P, R) = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|(4t - 6, 5t - 12, 2t - 3)\right| = \sqrt{45t^2 - 180t + 189}$$

$d(P, R) = 3 \rightarrow \sqrt{45t^2 - 180t + 189} = 3 \rightarrow t = 2 \rightarrow$ El punto es $R(10, 9, 4)$.

Calculamos la distancia de P a la recta.

$$\overrightarrow{PR} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 18\vec{k} = (-9, 0, 18)$$

$$\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{16 + 25 + 4} = 3\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{PR} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{81 + 324} = 9\sqrt{5}$$

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 3$$

Como la distancia del punto a la recta es también 3, el punto R es el más próximo a P.

058 Calcula el punto del plano $\pi\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 + 4\lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$ que se halla más próximo al punto $P(17, -4, 9)$. ¿A qué distancia se encuentra?

Tenemos que hallar la proyección del punto P sobre el plano.

Calculamos el vector normal $\vec{n}$ del plano.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} = (6, -6, 3) \rightarrow \vec{n} = (2, -2, 1)$$

La recta perpendicular al plano que pasa por P es:

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x = 17 + 2t \\ y = -4 - 2t \\ z = 9 + t \end{array}\right\}$$

Calculamos la intersección de esta recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} 17 + 2t = -1 + 3\lambda \\ -4 - 2t = 1 + 4\lambda + \mu \\ 9 + t = 1 + 2\lambda + 2\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \\ t = -6 \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto de intersección es } P'(5, 8, 3).$$

La distancia del punto P al plano coincide con la distancia entre P y P'.

$$d(P, P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|(-12, 12, -6)\right| = 18$$

059 **Halla la distancia entre las rectas:**

$$r\colon x-5=y-2=2-z \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=4+\lambda \\ z=4+\lambda \end{array}\right\}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$\vec{v}_r=(1,1,-1)$ $\quad P_r(5,2,2)$ $\quad \vec{v}_s=(0,1,1)$ $\quad P_s(-1,4,4)$

Calculamos un vector determinado por un punto de cada recta.

$\overrightarrow{P_rP_s}=(-6,2,2)$

Calculamos el producto mixto de los tres vectores.

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(2,-1,1) \qquad |\vec{v}_r\times\vec{v}_s|=\sqrt{6}$$

$[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{v}_r\times\vec{v}_s)=(-6,2,2)\cdot(2,-1,1)=-12$

Por tanto, la distancia entre las rectas es:

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

060 **Comprueba que la distancia entre las siguientes rectas es 3, y halla un punto de cada una de las rectas que se encuentre a esa distancia.**

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x=4+2\lambda \\ y=-1 \\ z=6+4\lambda \end{array}\right\} \qquad s\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{4}$$

- Calculamos la distancia entre las dos rectas.

  Hallamos un punto y un vector de cada recta.

  $\vec{v}_r=(2,0,4)$ $\quad P_r(4,-1,6)$ $\quad \vec{v}_s=(3,-1,4)$ $\quad P_s(1,4,1)$

  Calculamos un vector determinado por un punto de cada recta.

  $\overrightarrow{P_rP_s}=(-3,5,-5)$

  Calculamos el producto mixto de los tres vectores.

  $$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}=(4,4,-2)$$

  $|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|=\sqrt{16+16+4}=6$

  $[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{v}_r\times\vec{v}_s)=(-3,5,-5)\cdot(4,4,-2)=18$

  La distancia entre las rectas es:

  $$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{18}{6}=3$$

- Calculamos los puntos que se encuentran a esta distancia.

  Sean R y S dos puntos genéricos de las rectas r y s, respectivamente.

  $R(4+2\lambda,-1,6+4\lambda)\in r$ $\qquad S(1+3\mu,4-\mu,1+4\mu)\in s$

  $\overrightarrow{RS}=(-2\lambda+3\mu-3,-\mu+5,-4\lambda+4\mu-5)$

El vector $\overrightarrow{RS}$ debe ser perpendicular a los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}_r=-20\lambda+22\mu-26=0\\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}_s=-22\lambda+26\mu-34=0\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\lambda=2\\ \mu=3\end{array}\right.$$

Los puntos que buscamos son $R(8, -1, 14)$ y $S(10, 1, 13)$.

La distancia entre estos dos puntos es: $d(R, S)=\left|\overrightarrow{RS}\right|=\left|(2, 2, -1)\right|=3$

061 **Calcula la distancia entre las rectas r y s:**

r pasa por el punto $P(-1, 2, -4)$ y es paralela a la recta $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{x+6}{5}$.

$$s:\left.\begin{array}{r}2x+y-z=4\\ -x+2y+z=1\end{array}\right\}$$

Las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son:

$$r:\left.\begin{array}{l}x=-1+3\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=-4+5\lambda\end{array}\right\}\qquad s:\left.\begin{array}{l}x=5-3\mu\\ y=\mu\\ z=6-5\mu\end{array}\right\}$$

Hallamos un punto y un vector de cada recta:

$\vec{v}_r=(3, -1, 5)$ $\quad P_r(-1, 2, -4)$ $\quad \vec{v}_s=(-3, 1, -5)$ $\quad P_s(5, 0, 6)$

Como $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

La distancia entre las rectas es la distancia de $P_r(-1, 2, -4)$ a la recta s.

$\overrightarrow{P_rP_s}=(6, -2, 10)$

$$\overrightarrow{P_rP_s}\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -2 & 10\\ -3 & 1 & -5\end{vmatrix}=0\to d(r, s)=d(P_r, s)\frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}=0$$

Las rectas son coincidentes.

062 **Expresa en forma paramétrica las ecuaciones de la recta que resulta de cortar los planos π: $2x-3y+5z=10$ y π': $-x+y-2z=-4$.**

a) Resolviendo primero el sistema que forman.

b) Hazlo también calculando un vector director.

a) $$\left.\begin{array}{r}2x-3y+5z=10\\ -x+y-2z=-4\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}x=2-\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}$$

b) $$\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=(1, -1, -1)$$

Calculamos un punto de la recta.

$$\left.\begin{array}{r}2x-3y+5z=10\\ -x+y-2z=-4\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Si } z=2}\left.\begin{array}{r}2x-3y=0\\ -x+y=0\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right.$$

Un punto de la recta es $P(0, 0, 2)$

La ecuación paramétrica de la recta es $r:\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=2-\lambda\end{array}\right\}$

063 **Encuentra la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1} \qquad s: \left.\begin{array}{r} 2x+y-z+8=0 \\ 5x-2y-2z-6=0 \end{array}\right\}$$

Buscamos el plano que pasa por $P_r(1, -2, 3)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_r = (2, -2, -1)$ y $\vec{v}_s$.

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k} = (-4, -1, -9)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 17x + 22y - 10z + 57 = 0$$

064 **Determina la ecuación de una recta que pasa por el punto $(-1, 4, 2)$ y es paralela a la recta intersección de los planos:**

$$\pi: 2x + 3y - z + 2 = 0 \qquad \pi': x - 2y + 2z + 5 = 0$$

Buscamos la recta que pasa por $P(-1, 4, 2)$ y tiene como vector director el vector director de la recta dada.

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k} = (4, -5, -7)$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-2}{-7}$$

065 **Decide si las dos rectas se cortan y, en caso afirmativo, determina el punto de corte. Halla también la ecuación de una recta que pase por el punto $A(3, -1, 0)$ y sea perpendicular a las dos rectas.**

$$r: \frac{x}{-1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+4}{2} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 5 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -2 \end{array}\right\}$$

- Determinamos la posición relativa de las rectas.

  $\vec{u}_r = (-1, 1, 2)$ $\quad P_r(0, 6, -4)$ $\quad \vec{v}_s = (2, -1, 0)$ $\quad Q_s(5, 4, -2)$

  $\overrightarrow{P_rQ_s} = (5, -2, 2)$

  $$\text{Rango} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

  Como los vectores directores no son proporcionales, las rectas se cortan.

- Determinamos el punto de corte de las rectas.

  $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+4}{2} \\ x = 5 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto de corte es } C(-1, 7, -2).$$

- Hallamos la recta que pasa por $A(3, -1, 0)$ y es perpendicular a las rectas r y s.

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} = (2, 4, -1)$$

La recta es $t: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{-1}$

066 **Una recta pasa por el punto $(1, -1, 0)$ y es paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 1$. Halla sus ecuaciones.**

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 1)

Buscamos una recta que pasa por $P(1, -1, 0)$ y tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1, -1, -1)$$

La recta es $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$

067 **Encuentra una recta paralela al plano $\pi: 2x - 5y + z - 2 = 0$ que se halle a $2\sqrt{30}$ de distancia.**

Tomamos un punto del plano, por ejemplo: $P(2, 1, 3) \in \pi$

Si al punto P le sumamos un vector de módulo $2\sqrt{30}$ que sea perpendicular al plano, obtendremos un punto que está a esa distancia del plano.

El vector perpendicular al plano con módulo $2\sqrt{30}$ será un vector proporcional al vector normal del plano.

Como $\vec{n} = (2, -5, 1)$, el vector que buscamos será de la forma:
$\lambda\vec{n} = \lambda(2, -5, 1) = (2\lambda, -5\lambda, \lambda)$

Y debe cumplir que:

$$|(2\lambda, -5\lambda, \lambda)| = \sqrt{30\lambda^2} = 2\sqrt{30} \rightarrow \lambda = 2$$

Es decir, un vector perpendicular al plano con módulo $2\sqrt{30}$ es $\vec{u} = (4, -10, 2)$.
$Q + \vec{u} = (2, 1, 3) + (4, -10, 2) = (6, -9, 5)$

El punto $Q(6, -9, 5)$ está a distancia $2\sqrt{30}$ del plano.

La recta que buscamos pasa por el punto Q y tiene como vector director un vector perpendicular al vector normal.

Si $\vec{v}_r = (a, b, c)$, tiene que cumplirse:

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (a, b, c) \cdot (2, -5, 1) = 2a - 5b + c = 0$

Si $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow c = -2$

El vector $\vec{v}_r = (1, 0, -2)$ es perpendicular a $\vec{n}$.

La recta buscada es:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 6 + \lambda \\ y = -9 \\ z = 5 - 2\lambda \end{array}\right\}$$

068 **Calcula la distancia de $P(-3, 4, 0)$ a las rectas.**

a) $r\colon \dfrac{x+4}{2} = y-2 = \dfrac{z-2}{-3}$

b) $s\colon \left.\begin{array}{l} x = 3+2\lambda \\ y = 19+5\lambda \\ z = -3-\lambda \end{array}\right\}$

c) $t\colon \left.\begin{array}{r} x+2y+3z-1=0 \\ 2x-4y+z+12=0 \end{array}\right\}$

a) $\vec{u}_r = (2, 1, -3)$ $\quad Q_r(-4, 2, 2)$ $\quad \overrightarrow{PQ_r} = (-1, -2, 2)$

$$\overrightarrow{PQ_r} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (4, 1, 3)$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ_r} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{13}{7}} = \frac{\sqrt{91}}{7}$$

b) $\vec{u}_s = (2, 5, -1)$ $\quad Q_s(3, 19, -3)$ $\quad \overrightarrow{PQ_s} = (6, 15, -3)$

$$\overrightarrow{PQ_s} \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 15 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{El punto } P \text{ pertenece a la recta } s.$$

c) $$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k} = (14, 5, -8)$$

$Q_t(1, 3, -2)$ $\quad \overrightarrow{PQ_t} = (4, -1, -2)$

$$\overrightarrow{PQ_t} \times \vec{u}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 14 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 4\vec{j} + 34\vec{k} = (18, 4, 34)$$

$$d(P, t) = \frac{|\overrightarrow{PQ_t} \times \vec{u}_t|}{|\vec{u}_t|} = \frac{\sqrt{1.496}}{\sqrt{285}} = \frac{2\sqrt{106.590}}{285}$$

069 **Halla la distancia entre la recta $r\colon (13+t, 7-t, -4+2t)$ y el plano $\pi\colon 4x+2y-z-7=0$. Encuentra dos puntos del plano que se encuentren a esa distancia de r. Obtén la ecuación de la proyección ortogonal de r sobre π.**

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{n} = (4, 2, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Son perpendiculares.}$$

La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Calculamos la distancia de un punto de la recta, $P(13, 7, -4) \in r$, al plano π:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \left| \frac{4 \cdot 13 + 2 \cdot 7 + 4 - 7}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{63}{\sqrt{21}} = 3\sqrt{21}$$

Para hallar dos puntos del plano que se encuentren a distancia $3\sqrt{21}$, calculamos los puntos P' y Q' del plano que sean proyección ortogonal de dos puntos P y Q de la recta r.

- Proyección ortogonal P' del punto $P(13, 7, -4) \in r$ sobre el plano.

La recta perpendicular al plano que pasa por P es r_1: $\left.\begin{array}{l} x = 13 + 4p \\ y = 7 + 2p \\ z = -4 - p \end{array}\right\}$

Hallamos el punto P' intersección entre r_1 y π.

$$\left.\begin{array}{r} x = 13 + 4p \\ y = 7 + 2p \\ z = -4 - p \\ 4x + 2y - z - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \\ p = -3 \end{array}\right. \rightarrow P'(1, 1, -1)$$

- Proyección ortogonal Q' del punto $Q(14, 6, -2) \in r$ sobre el plano.

La recta perpendicular al plano que pasa por Q es r_2: $\left.\begin{array}{l} x = 14 + 4p \\ y = 6 + 2p \\ z = -2 - p \end{array}\right\}$

Hallamos el punto Q' intersección entre r_2 y π.

$$\left.\begin{array}{r} x = 14 + 4p \\ y = 6 + 2p \\ z = -2 - p \\ 4x + 2y - z - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ p = -3 \end{array}\right. \rightarrow Q'(2, 0, 1)$$

La proyección ortogonal de r sobre π pasa por los puntos P' y Q'.

$$r': \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

070 **Calcula la distancia entre las dos rectas.**

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 6z - 9 = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = 2 - 4t \end{array}\right\}$$

Justifica lo que sucede.

Determinamos los vectores directores de las rectas.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 18\vec{j} + 12\vec{k} = (-12, -18, 12)$$

$\vec{v}_s = (4, 6, -4)$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Las rectas son paralelas o coincidentes.}$$

La ecuación implícita de la recta s es: $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y \qquad - 5 = 0 \\ x \qquad\quad - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & -9 \\ 3 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son coincidentes, por tanto, $d(r, s) = 0$.

071 **Halla la distancia entre las rectas r: $(3-\lambda, 2\lambda, 5+\lambda)$ y s, que pasa por los puntos $A(-1, -2, 4)$ y $B(3, -10, 0)$.**

Calculamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_r = (-1, 2, 1)$ $\quad P(3, 0, 5)$ $\quad A(-1, -2, 4)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (4, -8, -4)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

$$\overrightarrow{AP} = (4, 2, 1) \qquad \overrightarrow{AP} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{j} + 10\vec{k} = (0, -5, 10)$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \qquad |\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{25+100} = 5\sqrt{5}$$

Como las rectas son paralelas:

$$d(s, r) = d(A, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{30}}{6}$$

072 **Calcula la distancia de la recta r: $\left.\begin{array}{l} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 4-\lambda \end{array}\right\}$ al eje Z.**

$\vec{u}_r = (3, 2, -1)$ $\quad P_r(2, -1, 4)$ $\quad O(0, 0, 0)$ $\quad \vec{v}_z = (0, 0, 1)$

$$[\overrightarrow{P_rO}, \vec{u}_r, \vec{v}_z] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} = (2, -3, 0) \qquad |\vec{u}_r \times \vec{v}_z| = \sqrt{13}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rO}, \vec{u}_r, \vec{v}_z]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_z|} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

073 **Determina la ecuación de un plano paralelo al plano OXY que se encuentre a 5 unidades de distancia.**

La ecuación del plano OXY es $z = 0$. Hay dos planos paralelos que están a 5 unidades de distancia de él, son los planos $z = 5$ y $z = -5$.

074 **Halla la ecuación de un plano paralelo al eje Y que se encuentre a 4 unidades de distancia.**

Hay infinitos planos en esa situación. Por ejemplo, $z = 4$ y $x = -4$.

075 **Determina las ecuaciones de una recta paralela al eje Y que está a 6 unidades de distancia de $O(0, 0, 0)$.**

El eje Y tiene por ecuación: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$. Una recta que está a 6 unidades del origen es la recta que pasa por $(6, 0, 0)$. La recta paralela al eje Y que pasa por el punto $(6, 0, 0)$ es: $\left.\begin{array}{l} x = 6 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

076 Halla el valor del parámetro a para que las rectas:

$$r: -x = y - a = z - 3 \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{array}\right\}$$

se encuentren a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades.

Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_r = (-1, 1, 1)$ $\quad P(0, a, 3)$ $\quad \vec{v}_s = (1, -1, 1)$ $\quad Q(-3, 6, -3)$

$\overrightarrow{PQ} = (-3, 6 - a, -6)$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 6-a & -6 \end{vmatrix} = 6 - 2a$$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} = (2, 2, 0) \qquad |\vec{u}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{8}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|6 - 2a|}{\sqrt{8}} = \frac{|3 - a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow |3 - a| = 2 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 5 \end{cases}$$

077 Considera el triángulo que tiene por vértices los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(1, -3, 2)$.

a) Razona si el triángulo es rectángulo.
b) Calcula la recta r que pasa por B y es perpendicular al lado AC.
c) Calcula la recta s que pasa por los puntos A y C.
d) Si D es el punto de corte de las rectas r y s, calcula el módulo del vector $\overrightarrow{BD}$.
e) Calcula la longitud del lado AC.
f) Calcula el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ y comprueba que su módulo es igual a $h \cdot b$ siendo h el módulo del vector $\overrightarrow{BD}$ y b la longitud del lado AC (calculados en apartados anteriores).

(Cantabria. Junio 2006. Bloque 2. Opción B)

a) Analizamos los productos escalares $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AC} = (0, -4, 0)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (0, -1, -3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (0, -3, 3)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \neq 0$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 \neq 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 \neq 0$

El triángulo no tiene lados perpendiculares, no es un triángulo rectángulo.

b) Hallamos el plano perpendicular al lado AC y que pase por el punto B.

$\overrightarrow{AC} = (0, -4, 0) \rightarrow \pi: -4y + D = 0$

$B(1, 0, -1) \in \pi \rightarrow D = 0$

Por tanto, el plano es $\pi: y = 0$.

La recta que pasa por A y C es: $s: \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 2 \end{array}\right\}$

Calculamos el punto de corte del plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1-4\lambda \\ z=2 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{El punto de corte es } D(1, 0, 2).$$

La recta que buscamos es la recta que pasa por B y D.

$$\overrightarrow{BD}=(0, 0, 3) \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=-1+3\mu \end{array}\right\}$$

c) $\overrightarrow{AC}=(0, -4, 0) \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1-4\lambda \\ z=2 \end{array}\right\}$

d) $|\overrightarrow{BD}|=|(0, 0, 3)|=3$

e) $|\overrightarrow{AC}|=|(0, -4,0)|=4$

f) $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}=12\vec{i}=(12, 0, 0)$ $\qquad |\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=12$

$|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=3\cdot 4=12$

Por tanto: $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$

078 **Dadas las rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+2y=7 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=-5 \end{array}\right\}$$

Halla un punto en cada una de ellas, de tal forma que el vector que los una sea perpendicular a ambas.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 2)

$P_r(7, 0, 7)$ $\qquad \vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(2, -1, 1)$

$P_s(2, -5, 0)$ $\qquad \vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\vec{k}=(0, 0, 1)$

Sea $A(7+2\lambda, -\lambda, 7+\lambda)$ un punto genérico de la recta r, y $B(2, -5, \mu)$ un punto genérico de la recta s. Tenemos que hallar λ y μ de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas.

$\overrightarrow{AB}=(-2\lambda-5, \lambda-5, \mu-\lambda-7)$

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB}\cdot(-2, 1, -1)=6\lambda-\mu+12=0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot(0, 0, 1)=\mu-\lambda-7=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=-1 \\ \mu=6 \end{array}\right.$$

Los puntos son: $A(5, 1, 6)$ y $B(2, -5, 6)$

079 **La recta** $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \end{array}\right\}$ **corta en** P **y** Q **respectivamente a los planos** $y=0$ **y** $x=0$**.**

a) Determina los puntos (si los hay) en el eje Z **que equidisten de** P **y de** Q**. Naturalmente estos posibles puntos dependen del valor de** λ**.**

b) Determina λ **para que, además, los puntos del eje** Z **formen con** P **y** Q **un triángulo equilátero.**

(Aragón. Junio 2002. Opción A. Cuestión 2)

Hallamos los puntos P y Q.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \\ y=0 \end{array}\right\} \to P(1, 0, 1) \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \\ x=0 \end{array}\right\} \to Q(0, 1, 1-\lambda)$$

a) Un punto genérico del eje Z es de la forma $A(0, 0, \alpha)$. Buscamos los puntos A que cumplen: $d(A, P) = d(A, Q)$

$$\overrightarrow{AP} = \left|(1, 0, 1-\alpha)\right| = \sqrt{1+(1-\alpha)^2}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \left|(0, 1, 1-\lambda-\alpha)\right| = \sqrt{1+(1-\lambda-\alpha)^2}$$

$$d(A, P) = d(A, Q) \to \sqrt{1+(1-\alpha)^2} = \sqrt{1+(1-\lambda-\alpha)^2} \to \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = \dfrac{2-\lambda}{2} \end{cases}$$

- Si $\lambda = 0 \to \alpha$ puede tomar cualquier valor.
  Todos los puntos del eje Z equidistan de P y Q.
- Si $\lambda \neq 0 \to \alpha = \dfrac{2-\lambda}{2}$
  El único punto del eje Z que equidista de P y Q es $A\left(0, 0, \dfrac{2-\lambda}{2}\right)$.

b) Los puntos A, P y Q formarán un triángulo equilátero si existen un λ para el que: $d(A, P) = d(A, Q) = d(P, Q)$

- Si $\lambda \neq 0 \to A\left(0, 0, \dfrac{2-\lambda}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = \left|\left(1, 0, \dfrac{\lambda}{2}\right)\right| = \sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{4}} \\ |\overrightarrow{AQ}| = \left|\left(1, 0, -\dfrac{\lambda}{2}\right)\right| = \sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{4}} \\ |\overrightarrow{PQ}| = \left|(-1, 1, -\lambda)\right| = \sqrt{1+1+\lambda^2} \end{array}\right\} \to \sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{1+1+\lambda^2} \to 3\lambda^2 = -4$$

No tiene soluciones reales.

A, P y Q no forman un triángulo equilátero.

- Si $\lambda = 0 \to P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 1)$ y $A(0, 0, \alpha)$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = \left|(1, 0, 1-\alpha)\right| = \sqrt{1+(1-\alpha)^2} \\ |\overrightarrow{AQ}| = \left|(0, 1, 1-\alpha)\right| = \sqrt{1+(1-\alpha)^2} \\ |\overrightarrow{PQ}| = \left|(-1, 1, 0)\right| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \to \sqrt{1+(1-\alpha)^2} = \sqrt{2} \to \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Hay dos puntos del eje Z que forman un triángulo equilátero con P y Q: $A(0, 0, 0)$ y $A'(0, 0, 2)$.

080 a) **Demuestra que las rectas:**

$$l_1\colon \left.\begin{array}{r} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{array}\right\} \qquad l_2\colon \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

se cruzan en el espacio.

b) **Encuentra la distancia entre dichas rectas.**

(Murcia. Junio 2004. Bloque 2. Cuestión 2)

a) Expresamos la recta l_2 en forma paramétrica.

$$l_2\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 - p \\ y = 1 + 2p \\ z = p \end{array}\right\}$$

Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ $\quad P(0, 0, 2)$ $\quad \vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$ $\quad Q(-1, 1, 0)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -2)$

$$[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (-3, -2, 1)$$

Como $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$ y $\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 \neq 0 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.

b) $|\vec{u}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{|-1|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

081 a) **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano π: $x + y + z = 3$. Obtén el punto de corte de la recta con el plano π.**

b) **Halla el punto de la recta $r\colon \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.**

(Aragón. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)

a) Buscamos una recta que pasa por $O(0, 0, 0)$ y tiene como vector director al vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de corte de la recta con el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \\ x + y + z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \mu = 1 \rightarrow Q(1, 1, 1)$$

b) Un punto genérico de la recta r es $A(\lambda, 3-\lambda, 1+2\lambda)$.

$$|\overrightarrow{PA}| = |(\lambda-1, 3-\lambda, -1+2\lambda)| = \sqrt{5} \rightarrow (\lambda-1)^2 + (3-\lambda)^2 + (-1+2\lambda)^2 = 5$$
$$\rightarrow \lambda = 1$$

El punto que cumple la condición es $A(1, 2, 3)$.

082 **Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta:**

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

(Extremadura. Junio 2005. Repertorio A. Ejercicio 4)

$A(1, 0, 1) \in r$

$\vec{n} = (0, 1, 1)$ es un vector perpendicular al vector director $\vec{v} = (1, 1, -1)$ de la recta.

Determinamos un vector perpendicular a la recta que tenga módulo 2.

Como $|\vec{n}| = \sqrt{2} \rightarrow |\sqrt{2} \cdot \vec{n}| = 2$

El extremo P del vector $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \sqrt{2} \cdot \vec{n}$ es un punto que está a 2 unidades de distancia de la recta.

$$P = (1, 0, 1) + \sqrt{2} \cdot (0, 1, 1) = \left(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$$

Veamos que es cierto:

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 20 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k} = \left(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}| = 2\sqrt{3}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{2\sqrt{3}}{|(1, 1, -1)|} = 2$$

083 **Halla la ecuación general del plano que corta a los ejes coordenados en los puntos (2, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 2). Determina los puntos de la recta $x = y = z$ que están a distancia 5 de este plano.**

Buscamos un plano que pasa por $A(2, 0, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x + 4y + 2z - 4 = 0 \rightarrow \pi:\ x + 2y + z - 2 = 0$$

Determinamos los puntos de la recta que estén a 5 unidades del plano.

Un punto genérico de la recta es $P(t, t, t)$.

$$d(P, \pi) = \frac{|t + 2t + t - 2|}{\sqrt{1+4+1}} = 5 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4t - 2 = 5\sqrt{6} \\ 4t - 2 = -5\sqrt{6} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{5\sqrt{6}+2}{4} \\ t = \dfrac{-5\sqrt{6}+2}{4} \end{array}\right.$$

Los puntos son $P_1\left(\dfrac{5\sqrt{6}+2}{4}, \dfrac{5\sqrt{6}+2}{4}, \dfrac{5\sqrt{6}+2}{4}\right)$

y $P_2\left(\dfrac{-5\sqrt{6}+2}{4}, \dfrac{-5\sqrt{6}+2}{4}, \dfrac{-5\sqrt{6}+2}{4}\right)$.

Productos vectorial y mixto

084 Dado el plano π_1: $3x + \alpha y + z = 6$, calcula α para que la recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es perpendicular a este plano (π_1) sea paralela al plano π_2: $x - y = 3$. Calcula la distancia de la recta r al origen.

(Galicia. Septiembre 2000. Bloque 2. Pregunta 2)

Buscamos la recta que pasa por $P(1, 1, 2)$ y tiene como director el vector normal al plano π_1, $\vec{n} = (3, \alpha, 1)$.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 1 + 3\lambda \\ y &= 1 + \alpha\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{aligned}\right\}$$

Si r es paralela a π_2, el vector director de r es perpendicular al vector normal de π_2.

$(3, \alpha, 1) \cdot (1, -1, 0) = 0 \rightarrow 3 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 3$

Calculamos la distancia de r al origen de coordenadas.

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 5\vec{j} = (-5, 5, 0) \qquad \left|\overrightarrow{OP} \times \vec{u}\right| = \sqrt{50}$$

$$d(O, r) = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{50}}{\left|(3, 3, 1)\right|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{19}} = \frac{5\sqrt{38}}{19}$$

085 Dadas las rectas:

$$r: \left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ay + z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad s: \left.\begin{aligned} x - z &= 1 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

se pide:

a) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r, s.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 2)

a) Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada del sistema que forman los cuatro planos.

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ay + z &= 1 \\ x - z &= 1 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4a \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 1$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 4$ y Rango $(A) = 3 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

b) Escribimos las rectas en forma paramétrica.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 3 - \lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \qquad s: \left.\begin{aligned} x &= 1 + \mu \\ y &= 3 - \mu \\ z &= \mu \end{aligned}\right\}$$

Calculamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_r = (-1, -1, 1) \quad P(3, 1, 0) \quad \vec{v}_s = (1, -1, 1) \quad Q(1, 3, 0) \quad \overrightarrow{PQ} = (-2, 2, 0)$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + 2\vec{k} = (0, 2, 2) \qquad |\vec{u}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

086 Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas:

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Estudie si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.

b) Calcule la distancia mínima entre ambas trayectorias.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 2. Cuestión A)

a) Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$\vec{u}_1 = (1, -1, 2) \quad P(1, 1, 1) \quad \vec{v}_2 = (-1, 1, 0) \quad Q(1, 0, 2) \quad \overrightarrow{PQ} = (0, -1, 1)$

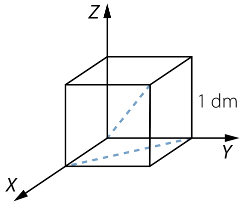
$$[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} = (-2, -2, 0)$$

Como $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$ y $\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 \neq 0 \rightarrow r_1$ y r_2 se cruzan.

b) $d(r_1, r_2) = \dfrac{|[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{u}_1 \times \vec{v}_2|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

087 Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 1 dm, se considera una de sus diagonales y la diagonal de una de sus caras de manera que estas no tengan ningún vértice en común.



Halla la distancia entre estas diagonales.

Indicación: Dibuja el cubo con un vértice en el origen de coordenadas y los vértices contiguos sobre los ejes de coordenadas.

(Baleares. Junio 2006. Opción A. Cuestión 2)

D_1 diagonal que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 1, 1)$.

D_2 diagonal que pasa por los puntos $C(1, 0, 0)$ y $D(0, 1, 0)$.

Calculamos un punto y un vector director de cada diagonal.

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ $\quad A(0, 0, 0)$ $\quad \overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0)$ $\quad C(1, 0, 0)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (-1, -1, 2)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6}$$

$$d(D_1, D_2) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AC}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

088 **Un asteroide que sigue aproximadamente la trayectoria dada por la recta:**

$$r\colon x + 1 = \frac{y}{2} = 2z + 1$$

se está acercando a un planeta situado en el punto $P(1, 1, 2)$.

a) Calcule la distancia más cercana a la que se encontrará del planeta.

b) Calcule el punto de la trayectoria del asteroide donde se alcanzará dicha distancia mínima.

c) Si inicialmente el asteroide se encuentra en el punto $Q\left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right)$, calcule la distancia que deberá recorrer para alcanzar dicho punto.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 2. Cuestión B)

a) Escribimos la ecuación de la recta en forma continua.

$$r\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \to \begin{cases} Q\left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right) \\ \vec{u} = (2, 4, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-2, -1, -\frac{5}{2}\right)$$

Calculamos la distancia de la recta al punto.

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = (9, -3, -6)$$

$$|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}| = 3\sqrt{14}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{3\sqrt{14}}{|(2, 4, 1)|} = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{21}} = \sqrt{6}$$

b) Un punto genérico de la recta r es $R\left(-1+2\lambda,\ 4\lambda,\ -\frac{1}{2}+\lambda\right)$.

Hallamos el valor de λ para el que el vector $\overrightarrow{PR}=\left(2\lambda-2,\ 4\lambda-1,\ \lambda-\frac{5}{2}\right)$ sea perpendicular al vector director de la recta.

$$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{u}=\left(2\lambda-2,\ 4\lambda-1,\ \lambda-\frac{5}{2}\right)\cdot(2,4,1)=21\lambda-\frac{21}{2}=0\to\lambda=\frac{1}{2}$$

El punto que cumple la condición es $R(0, 2, 0)$.

c) $|\overrightarrow{QR}|=\left|\left(1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)\right|=\frac{\sqrt{21}}{2}$

089 **Dados el punto $Q(3, -1, 4)$ y la recta r de ecuaciones paramétricas:**

$$r:\left.\begin{array}{l} x=-2+3\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=1+4\lambda\end{array}\right\}$$

se pide:

a) Hallar la distancia del punto Q a la recta r.

b) Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene a $(1, -1, 1)$ como vector direccional no corta a r.

c) Calcular la distancia entre las rectas r y s.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 2. Problema 2)

a) Un punto de la recta es $A(-2, 0, 1)$ y un vector director es $\vec{u}_r=(3,-2,4)$.

$\overrightarrow{QA}=(-5,1,-3)$

$$\overrightarrow{QA}\times\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&1&-3\\3&-2&4\end{vmatrix}=-2\vec{i}+11\vec{j}+7\vec{k}=(-2,11,7)$$

$$|\overrightarrow{QA}\times\vec{u}_r|=\sqrt{174}$$

$$d(Q,r)=\frac{|\overrightarrow{QA}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}=\frac{\sqrt{174}}{|(3,-2,4)|}=\frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}}=\sqrt{6}$$

b) $$s:\left.\begin{array}{l} x=3+\mu\\ y=-1-\mu\\ z=4+\mu\end{array}\right\}\to\vec{v}_s=(1,-1,1)$$

$$[\vec{u}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{QA}]=\begin{vmatrix}3&-2&4\\1&-1&1\\-5&1&-3\end{vmatrix}=-6\neq0\to\text{Las rectas se cruzan.}$$

c) $$\vec{u}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-2&4\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(2,1,-1)\qquad|\vec{u}_r\times\vec{v}_s|=\sqrt{6}$$

$$d(s,r)=\frac{|[\vec{u}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{QA}]|}{|\vec{u}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

090 Se considera la recta $r: \left.\begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array}\right\}$ y el punto $P(1, 2, 3)$.

a) Calcula las ecuaciones paramétricas del plano π que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P.

b) Considera la recta:

$$s: \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2+\alpha \\ z=3+2\alpha \end{array}\right\}$$

¿Cuál es la posición relativa entre la recta s y el plano π?

c) Calcula cuáles son las coordenadas del punto Q de la recta s que está más próximo a la recta r. Justifica tu respuesta.

(Cantabria. Junio 2004. Bloque 3. Opción B)

a) Buscamos un plano que pasa por le punto $P(1, 2, 2)$ y que tiene como vector normal al vector director de la recta.

$$r: \left.\begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+4\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(4,-2,1)$$

$\pi: 4x-2y+z+D=0$

$4\cdot 1-2\cdot 2+3+D=0 \rightarrow D=-3$

$$\pi:\ 4x-2y+z-3=0 \rightarrow \pi: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=3-4\lambda+2\mu \end{array}\right\}$$

b) Vector director de la recta s: $\vec{v}_s=(0, 1, 2)$

Vector normal de π: $\vec{n}=(4, -2, 1)$

$\vec{v}_s\cdot\vec{n}=0\cdot 4+1\cdot(-2)+2\cdot 1=0 \rightarrow$ La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Como el punto $P(1, 2, 3)\in r$ y $P(1, 2, 3)\in\pi$, la recta y el plano son coincidentes.

c) Un punto genérico de s es $Q(1, 2+\alpha, 3+2\alpha)$.

Un punto genérico de la recta r es $R(-1+4\lambda, 4-2\lambda, \lambda)$.

$\overrightarrow{RQ}=(2-4\lambda, \alpha+2\lambda-2, 2\alpha-\lambda+3)$

$\overrightarrow{RQ}$ debe ser perpendicular a las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RQ}\cdot\vec{u}_r=15-21\lambda=0 \\ \overrightarrow{RQ}\cdot\vec{v}_s=5\alpha+4\quad=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{5}{7} \\ \alpha=-\dfrac{4}{5} \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto es } Q\left(1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

091 Halla la distancia del punto $P(2, 1, 1)$ a la recta:

$$r: \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

(Castilla y León. Junio 2003. Prueba A. Cuestión 2)

$\vec{u}_r = (0, 1, 1)$ $\qquad A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \in r$ $\qquad \vec{AP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$

$$\vec{u}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{5}{3}\vec{j} - \frac{5}{3}\vec{k} = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) \qquad |\vec{u}_r \times \vec{AP}| = \sqrt{6}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

092 **Con los datos de la actividad anterior, encuentra el punto Q de r más próximo a P. Comprueba que la distancia entre esos puntos es la misma que has calculado antes.**

El punto Q es la intersección de la recta r y el plano que pasa por P y es perpendicular a la recta.

El plano que pasa por P y es perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de r.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \rightarrow \pi\colon y + z + D = 0 \\ P(2, 1, 1) \in \pi \rightarrow 1 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \pi\colon\ y + z - 2 = 0$$

Calculamos la intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \\ y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Comprobamos que la distancia entre los dos puntos coincide con la distancia del punto a la recta.

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}| = \left|\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right| = \sqrt{3} = d(P, r)$$

093 **Calcula la distancia entre las rectas de ecuaciones:**

$$r\colon x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7} \qquad s\colon x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

(Galicia. Junio 2005. Bloque 2. Pregunta 1)

Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$\vec{u}_r = (1, 3, 7)$ $\quad P_r(0, 1, 4)$ $\quad \vec{v}_s = (1, 3, 4)$ $\quad Q_s(2, 2, 3)$ $\quad \vec{P_rQ_s} = (2, 1, -1)$

$$\vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 3\vec{j} = (-9, 3, 0)$$

$$[\vec{P_rQ_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s] = \vec{P_rQ_s} \cdot (\vec{u}_r \times \vec{v}_s) = (2, 1, -1) \cdot (-9, 3, 0) = -15$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{P_rQ_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{15}{\sqrt{81 + 9}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

094 Halla el área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u} = (4, -3, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3, 3)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k} = (-3, -8, -6)$$

$$\text{Área del paralelogramo} = \sqrt{9 + 64 + 36} = \sqrt{109}$$

095 Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, calcula:

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(La Rioja. Septiembre 2001. Propuesta A. Ejercicio 2)

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (4, -2, 1)$

b) $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{21}$

El vector unitario y ortogonal a los dos vectores dados será:

$$\frac{1}{\sqrt{21}}(\vec{u} \times \vec{v}) = \left(\frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{2\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right)$$

c) Área del paralelogramo $= |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{21}$

096 Halla el área del triángulo de vértices $A(1, 2, 3)$, $B(4, -3, 4)$ y $C(5, 9, 9)$.

$\overrightarrow{AB} = (3, -5, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (4, 7, 6)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -37\vec{i} - 14\vec{j} + 41\vec{k} = (-37, -14, 41)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3.246}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{3.246}}{2}$$

097 Los vectores $\vec{u} = (-4, 3, 2)$ y $\vec{v} = (1, 2, 3)$ son dos de los lados de un triángulo.

a) Calcula el perímetro de dicho triángulo.

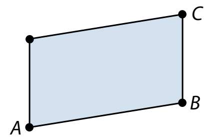
b) Halla su área.

a) $\text{Perímetro} = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{u} - \vec{v}| =$
$= \sqrt{29} + \sqrt{14} + \sqrt{(-4-1)^2 + (3-2)^2 + (2-3)^2} = 14{,}18$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 14\vec{j} - 11\vec{k} = (5, 14, -11)$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{\sqrt{342}}{2} = \frac{3\sqrt{38}}{2}$$

098 **Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(3, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$ y $C(4, 7, -2)$. Halla el cuarto vértice y su área.**



$\overrightarrow{AB} = (1, 4, 2)$

El punto D cumple:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = (4, 7, -2) - (1, 4, 2) = (3, 3, -4) \rightarrow D = (3, 3, -4)$

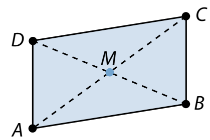
Calculamos el área.

$\overrightarrow{AD} = (0, 2, -4)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -20\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} = (-20, 4, 2)$$

$$\text{Área del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |(-20, 4, 2)| = 2\sqrt{105}$$

099 **El centro del paralelogramo $ABCD$ es $M(2, 2, 6)$. Determina los vértices C y D, sabiendo que $A(0, 1, 3)$ y $B(1, 4, 5)$. Calcula también su área.**



El punto C cumple: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = (0, 1, 3) + 2(2, 1, 3) = (4, 3, 9) \rightarrow C(4, 3, 9)$

El punto D cumple: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BM} = (1, 4, 5) + 2(1, -2, 1) = (3, 0, 7) \rightarrow D(3, 0, 7)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k} = (14, 2, -10)$$

$$\text{Área del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |(14, 2, -10)| = 10\sqrt{3}$$

100 **Comprueba que los puntos $A(2, 3, 0)$, $B(4, 5, 2)$, $C(7, 6, 5)$ y $D(6, 1, 4)$ son coplanarios. Halla el área del polígono $ABCD$.**

Los puntos son coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (5, 3, 5)$ y $\overrightarrow{AD} = (4, -2, 2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Los puntos son coplanarios.}$$

Calculamos el área del triángulo descrito por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{k} = (4, 0, -4)$$

$$\text{Área } T_1 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(4, 0, 4)| = 2\sqrt{2}$$

Calculamos el área del triángulo descrito por los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 22\vec{i} - 22\vec{k} = (22, 0, -22)$$

$$\text{Área } T_2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}|(22, 0, -22)| = 22\sqrt{2}$$

$$\text{Área de cuadrilátero} = 2\sqrt{2} + 22\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

Productos vectorial y mixto

101 **Calcula el área de un rombo de 2 cm de lado, sabiendo que tiene un ángulo de 60°.**

Tenemos dos vectores de módulo 2 cm que forman un ángulo de 60°.

Área del rombo $= |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,sen\,\alpha = 2 \cdot 2 \cdot sen\,60° = 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

102 **En el triángulo determinado por los vectores $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (2, 1, 4)$:**

a) Halla el área.

b) Decide si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k} = (3, -10, 1)$

Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, -10, 1)| = \dfrac{\sqrt{110}}{2}$

b) Calculamos los módulos de los vectores que forman el triángulo.

$|\vec{u}| = \sqrt{10}$

$|\vec{v}| = \sqrt{21}$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{51}$

El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ será el ángulo mayor del triángulo por ser el lado $\vec{u} - \vec{v}$ el de mayor medida.

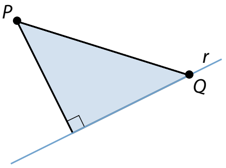
$cos\,\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{21}} \rightarrow \alpha = 133°\ 38'\ 7''$

El triángulo es obtusángulo.

103 **Calcula el área de un triángulo rectángulo que tiene un cateto sobre la recta:**

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{4} = z - 2$$

y dos de sus vértices son $P(5, -3, 4)$ y $Q(6, 3, 3)$.



Comprueba que se verifica el teorema de Pitágoras.

Calculamos el punto de corte de la recta *r* con el plano que pasa por el punto *P* y es perpendicular a *r*.

El plano que pasa por el punto *P* y es perpendicular a *r* tiene como vector normal al vector director de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, 4, 1) \rightarrow \pi: 3x + 4y + z + D = 0 \\ P(5, -3, 4) \in \pi \rightarrow 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) + 4 + D = 0 \rightarrow D = -7 \end{array}\right\}$$

El plano es $\pi: \ 3x + 4y + z - 7 = 0$

Calculamos la intersección entre este plano y la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{4} \\ \dfrac{y+1}{4}=z-2 \\ 3x+4y+z-7=0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

El tercer vértice del triángulo rectángulo es $A(3, -1, 2)$.

Calculamos el área del triángulo.

$$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-10\vec{i}+4\vec{j}+14\vec{k}=(-10, 4, 14)$$

$$|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{78}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{78}$$

Comprobamos que se verifica el teorema de Pitágoras.

$$d(P, Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{38}$$

$$d(A, Q)=|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{26}$$

$$d(A, P)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{12}$$

$$[d(P, Q)]^2=[d(A, Q)]^2+[d(A, P)]^2$$

$$\left(\sqrt{38}\right)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2+\left(\sqrt{12}\right)^2 \to 38=26+12$$

104 **Calcula α para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, -2, 2)$ y $D(2, 1, \alpha)$ sean coplanarios. Calcula el área del polígono $ABCD$.**

(Galicia. Septiembre 2000. Bloque 2. Pregunta 1)

Los puntos son coplanarios si los vectores $\overrightarrow{CA}=(-4, 3, -1)$, $\overrightarrow{CB}=(-2, 2, 0)$, y $\overrightarrow{CD}=(-3, 3, \alpha-2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & \alpha-2 \end{vmatrix}=4-2\alpha$$

Los puntos son coplanarios si $4-2\alpha=0 \to \alpha=2$

Si $D(2, 1, 2)$, los vectores $\overrightarrow{CB}=(-2, 2, 0)$ y $\overrightarrow{CD}=(-3, 3, 0)$ son proporcionales, por tanto, los puntos C, B y D están alineados, y están situados en ese orden.

La figura $ABCD$ es un triángulo de vértices A, C y D.

$$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=3\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=(3, 3, -3)$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CD}|}{2}=\frac{|(3, 3, -3)|}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Productos vectorial y mixto

105 Sea el plano π de ecuación $x - 5y + z + 3 =$ y sean las rectas r y s con ecuaciones:

$$r\colon x-3=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3} \qquad s\colon \frac{x+1}{2}=y=z+2$$

Determina:

a) Los puntos de intersección del plano π con cada una de las dos rectas.

b) El área y el perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenadas.

(Aragón. Junio 2004. Opción B. Cuestión 2)

a) $$\left.\begin{array}{r} x-3=\dfrac{y-2}{2} \\ x-3=\dfrac{z-4}{3} \\ x-5y+z+3=0 \end{array}\right\} \to P(3, 2, 4) \qquad \left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2}=y \\ y=z+2 \\ x-5y+z+3=0 \end{array}\right\} \to Q(-1, 0, -2)$$

b) $\overrightarrow{OP}=(-3, -2, -4)$ $\qquad \overrightarrow{OQ}=(1, 0, 2)$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(-4, -2, -6)$

$$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(-4, 2, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right|=2\sqrt{6}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right|}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$$

$$\text{Perímetro del triángulo}=\left|\overrightarrow{OP}\right|+\left|\overrightarrow{PQ}\right|+\left|\overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{29}+2\sqrt{14}+\sqrt{5}=15{,}1$$

106 Determina el valor de a para que los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 2, 1)$ y $C(1, 0, a)$ sean los tres vértices de un triángulo de área $\dfrac{7}{2}$.

$\overrightarrow{AB}=(0, 2, 0)$ $\qquad \overrightarrow{AC}=(0, 0, a-1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(2a-2)\vec{i}=(2a-2, 0, 0) \qquad \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|2a-2\right|$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\left|2a-2\right|}{2}=\frac{7}{2}\to\begin{cases} 2a-2=7 \\ 2a-2=-7 \end{cases}\to\begin{cases} a=\dfrac{9}{2} \\ a=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

107 Dadas las rectas $r_1\colon \left.\begin{array}{l} x+2y=2 \\ x=-2z \end{array}\right\}$ y $r_2\colon \left.\begin{array}{l} x=-y \\ y=z+1 \end{array}\right\}$, se pide:

a) Determinar las coordenadas del punto P en que se cortan y las ecuaciones del plano que las contiene.

b) Calcular la ecuación de la recta s que pasa por el punto $Q(2, 0, 1)$ y corta perpendicularmente a r_1.

c) Obtener las coordenadas del punto R, intersección de r_1 y s, y el área del triángulo de vértices P, Q y R.

(Cantabria. Junio 2002. Bloque 3. Opción A)

a) Calculamos el punto de intersección.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=2 \\ x=-2z \\ x=-y \\ y=z+1 \end{array}\right\} \rightarrow P(-2, 2, 1)$$

El plano que contiene a estas dos rectas es un plano que pasa por el punto $P(-2, 2, 1)$ y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$r_1\colon \left.\begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_1=(-2, 1, 1)$$

$$r_2\colon \left.\begin{array}{l} x=-1-\mu \\ y=1+\mu \\ z=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_2=(-1, 1, 1)$$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = y-z-1=0$$

b) Hallamos el plano perpendicular a r_1 que pasa por Q. Este plano tiene como vector normal el vector director de r_1.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1=(-2, 1, 1) \rightarrow \pi\colon -2x+y+z+D=0 \\ Q(2, 0, 1)\in\pi \rightarrow -2\cdot 2+0+1+D=0 \rightarrow D=3 \end{array}\right\} \rightarrow \pi\colon -2x+y+z+3=0$$

Calculamos el punto de corte de r_1 y π.

$$-2(-2\lambda)+1+\lambda+\lambda+3=0 \rightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \rightarrow T\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La recta que buscamos, s, pasa por los puntos Q y T.

$$\overrightarrow{QT}=\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right) \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x=2-2t \\ y=t \\ z=1-5t \end{array}\right\}$$

c) La intersección entre r_1 y s es el punto $T\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{PQ}=(4, -2, 0)$$

$$\overrightarrow{PT}=\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{10}{3}\vec{i}+\frac{20}{3}\vec{j}=\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 0\right)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}\right|=\frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PT}\right|=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

Productos vectorial y mixto

108 En el espacio se consideran:

La recta *r* intersección de dos planos de ecuaciones implícitas:

$$x+y-z=5 \qquad 2x+y-2z=2$$

Y la recta *s* que pasa por los puntos: $P(3, 10, 5)$ $Q(5, 12, 6)$

Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta *r* y de la recta *s*.

b) Calcular el punto *H*, intersección de *r* y *s* y el ángulo α que determinan *r* y *s*.

c) Calcular los puntos *M* y *N* de la recta *r* para los que el área de cada uno de los triángulos de vértices *PQM* y *PQN* es de 3 unidades.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 2)

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x=-3+\lambda \\ y=8 \\ z=\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(2, 2, 1) \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{l} x=3+2\mu \\ y=10+2\mu \\ z=5+\mu \end{array}\right\}$

b) Calculamos la intersección de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{r} -3+\lambda = 3+2\mu \\ 8 = 10+2\mu \\ \lambda = 5+\mu \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = -1 \end{cases} \rightarrow H(1, 8, 4)$$

El ángulo que determinan *r* y *s* es el que determinan sus vectores directores.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|(1, 0, 1)\cdot(2, 2, 1)|}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45°$$

c) Un punto genérico de la recta *r* es $M(-3+\lambda, 8, \lambda)$.

$\overrightarrow{PM}=(-6+\lambda, -2, -5+\lambda)$ $\qquad \overrightarrow{PQ}=(2, 2, 1)$

$$\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6+\lambda & -2 & -5+\lambda \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2\lambda+8)\vec{i}+(\lambda-4)\vec{j}+(2\lambda-8)\vec{k} = (-2\lambda+8, \lambda-4, 2\lambda-8)$$

$$|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PQ}| = 3(\lambda-4)$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{3|\lambda-4|}{2} = 3 \rightarrow \begin{cases} \lambda-4=2 \\ \lambda-4=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=6 \\ \lambda=2 \end{cases}$$

Los puntos que buscamos son $M(3, 8, 6)$ y $N(-1, 8, 2)$.

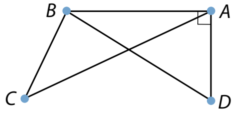
109 Dados los puntos: $A(1, 2, 3)$ $B(0, 2, 0)$ $C(1, 0, 1)$

a) Prueba que no están alineados y escribe la ecuación general del plano π determinado por estos tres puntos.

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que es la altura del triángulo *ABC* correspondiente al vértice *C*.

c) Calcula el área de *ABC*.

d) Calcula un punto *D* del plano π que has calculado en el apartado a) tal que, el triángulo *ABD* cumpla las dos condiciones siguientes:



- *ABD* es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice *A*.
- Área (*ABD*) = Área (*ABC*)

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 3. Opción B)

a) Los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -2, -2)$ no son proporcionales, por tanto, los tres puntos no están alineados.

El plano que los contiene pasa por el punto A y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6x - 2y + 2z + 4 = 0 \rightarrow \pi: 3x + y - z - 2 = 0$$

b) La altura que buscamos es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por el punto C.

Calculamos el plano que pasa por C y es perpendicular al segmento AB. Este plano tiene como vector normal al vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3) \rightarrow \pi: -x - 3z + D = 0 \\ C(1, 0, 1) \in \pi \rightarrow -1 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \pi: x + 3z - 4 = 0$$

Hallamos el punto de corte del plano con la recta que pasa por A y B.

$$r_{AB}: \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t \end{array}\right\} \rightarrow 1 - t + 3(3 - 3t) - 4 = 0 \rightarrow t = \frac{3}{5}$$

El punto de corte es $C'\left(\frac{2}{5}, 2, \frac{6}{5}\right)$

La altura que buscamos es la recta que pasa por C y C'.

$$\overrightarrow{CC'} = \left(-\frac{3}{5}, 2, \frac{1}{5}\right) \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 3\lambda \\ y = 10\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right\}$$

c) $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-6, -2, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{11}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{11}$$

d) La altura de los dos triángulos es $\overrightarrow{CC'} = \left|\left(-\frac{3}{5}, 2, \frac{1}{5}\right)\right| = \frac{\sqrt{110}}{5}$.

$\overrightarrow{CC'}$ es un vector perpendicular al lado AB. El punto D pertenece a una recta que pasa por A y tiene con vector director $\overrightarrow{CC'}$.

$$m: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 3\mu \\ y = 2 + 10\mu \\ z = 3 + \mu \end{array}\right\}$$

Por tanto, el punto D será de la forma $D(1 - 3\mu, 2 + 10\mu, 3 + \mu)$.

Calculamos el área del triángulo ABD.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (-3\mu, 10\mu, \mu)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ -3\mu & 10\mu & \mu \end{vmatrix} = 30\mu\vec{i} + 10\mu\vec{j} - 10\mu\vec{k} = (30\mu, 10\mu, -10\mu)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 10\mu\sqrt{11}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 5|\mu|\sqrt{11}$$

Como Área (ABD) = Área (ABC):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Área}\,(ABC) = \sqrt{11}\\ \text{Área}\,(ABD) = 5|\mu|\sqrt{11}\end{array}\right\} \to \sqrt{11} = 5|\mu|\sqrt{11} \to |\mu| = \frac{1}{5} \to \begin{cases}\mu = \dfrac{1}{5}\\ \mu = -\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Por tanto, hay dos puntos que cumplen las condiciones:

$$D_1\left(\frac{2}{5}, 4, \frac{16}{5}\right) \text{ y } D_2\left(\frac{8}{5}, 0, \frac{14}{5}\right)$$

110 **Se dan los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(1, 0, -1)$, y la recta:**

$$r: x - 5 = y = \frac{z+2}{-2}$$

Se pide que calcules razonadamente:

a) El punto C de r que equidista de A y B.

b) El área del triángulo ABC.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 2. Problema 1)

a) Un punto genérico de la recta r es $C(5 + \lambda, \lambda, -2 - 2\lambda)$.

$$\overrightarrow{AC} = (\lambda + 3, \lambda - 1, -2\lambda - 3) \qquad \overrightarrow{BC} = (\lambda + 4, \lambda, -2\lambda - 1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \to \sqrt{6\lambda^2 + 16\lambda + 19} = \sqrt{6\lambda^2 + 12\lambda + 17} \to \lambda = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el punto es $C\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

b) $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & -2\\ \dfrac{5}{2} & -\dfrac{3}{2} & -2\end{vmatrix} = -\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k} = (-1, -7, 4)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{66}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{66}}{2}$$

111 **De los planos paralelos al plano $x + y + z = 8$ encontrar el que determina con los ejes coordenados un triángulo de área $8\sqrt{3}$.**

(Baleares. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 2)

Los planos paralelos a $x + y + z = 8$ son de la forma $x + y + z = d$.

Calculamos los puntos de corte de un plano paralelo al dado con los ejes coordenados.

$$\text{Corte con eje } X: \left.\begin{array}{r}x + y + z = d\\ y = 0\\ z = 0\end{array}\right\} \to A(d, 0, 0)$$

$$\text{Corte con eje } Z: \left.\begin{array}{r} x+y+z=d \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0,0,d)$$

$$\text{Corte con eje } Y: \left.\begin{array}{r} x+y+z=d \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow B(0,d,0)$$

Calculamos el área del triángulo *ABC*.

$\overrightarrow{AB}=(-d,d,0)$ $\overrightarrow{AC}=(-d,0,d)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & d & 0 \\ -d & 0 & d \end{vmatrix}=d^2\vec{i}+d^2\vec{j}+d^2\vec{k}=(d^2,d^2,d^2) \qquad |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=d^2\sqrt{3}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{d^2\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}\rightarrow\begin{cases} d=4 \\ d=-4 \end{cases}$$

Los planos que buscamos son: $x+y+z=4$ y $x+y+z=-4$

112 **Dados el plano π: $3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:**

a) Halla la ecuación de la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por el punto *P*.

b) Halla el punto *Q* intersección de π y *r*.

c) Halla el punto *R* intersección de π con el eje *Y*.

d) Halla el área del triángulo *PQR*.

(Madrid. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 4)

a) La recta buscada pasa por el punto *P* y tiene como vector director el vector normal del plano.

$$r: \left.\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3-\lambda \end{array}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3-\lambda \\ 3x+2y-z+10=0 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow Q(-2,0,4)$$

c) Eje *Y*: $\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$

Calculamos la intersección de π con el eje *Y*.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z+10=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow R(0,-5,0)$$

d) $\overrightarrow{PQ}=(-3,-2,1)$ $\overrightarrow{PR}=(-1,-7,-3)$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & -7 & -3 \end{vmatrix}=13\vec{i}-10\vec{j}+19\vec{k}=(13,-10,19) \qquad |\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=3\sqrt{70}$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{3\sqrt{70}}{2}$$

Productos vectorial y mixto

113 **Calcula el volumen del paralelepípedo descrito por los vectores $\vec{u} = (3, 0, 4)$, $\vec{v} = (2, -3, 5)$ y $\vec{w} = (8, 5, 2)$.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 43$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = 43$$

114 **Los tres vectores siguientes describen un tetraedro, $\vec{u} = (1, 2, 9)$, $\vec{v} = (3, 6, -2)$ y $\vec{w} = (3, -2, 2)$. Halla su volumen.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -232$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \frac{232}{6} = \frac{116}{3}$$

115 **Calcula el volumen del paralelepípedo que definen los vectores $\vec{u} = (-3, 2, 1)$, $\vec{v} = (4, 5, -3)$ y $\vec{w} = (7, 3, -4)$. ¿Qué observas? Da una explicación.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = 0$$

Los tres vectores son linealmente dependientes, por tanto, los tres puntos son coplanarios y no describen ningún paralelepípedo.

116 **Halla el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (1, m - 2, -1)$, $\vec{v} = (2, 5, 0)$ y $\vec{w} = (1, m, 1)$ determinen un paralelepípedo de volumen 6.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & m-2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 14 - 4m$$

$$\text{Volumen} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \left|14 - 4m\right| = 6 \rightarrow \begin{cases} 14 - 4m = 6 \\ 14 - 4m = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 5 \end{cases}$$

117 **Los puntos $A(0, 0, -1)$, $B(1, 0, -2)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(4, 1, 5)$ son los vértices de un tetraedro. Calcula su volumen.**

$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (4, 1, 6)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 11$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{11}{6}$$

118 **El plano π: $3x + y + 2z - 18 = 0$ define con los planos coordenados un tetraedro con vértice en el origen de coordenadas. Calcula su volumen.**

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z - 18 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(6, 0, 0)$

Corte con eje Y: $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z - 18 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(0, 18, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z - 18 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 0, 9)$

Calculamos el volumen del tetraedro.

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 972$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right| = \left|\frac{972}{6}\right| = 162$$

119 **Determina el volumen del tetraedro de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-1, 0, -6)$ y $D(4, 1, 1)$.**

Con ese volumen, decide si los puntos son coplanarios o no.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -1)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -6)$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} = (3, -1, 1)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{El volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 0$$

Los cuatro puntos no determinan ningún volumen. Los puntos son coplanarios.

120 **Halla el área del triángulo que se forma al cortar el plano π: $2x - 3y + 5z - 30 = 0$ con los tres ejes coordenados. Calcula también el volumen que aparece al unir esos tres puntos con el origen de coordenadas, haciéndolo de dos maneras diferentes.**

Calculamos los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow P(15, 0, 0)$

Corte con eje Y: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q(0, -10, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow R(0, 0, 6)$

Calculamos el área del triángulo *PQR*.

$\overrightarrow{PQ} = (-15, -10, 0)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (-15, 0, 6)$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -15 & -10 & 0 \\ -15 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -60\vec{i} + 90\vec{j} - 150\vec{k} = (-60, 90, -150)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = 30\sqrt{38}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = 15\sqrt{38}$$

Calculamos el área del tetraedro *OPQR*.

- Primera forma.

  $\overrightarrow{OP} = (15, 0, 0)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{OQ} = (0, -10, 0)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{OR} = (0, 0, 6)$

  $$[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -900$$

  $$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\,[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \frac{900}{6} = 150$$

- Segunda forma.

  Podemos calcular el volumen del tetraedro utilizando la fórmula del volumen de una pirámide.

  Tomamos como base el triángulo inicial y la altura será la distancia del origen al plano determinado por ese triángulo.

  $$d(O, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 30|}{\sqrt{4 + 9 + 25}} = \frac{30}{\sqrt{38}}$$

  $$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \times \text{Área de la base} \times \text{Altura} = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{38} \cdot \frac{30}{\sqrt{38}} = 150$$

121 **Sean los puntos *A*(2, 3, 0) y *B*(−2, 1, 4).**

Determina:

a) La ecuación del plano π, mediatriz del segmento *AB*.

b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados.

c) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen.

Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

(Aragón. Junio 2004. Opción A. Cuestión 2)

a) El plano π pasa por el punto medio *M*, del segmento *AB*, y tiene por vector normal el vector director de la recta que pasa por *A* y *B*.

$$M\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(0, 2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4, -2, 4) \rightarrow \pi\colon -4x - 2y + 4z + D = 0 \\ M(0, 2, 2) \in \pi \rightarrow -4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = -4 \end{array}\right\}$$

El plano es $\pi\colon 2x + y - 2z + 2 = 0$

b) Calculamos los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

Corte con eje *X*: $\left.\begin{aligned} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow P(-1, 0, 0)$

Corte con eje *Y*: $\left.\begin{aligned} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow Q(0, -2, 0)$

Corte con eje *Z*: $\left.\begin{aligned} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow R(0, 0, 1)$

El volumen del tetraedro *OPQR*.

$$[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) La recta que buscamos pasa por el origen y tiene como vector director el vector normal del plano π.

$$s: \left.\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= t \\ z &= -2t \end{aligned}\right\}$$

122 Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento *PQ* por su punto medio.

a) Obtén la ecuación del plano π.

b) Calcula la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre el plano π.

c) Halla el volumen del tetraedro determinado por los puntos en que el plano π corta a los ejes de coordenadas y el origen de coordenadas.

(Madrid. Junio 2000. Opción B. Ejercicio 4)

a) El plano π pasa por el punto medio *M*, del segmento *PQ*, y tiene por vector normal el vector director de la recta que pasa por *P* y *Q*.

$$M\left(\frac{8-4}{2}, \frac{13-11}{2}, \frac{8-8}{2}\right) = M(2, 1, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{PQ} = (-12\ -24, -16) \rightarrow \pi: -12x - 24y - 16z + D = 0 \\ &M(2, 1, 0) \in \pi \rightarrow -12 \cdot 2 - 24 \cdot 1 - 16 \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = 48 \end{aligned}\right\}$$

El plano es $\pi: 3x + 6y + 4z - 12 = 0$

b) La proyección ortogonal del punto *O* sobre el plano π es el punto de corte de π con la recta perpendicular a π que pasa por *O*.

La recta perpendicular a π que pasa por *O* tiene como vector director el vector normal de π.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 3\lambda \\ y &= 6\lambda \\ z &= 4\lambda \end{aligned}\right\}$$

Calculamos la intersección entre π y r.

$$\left.\begin{array}{r} x = 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 4\lambda \\ 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \end{array}\right\} \to \lambda = \frac{12}{61}$$

La proyección ortogonal es $R\left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61}\right)$

c) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

Corte con eje X: $\left.\begin{array}{r} 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \to A(4, 0, 0)$

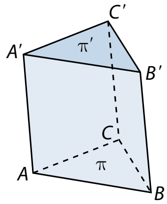
Corte con eje Y: $\left.\begin{array}{r} 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \to B(0, 2, 0)$

Corte con eje Z: $\left.\begin{array}{r} 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \to C(0, 0, 3)$

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right| = \frac{24}{6} = 4$$

123 **Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1, -1, 0)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -1)$ y $A'(1, -1, \alpha)$.**



Calcula:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

b) El valor de α para que el plano π', que contiene a los puntos A', B' y C', diste una unidad del plano π.

c) Para $\alpha = 1$, la ecuación del plano π' y el volumen del prisma.

(Asturias. Junio 2004. Bloque 3)

a) El plano π pasa por el punto A y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (0, 1, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = x + y + z = 0$$

b) $\left.\begin{array}{l} \pi' \text{ es paralelo al plano } \pi \to \pi': x + y + z + D = 0 \\ A'(1, -1, \alpha) \in \pi' \to 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot \alpha + D = 0 \to D = -\alpha \end{array}\right\}$

El plano es π': $x + y + z - \alpha = 0$

Como π y π' son paralelos tomamos $A(1, -1, 0) \in \pi$.

$$d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|1 - 1 + 0 - \alpha|}{\sqrt{1+1+1}} = 1 \to \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Existen dos puntos que cumplen la condición:

$A'\left(1, -1, \sqrt{3}\right)$ y $A'\left(1, -1, -\sqrt{3}\right)$

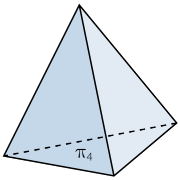
c) $\alpha = 1 \rightarrow \pi'\colon\ x + y + z - 1 = 0$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Volumen del prisma} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}]\right| = \frac{1}{2}$$

124 **Obtener las ecuaciones de las rectas obtenidas al cortar cada uno de los planos, $\pi_1\colon x + y + z = 3$, $\pi_2\colon x - z = 0$ y $\pi_3\colon y - z = 0$ con el plano $\pi_4\colon z = 0$.**

Esos cuatro planos limitan un tetraedro del que se obtendrá el área de la cara situada en el plano π_4 y la altura sobre esa cara, explicando el método utilizado.



(C. Valenciana. Junio 2001. Ejercicio B. Problema 4)

$$\pi_1 \cap \pi_4 = r_1\colon \left.\begin{matrix} x + y + z = 3 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r_1\colon \left.\begin{matrix} x = 3 - a \\ y = a \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\pi_2 \cap \pi_4 = r_2\colon \left.\begin{matrix} x - z = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r_2\colon \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = b \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\pi_3 \cap \pi_4 = r_3\colon \left.\begin{matrix} y - z = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r_3\colon \left.\begin{matrix} x = c \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$$

La base del tetraedro es un triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de estas rectas.

$$A = r_1 \cap r_2 \rightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 3 \\ z = 0 \\ x - z = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow A(0, 3, 0)$$

$$B = r_1 \cap r_3 \rightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 3 \\ z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(3, 0, 0)$$

$$C = r_2 \cap r_3 \rightarrow \left.\begin{matrix} x - z = 0 \\ z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow C(0, 0, 0)$$

El área de la base del tetraedro es el área del triángulo ABC.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9\vec{k} = (0, 0, -9) \qquad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 9$$

$$\text{Área de la base} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{9}{2}$$

El vértice del tetraedro es el punto D que es la intersección de los tres primeros planos.

$$D = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \to D(1, 1, 1)$$

Calculamos el volumen del tetraedro.

$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (0, -3, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (1, -2, 1)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Aplicamos la fórmula de volumen de una pirámide para calcular su altura.

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Área de la base} \times \text{Altura}}{3} \to \text{Altura} = \frac{3 \times \text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} = 1$$

125 **Consideremos un paralelepípedo de bases *ABCD* y *EFGH*, siendo:**

$A(3, 1, 0)$ $\qquad$ $B(0, 0, 1)$ $\qquad$ $C(-1, 3, 1)$ $\qquad$ $E(6, 3, 0)$

Halla el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la distancia entre las bases.

Calculamos el área del paralelogramo *ABCD*.

$\overrightarrow{BA} = (3, 1, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = (-1, 3, 0)$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} + 10\vec{k} = (3, 1, 10) \qquad \left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{110}$$

$$\text{Área de la base } ABCD = \left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{110}$$

Calculamos D, el cuarto vértice de la base *ABCD*.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \to (-3, -1, 1) = (-1 - d_1, 3 - d_2, 1 - d_3) \to D(2, 4, 0)$$

Calculamos el volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = (-1, 3, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE} = (3, 2, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -11$$

$$\text{Volumen del paralelépipedo} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]\right| = 11$$

La distancia entre las bases es la altura del paralelepípedo.

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{Altura} \to \text{Altura} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{11}{\sqrt{110}} = \frac{\sqrt{110}}{10}$$

126 **El plano de ecuación general $x+y+z=10$ corta a las rectas:**

$$r_1\colon x=y=1 \qquad r_2\colon y=z=2 \qquad r_3\colon x=z=3$$

en los puntos A, B y C, respectivamente. Se pide:

a) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y $D(1, 2, 3)$.

b) Determina la distancia del vértice D hasta la cara opuesta del tetraedro.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 4. Pregunta A)

a) Calculamos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ x=y=1 \end{array}\right\} \rightarrow A(1, 1, 8) \qquad \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y=z=2 \end{array}\right\} \rightarrow B(6, 2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ x=z=3 \end{array}\right\} \rightarrow C(3, 4, 3)$$

Calculamos el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}=(5, 1, -6) \qquad \overrightarrow{AC}=(2, 3, -5) \qquad \overrightarrow{AD}=(0, 1, -5)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}=-52$$

$$\text{Volumen del tetraedro}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|=\frac{52}{6}=\frac{26}{3}$$

b) La cara opuesta es el plano $x+y+z=10$.

$$d(D, \pi)=\frac{|1+2+3-10|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

127 **Considera los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 1)$ y $D(1, 1, 2)$, y calcula:**

a) El volumen del tetraedro que determinan.

b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto D y es paralelo al que contiene a los puntos A, B y C.

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 4. Pregunta B)

a) El tetraedro está determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}=(-2, 2, 0) \qquad \overrightarrow{AC}=(0, 2, 1) \qquad \overrightarrow{AD}=(-1, 1, 2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-8$$

$$\text{Volumen del tetraedro}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

b) El plano pasa por el punto D y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB}=(-2, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AC}=(0, 2, 1)$.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2x+2y-4z+4=0 \rightarrow \pi\colon\ x+y-2z+2=0$$

128 **Halla todos los puntos tales que unidos con los puntos $A(3, 5, -1)$, $B(5, 9, -5)$ y $C(6, 2, 2)$, forman un tetraedro de 15 unidades de volumen.**

Llamamos $P(x, y, z)$ a un punto genérico y calculamos el volumen del tetraedro generado por los vectores $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -3, 3)$ y $\overrightarrow{AP} = (x-3, y-5, z+1)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \\ x-3 & y-5 & z+1 \end{vmatrix} = -18y - 18z + 72$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]\right| = \frac{|-18y-18z+72|}{6} = 15$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3y - 3z + 12 = 15 \\ -3y - 3z + 12 = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición son dos planos.

129 **Encuentra los puntos de la recta:**

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

que equidistan de los planos: $x + y - z + 1 = 0$ y $x - y + z + 2 = 0$.

(Baleares. Septiembre 2002. Opción B. Cuestión 4)

Un punto genérico de la recta es $P(-1 + 2\lambda, -3\lambda, 2 + 2\lambda)$.

Buscamos los puntos de la recta que equidistan de los dos planos.

$$\frac{|-1 + 2\lambda - 3\lambda - 2 - 2\lambda + 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-1 + 2\lambda + 3\lambda + 2 + 2\lambda + 2|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$|-3\lambda - 2| = |7\lambda + 3| \rightarrow \begin{cases} -3\lambda - 2 = 7\lambda + 3 \\ -3\lambda - 2 = -7\lambda - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Los puntos que equidistan de los dos planos son: $P_1\left(-2, \frac{3}{2}, 1\right)$ y $P_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

130 **Halla la ecuación general del plano que equidista de los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(0, 3, -1)$ y es paralelo al plano π: $3x - y + z + 1 = 0$.**

(Navarra. Septiembre 2006. Grupo 1. Opción A)

El plano π' que buscamos es paralelo a $\pi \rightarrow \pi'$: $3x - y + z + D = 0$.

$$d(P, \pi') = d(Q, \pi') \rightarrow \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 3 + D|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{|3 \cdot 0 - 3 - 1 + D|}{\sqrt{9+1+1}}$$

$$|D + 8| = |D - 4| \rightarrow D = -2$$

El plano es π': $3x - y + z - 2 = 0$

131 Dados los puntos: $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.

Se pide:

a) Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A, B y C, indicando qué figura forman.

b) Halla las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por esos puntos.

(Aragón. Junio 2001. Opción B. Cuestión 2)

a) Tomamos un punto $P(x, y, z)$ que equidista de A, B y C.

$d(A, P) = d(B, P) = d(C, P)$

$d(A, P) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$

$d(B, P) = x^2 + (y+1)^2 + z^2$

$d(C, P) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$

- $d(A, P) = d(B, P)$

  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2$

  $x + y = 0$

  Es la ecuación de un plano.

- $d(B, P) = d(C, P)$

  $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$

  $y + 3z = 4$

  Es la ecuación de un plano.

  El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B y C es la recta de intersección de los dos planos.

  $$r\colon \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y + 3z = 4 \end{array}\right\}$$

b) El centro de la circunferencia es equidistante de los tres puntos, es decir, pertenece a la recta r. De la misma manera, el centro de la circunferencia y los puntos A, B y C tienen que pertenecer al mismo plano. Por tanto, el centro será la intersección de la recta con el plano.

El plano pasa por $A(1, 0, 0)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$.

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x + 3y - z + 3 = 0 \rightarrow \pi\colon 3x - 3y + z - 3 = 0$$

Calculamos la intersección entre la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y + 3z - 4 = 0 \\ 3x - 3y + z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{19} \\ y = -\dfrac{5}{19} \\ z = \dfrac{27}{19} \end{cases}$$

El centro de la circunferencia es $\left(\dfrac{5}{19}, -\dfrac{5}{19}, \dfrac{27}{19}\right)$.

132 **Determina la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, 0, 1)$. Calcula también su centro y su radio.**

La ecuación de la esfera es de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Como pasa por los puntos A, B, C y D:

$$\left.\begin{array}{r}(-a)^2+(-b)^2+(-c)^2=r^2\\(1-a)^2+(-b)^2+(-c)^2=r^2\\(-a)^2+(1-b)^2+(-c)^2=r^2\\(-a)^2+(-b)^2+(1-c)^2=r^2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2+b^2+c^2=r^2\\a^2+b^2+c^2=r^2+2a-1\\a^2+b^2+c^2=r^2+2b-1\\a^2+b^2+c^2=r^2+2c-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

La ecuación de la esfera es: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 **a) Define e interpreta el producto vectorial de vectores.**

b) Calcula los vectores unitarios perpendiculares a $\vec{u}=(1,-2,2)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$.

c) Halla la distancia al origen del plano determinado por el punto $(1, 1, 1)$ y los vectores del apartado anterior.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 2. Opción 1)

a) El producto vectorial de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector $\vec{u}\times\vec{v}$ que tiene los siguientes elementos:

- Módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \operatorname{sen}\alpha$, siendo α el menor ángulo que forman los vectores.
- Dirección: la perpendicular de cualquier plano generado por ambos vectores.
- Sentido: el del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

La interpretación geométrica del módulo del producto vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo que definen ambos vectores.

b) Hallamos los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&2\\1&0&1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=(-2,1,2)\qquad|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{4+1+4}=3$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&1\\1&-2&2\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}=(2,-1,-2)\qquad|\vec{v}\times\vec{u}|=\sqrt{4+1+4}=3$$

Hallamos los vectores perpendiculares unitarios.

$$\vec{w}_1=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\qquad\vec{w}_2=\frac{\vec{v}\times\vec{u}}{|\vec{v}\times\vec{u}|}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

c) Calculamos el plano determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\left.\begin{array}{r} P(1,1,1) \in \pi \rightarrow -2\cdot 1 + 1 + 2\cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = -1 \\ \vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = (-2,1,2) \rightarrow \pi\colon -2x + y + 2z + D = 0 \end{array}\right\} \pi\colon -2x + y + 2z - 1 = 0$$

Calculamos la a distancia del origen de coordenadas al plano.

$$d(O,\pi) = \frac{|-2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}$$

2 **Halla el valor de a de forma que $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 6, a)$ sean los vértices de un triángulo de área $\frac{3}{2}$.**

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,0) \qquad \overrightarrow{AC} = (0,6,a-1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)\vec{i} = (a-1,0,0)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(a-1)^2} = a-1$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{a-1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow a = 4$$

3 **Se consideran la recta $r\colon \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ y el punto $P(1, 2, -1)$.**

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes cartesianos.

(Cantabria. Junio 2003. Bloque 3. Opción A)

a) El plano que buscamos pasa por el punto P y tiene como vector normal al vector director de la recta r.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (1,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_r = (1,1,2) \rightarrow \pi\colon x + y + 2z + D = 0 \\ P(1,2,-1) \in \pi \rightarrow 1 + 2 + 2\cdot(-1) + D = 0 \rightarrow D = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \pi\colon x + y + 2z - 1 = 0$$

b) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

$$\text{Corte con eje } X\colon \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ z = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(1,0,0)$$

$$\text{Corte con eje } Y\colon \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B(0,1,0)$$

$$\text{Corte con eje } Z\colon \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = \left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

4 Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, -2, 0)$ y $D(0, 0, 1)$, se pide:

a) Ecuación de la recta que contiene a B y C.

b) Área del triángulo ABC.

c) Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

(La Rioja. Septiembre 2004. Propuesta A. Ejercicio 5)

a) $\overrightarrow{BC} = (1, -2, 0) \qquad B = (-1, 0, 0)$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1, -4, 0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{k} = (0, 0, 6) \qquad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 6$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

c) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1, -4, 0) \qquad \overrightarrow{AD} = (-1, -2, 1)$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{\left|[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}]\right|}{6} = \frac{|6|}{6} = 1$$

5 Sea r la recta que pasa por $A(0, 0, 0)$ y $B(80, 10, 0)$ y sea s la recta que pasa por $C(0, 0, 10)$ y $D(m, 10, 10)$. Obtener la distancia entre las rectas r y s y justificar, geométricamente, que la distancia es independiente del valor de m.

(C. Valenciana. Septiembre 2001. Ejercicio A. Problema 1)

$\vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (80, 10, 0)$ $\quad\quad \vec{v}_s = \overrightarrow{CD} = (m, 10, 0)$ $\quad\quad \overrightarrow{AC} = (0, 10, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 80 & 10 & 0 \\ m & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 8.000 - 100m$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 80 & 10 & 0 \\ m & 10 & 0 \end{vmatrix} = (800 - 10m)\vec{k} = (0, 0, 800 - 10m)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}| = 800 - 10m$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}]|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|} = \frac{|8.000 - 100m|}{800 - 10m} = 10$$

La distancia es independiente del valor de m porque la recta r está contenida en el plano $z = 0$, y las rectas de dirección $\overrightarrow{CD}$ lo están en el plano $z = 10$.

6 **a) Calcúlense los valores de a para los cuales las rectas:**

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{array}\right\}$$

son perpendiculares.

b) Para $a = 1$, calcúlese la recta que pasa por (1, 1, 1) y se apoya en r y s.

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba A. Problema 1)

a) Hallamos los vectores directores de cada recta.

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & a & -6a \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (9a)\vec{i} + (-9 + 6a)\vec{j} + (3 + a)\vec{k} = (9a, -9 + 6a, 3 + a)$$

$$\vec{u}_s = (-1, 1, a)$$

Las rectas son perpendiculares si lo son sus vectores directores.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = (9a, -9 + 6a, 3 + a) \cdot (-1, 1, a) = a^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

b) Si $a = 1$:

$$r: \left.\begin{array}{r} 3x + y - 6z + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 9\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right\}$$

La recta que nos piden está determinada por dos planos π_1 y π_2.

Hallamos el plano π_1, que contiene a la recta r y al punto $P(1, 1, 1)$.

$R(-1, 2, 0) \in r \rightarrow \overrightarrow{PR} = (-2, 1, -1)$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z \\ 9 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x + y + 3z - 3 = 0 \rightarrow \pi_1: x - y - 3z + 3 = 0$$

Hallamos π_2, que contiene a la recta s y al punto $P(1, 1, 1)$.

$S(-1, 3, 1) \in s \rightarrow \overrightarrow{PS} = (-2, 2, 0)$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 2y + 4 = 0 \rightarrow \pi_2: x + y - 2 = 0$$

La recta que pasa por P y se apoya en r y s es:

$$m: \left.\begin{array}{r} x - y - 3z + 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

7 a) **¿Cuál es la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 siguientes?**

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2z \end{array}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\}$$

b) **¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta r_1 y que además contenga la recta r_2? Justifica tu respuesta.**

c) **Calcula la ecuación general del plano π que contiene a las dos rectas r_1 y r_2.**

d) **Calcula la ecuación paramétrica de una recta r_3 perpendicular al plano π y tal que:**

distancia (r_1, r_3) = distancia $(r_2, r_3) = \sqrt{105}$

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 3. Opción A)

a) Escribimos las rectas en forma paramétrica.

$$r_1: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

$$r_2: \left.\begin{array}{l} x = \mu \\ y = -2\mu \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

Sus vectores directores no son proporcionales y las dos rectas pasan por el origen de coordenadas, por tanto, se cortan.

b) Existe ese plano si r_1 y r_2 son perpendiculares.

$\vec{u}_1 = (0, 2, 1)$

$\vec{v}_2 = (1, -2, 1)$,

$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = (0, 2, 1) \cdot (1, -2, 1) = -3 \neq 0$

No es posible encontrar un plano que cumpla las condiciones.

c) El plano que buscamos pasa por el punto $A(0, 0, 0) \in r_1$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r_1 y r_2.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4x + y - 2z = 0$$

d) r_3 tiene como vector director el vector normal del plano. Además, como r_1 y r_2 están contenidas en el plano, r_3 pasa por un punto del plano π cuya distancia

Tomamos un punto $P(x, y, z)$ que cumpla estas condiciones.

$$\left.\begin{array}{r} 4x + y - 2z = 0 \\ d((P), r_1) = \sqrt{105} \\ d((P), r_2) = \sqrt{105} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + y - 2z = 0 \\ \dfrac{|(-y + 2z, x, -2x)|}{\sqrt{5}} = \sqrt{105} \\ \dfrac{|(-y - 2z, x - z, 2x + y)|}{\sqrt{6}} = \sqrt{105} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + y - 2z = 0 \\ \sqrt{(-y + 2z)^2 + x^2 + 4x^2} = \sqrt{525} \\ \sqrt{(-y - 2z)^2 + (x - z)^2 + (2x + y)^2} = \sqrt{630} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x = -y + 2z \\ 16x^2 + x^2 + 4x^2 = 525 \\ (-y - 2z)^2 + (x - z)^2 + (2x + y)^2 = 630 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x = -y + 2z \\ x^2 = 25 \\ (-y - 2z)^2 + (x - z)^2 + (2x + y)^2 = 630 \end{array}\right\} \rightarrow x = \pm 5$$

- Si $x = 5$:

  $$\left.\begin{array}{r} y = 2z - 20 \\ (-2z + 20 - 2z)^2 + (5 - z)^2 + (10 + 2z - 20)^2 = 630 \end{array}\right\}$$

  $$21z^2 - 210z + 525 = 630 \rightarrow z = 5 \pm \sqrt{30} \rightarrow y = -10 \pm 2\sqrt{30}$$

  Obtenemos dos puntos:

  $$\left(5, -10 + 2\sqrt{30}, 5 + \sqrt{30}\right) \text{ y } \left(5, -10 - 2\sqrt{30}, 5 - \sqrt{30}\right)$$

- Si $x = -5$:

  $$\left.\begin{array}{l} y = 2z + 20 \\ (-2z - 20 - 2z)^2 + (-5 - z)^2 + (-10 + 2z + 20)^2 = 630 \end{array}\right\}$$

  $$21z^2 + 210z + 525 = 630 \rightarrow z = -5 \pm \sqrt{30} \rightarrow y = 10 \pm 2\sqrt{30}$$

  Obtenemos otros dos puntos:

  $$\left(-5, 10 + 2\sqrt{30}, -5 + \sqrt{30}\right) \text{ y } \left(-5, 10 - 2\sqrt{30}, -5 - \sqrt{30}\right)$$

  Obtenemos cuatro rectas que cumplen las condiciones del problema.

  $$r_3\!: \left.\begin{array}{l} x = 5 + 4\lambda \\ y = -10 + 2\sqrt{30} + \lambda \\ z = 5 + \sqrt{30} - 2\lambda \end{array}\right\} \qquad r_3\!: \left.\begin{array}{l} x = 5 + 4\lambda \\ y = -10 - 2\sqrt{30} + \lambda \\ z = 5 - \sqrt{30} - 2\lambda \end{array}\right\}$$

  $$r_3\!: \left.\begin{array}{l} x = -5 + 4\lambda \\ y = 10 + 2\sqrt{30} + \lambda \\ z = -5 + \sqrt{30} - 2\lambda \end{array}\right\} \qquad r_3\!: \left.\begin{array}{l} x = -5 + 4\lambda \\ y = 10 - 2\sqrt{30} + \lambda \\ z = -5 - \sqrt{30} - 2\lambda \end{array}\right\}$$